BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Le principe de Huygens

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 610-640

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__610_0>

LE PRINCIPE DE HUYGENS

(Conférence faite le 22 mai 1924);

Par M. Hadamard.

I.

C'est, on le sait, à la naissance même de la théorie ondulatoire de la lumière, que le Principe de Huygens s'est présenté. Il a été essentiel à l'une des premières et des plus mémorables étapes de cette théorie, l'explication du fait, en apparence si paradoxal dans la théorie ondulatoire, que la lumière se propage en ligne droite. Pour fournir cette explication, il fallait analyser l'effet produit par un signal de courte durée émis sensiblement en un point unique O et perçu par conséquent, en un point arbitraire A de l'espace, au bout d'un temps T égal au quotient de la distance OA par la vitesse c de la lumière. L'idée géniale de Christian Huygens consiste à considérer l'état du milieu entre O et A, non à l'instant initial ni à l'instant final, mais à un instant intermédiaire, et à substituer entièrement la considération de ce dernier état à celle de la perturbation primitive.

Au raisonnement ainsi entrevu par Huygens, Fresnel donna une forme déjà voisine de celle sous laquelle nous le présentons aujourd'hui. Mais ses idées n'ont cependant pas triomphé sans difficultés et l'on trouvera par exemple dans les *Leçons sur la Théorie mathématique de la lumière* de Poincaré une analyse des vives polémiques qui s'élevèrent alors entre lui et Poisson. Il fallut, pour élucider les plus importantes d'entre elles, la venue de Kirchhoff et de ses successeurs parmi lesquels, outre Beltrami et aussi Maggi, je nommerai Duhem et M. Volterra. La lecture d'ouvrages tels que *Hydrodynamique*, *Élasticité*, *Acoustique* de Duhem suffit à montrer combien la question est délicate.

C'est de cette question que je voudrais vous parler aujourd'hui. En vous en retraçant l'état, en vous indiquant comment les raisonnements de Fresnel ont pu être légitimés, et les objections de Poisson levées, j'espère vous montrer aussi, non seulement que plusieurs problèmes intéressants et importants continuent à se poser, mais encore, ainsi qu'il est normal dans une science comme la nôtre où tout se tient, que ces problèmes soulèvent ou éclairent nombre de questions intéressant divers domaines de l'Analyse.

Bien entendu, une grande partie des difficultés et des discussions qu'a soulevées cette question du Principe de Huygens provient de ce qu'elle était mal posée et de ce que les auteurs qui en ont traité n'attachaient pas tous la même signification au principe dont ils parlaient.

Si j'avais un tempérament d'historien et si je devais en supposer un à la majorité de ceux qui m'écoutent, je devrais évidemment, pour dégager cette signification, m'attacher aux textes en commençant par les plus anciens, citer et commenter le passage de Huygens, reproduire, comme l'a fait Poincaré dans sa *Théorie mathématique de la lumière*, les lignes essentielles de la polémique qui s'est engagée entre Fresnel et Poisson. Mais, quelque intérêt que doive exciter en nous le point de vue historique, et quelques belles victoires qu'ait remportées sur ce terrain l'érudition française, je crois voir autour de moi plus de mathématiciens proprement dits que d'historiens des mathématiques et, pour ma part, force m'est de confesser à cet égard une incapacité congénitale; lire est la chose que j'ai le plus mal sue de ma vie et que j'ai renoncé définitivement à apprendre. Dans ces conditions, au lieu de m'engager sur un terrain qui n'est pas le mien, je me contenterai de vous rappeler que le raisonnement de Huygens figure dans le Traité de la Lumière ([1]), en vous renvoyant, pour le reste, à l'ouvrage cité de Poincaré, après quoi, si vous le permettez, je prendrai les choses par le bout opposé : je prendrai l'argumentation sous sa forme aujourd'hui classique, après quoi il pourra m'arriver éventuellement de rechercher avec beaucoup de prudence, sinon de timidité, comment cette même argumentation se présentait chez ses premiers créateurs.

