

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JULIA

**Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite  
définie par une relation entière  $G(x, y) = 0$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 54 (1926), p. 26-37

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1926\\_\\_54\\_\\_26\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__26_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1926, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LE DOMAINE D'EXISTENCE D'UNE FONCTION IMPLICITE  
DÉFINIE PAR UNE RELATION ENTIÈRE  $G(x, y) = 0$ ;

PAR M. GASTON JULIA.

1. Le but du présent Mémoire est de donner quelques indications sur les bornes du domaine d'existence d'une fonction  $y(x)$  définie par une relation irréductible  $G(x, y) = 0$ , où  $G$  est une fonction *entière* des deux variables  $x$  et  $y$ . Lorsque  $G$  est simplement linéaire en  $x$ , on sait par le théorème classique de M. Picard que la fonction  $y(x)$ , alors fonction inverse d'une fonction méromorphe, est définie dans tout le plan  $x$ , sauf en deux points au plus : la surface de Riemann  $R_x$ , sur laquelle  $y(x)$  est uniforme, laisse donc au plus deux points du plan  $x$  à découvert et ces deux points sont d'ailleurs des points frontière de  $R_x$ . Relativement au cas où  $G$  est un polynome en  $x$ , dont les coefficients sont des fonctions entières de  $y$ , M. Remoundos a montré que la surface de Riemann  $R_x$  ne peut laisser à découvert qu'un *nombre fini* de points  $x$ , nombre dépendant du degré de  $G$  par rapport à  $x$ .

Envisageant ici le cas où  $G$  est entière à la fois par rapport à  $x$  et à  $y$ , on verra que l'ensemble  $E$  des points  $x$  pour lesquels  $y$  n'est pas défini, c'est-à-dire pour lesquels l'équation  $G(x, y) = 0$ , n'admet pas de racine en  $y$ , peut être un ensemble infini dénombrable, mais *ne peut certainement pas comporter un continu*. Pour abréger, on appellera points exceptionnels les points  $x$  de l'ensemble  $E$ .

Ces points, que la surface de Riemann  $R_x$  laisse à découvert, sont toujours des points frontière de cette surface, et lorsque  $x$  tend vers un de ces points en restant intérieur à  $R_x$ ,  $y(x)$  tend vers l'infini.

Dans le premier paragraphe on montre que  $E$  peut contenir une infinité dénombrable de points; dans le deuxième, on établit que  $y(x)$  tend vers l'infini lorsque  $x$  tend vers un point frontière quelconque de  $R_x$ , en restant intérieur à  $R_x$ . Et à l'aide de cette propriété on établit aisément (troisième paragraphe) que la surface  $R_x$

ne peut laisser à découvert un continu du plan  $x$ , d'où suit la propriété de E signalée plus haut. Resterait à voir si cet ensemble E, sans être continu, peut avoir la puissance du continu.

Dans un dernier paragraphe, on donnera quelques indications sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  des points  $x$  pour lesquels  $y(x)$  n'a qu'un nombre fini de déterminations. Et l'on montrera sur un exemple que cet ensemble peut être dénombrable et dense dans tout le plan.

1. — L'ENSEMBLE E PEUT ÊTRE UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE QUELCONQUE AYANT L'INFINI POUR SEUL POINT LIMITE.

2. On va le prouver en construisant une fonction entière  $G(x, y)$ , qui pour  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, \dots$  se réduira à une fonction entière en  $y$  du type exponentiel  $\Phi_i(y) = e^{\varphi_i(y)}$  où  $\varphi_i$  est fonction entière de  $y$ . L'ensemble E des  $x_i$  sera un ensemble dénombrable ayant l'infini pour seul point limite, et par ailleurs quelconque. On assujettira en outre  $G(x, y)$  à cette autre condition : pour  $x = x_0$ ,  $G(x_0, y)$  sera une fonction entière de  $y$ ,  $\Phi_0(y)$ , et l'on supposera que  $\Phi_0(y)$  a une infinité de zéros. De cette façon, il sera clair que l'équation  $G(x, y) = 0$  déterminera une fonction  $y(x)$ , qui aura une infinité de déterminations pour  $x = x_0$ , et par conséquent, en général, tandis qu'elle n'a aucune valeur finie pour  $x$  appartenant à l'ensemble E.

