BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur le nombre fondamental de H. Poincaré dans la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LE NOMBRE FONDAMENTAL DE H. POINCARÉ DANS LA DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES DE TROISIÈME ESPÈCE EN ÉLÉMENTS SIMPLES;

PAR M. PAUL APPELL.

H. Poincaré dans le paragraphe VI de son Mémoire *Sur les fonctions zétafuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V, 1880, et *Œuvres*, t. II, p. 402) a défini un nombre *fondamental* pour la décomposition en éléments simples de fonctions d'une certaine catégorie C. Ce nombre est la plus petite valeur de l'entier m pour laquelle il existe des fonctions de C décomposables en $m+1$ éléments simples et à l'aide desquelles toutes les autres fonctions de C peuvent s'exprimer linéairement. Dans les décompositions connues, il indique, pour les fractions rationnelles $m=0$, pour les fonctions doublement périodiques de première espèce $m=1$, pour les fonctions rationnelles d'un point analytique x, y, défini par une relation algébrique $F(x, y)=0$ de genre p, $m=p$.

D'autre part Hermite dans son Mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 85, 86, 89, 90, 93, 94, et *Œuvres*, t, 3, p. 266) a donné (*Œuvres*, t. 3, p. 329, en note) la classification des fonctions doublement périodiques en première, seconde et troisième espèce, avec une formule de décomposition en éléments simples pour les fonctions de seconde espèce. Pour les fonctions de troisième espèce l'élément simple est une fonction de deux variables z et u définie par la série suivante, où n est un entier

positif

$$\chi_n(z, u) = \frac{\pi}{2K} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{\frac{n\nu\pi u i}{K}} q^{n\nu(\nu-1)} \cot \frac{\pi}{2K}(z - u - 2\nu i K'),$$

les périodes étant désignées, comme dans Jacobi et Hermite, par $2K$ et $2iK'$ et $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, II, III, 1884, 1885, 1886, et *Acta mathematica*, t. 42, 1920).

On peut toujours ramener une fonction de troisième espèce à vérifier deux relations de la forme

$$(1) \qquad F(x + 2K) = F(x), \qquad F(x + 2iK') = e^{-\frac{s\pi x}{K}} F(x);$$

où s est entier. La catégorie C est alors celle des fonctions méromorphes vérifiant les relations (1). Si s est positif $s = n$ la fonction $F(x)$ a, dans un parallélogramme des périodes, n zéros de plus que d'infinis; en particulier, elle peut avoir n zéros et pas d'infinis; alors en appelant $a, b, \ldots, l$, les pôles supposés tous simples situés dans un parallélogramme des périodes et A, B, ..., L, les résidus correspondants, on a

$$F(x) = -A\chi_n(a, x) - B\chi_n(b, x) - \ldots - L\chi_n(l, x) + G(x),$$

$G(x)$ étant une fonction entière qui vérifie les relations (1) où $s = n$ et qui par suite est de la forme

$$G(x) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \lambda_k g_k^{(n)}(k),$$

les $\lambda_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ étant des constantes arbitraires.

Dans ce cas, les résidus sont indépendants des pôles et le nombre m de Poincaré est nul, car $\chi_n(a, x)$ est une fonction de x vérifiant, quel que soit a, les relations données.

Si s est négatif, $s = -\mu$, on a de même

$$F(x) = A\chi_\mu(x, a) + B\chi_\mu(x, b) + \ldots + L\chi_\mu(x, b),$$

les résidus étant liés aux pôles par μ relations

$$A g_k^{(\mu)}(a) + B g_k^{(\mu)}(b) + \ldots + L g_k^{(\mu)}(l) = 0 \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (\mu - 1)].$$

Dans ce dernier cas le nombre m de Poincaré est μ.