Nous aurons, ai-je dit, un certain nombre de distinguo à soulever et il en est un dont nous devons dire un mot avant même d'entrer dans le débat. Celui-ci est, en effet, dominé par la question d'onde, et l'on sait que cette notion est prise, suivant les cas,

---

([1]) Pages 21 et suivantes de l'édition des *Maîtres de la pensée scientifique*. Paris, Gauthier-Villars, 1920.

sous deux acceptions fort différentes. Celle dont part évidemment Huygens n'est autre que celle qui a été depuis précisée par Hugoniot. Dans un milieu que, pour fixer les idées, nous supposerons tout d'abord au repos, on produit à un instant donné un ébranlement mécanique ou électromagnétique en un certain point. A partir de ce moment, l'espace sera à chaque instant divisé en deux régions que nous appellerons 1 et 2, la première pouvant seule être influencée par la perturbation, tandis que dans la région 2 tout reste encore en repos. La surface de séparation de ces deux régions, ou *front d'onde*, sera d'ailleurs variable avec le temps, de sorte que, suivant les instants où on la considère, une même molécule fera partie de 1 ou 2 : il y aura *propagation de la première région vers la seconde*, c'est-à-dire que la région 2 tendra, lorsqu'on fera croître t, à comprendre de moins en moins de molécules, celles-ci étant progressivement englobées dans la région 1. Le moment où le front d'onde atteint une molécule déterminée se caractérise par une variation brusque dans l'allure de cette molécule (par exemple, par une variation brusque de son accélération, ou d'une de ses accélérations d'ordre supérieur, s'il s'agit d'un mouvement ordinaire).

Mais il est bien connu qu'en général les physiciens n'entendent pas les choses ainsi. La propagation par ondes s'applique, dans la plupart de leurs théories, à des mouvements périodiques, sinusoïdaux. Là, point de division du milieu en régions dont la situation respective varie progressivement avec le temps ; bien au contraire, on suppose un régime permanent établi. Point de variation brusque. Tout le phénomène s'exprime à l'aide de sinus ou de cosinus, fonctions parfaitement régulières dont les dérivées de tous ordres sont finies et continues.

L'intuition des physiciens leur a appris, tout en distinguant entre ces deux espèces de phénomènes, à en reconnaître la parenté. Pour l'analyste, ils apparaissent au premier abord comme profondément différents.

On conçoit cependant qu'un rapprochement s'établisse entre une quantité qui varie brusquement et une quantité qui subit des variations sinusoïdales, peu amples, mais extrêmement rapides ; et, puisque je me suis promis de vous signaler les divers développements mathématiques auxquels donne lieu le Principe de

Huygens, je dirai d'un mot que la traduction analytique de ce rapprochement éclaire l'étude de ce que M. Klein a appelé les *Mathématiques approchées*, celles dans lesquelles on tient compte de ce que rien ne nous est connu qu'avec une certaine erreur, et nous prouve que ces Mathématiques approchées doivent souvent s'inspirer, non des parties les plus simples, mais au contraire des parties les plus délicates des Mathématiques exactes. En tout cas, un tel rapprochement se montre pleinement opérant dans la théorie qui nous occupe : qu'il s'agisse d'ondes au point de vue d'Hugoniot ou d'ondes vibratoires, les calculs sont absolument parallèles, et cela souvent dans leurs moindres détails et dans leurs dernières conséquences.

Je n'aurais d'ailleurs pas insisté sur cette distinction, si elle n'était intervenue précisément dans la polémique entre Fresnel et Poisson. Ayant à répondre aux objections de Poisson, Fresnel crut trouver cette réponse dans le caractère vibratoire du mouvement propagé et dans le jeu, aujourd'hui classique, des interférences correspondantes. Conformément à ce qui vient d'être dit, ce fait n'avait pas en réalité, en l'espèce, l'importance que Fresnel lui attribuait, et la véritable explication à laquelle il aboutit peu après, ainsi que vous pourrez le lire dans l'ouvrage de Poincaré, s'applique tout aussi bien à ce que l'on nomme une « onde solitaire » et qui correspond à la conception d'Hugoniot, qu'à un système périodique d'oscillations.

Cette première question est donc vidée : quoiqu'il y ait assurément une distinction à établir entre les deux sens du mot *onde*, nous pourrons en général les confondre aujourd'hui en considérant d'ailleurs surtout le premier d'entre eux, auquel reste attaché le nom d'Hugoniot.

Ceci posé, nous avons dit que le Principe de Huygens fait intervenir trois instants successifs : le premier, t_0 où l'on se donne un ébranlement initial, un instant intermédiaire t_1 et un dernier instant t_2 où l'on se propose de calculer l'effet produit. Sous sa forme aujourd'hui classique, le raisonnement peut se décomposer de la manière suivante :

A. *Pour déduire d'un phénomène connu à l'instant t_0 l'effet produit à un instant ultérieur t_2, on peut commencer par* *calculer l'effet à un instant intermédiaire t_1, puis partir de celui-là pour en déduire l'effet en t_2.*

B. *Si la perturbation initiale à l'instant t_0 est localisée au voisinage d'un point déterminé* O, *son effet à l'instant t_1 sera nul partout, excepté au voisinage d'une sphère S_1 de centre* O *et de rayon $c(t_1 - t_0)$ en désignant par c la vitesse de propagation.*

C. *La perturbation initiale peut, au point de vue de son effet à l'instant final t_2, se remplacer par un système de perturbations ayant lieu à l'instant intermédiaire t_1 et convenablement distribuées sur la surface de la sphère* S_1.