3. Soit  $F(x)$  un produit canonique de facteurs primaires admettant pour zéros simples tous les points de E et en outre le point  $x_0$ . On pourra supposer que les points de E sont rangés dans un ordre tel que  $|x_n|$  croît et devient infini avec  $n$ .

La fonction

$$F_i(x) = \frac{1}{F'(x_i)} \frac{F(x)}{x - x_i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

admet les points  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots$ , pour zéros simples et en outre

$$F_i(x_i) = 1.$$

Formons la série

$$(1) \quad G(x, y) = F_0(x) \Phi_0(y) + \sum_1^{\infty} \frac{F_i(x) \Phi_i(y)}{\Lambda_i},$$

les  $A_i$  étant des constantes que l'on va choisir convenablement.

En supposant qu'elle converge uniformément dans le domaine

$$|x| \leq r, \quad |y| \leq R$$

[quels que soient  $r$  et  $R$ ] elle définira une fonction entière  $G(x, y)$ , qui, pour  $x = x_0$ , se réduira bien à  $\Phi_0(y)$  et pour  $x = x_i$  se réduira à  $\frac{\Phi_i(y)}{A_i}$ , c'est-à-dire à une fonction entière en  $y$ , de type exponentiel, jamais nulle;  $G(x, y)$  aura les propriétés réclamées.

4. On va choisir les  $A_i$  de manière à assurer la convergence de

$$(2) \quad \sum_1^{\infty} \frac{F_i(x) \Phi_i(y)}{A_i}.$$

Désignons par  $M(r)$  le maximum du module de  $|F(x)|$  sur le cercle  $|x| = r$ . Il est clair que,  $r$  étant donné, on aura pour  $i \geq i_0$ , dès que  $|x_i|$  sera  $> r + \delta$ ,

$$|F_i(x)| \leq \frac{M(r)}{|F'(x_i)| \delta} \quad \text{lorsque} \quad |x| \leq r.$$

Soit d'autre part  $\mu_i(R)$  le maximum du module de

$$\Phi_i(y) \quad (i = 1, \dots, \infty)$$

sur le cercle  $|y| = R$ .

On va choisir les  $|A_i|$  de façon à assurer la convergence de

$$(3) \quad \sum_1^{\infty} \frac{|F_i(x)| |\Phi_i(y)|}{|A_i|}$$

quels que soient  $x$  et  $y$ .

Donnons-nous  $r$  et  $R$ , d'ailleurs quelconques positifs, et considérons seulement les termes de (2) pour lesquels  $|x_i| \geq r + \delta$ ; (3) est alors majorée par la série

$$(4) \quad \sum_1^{\infty} \frac{M(r) \mu_i(R)}{|A_i| |F'(x_i)| \delta},$$

si donc (4) converge, quels que soient  $r$  et  $R$ , on sera sûr que (2) converge uniformément quels que soient  $r$  et  $R$ .

Il suffit pour cela de choisir les  $A_i F'(x_i) = \alpha_i$  de manière que

la série

$$(5) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\mu_i(R)}{|\alpha_i|}$$

converge quel que soit R.

