BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

# Sur les fonctions entières d'ordre nul et les équations différentielles

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 53 (1925), p. 34-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__34_1>

## SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. GEORGES VALIRON.

J'ai montré dans une note récente (¹) que la théorie des fonctions elliptiques paires ou, ce qui est équivalent, des fonctions invariantes par les substitutions $(z, kz)$ et $\left(z, \frac{1}{z}\right)$, conduit à un exemple très simple de fonction entière d'ordre nul qui est solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre. L'examen des propriétés de la dérivée logarithmique $H(z)$ de la fonction entière $f(z)$ et de $H'(z)$ m'avait amené à énoncer ce résultat : $M(r)$ désignant le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$, les fonctions pour lesquelles le rapport

$$\log M(r) : (\log r)^2$$

reste borné ne peuvent être solutions d'aucune équation différentielle algébrique du second ordre. Mais en réalité j'avais cru pouvoir étendre à toutes les fonctions une propriété qui n'appartient peut-être qu'à celles dont les zéros sont distribués très régulièrement. Le résultat que je démontre ici ne s'applique qu'à une

(¹) *Comptes rendus*, t. 180, 1925, p. 571.

classe de fonctions plus restreinte, celles pour lesquelles on a

$$\frac{\log M(r)}{(\log r)(\log_2 r)} < \frac{1}{\log 4}. \tag{1}$$

La proposition découle d'une propriété de la fonction $[zH(z)]'$ qui me semble assez remarquable, car elle montre que l'analogie que l'on est habitué à rencontrer entre les propriétés des fonctions entières à croissance très lente et les propriétés des polynomes peut cesser dans certains cas.

1. Soit $r_k \ldots r_n \ldots$ la suite des modules des zéros non nuls de la fonction entière $f(z)$. Nous nous bornerons dans tout ce qui suit aux fonctions pour lesquelles on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{n \log n}{\log r_n} = 0. \tag{2}$$

Cette condition imposée aux $r_n$ peut être remplacée par une condition relative à la croissance de $\log M(r)$. On remarque d'abord que dire que la condition (2) est réalisée revient à dire que

$$n \log_2 r_n : \log r_n$$

tend vers zéro et l'on s'appuie sur ce que, pour les fonctions d'ordre nul de cette espèce, $\log M(r)$ est asymptotiquement égal à l'expression

$$\log \frac{r^n}{r_k r_{k+1} \ldots r_n} \qquad (r_n \leqq r < r_{n+1}) \quad (^1).$$

On voit ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour que les zéros vérifient l'égalité (2) est que l'on ait

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} \log_2 r = 0. \tag{3}$$

Considérons donc une fonction vérifiant les conditions équivalentes (2) ou (3). Marquons dans un système de coordonnées $Oxy$ les points $A_n (n = k, k+1, \ldots)$ de coordonnées $(n \log n, \log r_n)$; eu égard à la propriété (2), la pente de la droite $OA_n$ a pour limite

---

(1) *Voir* par exemple mes *Lectures on the general theory of integral functions*, th. XXXVIII, p. 136.

l'infini. On peut donc construire un polygone de Newton $\pi$, convexe vers les $y$ négatifs, ayant pour sommets certains des points $A_n$ (en nombre infini) et laissant les autres au-dessus de ses côtés ou sur ses côtés; la pente des côtés de $\pi$ va en croissant et tend vers l'infini. Si $A_n$ est un sommet de $\pi$ et $u_n$ la pente de $\pi$ à droite de ce sommet, on a

$$\log r_{n+p} \geqq \log r_n + pu_n \log n \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

donc *a fortiori*

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r_m} < \frac{1}{r_n} \frac{1}{n^{u_n} - 1}.$$

Nous allons en déduire une valeur approchée de la dérivée logarithmique $H(z)$ de $f(z)$ dans les couronnes $C_n$ d'équations

$$(4) \qquad r_n h \leqq r = |z| \leqq r_n n^{\frac{1}{2} u_n}.$$

où $h$ désigne un nombre donné indépendant de $n$ et supérieur à 1. Nous écrirons $H(z)$ sous la forme

$$H(z) = \frac{k-1}{z} + \sum_{k}^{n} \frac{1}{z - a_m} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{z - a_m}.$$