Il y a donc là, on le voit, une manière de syllogisme dont A serait la majeure, B la mineure et C la conclusion.

Il conviendrait, semble-t-il, d'examiner ces trois propositions dans leur ordre naturel. Mais je suis décidément condamné aujourd'hui à prendre tout à rebours : car nous allons, si vous le voulez bien, commencer par la dernière d'entre elles, la conclusion.

A défaut de la logique, — ou de ce qui nous semble pour le moment être la logique — il faut dire que j'ai cette fois l'histoire pour moi. L'ordre historique en effet, après Huygens lui-même, Fresnel et Poisson, nous amène à aborder l'œuvre de Kirchhoff, dans laquelle, pour la première fois, furent soumis au calcul et véritablement serrés de près certains des points qui avaient préoccupé les trois premiers auteurs nommés il y a un instant.

Or, comme nous allons le voir, c'est à la proposition C qu'aboutit Kirchhoff, et cela sans passer à aucun moment par la majeure A ou la mineure B. Dès maintenant, par conséquent, nous voyons que le lien logique qui unit nos trois propositions n'est pas aussi étroit qu'il nous paraissait tout à l'heure : en effet, nous serons conduits à les considérer comme relativement indépendantes entre elles, et à porter sur elles des jugements très différents.

II.

Pour aborder la question analytiquement, il faut évidemment, et c'est ce que fait Kirchhoff, partir de la loi mathématique du phénomène. Dans les conditions où avait à se placer Huygens, cette loi est exprimée par l'équation des *ondes sphériques*, c'est-à-dire par l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Dans les conditions où avait à se placer Huygens, voici ce que cela veut dire : nous supposons que nous avons affaire à un milieu parfaitement homogène et isotrope, dans lequel, d'autre part, les résistances passives (telles que la viscosité) ne jouent aucun rôle et, enfin, abandonné à lui-même. Ce milieu sera l'éther s'il s'agit de la lumière; l'air ou tout autre gaz homogène, s'il s'agit de la propagation du son, à laquelle tout ce que nous disons aujourd'hui est applicable. Partout où les conditions précédentes seront toutes remplies, le phénomène dépendra d'une ou plusieurs quantités u, fonctions de x, y, z, t et vérifiant l'équation aux dérivées partielles (E). Le cas le plus simple est celui où le milieu remplit tout l'espace, autrement dit, s'il s'agit de l'éther, où il n'existe aucun corps matériel; nous pourrons, par exemple, supposer qu'il en est ainsi, et que l'éther est complètement abandonné à lui-même dans tout l'espace, *après* l'instant t_0 où nous aurons émis un signal lumineux (mais non pas *pendant* l'émission de ce signal, puisque alors l'éther cesse d'être abandonné à lui-même et que ses oscillations sont troublées).

Kirchhoff, se proposant d'établir le Principe de Huygens, et il est entendu qu'il s'agit pour le moment de la forme C de ce principe, avait à étudier un phénomène régi par l'équation des ondes sphériques, par conséquent, en somme, à intégrer cette équation.

Elle l'avait été une première fois, par Poisson, en 1819, dans le cas le plus simple dont nous avons parlé il y a un instant, celui où le milieu remplit l'espace tout entier et est abandonné à lui-même à partir de l'instant t_0, en supposant d'autre part qu'on se donne l'état du phénomène à cet instant initial t_0. Ceci se formule analytiquement comme étant la recherche d'une fonction inconnue u, solution de l'équation (E) et caractérisée en outre par les conditions suivantes relatives à $t = t_0$ (conditions « définies »)

$$(1) \qquad \begin{cases} u(x, y, z, t_0) = g(x, y, z), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t_0) = h(x, y, z), \end{cases}$$

en désignant par g et h deux fonctions données. C'est ce qu'on appelle un problème de Cauchy, et celui que s'était posé Poisson est un problème *bien posé;* c'est-à-dire que l'ensemble de l'équation indéfinie (E) et des conditions définies (1) détermine une fonction, et une seule, que Poisson obtient par une formule particulièrement simple et qui est dans toutes les mémoires.

Kirchhoff avait à se placer dans d'autres conditions. Il admet l'existence de centres de perturbation, ponctuels ou étendus, en lesquels l'équation aux dérivées partielles cesse d'avoir lieu. Pour cette raison, et aussi pour tenir compte éventuellement de la présence de corps susceptibles de modifier le phénomène, il ne suppose plus l'équation indéfinie vérifiée dans tout l'espace, mais seulement dans la région R de cet espace, qui est extérieure à une ou plusieurs surfaces fermées σ.