Or, pour un indice  $i$  déterminé,  $\mu_i(R)$  croît avec R. Choisissons une suite de rayons  $R_1 < R_2 < R_3 < \dots < R_n < \dots$  croissant indéfiniment et tendant vers l'infini avec l'indice  $n$ . On pourra toujours choisir la suite des nombres  $\alpha_i$  de manière que la série

$$(6) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\mu_i(R_i)}{|\alpha_i|}$$

soit convergente. Il en résulte que la série (5) est convergente quel que soit R, puisque, à partir d'un certain rang  $i$ , on a  $R < R_i$  et par suite  $\mu_i(R) < \mu_i(R_i)$ . Donc la série (4) convergera, par suite (2) convergera uniformément et  $G(x, y)$  aura bien les propriétés requises, sous la seule condition que la série

$$(6) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\mu_i(R_i)}{|A_i F'(x_i)|}$$

soit convergente. L'ensemble E était d'ailleurs quelconque et la seule condition à laquelle soient assujettis les  $|A_i|$  est une condition de croissance.

## II. — ALLURE DE $y(x)$ AUX POINTS FRONTIÈRE DE $R_x$ .

5. Soit  $x_0$  une valeur quelconque de  $x$ ;  $G(x_0, y) = 0$  ne peut avoir que des racines isolées  $y_1^0, y_2^0, y_n^0, \dots$  <sup>(1)</sup> dont le seul point limite est l'infini, et qui d'ailleurs pourraient ne pas exister.

De l'origine comme centre, dans le plan  $y$ , décrivons un cercle C de rayon R arbitrairement grand ne passant par aucun des points  $y_n^0$ . Ce cercle contiendra les points  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ ; à l'extérieur de C seront les points  $y_{n+1}^0, \dots$

L'ensemble des déterminations de  $y(x)$ , prenant la valeur  $y_i^0$  pour  $x = x_0$ , constitue une fonction algébroïde de  $x$  dans un

---

<sup>(1)</sup> Les  $y_i^0$  sont supposées distinctes, chacune pouvant être racine multiple de l'équation  $G(x_0, y) = 0$ .

certain cercle  $\gamma$  de centre  $x_0$ , et qui n'a dans ce cercle qu'un point critique algébrique au plus le point  $x_0$ . Lorsque  $x$  décrit ce cercle la détermination considérée décrit une petite aire entourant le point  $y_i^0$ . On peut trouver un cercle  $\gamma_\rho$  de centre  $x_0$ , de rayon  $\rho$ , tel que les déterminations de  $\gamma(x)$  prenant les valeurs  $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$  pour  $x = x_0$  décrivent des aires toutes intérieures à C, et extérieures deux à deux, lorsque  $x$  décrira  $\gamma_\rho$ ; en outre les déterminations de  $\gamma(x)$  prenant les valeurs  $\gamma_{n+1}^0, \dots$ , pour  $x = x_0$ , décriront des aires extérieures à C.

Que l'on puisse trouver un cercle  $\gamma_\rho$  tel que les déterminations de  $\gamma(x)$  égales à  $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$  en  $x_0$  décrivent des aires intérieures à C et deux à deux extérieures, cela est évident d'après le théorème général sur les fonctions implicites. En ce qui concerne les déterminations extérieures à C, il ne serait impossible de trouver  $\gamma_\rho$  que si, quelque petit que soit  $\rho$ , l'aire décrite par une de ces déterminations rencontrait C, ce qui équivaldrait à dire que pour toute valeur  $\rho_i$  de  $\rho$  on pourrait trouver sur C un point  $Y_i$  et dans le cercle  $|x - x_0| \leq \rho_i$  un point  $X_i$  tels que