Dans la seconde somme $|z - a_m|$ est supérieur à

$$r_m \left(1 - n^{-\frac{1}{2} u_n}\right),$$

tandis que dans la première $z - a_m$ est égal à $z\left(1 + \frac{\theta}{h}\right)$ avec $|\theta|$ inférieur ou égal à 1, ce qui montre que, *en tout point de la couronne $C_n$ on a*

$$(5) \qquad H(z) = \frac{n}{z}\left(1 + \frac{\theta}{h-1}\right) + \frac{\varepsilon(z)}{z}$$

*avec*

$$|\theta| < 1, \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon(z) = 0\ (^1).$$

(1) L'égalité (5) reste valable même pour des fonctions ne vérifiant pas la condition (3). [*Voir* ma note *Sur la dérivée logarithmique de certaines fonctions entières* (*Nouv. Ann.*, t. XI, 1911.)]

**2.** Remarquons de suite que cette égalité (5) fournit une valeur asymptotique de $\log|f(z)|$ dans la couronne $C_n$. En intégrant $H(z)dz$ sur une circonférence $|z| = r$ de $C_n$, on obtient en effet

$$\log|f(z)| > \log M(r) - \pi\frac{h+1}{h-1}n;$$

mais il est bien connu que $\log M(r)$ croît plus vite que $\log r$, donc en tenant compte de l'égalité (2) on voit que le rapport

$$\log|f(z)| : \log M(r) \qquad (|z| = r),$$

tend vers 1 lorsque le point $z$ s'éloigne indéfiniment dans les couronnes $C_n$. Cette proposition est un cas particulier d'une proposition générale ([1]), nous en retiendrons cette conséquence : *quelque grand que soit le nombre donné $k$, $|f(z)|$ est supérieur à $r^k$ dans les couronnes $C_n$ de rang suffisamment élevé.*

**3.** Nous chercherons maintenant une valeur approchée de la dérivée $G(z)$ de $zH(z)$ en certains points des couronnes $C_n$, c'est en vue de cette recherche que nous avons introduit l'hypothèse (2). On a

$$-G(z) = \sum_k^{\infty} \frac{a_m}{(z-a_m)^2}.$$

Nous supposerons $z$ compris dans la portion $C'_n$ de $C_n$ dans laquelle

$$r > r_n n^{\frac{1}{4}u_n}$$

D'après le calcul fait plus haut, la somme des termes de $G(z)$ de rang supérieur à $n$, est inférieure à

$$\frac{2}{r}\,\frac{n^{\frac{u_n}{2}}}{n^{u_n}-1},$$

tandis que, pour $n > n_0$, la somme des $n$ premiers termes est moindre que

$$\frac{2nr_n}{r^2} < \frac{2n}{n^{\frac{1}{4}u_n}}\,\frac{1}{r},$$

([1]) *Voir* la note de la page 35.

ce qui montre que, *en tout point de* $C'_n$, *on a*

$$(6) \qquad |z\,G(z)| < n^{-\frac{1}{5}n_n}.$$

Une limitation inférieure de $z\,G(z)$ sera donnée par le développement de Laurent. On a

$$-z\,G(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_q}{z^q}$$

avec

$$b_q = q\sum_{k}^{n}(a_p)^q \qquad (q = 1, 2, \ldots),$$

$$b_0 = 0,$$

$$b_{-q} = q\sum_{n+1}^{\infty}(a_p)^{-q} \qquad (q = 1, 2, \ldots).$$

Les relations bien connues de Cauchy entre les coefficients et la valeur moyenne de $z\,G(z)$, montrent que sur chaque circonférence $|z| = r$ de la couronne on peut trouver un point au moins en lequel on a

$$(7) \qquad |z\,G(z)| > |b_q|\frac{1}{r^q},$$

quel que soit l'entier positif $q$.

