

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL PETROVITCH

**Sur les intégrales réelles de l'équation  
linéaire du second ordre**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 53 (1925), p. 127-134

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1925\\_\\_53\\_\\_127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__127_0)>

© Bulletin de la S. M. F., 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# **SUR LES INTÉGRALES RÉELLES DE L'ÉQUATION LINÉAIRE DU SECOND ORDRE ;**

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

## **1. L'équation**

$$(1) \quad y'' = a y \quad (a = \text{const. réelle})$$

a ses intégrales oscillantes ou non oscillantes suivant que la constante  $a$  est négative ou positive.

Si dans l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}}$$

correspondant à  $a$  positif, on prend pour constantes d'intégration les constantes  $x_0$  et  $y_0$ , liées à  $C_1$  et  $C_2$  par les relations

$$C_1 = \frac{1}{2} y_0 e^{-x_0 \sqrt{a}}, \quad C_2 = \frac{1}{2} y_0 e^{x_0 \sqrt{a}},$$

d'où

$$(3) \quad x_0 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{C_2}{C_1}, \quad y_0 = 2\sqrt{C_1 C_2};$$

cette intégrale générale s'écrit

$$(4) \quad y = \frac{y_0}{2} (e^x + e^{-x}),$$

où

$$(5) \quad X = (x - x_0) \sqrt{a}.$$

La constante  $x_0$ , mobile d'une intégrale particulière à une autre, représente, lorsqu'elle est réelle, la valeur de  $x$  pour laquelle  $y$  atteint son maximum ou minimum unique; la constante  $y_0$  représente la valeur mobile de cet extremum.

Si  $y_0 > 0$ , l'intégrale  $y$  présente au point  $x = x_0$  un minimum positif; pour les valeurs  $x < x_0$  l'intégrale est positive et constamment décroissante; pour  $x > x_0$  elle est positive et constamment croissante.

Si  $y_0 < 0$ ,  $y$  présente au point  $x = x_0$  un maximum négatif;

pour  $x < x_0$  elle est négative et constamment croissante; pour  $x > x_0$  elle est négative et constamment décroissante.

Si, maintenant, dans l'intégrale générale

$$(6) \quad y = C_1 \sin x \sqrt{\alpha} + C_2 \cos x \sqrt{\alpha} \quad (\alpha = -a)$$

de l'équation (1), correspondant à  $a$  négatif, on prend pour constantes d'intégration les constantes  $x_0$  et  $y_0$ , liées à  $C_1$  et  $C_2$  par les relations

$$C_1 = y_0 \sin x_0 \sqrt{\alpha},$$

$$C_2 = y_0 \cos x_0 \sqrt{\alpha},$$

d'où

$$(7) \quad \begin{cases} y_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \\ x_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{C_1}{C_2}; \end{cases}$$

cette intégrale générale s'écrit

$$(8) \quad y = y_0 \cos Y,$$

où

$$(9) \quad Y = (x - x_0) \sqrt{\alpha}.$$

La constante  $x_0$ , toujours réelle, mobile d'une intégrale particulière à une autre, représente la valeur de  $x$  pour laquelle  $y$  atteint son maximum ou minimum  $y_0$ . La courbe intégrale se compose de demi-ondes alternativement positives et négatives, auxquelles correspond une même amplitude  $y_0$ . L'intégrale change de signe toutes les fois qu'elle s'annule. L'intervalle des  $x$ , séparant deux zéros consécutifs de  $y$ , est égal à  $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ .

## 2. Les faits analogues se présentent dans le cas de l'équation

$$(10) \quad y'' = f(x) y.$$

Pour le faire voir, soit d'abord  $(a, b)$  un intervalle des  $x$  dans lequel la fonction  $f(x)$  est réelle, finie, continue et positive. Soit  $x_0$  une valeur mobile de  $x$ , comprise dans cet intervalle, annulant la dérivée  $y'$  de l'intégrale  $y$ . Comme, d'après (10),  $y''$  et  $y$  sont de même signe pour toute valeur de  $x$  comprise dans

l'intervalle  $(a, b)$ , l'intégrale  $y$  ne peut présenter dans cet intervalle ni des maxima positifs ni des minima négatifs. D'autre part, la valeur  $x = x_0$  mobile ne saurait annuler  $y''$ , car d'après (10) elle annulerait alors aussi  $y$  et serait un zéro multiple de  $y$ , et l'on sait que de tels zéros sont fixes. Par suite :

1° Si  $y_0 > 0$ ,  $y$  présentera au point  $x = x_0$  un minimum positif; pour les valeurs de  $x$  comprises entre  $a$  et  $x_0$  l'intégrale est positive et constamment décroissante; pour  $x$  compris entre  $x_0$  et  $b$  elle est positive et constamment croissante;

2° Si  $y_0 < 0$ ,  $y$  présentera en  $x = x_0$  un maximum négatif; pour  $x$  compris entre  $a$  et  $x_0$  elle est négative et croissante; pour  $x$  compris entre  $x_0$  et  $b$  elle est négative et décroissante.

Il s'ensuit que le produit  $yy'$  ne change de signe dans l'intervalle  $(a, b)$  qu'au point  $x = x_0$ .

En multipliant l'équation (10) par  $y' dx$ , intégrant entre les limites

$$x \text{ et } x_0, \quad \text{où} \quad a < x < x_0,$$

et en tenant compte de ce que  $y'_0 = 0$  on obtient

$$(11) \quad -\frac{y'^2}{2} - \int_x^{x_0} f(x) yy' dx,$$

d'où

$$(12) \quad y'^2 = f(\xi)(y^2 - y_0^2) \quad (x < \xi < x_0),$$

et par suite

$$(13) \quad y = \frac{y_0}{2}(e^x + e^{-x}),$$

où

$$(14) \quad X = \int_{x_0}^x \sqrt{f(\xi)} d\xi = (x - x_0) \sqrt{f(\theta)} \quad (x < \theta < x_0).$$

Si, maintenant, l'équation (10) étant multipliée par  $y' dx$ , on l'intègre entre les limites

$$x_0 \text{ et } x, \quad \text{où} \quad x_0 < x < b;$$

on obtient

$$(15) \quad \frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) yy' dx,$$

d'où l'on tire encore les formules (13) et (14) avec  $x_0 < \theta < x$ .

D'où la proposition suivante :

*Toute intégrale réelle de l'équation*

$$(16) \quad y'' = f(x)y,$$

*dont la dérivée première s'annule en un point  $x_0$  situé dans un intervalle  $(a, b)$  de  $x$ , dans lequel la fonction  $f(x)$  est positive, peut s'écrire sous la forme*

$$(17) \quad y = \frac{y_0}{2}(e^X + e^{-X}),$$

où

$$(18) \quad X = (x - x_0) \sqrt{f(\xi)},$$

$\xi$  étant une valeur comprise entre  $x_0$  et  $x$ , et cela pour toute valeur  $a < x < b$ .

Comme la dérivée de l'intégrale (17) ne change de signe que pour  $x = x_0$ , on en conclut que :

*Pour les valeurs de  $x$  comprises dans l'intervalle  $(a, b)$ , l'intégrale  $y$  est constamment comprise entre*

$$(19) \quad \frac{y_0}{2}(e^{X_1} + e^{-X_1}) \quad \text{et} \quad \frac{y_0}{2}(e^{X_2} + e^{-X_2}),$$

où

$$(20) \quad X_1 = (x - x_0) \sqrt{N}, \quad X_2 = (x - x_0) \sqrt{M},$$

N et M désignant une limite inférieure et une limite supérieure de  $f(\xi)$  pour les valeurs comprises entre  $x_0$  et  $x$ , et cela pour toute valeur de  $x$  telle que  $a < x < b$ .