Kirchhoff a pu obtenir l'intégration dans ces nouvelles conditions. Or le résultat auquel il arrive s'interprète en disant que le phénomène qui se déroule ainsi dans la région R peut être considéré comme engendré par un système d'ébranlements produits à des instants convenables et avec des amplitudes convenables en des points convenablement choisis des surfaces σ. Ceci est, on le voit, la proposition C, sous une forme un peu plus générale, il est vrai : c'est la proposition C elle-même, si le phénomène à étudier est dû à une perturbation unique produite à l'instant t_0 en un point O et si l'on a pris pour σ une sphère de centre O.

Démontrer le Principe de Huygens sous la forme C n'a donc été, en ce cas, qu'intégrer l'équation différentielle des ondes sphériques.

Dès lors un problème se pose évidemment, celui de faire pour d'autres équations aux dérivées partielles ce qui vient d'être fait pour celle des ondes sphériques et de démontrer à leur égard par leur intégration le Principe de Huygens sous la forme C.

Il est clair en effet que la constitution du milieu ne sera pas toujours celle que nous avons supposée jusqu'ici et qu'alors l'équation aux dérivées partielles devra être modifiée en conséquence : par exemple, dans notre atmosphère terrestre, avec ses variations dues à l'altitude, la propagation du son dépendrait d'une équation différente. D'autres phénomènes physiques conduiront à d'autres équations encore.

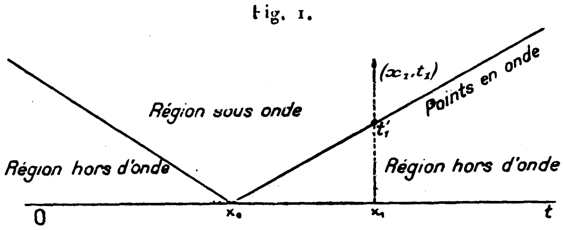
Voyons donc ce que l'on peut dire de ces nouvelles équations, en ce qui concerne leur intégration et, par conséquent, la propriété C, et même, tout d'abord, voyons comment se présente, pour elles, cette notion d'onde qui fait le principal objet de notre étude actuelle.

Considérons tout d'abord un câble télégraphique rectiligne parfaitement homogène dans toutes ses parties. Pour représenter la variation de l'état électrique le long d'un tel câble, il est évidemment commode, comme dans les graphiques de chemins de fer, de porter le temps en ordonnées et de tracer par conséquent un diagramme d'espace-temps à deux dimensions; le câble considéré à l'origine des temps sera représenté par une droite, l'axe des x, le même câble pris à l'instant $t = 1$ (par exemple, au bout de $\frac{1}{1000}$ de seconde), par une droite parallèle à la première et située à la distance 1, et ainsi de suite. On sait qu'une quelconque des quantités dont dépend l'état électrique — le potentiel par exemple, — satisfait à l'équation aux dérivées partielles (équation « des télégraphistes »)

$$(\mathcal{E}) \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial u}{\partial t} = C\frac{\partial^2 u}{dx^2},$$

où A, B, C désignent trois constantes positives. Ceci posé, supposons que le câble étant primitivement à l'état neutre (soit u identiquement nul) jusqu'à $t = 0$, on émette à cet instant un signal en un point déterminé x_0 du câble : la perturbation ainsi produite se propagera dans les deux sens avec une vitesse constante $\omega = \sqrt{\frac{C}{A}}$, autrement dit, par deux ondes dont la marche sera figurée sur notre graphique par deux demi-droites de coefficients angulaires $\pm \frac{1}{\omega}$. Si un point (x_1, t_1) de notre diagramme est sur une de ces deux droites, cela signifie qne l'onde qui propage notre perturbation atteint le point $x = x_1$ du câble précisément à l'instant t_1. Étant donné le point x_1 qui sera, par exemple, la position d'un poste récepteur, la condition précédente déterminera un certain instant t'_1 (correspondant à l'ordonnée de notre demi-droite) qui sera celui où le signal issu de x_0 à l'origine des temps sera perçu. Nous dirons que le point (x_1, t'_1) du diagramme est *en onde* avec $(x_0, 0)$. Pour t_1 inférieur à t'_1, le point (x_1, t_1) est en dehors de l'angle des demi-droites : on peut dire qu'il est *hors d'onde* avec le centre de perturbation initial (x_0, o) et dans ces conditions, le signal issu de ce dernier centre ne peut avoir aucun effet en (x_1, t_1), c'est-à-dire qu'à l'instant t_1, il ne peut avoir encore aucun effet au poste récepteur $x = x_1$. Enfin, un troisième cas est évidemment celui où le point (x_1, t_1) serait dans l'angle de nos deux demi-droites (soit $t_1 > t'_1$) ; il s'agit alors d'un instant t_1 *postérieur* à celui où l'onde qui propage le signal a passé au poste récepteur. Nous dirons, dans ce dernier cas, que le point (x_1, t_1) de notre diagramme est *sous onde* avec (x_0, o).