Pour le démontrer remarquons qu'une fonction de troisième espèce peut s'écrire

$$F(x) = Ae^{\lambda x}\frac{H(x-b_1)\,H(x-b_2)\ldots H(x-b_p)}{H(x-a_1)\,H(x-a_2)\ldots H(x-a_q)},$$

A désigne une constante, le nombre des zéros est p, celui des infinis q et l'on a

$$s = p - q = -\mu.$$

D'après les relations fondamentales,

$$H(x+2K) = -H(x), \qquad H(x+2iK') = -H(x)e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}$$

on a en écrivant

$$F(x+2K) = F(x), \qquad F(x+2iK') = e^{-\frac{s\pi i}{K}}F(x),$$

$$e^{2\lambda K}(-1)^s = 1, \qquad e^{2\lambda iK'}(-1)^s e^{\frac{\pi i}{K}(\Sigma b - \Sigma a) + s\frac{\pi K'}{K}} = 1;$$

comme

$$-1 = e^{(2k+1)\pi i},$$

k étant un entier quelconque, on a

$$2\lambda K = (2k+1)s\pi i,$$
$$2\lambda iK' = (2h+1)s\pi i - \frac{\pi i}{K}(\Sigma b - \Sigma a) - s\pi\frac{K'}{K};$$

d'où, en éliminant $\frac{\lambda}{\pi}$,

$$iK'(2k+1)s = (2h+1)sK - (\Sigma b - \Sigma a) + siK',$$

ou encore

$$\Sigma b - \Sigma a = (2h+1)sK - 2ksiK',$$

h, k et s étant des entiers, $s = p - q = -\mu$, h et k quelconques.

S'il n'y a pas de zéro, mais seulement p pôles leur somme Σa est connue

$$\Sigma a = (2h+1)\mu K + 2k\mu iK'. \tag{3}$$

Appelons alors $F(x, \alpha)$ une fonction F avec un seul zéro b et $(\mu+1)$ infinis simples $\alpha, a_1, a_2, \ldots, a_p$, le résidu relatif à α étant 1 et les autres infinis $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ne vérifiant pas la relation (3), on aura

$$b = \alpha + a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu + 2k\mu iK' - (2h+1)\mu K,$$

où

$$b \equiv \alpha + a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu + \mu K,$$

le signe $\equiv$ indiquant une égalité qui a lieu, à des multiples des périodes $2K$ et $2iK'$ près. On a évidemment

$$(4)\quad F(x, \alpha) = \chi_\mu(x, \alpha) + A_1\chi_\mu(x, \alpha_1) + A_2\chi_\mu(x, \alpha_2) + \ldots + A_\mu\chi_\mu(x, \alpha_\mu).$$

Soit alors une fonction F admettant les infinis simples $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ avec les résidus A, B, ..., L, on a

$$F(x) = AF(x, \alpha) + BF(x, \beta) + \ldots - LF(x, \lambda),$$

car la différence

$$\Delta(x) = F(x) - AF(x, \alpha) - BF(x, \beta) - \ldots + LF(x, \lambda)$$

admettant les seuls infinis $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ qui ne vérifient pas (3) est identiquement nulle.

D'après (4) le nombre m de Poincaré est alors

$$m = \mu;$$

on arriverait également à cette conclusion que la différence $\Delta(x)$ est nulle identiquement en la décomposant en éléments simples,

$$\Delta(x) = A'_1\chi_\mu(x, a_1) + A'_2\chi_\mu(x, a_2) + \ldots + A'_\mu\chi_\mu(x, a_\mu)$$

et appliquant les formules qui donnent les relations entre les résidus $A'_1, A'_2, \ldots, A'_\mu$ et les pôles $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$,

$$A'_1 g_k^{(\mu)}(a_1) + A'_2 g_k^{(\mu)}(a_2) + \ldots + A'_p g_k^{(\mu)}(a_p) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Ces μ relations montrent que les résidus $A'_1, A'_2, \ldots, A'_\mu$ sont tous nuls car le déterminant des coefficients

$$g_k^{(\mu)}(a_1), \quad g_k^{(\mu)}(a_2), \quad \ldots, \quad g_k^{(\mu)}(a_p)$$

n'est pas nul, les a_i ne vérifiant pas la relation (3). Ce déterminant qui rentre dans une catégorie de déterminants considérés par Hermite (*Crelle*, t. 84, 1877, p. 343, et *Œuvres*, t. III, p. 420) est nul seulement si deux a_i sont égaux ou si les a_i vérifient la relation (3).

Un raisonnement analogue s'applique aux fonctions à multiplicateurs en prenant pour élément simple une intégrale normale de deuxième espèce de fonction à multiplicateurs dans mon Mémoire du Tome 13 des *Acta*.