3. Soit maintenant  $(a, b)$  un intervalle des  $x$  dans lequel la fonction  $f(x)$  est réelle, finie, continue et *négative*. On sait que, dans ce cas, l'intégrale  $y$  change de signe chaque fois qu'elle s'annule, et que, l'intervalle  $(a, b)$  étant suffisamment étendu, la courbe intégrale  $y$  est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives.

Envisageons d'abord une demi-onde *positive*. D'après l'équation (10) même, la dérivée  $y''$  étant négative tout le long d'une

telle demi-onde, celle-ci ne peut présenter qu'un seul maximum.

Soient  $x = x_0$  la valeur de  $x$  pour laquelle ce maximum est atteint,  $x_1$  et  $x_2$  les valeurs de  $x$  définissant les deux extrémités de la demi-onde.

Lorsque  $x$  varie de  $x_1$  à  $x_0$ , l'ordonnée  $y$  est constamment positive et croissante; pour  $x$  variant de  $x_0$  à  $x_2$  elle est constamment positive et décroissante. Dans chacun des deux intervalles  $(x_1, x_2)$  et  $(x_0, x_2)$  le produit  $yy'$  garde un signe invariable.

Considérons la courbe intégrale dans l'intervalle  $(x_1, x_0)$ . En multipliant l'équation (10) par  $y' dx$  et intégrant entre les limites

$$x \text{ et } x_0, \quad \text{où} \quad x_1 < x < x_0,$$

on obtient

$$(21) \quad -\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} f(x) yy' dx = (y_0^2 - y^2) \lambda,$$

où  $\lambda$  est une valeur que prend  $f(t)$  pour  $t$  compris entre  $x$  et  $x_0$ . On en tire

$$(22) \quad y = y_0 \cos X,$$

où

$$(23) \quad X = (x - x_0) \sqrt{-f(\xi)},$$

$\xi$  étant une valeur comprise entre  $x$  et  $x_0$ , et cela pour toute valeur de  $x$  telle que  $x_1 < x < x_0$ .

Si l'on considère la courbe intégrale dans l'intervalle  $(x_0, x_2)$ , en multipliant (10) par  $y' dx$  et intégrant entre les limites

$$x_0 \text{ et } x, \quad \text{où} \quad x_0 < x < x_2,$$

on obtient

$$(24) \quad \frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x) yy' dx = (y^2 - y_0^2) \mu,$$

où  $\mu$  est une valeur que prend  $f(t)$  pour  $t$  compris entre  $x_0$  et  $x$ . On en tire une équation de la forme (22) valable pour toute valeur de  $x$  telle que  $x < x < x_2$ .

Donc : chaque demi-onde positive peut s'écrire sous la forme (22) et cela pour toute valeur de  $x$  comprise dans l'intervalle  $(a, b)$ .

Envisageons maintenant une demi-onde *négative*. La dérivée  $y''$

étant positive tout le long d'une telle demi-onde, celle-ci ne peut présenter qu'un seul minimum. Soient  $x_1$  et  $x_2$  les abscisses extrêmes, et  $x_0$  l'abscisse du minimum de cette demi-onde. Lorsque  $x$  varie de  $x_1$  à  $x_0$ , l'ordonnée  $y$  est constamment négative et décroissante; pour  $x$  variant de  $x_0$  à  $x_2$  elle est constamment négative et croissante. Dans chacun des deux intervalles  $(x_1, x_0)$  et  $(x_0, x_2)$  le produit  $yy'$  garde donc un signe invariable. On s'assure alors de la même manière que tout à l'heure que la demi-onde négative peut aussi être représentée par la formule (22) pour toutes les valeurs de  $x$  telles que  $x_1 < x < x_2$ .

D'où la proposition suivante :

*Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, de l'intégrale  $y$ , comprise dans un intervalle  $(a, b)$  de  $x$  dans lequel la fonction  $f(x)$  est négative, peut s'écrire sous la forme*

$$(25) \quad y = y_0 \cos X, \quad X = (x - x_0) \sqrt{-f(\xi)},$$

où  $\xi$  est une valeur comprise entre  $x_0$  et  $x$ .