$$G(X_i, Y_i) = 0.$$

Lorsque  $\rho_i$  tend vers zéro, les points  $x_i$  tendent vers  $x_0$ ; les points  $Y_i$  situés sur C ont au moins un point limite Y. Au point  $(x_0, Y)$  la fonction  $G(x, y)$  est holomorphe. Les points  $(X_i, Y_i)$  admettent pour point limite le point  $(x_0, Y)$ , et l'on sait que  $G(X_i, Y_i) = 0$ . On aurait donc  $G(x_0, Y) = 0$ . Par conséquent, le cercle C passerait par une des racines  $y_i^0$  de  $G(x_0, y) = 0$  contrairement à l'hypothèse. On conclut de là que, si l'on entoure  $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$  de cercles  $C_1^0, \dots, C_n^0$  intérieurs à C et de rayons  $\mu$  arbitrairement petits, et si l'on choisit  $\rho$  assez petit, la fonction  $G(x, y)$  ne s'annulera jamais lorsque  $y$  décrira l'intérieur et le contour de l'aire  $\Delta$  intérieure à C et extérieure aux  $C_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) et  $x$  l'aire du cercle  $\gamma_\rho$  de centre  $x_0$ . Dans le domaine ainsi défini par le point  $(x, y)$ , on aura  $|G(x, y)| > \varepsilon$ . Si, pour  $x = x_0$ , l'équation  $G(x, y) = 0$  n'avait pas de racines, ce qu'on vient de dire s'appliquerait au domaine  $(x, y)$  défini par l'intérieur du cercle  $\gamma_\rho$  pour  $x$  et l'intérieur du cercle C pour  $y$ , ce qui revient en somme à dire qu'en ce cas, au voisinage de  $x_0$ , toutes les valeurs de  $\gamma(x)$  sont en valeur absolue arbitrairement

grandes [ $|\gamma(x)| > R$ , aussi grand que soit  $R$ ] pourvu que  $x$  soit suffisamment voisin de  $x_0$ , c'est-à-dire  $|x - x_1| < \rho$ ,  $\rho$  assez petit.

6. Partons maintenant d'un point  $x_1$  de la surface de Riemann  $R_x$ , avec la détermination correspondante de  $\gamma(x_1)$ . Nous choisirons ensuite le rayon  $R$  de  $C$  supérieur à la valeur absolue de cette détermination de  $|\gamma(x_1)|$  et d'ailleurs *arbitrairement grand* et nous pouvons toujours supposer  $\gamma(x_1)$  différent des valeurs  $\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0$ .  $\rho$  et  $\mu$  pourront dès lors être choisis suffisamment petits pour que la valeur  $\gamma(x_1)$  soit intérieure au domaine  $\Delta$  du n° 5, c'est-à-dire extérieure aux cercles  $C_i^0 (i = 1, 2, \dots, n)$  et intérieure au cercle  $C$ .

Faisons décrire à la variable  $x$  un chemin allant, sur  $R_x$ , du point  $x_1$  au point  $x_0$ , à condition bien entendu que le point  $x_0$  soit un point intérieur ou un point frontière de cette surface.  $x_0$  sera point intérieur à un feuillet de  $R_x$  si, en opérant le prolongement analytique de  $x(\gamma)$  à partir de  $x_1$  et de la détermination considérée, on peut atteindre  $x_0$  au bout d'un nombre fini d'opérations, le nombre des déterminations obtenues en  $x_0$  par tous les modes possibles de prolongement analytique représentera le nombre des feuillets de  $R_x$  sur lesquels  $x_0$  est un point intérieur.  $x_0$  sera point frontière de  $R_x$  si, en opérant par prolongement analytique à partir de  $x_1$ , on peut atteindre des points arbitrairement voisins de  $x_0$ , sans jamais atteindre  $x_0$ . Que  $x_0$  soit point intérieur ou point frontière de  $R_x$ , on va voir que lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ ,  $\gamma(x)$  a toujours une limite *déterminée* qui est soit *une des racines de l'équation*  $G(x_0, \gamma) = 0$  (alors  $x_0$  est intérieur à  $R_x$ , sur un des feuillets), soit *l'infini* (alors  $x_0$  est point frontière de  $R_x$ ). En effet, partant de  $x_1$  on pourra toujours approcher aussi près qu'on voudra de  $x_0$  en restant sur  $R_x$ ; la valeur de  $\gamma(x)$  partant de  $\gamma(x_1)$  décrira un chemin continu dans le plan des  $\gamma$ . La valeur initiale  $\gamma(x_1)$  appartient au domaine  $\Delta$  intérieur à  $C$  et extérieur aux cercles  $C_i^0$ , mais dès que  $x$  pénètre dans le cercle  $\gamma_\rho$ ,  $|x - x_0| < \rho$ , le point  $\gamma(x)$  correspondant ne pourra plus appartenir à  $\Delta$ , puisque dans  $\Delta$   $|G(x, \gamma)| > \varepsilon$ . Le chemin décrit par  $\gamma(x)$ , partant de  $\gamma(x_1)$  : ou bien aura donc pénétré dans un des cercles  $C_i^0$ , dont il ne pourra désormais plus sortir, ou bien franchit la circonférence du cercle  $C$  pour ne plus rentrer dans  $C$ ;