Fig. 1.



Si maintenant le câble n'était pas homogène, si ses propriétés électriques étaient variables (d'une manière continue) d'un point à un autre, l'équation aux dérivées partielles aurait une autre forme : la vitesse de la propagation des ondes serait variable avec x, et les lignes qui les figurent sur le graphique — ce qu'on appelle, en langage mathématique, les *caractéristiques* — seraient courbes et non plus droites. Néanmoins les définitions des notions de points en onde, hors d'onde et sous onde s'étendent immédiatement à ces nouvelles conditions.

Peut-on énoncer, pour de pareils phénomènes, la proposition C ? L'équation des télégraphistes, comme l'équation plus générale correspondant au câble hétérogène, appartiennent au type dit de Laplace. La méthode générale propre à l'intégration des équations de ce type avait été donnée avant même le travail de Kirchhoff, dans un célèbre Mémoire de Riemann. Les formules auxquelles conduit la méthode de Riemann peuvent, tout comme celle de Kirchhoff, être interprétées aisément de manière à en déduire, pour tous les phénomènes correspondants, notre propriété C.

Toutefois, cette interprétation n'est donnée explicitement ni par Riemann, ni même par ceux — j'entends Du Bois Reymond et

Darboux — auxquels la méthode de Riemann doit sa forme définitive, et qui n'avaient pas en vue cet aspect de la question. Le premier travail qui ait traité, au point de vue du principe de Huygens, une équation autre que celle des ondes sphériques, est le Mémoire fondamental de M. Volterra (*Acta mathematica*, t. 18) consacré à l'*équation des ondes cylindriques*

$$(e) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

laquelle s'applique aux petits mouvements d'un milieu à deux dimensions seulement, d'un milieu réduit à un plan. Ici encore, nous pourrons tracer des figures dans l'espace-temps, en considérant le temps comme une troisième coordonnée portée perpendiculairement au plan de la figure donnée. L'onde qui, à un instant déterminé t_0, part d'un point unique (x_0, y_0), se propage circulairement; à un instant ultérieur quelconque t_1, son front a la forme d'un cercle centré sur la perturbation primitive et de rayon proportionnel à $(t_1 - t_0)$. La surface engendrée dans l'espace-temps par ces cercles lorsque t_1 varie est un cône de révolution de sommet o (x_0, y_0, t_0) et d'axe parallèle à l'axe des t, ou c'est plutôt la « nappe d'avenir » de ce cône (nappe tournée vers les t positifs). Le point A (x_1, y_1, t_1) est *en onde* avec O s'il est situé sur cette nappe conique, c'est-à-dire si l'on a

$$d^2 = c^2(t_1 - t_0)^2$$

en désignant par d la distance des deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) du plan. A sera au contraire hors d'onde avec O si l'on a

$$d^2 > c^2(t_1 - t_0)^2 \qquad \text{(point extérieur à la nappe conique)}$$

et sous onde avec lui si l'on a

$$d^2 < c^2(t_1 - t_0)^2 \qquad \text{(point intérieur à la nappe conique).}$$

On notera que ces conditions peuvent être tout aussi bien interprétées en discutant la position du point O par rapport à celle du point A considérée tout d'abord; les deux points seront en onde, hors d'onde ou sous onde l'un par rapport à l'autre, suivant que O appartiendra, qu'il sera extérieur ou qu'il sera intérieur à une nappe conique de révolution ayant A pour sommet, nappe de passé cette fois, tournée vers les t négatifs, représentative d'une onde issue de A, mais suivie en remontant le cours du temps. Dans la théorie qui nous occupe, comme dans celle de la Relativité, deux points hors d'onde l'un par rapport à l'autre sont considérés comme n'existant pas l'un vis-à-vis de l'autre; il n'y a jamais lieu d'écrire une relation où ils figurent à la fois.

Il est clair que les notions que nous venons de définir et leur réciprocité s'étendent d'elles-mêmes à l'équation des ondes sphériques par laquelle nous avons commencé; il faudrait seulement pour les exposer se livrer à des incursions dans l'espace à quatre dimensions dont l'étude de l'équation des ondes cylindriques nous dispense.

