

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. KAUCKÝ

Sur la réduction de certaines sommes de la théorie des différences

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 74-79

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__74_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LA RÉDUCTION DE CERTAINES SOMMES
DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.**

PAR M. JOS. KAUCKÝ.

1. Désignons avec M. Nörlund la différence du premier ordre par le symbole

$$\Delta_{\omega} F(x) = \frac{F(x + \omega) - F(x)}{\omega},$$

et la moyenne du premier ordre par le symbole

$$\nabla_{\omega} F(x) = \frac{F(x + \omega) + F(x)}{2};$$

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ étant des nombres positifs quelconques, on détermine la différence et la moyenne d'ordre n par les équations

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1 \dots \omega_n}^n F(x) &= \Delta_{\omega_n} \left[\Delta_{\omega_1 \dots \omega_{n-1}}^{n-1} F(x) \right], \\ \nabla_{\omega_1 \dots \omega_n}^n F(x) &= \nabla_{\omega_n} \left[\nabla_{\omega_1 \dots \omega_{n-1}}^{n-1} F(x) \right]. \end{aligned}$$

Dans divers Mémoires ⁽¹⁾, M. Nörlund a étudié la somme de première espèce et d'ordre n

$$G_n(x) = S_{\omega_1 \dots \omega_n}^n \varphi(x)$$

⁽¹⁾ Voir N.-E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Berlin, 1924).

et la somme de seconde espèce et d'ordre n

$$F_n(x) = \sum_a^x \varphi(x) \overset{n}{\Delta}_{\omega_1 \dots \omega_n} x,$$

qui satisfont aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \overset{n}{\nabla}_{\omega_1 \dots \omega_n} G_n(x) &= \varphi(x), \\ \overset{n}{\Delta}_{\omega_1 \dots \omega_n} F_n(x) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Si $\omega_1 = \omega_2, \dots = \omega_n = \omega$, on écrit plus brièvement

$$\overset{n}{\Delta}_{\omega} F(x), \quad \overset{n}{\nabla}_{\omega} F(x), \quad \sum \varphi(x) \overset{n}{\Delta}_{\omega} x, \quad \sum_a^x \varphi(x) \overset{n}{\Delta}_{\omega} x.$$

2. Soient $f(x)$ et $F(x)$ deux polynomes et supposons qu'on peut écrire la décomposition suivante

$$(1) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{v=1}^n \frac{f_v(x)}{F_v(x)},$$

où $F_v(x)$ sont les diviseurs de $F(x)$. θ étant une opération distributive quelconque, considérons l'équation fonctionnelle symboliquement écrite

$$(2) \quad F(\theta) \gamma(x) = f(\theta) \varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée. Soient $\gamma_v(x)$ les solutions des équations

$$(3) \quad F_v(\theta) \gamma_v(x) = f_v(\theta) \varphi(x) \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

on peut poser

$$(4) \quad \gamma(x) = \sum_{v=1}^n \gamma_v(x).$$

Pour démontrer l'affirmation précédente, on peut procéder comme il suit.

Posons

$$(5) \quad \frac{F(x)}{F_v(x)} = \overline{F}_v(x) \quad (v = 1, 2, \dots, n);$$

en multipliant l'équation (1) par $F_1(x)$, nous obtenons l'identité

$$(6) \quad \sum_{v=1}^n \overline{F}_v(x) f_v(x) = f(x).$$

Mais on obtient manifestement aussi une identité si, en remplaçant x par θ dans (6), on applique tous deux côtés de l'équation ainsi obtenue sur une fonction $\varphi(x)$. On a donc

$$(6') \quad \sum_{v=1}^n \overline{F}_v(\theta) f_v(\theta) \varphi(x) = f(\theta) \varphi(x).$$

Appliquons maintenant sur l'équation (3) l'opération $\overline{F}_v(\theta)$ en faisant compte de (5); nous avons

$$F(\theta) y_v(x) = \overline{F}_v(\theta) f_v(\theta) \varphi(x),$$

dont la sommation, en regardant (6'), nous donne enfin

$$F(\theta) \sum_{v=1}^n y_v(x) = f(\theta) \varphi(x).$$

Le théorème est ainsi démontré.

En écrivant encore les équations (2) et (3) symboliquement

$$(7) \quad y(x) = \frac{f(\theta)}{F(\theta)} \varphi(x),$$

$$(7') \quad y_v(x) = \frac{f_v(\theta)}{F_v(\theta)} \varphi(x) \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

on peut donner à l'équation (4) la forme suivante :

$$(8) \quad \frac{f(\theta)}{F(\theta)} \varphi(x) = \sum_{v=1}^n \frac{f_v(\theta)}{F_v(\theta)} \varphi(x) \quad (1).$$

3. Pour aller plus loin, considérons l'équation

$$(9) \quad (\Delta_{\omega} - r)y(x) = \Delta_{\omega} y(x) - r y(x) = \varphi(x),$$

(1) A. Cauchy indiqua, pour quelques cas spéciaux de θ , cette formule dans son Mémoire: *Sur l'emploi des équations symboliques dans le calcul infinitésimal et dans le calcul aux différences finies* (Œuvres (I), t. VIII, p. 28); mais la démonstration de Cauchy n'est pas complète.