en d'autres termes on aura dès que  $|x - x_0| < \rho$ , ou bien

$$|y(x) - y_i^0| < \eta \quad (i \text{ ayant une certaine valeur}),$$

ou bien

$$|y(x)| > R.$$

Les nombres  $\eta$  et  $R$  ayant été choisis arbitrairement (petit et grand) cela montre que,  $x$  tendant vers  $x_0$ ,  $y$  tend vers une des racines  $y_i^0$  de  $G(x_0, y) = 0$  ou vers l'infini. Dans le premier cas, comme le point  $(x_0, y_i^0)$  est, point ordinaire pour  $G(x, y)$ , il est clair que la détermination finale de  $y(x)$  sera algébroïde en  $x_0$  et coïncidera avec l'une des déterminations égales à  $y_i^0$  en  $x_0$ . Le point  $x_0$ , alors un point intérieur de  $R_x$ , sera point simple ou point critique algébrique de  $y(x)$ .

Dans le deuxième cas  $x_0$  considéré est un point frontière. Il se peut d'ailleurs qu'en suivant un autre chemin pour aller de  $x_1$  à  $x_0$  on ait pu atteindre effectivement  $x_0$ , parce que  $x_0$  peut être point frontière sur un ou plusieurs feuillets, et point intérieur sur d'autres, c'est ce qui arrivera par exemple si l'équation  $G(x_0, y) = 0$  n'a qu'un nombre fini de racines. En suivant certains chemins à partir de  $x_1$ , on pourra atteindre  $x_0$  avec des déterminations de  $y(x)$  égales à ces racines, et en suivant d'autres chemins  $y(x)$  tendra vers l'infini quand  $x$  tendra vers  $x_0$ . Si enfin  $G(x_0, y) = 0$  n'a pas de racines et si cependant elle en a pour des points infiniment voisins de façon qu'on puisse s'approcher indéfiniment de  $x_0$  par prolongement analytique,  $x_0$  sera point frontière sur tous les feuillets de  $R_x$ . Quel que soit le chemin suivi pour aller de  $x$ , en  $x_0$  sur  $R_x$ , la détermination de  $y(x)$  tendra vers l'infini quand  $x$  tendra vers  $x_0$ .

7. En définitive, si  $x$  décrit un chemin aboutissant à un point accessible de la frontière de la surface de Riemann  $R_x$ ,  $y(x)$  tend toujours vers l'infini.

On remarquera l'analogie de l'analyse précédente avec celle de M. Iversen <sup>(1)</sup> pour le cas où  $G(x, y)$  est linéaire en  $x$  [ $y(x)$ , fonction inverse de fonction méromorphe].

---

<sup>(1)</sup> F. IVERSEN, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (Thèse, Helsingfors, 1914).



On remarquera en outre que l'analyse précédente repose sur ce double fait :

1° Le chemin que décrit  $x$  admet  $x_0$  pour limite et  $x_0$  seulement ;

2°  $y(x)$  décrit un chemin *continu* qui dès lors s'enferme dans un  $C_i^0$  ou sort de  $C$ . On ne peut donc affirmer la conclusion que si  $x_0$  est point *frontière accessible* de  $R_x$  de façon qu'il existe sur  $R_x$  des chemins continus ayant  $x_0$  pour point limite unique.