Enfin l'étude des milieux anisotropes ou hétérogènes introduirait d'autres équations linéaires aux dérivées partielles, à coefficients variables en général et pour lesquels les ondes ne seraient plus sphériques ou circulaires, de sorte que leur marche ne serait plus figurée par des cônes à génératrices rectilignes. Cela n'empêcherait pas la distinction précédente entre points en onde, hors d'onde et sous onde d'exister, avec la propriété de réciprocité constatée dans les deux cas que nous avons examinés.

Nous nous rappellerons, toutefois, que les notions que nous venons de définir sont relatives à des points de l'espace-temps : pour leur donner un sens, il faut non seulement se donner deux points de l'espace, mais dire à quels instants on les considère.

S'inspirant à la fois de la méthode de Kirchhoff et de celle de Riemann, M. Volterra put intégrer l'équation des ondes cylindriques et la formule à laquelle il parvint met en évidence, pour cette équation, la propriété C.

Grâce aux méthodes créées par lui, les mêmes résultats ont pu, depuis, être très étendus à des cas plus généraux, par l'intégration des équations aux dérivées partielles correspondantes. Je n'ai pas à retracer ici la marche de ces méthodes d'intégration : disons seulement qu'elles s'inspirent, en premier lieu, de celle qui est suivie pour l'étude des fonctions harmoniques.

Or on sait que, dans le cas de trois variables, cette étude repose essentiellement sur l'emploi du potentiel élémentaire $\frac{1}{r}$, où r désigne la distance de deux points et, dans le cas de deux variables, sur l'emploi du potentiel logarithmique élémentaire $\log r$. Pour intégrer les équations aux dérivées partielles dont nous avons parlé dans ce qui précède, on a de même à introduire certaines quantités auxiliaires, fonctions de deux points (comme l'est le potentiel élémentaire). Par exemple, l'application de la méthode de Riemann exige, pour chaque équation aux dérivées partielles, la formation d'une fonction de ce genre. On peut d'ailleurs diriger le calcul de manière que la quantité ainsi introduite soit l'analogue exacte du potentiel élémentaire. Cette quantité, ou *solution élémentaire*, est susceptible (comme le potentiel élémentaire) de devenir infinie : elle le devient chaque fois que les deux points dont elle dépend sont *en onde*. Si le nombre m des variables indépendantes est impair (comme dans le cas de l'équation des ondes cylindriques), elle est de forme tout analogue à $\frac{1}{r}$, savoir

$$v = \frac{V}{\Gamma^p},$$

où $\Gamma = 0$ est la condition pour que les deux points soient en onde et où $p = \frac{m-2}{2}$. Si m est pair, il y a en général une complication de plus; il peut arriver que la solution élémentaire soit encore de la forme précédente; mais le plus souvent, au terme fractionnaire ainsi écrit, il faut ajouter un terme logarithmique, de sorte que la solution élémentaire est de la forme

$$v = \frac{V}{\Gamma^p} + \mathfrak{V} \log \Gamma,$$

V et $\mathfrak{V}$ étant toujours des fonctions finies et régulières.

Par un emploi convenable de la solution élémentaire ainsi définie, on arrive à étendre à toute équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type (type hyperbolique normal) qui est susceptible de se rencontrer dans les applications physiques et auquel appartiennent en particulier les équations des ondes sphériques et cylindriques, les calculs de Riemann, de Kirchhoff et de Volterra. Par conséquent aussi, le Principe de Huygens, sous sa forme C, est une propriété générale qui appartient à toutes les équations aux dérivées partielles de cette nature dès que l'on connaît la solution élémentaire; et l'on a même le moyen de former explicitement la distribution de centres actifs sur les surfaces σ qui remplacent une perturbation donnée quelconque créée à l'intérieur de ces surfaces.

Nous voilà donc fixés sur la forme C du principe. J'ai été obligé d'insister un peu plus qu'il n'aurait été strictement nécessaire jusqu'ici sur la méthode suivie, afin de préparer ce que nous avons maintenant à dire sur les deux autres propositions A et B.

III.

La proposition A, elle, — c'est la seule des trois — doit être considérée comme d'évidence immédiate. Elle n'est pas distincte du principe même de notre déterminisme scientifique. Ce principe exprime en effet que, connaissant l'état du monde à un instant déterminé t_0, on doit pouvoir en déduire l'état du monde à un instant ultérieur quelconque $t_0 + h$, où h est n'importe quel temps positif.