r étant une constante, $\varphi(x)$ une fonction donnée. On peut vérifier aisément que l'équation précédente a la solution particulière

$$(10) \quad y(x) = \frac{\varphi(x)}{\Delta - r} = \sum_a^x (1 + r\omega)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \Delta z;$$

car, en remarquant que (9) dans le cas $\varphi(x) \equiv 0$, a la solution

$$u(x) = (1 + r\omega)^{\frac{x}{\omega}},$$

et en posant

$$y(x) = c(x) u(x),$$

on obtient pour $c(x)$ l'équation

$$\Delta c(x) = \frac{\varphi(x)}{u(x + \omega)}.$$

4. Considérons maintenant l'équation

$$(11) \quad (\nabla - r)y(x) = \nabla y(x) - ry(x) = \varphi(x);$$

une solution particulière est

$$(12) \quad y(x) = \frac{\varphi(x)}{\nabla - r} = \frac{2}{\omega} \sum_a^x (2r - 1)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \Delta z,$$

car on peut écrire (11) sous la forme

$$\left[\Delta - \frac{2(r-1)}{\omega} \right] y(x) = \frac{2}{\omega} \varphi(x).$$

En posant $r = 0$ dans (11) et (12), on obtient

$$(13) \quad \sum \varphi(x) \nabla x = \frac{2}{\omega} \sum_a^x (-1)^{\frac{x-z}{\omega} - 1} \varphi(z) \Delta z.$$

5. Supposons, pour plus de commodité, le degré de $f(x)$ inférieur à celui de $F(x)$ et considérons au lieu de (1) la décomposition en fractions simples

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \mathcal{L} \frac{1}{x-r} \left[\frac{f(r)}{F(r)} \right],$$

où la somme \mathfrak{E} ne comprend que les résidus de $\frac{f(r)}{(x-r)F(r)}$ relatifs aux pôles de $\frac{f(r)}{F(r)}$.

On aura au lieu de (8)

$$(14) \quad \frac{f(\theta)}{F(\theta)} \varphi(x) = \mathfrak{E} \frac{\varphi(x)}{\theta-r} \left[\frac{f(r)}{F(r)} \right],$$

où, d'après ce qui précède, le symbole

$$\frac{\varphi(x)}{\theta-r}$$

signifie la solution de l'équation

$$(\theta-r)y(x) = \varphi(x).$$

Dans le cas $f(x) = 1$, $F(x) = x^n$, nous obtenons enfin

$$(15) \quad \frac{\varphi(x)}{\theta^n} = \mathfrak{E} \frac{\varphi(x)}{\theta-r} \left[\frac{1}{r^n} \right].$$

6. Posons

$$\theta = \Delta_{\omega}.$$

En remarquant que

$$\frac{\varphi(x)}{\Delta_{\omega}^n} = \sum_a^x \varphi(z) \Delta_{\omega}^n z,$$

on obtient, en tenant compte de (10),

$$(16) \quad \begin{aligned} \sum_a^x \varphi(z) \Delta_{\omega}^n z &= \sum_a^x \left\{ \mathfrak{E} (1+r\omega)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \left[\frac{1}{r^n} \right] \right\} \varphi(z) \Delta_{\omega} z \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_a^x (x-z-\omega)(x-z-2\omega) \dots \\ &\quad \times [x-z-(n-1)\omega] \varphi(z) \Delta_{\omega} z. \end{aligned}$$

7. D'une manière tout à fait analogue, pour

$$\theta = \nabla_{\omega},$$

on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \sum \varphi(x) \nabla_{\omega}^n x &= \frac{2}{\omega} \sum_a^x \left\{ \mathcal{E}_{(1-2r)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \left[\frac{1}{r^n} \right]} \right\} (-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \Delta_{\omega} z \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{2}{\omega} \right)^n \\
 &\quad \times \sum_a^x (x-z-\omega) \dots [x-z-(n-1)\omega] (-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \Delta_{\omega} z.
 \end{aligned}$$

8. On peut simplifier encore l'équation précédente. Posons d'abord $(n+1)$ au lieu de n dans (17) et remarquons qu'on a

$$\begin{aligned}
 &(x-z-\omega)(x-z-2\omega) \dots (x-z-n\omega) \\
 &= \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} x(x-\omega) \dots [x-(n-s-1)\omega] (z+\omega) \dots (z+s\omega)
 \end{aligned}$$

On trouvera enfin

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \sum \varphi(x) \nabla_{\omega}^{n+1} x \\
 = \left(\frac{2}{\omega} \right)^n \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} x(x-\omega) \dots [x-(n-s-1)\omega] G_{1,s}(x),
 \end{aligned}$$

où l'on a posé, en tenant compte de (13),

$$\begin{aligned}
 G_{1,s}(x) &= \frac{2}{\omega} \sum_a^x (z+\omega) \dots (z+s\omega) (-1)^{\frac{x-z}{\omega}-1} \varphi(z) \Delta_{\omega} z \\
 &= \sum (x+\omega)(x+2\omega) \dots (x+s\omega) \varphi(x) \nabla_{\omega} x.
 \end{aligned}$$

9. Il est nécessaire de remarquer que M. Nörlund, par une voie tout à fait différente, démontra les formules (16) et (18) dans son travail : *Remarques diverses sur le calcul aux différences finies* (1).

(1) *Journal de Math.*, 9^e série, t. II, 1923. Cauchy indiqua une formule de réduction pour la somme $\sum_{x_0}^x \dots \sum_{x_0}^x f(x)$, mais cette formule n'est pas exacte voir *loc. cit.*, p. 34 (25).