Le point  $x = \infty$  lui-même est un point frontière de  $R_x$ . Sur les chemins de  $R_x$  qui aboutissent à  $x = \infty$ , l'allure de  $y(x)$  est moins simple que celle de  $y(x)$  au voisinage des points accessibles de la frontière de  $R_x$  à distance finie. Ici  $y(x)$  peut n'avoir pas de limite déterminée car la ligne  $x = \infty$  est une ligne singulière essentielle pour la fonction  $G(x, y)$ . Mais, si par exemple la surface de Riemann  $R_y$  du plan  $y$ , sur laquelle est uniforme la fonction  $x(y)$  définie par  $G(x, y) = 0$ , a des points frontière accessibles, chacun de ces points frontière sera la limite atteinte par  $y(x)$  quand  $x$  tend vers l'infini sur  $R_x$  par un chemin convenable ; on le verrait de la même façon que précédemment on a vu que  $y(x)$  tendait vers l'infini quand  $x$  tendait par un chemin continu vers un point frontière accessible de  $R_x$ . En ce sens on peut dire que les points frontière accessibles de  $R_x$  sont les valeurs asymptotiques de la fonction  $x(y)$  quand  $y$  tend vers l'infini par des chemins convenables de  $R_y$ , et inversement.

### III. — LA SURFACE $R_x$ NE PEUT LAISSER A DÉCOUVERT UN CONTINU DU PLAN $x$ .

8. En définitive  $y(x)$  est une fonction holomorphe sur  $R_x$ , et telle que si  $x$  tend par un chemin continu (ligne de Jordan ou chemin formé par exemple d'une suite dénombrable de segments de droite) vers un point frontière accessible de  $R_x$ ,  $y(x)$  tend vers l'infini. Les zéros de  $y(x)$  sur  $R_x$  correspondent aux  $x$  racines de l'équation

$$G(x, 0) = 0,$$

ce sont des points  $x_1^0, \dots, x_n^0, \dots$  qui sont en nombre limité ou bien ont pour seul point limite  $x = \infty$ . La fonction  $Y(x) = \frac{1}{y(x)}$  est

uniforme et analytique sur  $R_x$ , et sur  $R_x$  elle ne peut admettre comme singularité que des pôles aux points  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  ci-dessus; de plus sur chacun des chemins de  $R_x$  tendant vers un point frontière accessible, elle tend vers zéro.

Dans ces conditions on peut appliquer le théorème suivant :

« Si une fonction  $w = f(z)$  est analytique et uniforme sur une surface de Riemann  $R$  du plan  $z$ , qui laisse à découvert un certain continuum de valeurs et si  $f(z)$  converge vers zéro sur toute ligne de Jordan qui tend vers un point frontière accessible de  $R$ , alors  $f(z)$  est identiquement nulle. »

Ce théorème, énoncé par M. Zoretti dans son Livre *Leçons sur le Prolongement analytique* n'y est pas démontré d'une façon satisfaisante. La question a été reprise par M. W. Gross dans un Mémoire des *Math. Annalen*, t. 78, intitulé *Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten* où l'on trouvera énoncées quelques objections qu'on peut faire à la démonstration de M. Zoretti. La démonstration donnée par M. Gross aux nos 2, 3, 4 de son Mémoire ne laisse rien à désirer. Elle s'applique aussitôt à notre fonction  $Y(x)$  après les quelques précautions suivantes nécessitées par les pôles de  $Y(x)$ .