4. Pour tirer un résultat intéressant de l'inégalité (7), nous utiliserons une proposition connue sur les approximations simultanées [1] qui permet d'assurer que, à chaque valeur de $n$ correspond un nombre $q$ inférieur ou égal à $\gamma^n$ pour lequel tous les termes de $b_q$ ont un de leurs arguments inférieur en valeur absolue à $\frac{2\pi}{\gamma}$. En supposant $\gamma$ supérieur à 4, le second membre de (7) sera supérieur à

$$qc\left(\frac{r_n}{r}\right)^q,$$

$c$ étant une constante qui dépend de $\gamma$. Le premier membre de (7) sera donc *a fortiori* supérieur au nombre obtenu en remplacant $q$

---

[1]) *Voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 241-243.

par $\gamma^n$ et, l'on voit qu'en un point de la circonférence $r = h' r_n$ on aura

$$|z\,G(z)| > c\,\gamma^n (h')^{-\gamma^n}.$$

Le second membre de cette inégalité sera supérieur à $r^{-\varepsilon_n}$, $\varepsilon_n$ tendant vers zéro lorsque $n$ croît indéfiniment pourvu que

$$(8) \qquad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\log_2 r_n} < \frac{1}{\log 4}.$$

Nous supposerons que cette dernière inégalité est vérifiée lorsque $n$ parcourt la suite complète des entiers positifs; la méthode indiquée au n° 1 montre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\log M(r)$ vérifie la condition (1). Pour les fonctions vérifiant cette condition, *on peut donc trouver dans la couronne* $C_n$ *un point en lequel*

$$|z\,G(z)| > \frac{1}{r^{\varepsilon_n}} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

En joignant ce point à un point de la couronne $C'_n$ par une ligne continue intérieure à $C_n$, on trouvera un point au moins en lequel on aura à la fois une limitation dans les deux sens pour $|z\,G(z)|$ et en groupant les divers résultats obtenus, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante :

I. *La fonction $f(z)$ vérifiant la condition* (1) *et le nombre $k$ arbitrairement grand étant donnés, il existe un point $z$ dans chaque couronne $C_n$ de rang suffisamment grand en lequel on a simultanément les inégalités*

$$|f(z)| > r^k, \qquad \left|\frac{z\,H(z)}{n} - 1\right| < \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{r^{\varepsilon_n}} < |z\,G(z)| < \frac{1}{n^k},$$

$\varepsilon_n$ *tend vers zéro lorsque $n$ croît indéfiniment et $n$ est inférieur à* $\log r$.

**5.** Une équation différentielle algébrique du second ordre, supposée vérifiée par la fonction entière $f(z)$, peut s'écrire sous la forme

$$\sum A_{p,q,s} |z\,H(z)|^p\, |z\,G(z)|^q\, z^s = \frac{1}{f(z)} P \left| z,\ H(z),\ G(z),\ \frac{1}{f(z)} \right|,$$

$P(u, v, w, t)$ étant un polynome d'un certain degré $\mu$. En un point $z$ vérifiant les conditions de l'énoncé I, le second membre de cette équation sera inférieur à $r^{-k+\mu+1}$ tandis que le terme mis en évidence dans le premier membre est supérieur au produit d'une constante par $r^{s-q\varepsilon_n}$. Il est loisible de supposer que $k$ a été choisi de telle façon que le second membre soit infiniment petit par rapport à chaque terme du premier membre. Considérons dans le premier membre le terme obtenu comme suit : nous prenons $s$ égal à sa valeur maximum $s_0$, puis parmi les termes ainsi obtenus ceux pour lesquels $q$ a la plus petite valeur possible, soit $q_0$ ; enfin, parmi les termes tels que $s = s_0$ et $q = q_0$, nous prenons celui pour lequel $p$ a la plus grande valeur, soit $p_0$. Le rapport d'un terme quelconque du premier nombre au terme ainsi choisi est à un facteur numérique près

$$z^{s-s_0} |z\,H(z)|^{p-p_0} |z\,G(z)|^{q-q_0},$$

son module est inférieur à $z^{s-s_0+\frac{1}{2}}$ si $s < s_0$ quels que soient d'ailleurs $p$ et $q$ ; si $s = s_0$ ce module est inférieur à

$$n^{-k(q-q_0)+P+1},$$

lorsque $q > q_0$, P désignant le maximum de $p$ ; enfin si $s = s_0$ et $q = q_0$, $p$ est inférieur à $p_0$ et le module du rapport est inférieur, au coefficient numérique près, à

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{p-p_0}.$$

Le terme mis en évidence est donc le terme prépondérant du premier membre, les autres termes sont infiniment petits par rapport à celui-là, il n'y a donc pas de réduction dans le premier membre qui est infiniment grand par rapport au second, l'équation est impossible. Ainsi :