On peut donc aussi, connaissant l'état relatif à t_0, en déduire celui qui est relatif à l'instant $t_0 + h + k$; mais ce même état dont nous venons de parler doit aussi pouvoir (k étant positif) se calculer à l'aide de l'état à l'instant $t_0 + h$, lequel a été lui-même supposé calculable à partir de l'état en t_0. *Les deux modes de calcul doivent conduire au même résultat*, sans quoi il y aurait contradiction : c'est précisément cela qui constitue notre proposition A.

A est donc une sorte de truisme; mais ce n'est pas une raison pour que cette proposition ne doive pas attirer l'attention du mathématicien. Celui-ci, en effet, ne dédaigne pas les truismes, et la formulation analytique de celui qui nous occupe en ce moment est loin d'être sans intérêt et sans conséquences.

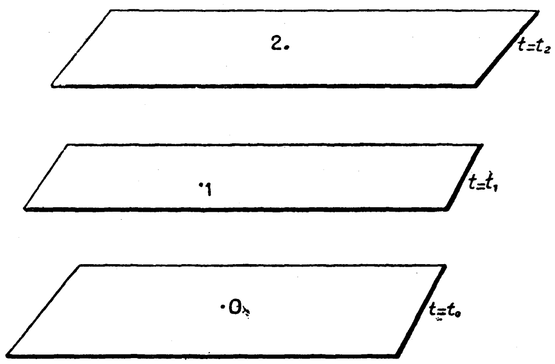
Il se rattache d'une manière tout à fait étroite à la notion de groupe. Il est clair en effet que le calcul par lequel de l'état en t_0, on passe à l'état en $t_0 + h$, constitue une transformation, laquelle dépend du paramètre h. La proposition A exprime que l'ensemble de toutes ces transformations, lorsque h prend toutes les valeurs positives possibles (et l'on pourrait même y joindre les valeurs négatives, tout au moins si l'on admettait qu'il y a réversibilité), constitue un *groupe;* la transformation du paramètre $h + k$ coïncide avec le produit des deux transformations de paramètres respectifs h et k.

Ce fait a été découvert pour la première fois en 1895 par M. Picard pour le cas où le phénomène est simplement régi par une équation différentielle ordinaire; puis un peu plus tard, en 1903, par M. Le Roux, pour le cas général où il s'agit d'une équation aux dérivées partielles. Dans le premier cas, on obtient un groupe ordinaire de Lie; dans le second, le groupe obtenu est d'un caractère nouveau, car il est composé d'opérations *fonctionnelles*.

Profitons maintenant de ce que, grâce à ce que nous savons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles, nous sommes renseignés sur la nature des opérations en question. Calculer l'allure ultérieure d'un mouvement, connaissant l'état initial à un instant déterminé t_0, c'est, au point de vue analytique, un problème de Cauchy, le même, précisément (au choix près de l'équation aux dérivées partielles) que s'était posé Poisson pour l'équation des ondes sphériques. Nous avons vu qu'un pareil problème se résout par des quadratures, une fois formée ce que nous avons appelé la solution élémentaire. La « majeure de Huygens » — je veux dire notre proposition A — exprime donc une propriété de cette solution élémentaire.

S'il s'agit de passer de l'état en t_0 à l'état en $t_2 = t_0 + h + k$,

Fig. 2.



on doit former la valeur de cette solution pour deux points 0 et 2 pris, l'un dans le plan $t = t_0$, l'autre dans le plan $t = t_2$ (*fig.* 2) valeur que j'appellerai v_{02}. De même, les deux opérations partielles de paramètres respectifs h et k, introduisent l'une la solution élémentaire v_{01} correspondant au point o et à un point 1 pris dans le plan intermédiaire $t = t_1 = t_0 + h$; la seconde, la solution élémentaire v_{12} formée avec ce même point 1 et le point 2. La « *majeure de Huygens* » *se traduit par une relation entre ces trois expressions* v_{01}, v_{12}, v_{02}. C'est un véritable *théorème d'addition* auquel satisfait la quantité v; mais c'est un *théorème d'addition intégral*, car, les points o et 2 étant donnés, on doit, pour obtenir une expression de v_{02}, faire varier le point 1 dans son plan et intégrer dans le domaine des positions possibles de ce point. Toute solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre admet un théorème d'addition intégral de cette espèce.

Ce n'est pas la seule circonstance où de tels théorèmes d'addition intégraux se présentent en Analyse. Un chapitre important de la Théorie des équations intégrales créé par M. Volterra, la Théorie de la composition des noyaux, est également une source de théorèmes de cette espèce. Il serait intéressant de comparer et de relier entre elles les deux voies ainsi ouvertes au calcul. Par l'une ou par l'autre, on arrive à des identités remarquables et parfois difficiles à établir directement.