Supposons que  $R_x$  laisse à découvert un certain continu  $\mathcal{F}$ . On a vu que, pour que  $y(x)$  fût nul il fallait que  $x$  eût l'une des valeurs  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \dots$ . Si l'on raisonne dans le plan  $x$  comme on a raisonné aux nos 5 et 6 du présent Mémoire dans le plan  $y$ , et inversement, on pourra tracer dans le plan  $x$  un cercle  $\Gamma$  de centre  $O$ , de rayon  $R$  arbitrairement grand, ne passant par aucun des  $x_i^0$  et autour des  $x_i^0$  intérieurs à  $\Gamma$ , des cercles  $\gamma_i^0$  de rayon  $\eta$  arbitrairement petits de façon que lorsque  $|y|$  restera  $< \rho$ ,  $\rho$  étant choisi assez petit, les racines  $x(y)$  de  $G(x, y) = 0$  restent ou bien intérieures aux cercles  $\gamma_i^0$  ou extérieures à  $\Gamma$ . C'est-à-dire lorsque  $x$  sera extérieur aux  $\gamma_i^0$  et intérieur à  $\Gamma$ ,  $y(x)$  définie par  $G(x, y) = 0$  devra nécessairement être en valeur absolue  $> \rho$ . Il suffit alors de considérer la partie de  $R_x$  qui se projette dans le domaine  $\Delta$  intérieur à  $\Gamma$  extérieur aux  $\gamma_i^0$ ,  $\eta$  et  $\frac{1}{R}$  étant arbitrairement petits, il y aura toujours une partie de  $\mathcal{F}$  dans  $\Delta$ ; dans la partie de  $R_x$  intérieure à  $\Delta$  on aura  $|y| > \rho$  et par conséquent  $|Y(x)| < \frac{1}{\rho}$ , il n'y

aura dès lors qu'à appliquer mot pour mot la démonstration du n° 4 du Mémoire de M. Gross pour conclure que  $Y(x)$  devrait être identiquement nul. La contradiction à laquelle on arrive démontre bien que l'on ne peut admettre l'existence d'un continu  $\mathcal{F}$  en tout point duquel l'équation  $G(\xi, \gamma) = 0$  n'aurait pas de racine en  $\gamma$ .

9. L'ensemble  $E$  des  $x$  pour lesquels  $\gamma(x)$  n'a pas de valeur finie ne peut être un continu. Remarquons, ce qui est presque évident, que  $E$  est fermé, parce que si en un point  $x_0$ ,  $\gamma(x)$  a une valeur finie, il en sera de même dans un certain cercle de centre  $x_0$ . Mais  $E$  peut contenir des points isolés [par exemple pour

$$G(x, \gamma) = x - e^\gamma = 0,$$

où  $E$  compte seulement le point  $x=0$  à distance finie].  $E$  se décompose donc en un *ensemble dénombrable et en un ensemble parfait qui devra être nul ou discontinu*. Le cas d'un ensemble parfait discontinu est-il possible effectivement, ou bien faut-il admettre que  $E$  est nécessairement dénombrable, il serait intéressant de le décider.

IV. — SUR L'ENSEMBLE  $\mathcal{C}$  DES POINTS  $x$   
POUR LESQUELS  $\gamma(x)$  N'A QU'UN « NOMBRE FINI » DE DÉTERMINATIONS.

10. L'ensemble  $\mathcal{C}$  de points  $x$ , pour lesquels  $\gamma(x)$  n'a qu'un *nombre fini* de déterminations peut être d'une nature variée. Un tel point sera évidemment point frontière sur une infinité de feuillets de  $R_k$  et point intérieur sur les feuillets en nombre fini qui correspondent aux déterminations finies de  $\gamma(x)$ . On va examiner une partie intéressante de l'ensemble  $\mathcal{C}$  : l'ensemble  $\mathcal{C}'$  des valeurs de  $x$ , pour lesquelles la fonction  $G(x, \gamma)$ , entière en  $\gamma$ , se réduit à un polynôme en  $\gamma$ .