Il s'ensuit que la demi-onde est tout entière comprise entre les deux courbes

$$(26) \quad y = y_0 \cos X_1 \quad \text{et} \quad y = y_0 \cos X_2,$$

où

$$(27) \quad X_1 = (x - x_0) \sqrt{N}, \quad X_2 = (x - x_0) \sqrt{M},$$

$N$  et  $M$  désignant une limite inférieure et une limite supérieure de  $-f(x)$  pour  $x$  variant de  $x_1$  à  $x_2$ .

De (25) on tire

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{-f(\xi)}}, \\ x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{-f(\xi)}}, \end{cases}$$

ce qui montre que la longueur  $(x_2 - x_1)$  d'une demi-onde quelconque est plus grande que  $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ , et plus petite que  $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ .

En prenant pour  $N$  et  $M$  une limite inférieure et une limite

supérieure de  $-f(x)$  dans tout l'intervalle  $(a, b)$ , on voit que :

*Le nombre de demi-ondes contenues dans l'intervalle  $(a, b)$  est au moins égal au nombre d'unités entières contenues dans la valeur*

$$(29) \quad \frac{(b-a)\sqrt{N}}{\pi} - 1$$

*et au plus égal au nombre d'unités entières contenues dans la valeur*

$$(30) \quad \frac{(b-a)\sqrt{M}}{\pi},$$

ce qui est bien conforme aux résultats connus de Sturm.

On retrouve, d'ailleurs, par la même voie, les autres propositions de Sturm relatives à l'équation linéaire homogène du second ordre.

#### 4. Ce qui précède s'applique également à l'équation

$$(31) \quad y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0.$$

Celle-ci, par la substitution connue

$$(32) \quad y = z e^{-\frac{1}{2} \int \varphi dx},$$

se transforme en

$$(33) \quad z'' = f(x) z,$$

où la fonction  $f$  est de la forme

$$(34) \quad f(x) = \frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi'}{2} - \psi,$$

d'où l'on conclut que :

*Toute intégrale réelle de l'équation (31) telle que la dérivée première de*

$$(35) \quad y e^{\frac{1}{2} \int \varphi dx}$$



*s'annule en un point  $x = x_0$  situé dans un intervalle  $(a, b)$  dans lequel la fonction (34) est positive, se laisse écrire sous la forme*

$$(36) \quad y = \frac{y_0}{2} (e^X + e^{-X}) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x \varphi dx}$$

*avec*

$$(37) \quad X = (x - x_0) \sqrt{f(\xi)},$$

*où  $\xi$  est une valeur comprise entre  $x_0$  et  $x$ , pour toute valeur  $a < x < b$ .*

La courbe intégrale est comprise entre les deux courbes de la forme (36) où  $X$  a respectivement l'une et l'autre des deux valeurs

$$(38) \quad (x - x_0) \sqrt{N} \quad \text{et} \quad (x - x_0) \sqrt{M},$$

$M$  et  $N$  ayant les significations précédentes.

Enfin, lorsque la fonction  $f(x)$  est *négative* dans l'intervalle considéré  $(a, b)$ , la courbe intégrale est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives.

*Chaque demi-onde, soit positive, soit négative, peut s'écrire sous la forme*

$$(40) \quad y = y_0 e^{-\frac{1}{2} \int \varphi dx} \cos X$$

*avec*

$$X = (x - x_0) \sqrt{-f(\xi)},$$

*où  $\xi$  est une valeur comprise entre  $x_0$  et  $x$ .*

Le nombre de demi-ondes, contenues dans l'intervalle  $(a, b)$ , est fourni par la proposition précédente, dans laquelle les nombres  $N$  et  $M$  doivent se rapporter à la fonction  $f(x)$  définie par (34),

Nous remarquerons encore que ces considérations s'appliquent également à des types d'équations *non linéaires*, ce qui fera l'objet d'un autre travail.