II. *Les fonctions entières vérifiant la condition de croissance* (1) *ne peuvent être solutions d'équations différentielles algébriques du second ordre.*

6. L'égalité (5) est à rapprocher de la propriété connue de la dérivée logarithmique d'un polynome pour laquelle le rapport $\frac{zH(z)}{n}$, $n$ étant le degré, tend vers 1 ; au contraire la propriété de la fonction $zG(z)$ d'être infiniment petite, mais d'ordre infinitésimal nul par rapport à $\frac{1}{r}$, n'a pas d'analogue dans la théorie des polynomes, pour les polynomes $z^2G(z)$ tend vers $\sum_1^n a_m$ ou bien est d'ordre au moins égal à 1 en $\frac{1}{r}$. C'est grâce à cette non analogie que la démonstration de la proposition II a pu être faite par la méthode suivie ici. Il ne semble pas qu'il soit possible de mettre en évidence une fonction liée a la dérivée de $G(z)$ et qui se comporte d'une manière analogue par rapport à $G(z)$ (ce qui permettrait de conclure à l'impossibilité de satisfaire à une équation du troisième ordre).

7. Dans bien des cas particuliers il sera possible de tirer de l'inégalité (7) un résultat bien plus précis que celui qui a servi ci-dessus, ce qui permettra d'étendre la proposition II à des classes de fonctions vérifiant seulement la condition de croissance (3). Voici deux exemples assez généraux. Supposons qu'à partir d'une valeur de $n$ on ait $r_{n+1} > \alpha r_n$, $\alpha$ étant supérieur à 1, et prenons $q$ assez grand pour que $\alpha^q$ soit supérieur à 2, $b_q$ sera supérieur à $\frac{1}{2} r_n^q$ et par suite le module de $zG(z)$ sera supérieur à une constante $d$ pour $r = h' r_n$, la proposition I sera encore vérifiée, on aura même ici $|zG(z)| = \frac{1}{n^k}$. On aura un résultat analogue lorsque les arguments des zéros seront distribués de telle façon que, pour une valeur de $q$, les points $(a_p)^q$ se trouvent dans un angle d'ouverture inférieur à $\pi$, en particulier lorsque tous les zéros sont réels à partir d'un certain rang ou bien sont compris dans deux angles opposés de sommet à l'origine et d'ouverture moindre que $\frac{\pi}{2}$.

Je signalerai enfin un autre critérium permettant de reconnaître si le théorème II s'applique à une fonction donnée vérifiant la condition (3). Faisons la transformation

$$z = r_n Z, \qquad H_n(Z) = \frac{1}{n} z H(z).$$

Les fonctions $H_n(Z)$ sont holomorphes et bornées dans leur ensemble dans toute couronne $1 < R \leq Z \leq R'$, elles forment une famille normale de M. Montel. S'il existe une fonction limite qui ne soit pas constante, il existera une suite de fonctions $H_n(Z)$ dont les dérivées convergeront vers une limite non nulle $l$ en un point $Z_0$. En revenant à $H(z)$, on aura

$$\lim z_n G(z_n) = nlZ_0, \qquad z_n = r_n Z_0,$$

et l'énoncé I, donc II, seront valables comme ci-dessus. Lorsque toutes les fonctions limites des $H_n(Z)$ sont des constantes, ces constantes sont toutes égales à 1 puisque $H_n(Z)$ tend vers 1 lorsque Z croît indéfiniment, et il en résulte que $H_n(Z)$ tend uniformément vers 1 dans tout domaine intérieur à $|Z| > 1$. En repassant à la fonction $H(z)$ on voit que, pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (3), le théorème II est applicable sauf peut-être si $\frac{1}{n} zH(z)$ tend uniformément vers 1 dans les couronnes $C_n$ quel que soit le nombre $h$ qui sert à définir ces couronnes. J'avais cru pouvoir démontrer que, lorsque cette dernière circonstance se présente [1], $zG(z)$ vérifie une inégalité conduisant au théorème I, et c'est ce qui m'avait fourni l'énoncé, peut-être erroné, de ma note aux *Comptes rendus* signalée au début.

---

[1] C'est ce qui arrive dans le premier des deux cas signalés ci-dessus.