On peut toujours développer  $G$  suivant les puissances de  $\gamma$

$$G(x, \gamma) = \sum_0^{\infty} g_n(x) \gamma^n,$$

les coefficients  $g_n(x)$  sont des fonctions entières de  $x$ . Une

valeur  $\xi$  de  $\mathcal{E}'$  annule tous les  $g_n$  à partir d'un certain rang. Elles appartiennent donc à l'ensemble constitué par les zéros de tous les  $g_n$ . Cet ensemble est dénombrable.  $\mathcal{E}'$  est dénombrable. On va voir qu'il peut être dense dans tout le plan  $x$ .

11. On considérera pour cela *un ensemble dénombrable quelconque*, dense dans tout le plan des  $x$  et soient  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  ces points dans l'ordre adopté pour l'énumération.

Posons

$$g_0(x) = a_0(x - x_0),$$

$$g_1(x) = a_1(x - x_0)(x - x_1),$$

et, en général,

$$g_i(x) = a_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_i) = a_i \prod_{j=0}^i (x - x_j),$$

les  $a_i$  étant des constantes convenables.

On peut choisir les  $a_k$  de façon que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) y^k$$

converge *uniformément* dans tout domaine

$$|x| \leq r, \quad |y| \leq R,$$

quels que soient  $r$  et  $R$ , et représente dans ce domaine une fonction entière de  $x$  et  $y$ .

Il faut et il suffit pour cela que

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

dans tout domaine  $|x| \leq r$ .

Désignons par  $M_n(r)$  le maximum de  $\prod_{k=0}^n |x - x_k|$  sur le cercle  $|x| = r$ ; la condition à remplir sera

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{\frac{1}{n}} [M_n(r)]^{\frac{1}{n}} = 0 \quad [ |a_n| = A_n ].$$

Or,  $M_n(r)$ , pour  $n$  fixe, croît avec  $r$ .

Procédant comme au n° 4 on choisira une suite croissante de

rayons  $r_n$  tendant vers l'infini avec  $n$ , et l'on choisira les  $A_n$  de façon que

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{\frac{1}{n}} [M_n(r_n)]^{\frac{1}{n}} = 0,$$

ce qui pourra toujours être réalisé avec des  $A_n$  convergeant assez rapidement vers zéro.

On aura alors la relation (2) pour toute valeur finie de  $r$  et par suite la relation (1) uniformément dans tout domaine  $|x| \leq r$  d'où l'on conclut la convergence uniforme de

$$G(x, y) = \sum_0^{\infty} g_k(x) y^k$$

dans tout domaine  $|x| \leq r, |y| \leq R$ .

Lorsque  $x$  est égal à  $x_i$ ,  $G(x, y)$  se réduit à un polynome de degré  $(i-1)$  puisque  $G_k(x_i) = 0$  pour  $K = i, i+1, \dots, \infty$ . L'ensemble  $\mathcal{G}'$ , pour la fonction entière  $G(x, y)$ , se réduit à l'ensemble des  $x_i$ . Le nombre des déterminations finies de  $y$  pour  $x = x_i$  croissant indéfiniment avec  $i$  nous prouve que la surface de Riemann  $R_x$  de  $y(x)$  a bien un nombre *infini de feuillets*, c'est-à-dire que pour les valeurs *générales* de  $x$ ,  $y(x)$  aura une infinité de déterminations.

L'exemple actuel prouve que les projections sur le plan  $x$  des points frontière de  $R_x$  peuvent remplir tout le plan puisque ceux de ces points frontière qui appartiennent à  $\mathcal{G}'$  forment un ensemble dénombrable partout dense. On avait déjà des exemples, dus à MM. Gross, Iversen, de fonctions  $y(x)$ , inverses de fonctions entières  $[G(x, y) \text{ linéaire en } x]$  pour lesquels *tout point de plan*  $x$  est projection d'un point frontière de  $R_x$ , c'est-à-dire où toute *valeur*  $x$  est *valeur asymptotique de la fonction entière*  $x(y)$  lorsque  $y$  tend vers l'infini sur un chemin convenable (1).

---

(1) W. Gross, *Gine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist* (Math. Annalen, t. 79).