Une des applications de ce théorème d'addition intégral consiste dans le prolongement analytique de la solution élémentaire. Il arrivera souvent en effet que les méthodes qui servent à construire celle-ci ne soient valables que dans un certain rayon, autrement dit, lorsque les deux points dont elle dépend ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre, lorsque, par exemple, le paramètre h dont il a été question tout à l'heure ne dépasse pas une limite déterminée H. Or le théorème d'addition intégral permet de s'affranchir d'une telle restriction, puisque, par la combinaison des opérations correspondant à deux valeurs du paramètre, toutes deux comprises entre o et H, il peut fournir le résultat pour une valeur de h comprise entre H et 2H; d'où l'on peut passer de même à des valeurs encore supérieures à celles-là, et ainsi de suite.

La possibilité de ce prolongement est un fait particulièrement remarquable lorsque, comme il arrive pour certaines formes du problème, la surface caractéristique le long de laquelle v doit devenir infini admet elle-même des singularités, ainsi qu'il arrive pour les ondes réfléchies qui présentent des caustiques. Même dans les régions où il en est ainsi, la méthode précédente continue à s'appliquer et permet de définir la solution demandée.

Je ne développerai pas davantage cette partie de mon sujet, d'abord parce que cet exposé sera déjà assez long tel qu'il est, ensuite parce que c'est déjà celle que je traite dans le Mémoire que la Société publie à l'occasion de la date actuelle. Je me contenterai donc de vous y renvoyer, à un point près dont je dirai un mot tout à l'heure, et je passerai à la troisième partie, à l'étude de la proposition B.

IV.

Cette proposition B, que nous pouvons appeler la « mineure de Huygens », est celle qui a été, à juste titre, la plus controversée des trois, et à mesure que nous l'examinerons, nous verrons de mieux en mieux combien était fausse l'idée, si naturelle au premier abord, de la faire concourir à la démonstration de la conclusion C.

Une perturbation étant, à l'origine des temps, localisée à un point unique A (j'entends dans l'intérieur d'une sphère infiniment petite ayant pour centre ce point), il est constant, comme nous l'avons vu, que l'onde qui la propage dans un milieu régi par l'équation (E) précédemment écrite, a pour front à un instant quelconque t_1 une sphère S_1 de rayon ct_1 et qu'à cet instant aucun effet n'existe à l'extérieur de ladite sphère, autrement dit, qu'aucun effet n'existe pour les points qui sont *hors d'onde* avec le centre de perturbation primitif. Mais la proposition B affirme qu'il n'en existe pas non plus à l'*intérieur* de la sphère, c'est-à-dire pour les points qui sont *sous onde* avec cette perturbation. S'il en est ainsi, on dira que les ondes régies par l'équation (E) ne *diffusent* pas.

Chose curieuse, Huygens ne paraît pas avoir cru aussi fermement à cette proposition qu'on l'a admis dans les polémiques qui ont suivi. Lorsqu'on se reporte à son texte [1], on voit que, pour évaluer l'effet produit à l'instant ultérieur t_2 par l'onde sphérique émanée à l'instant $t_0 = 0$ d'un point unique A, il la remplace, non

---

[1] Particulièrement *loc. cit.*, p. 22.

par de nouvelles ondes issues à l'instant t_1 des points de la surface de la sphère S_1 correspondante, mais par un système d'ondes sphérique issues de toute sorte de points de l'intérieur de S_1.

Il est vrai que ces nouvelles ondes sphériques, elles, sont bornées par lui aux surfaces des sphères correspondantes. Quant à l'effet final, il le considère sinon comme inexistant, du moins comme négligeable autre part que sur la surface de la sphère S_2 qui constitue le front de l'onde à l'instant t_2 : « Chacune de ces ondes, dit-il, ne peut être qu'infiniment faible, comparée à l'onde » — ce que nous appelons le front d'onde, — « à la composition de laquelle toutes les autres contribuent par la partie de leur surface qui est la plus éloignée du centre A. » Et plus loin : « ... Les ondes ... ne concourent point en un même instant à composer ensemble une onde qui termine le mouvement, que précisément dans la circonférence CE qui est leur tangente commune. » Et plus loin encore : « ... Les parties des ondes particulières qui s'étendent hors de l'espace ACE » — c'est-à-dire dans la figure considérée, qui restent à l'intérieur de la sphère — « étant trop faibles pour y produire de la lumière. »

Cette argumentation laisse évidemment le lecteur troublé, et nous ne savons trop si les portions d'onde considérées par Huygens comme négligeables le sont en effet. Poincaré, cependant, en se contentant de dire que cette argumentation ne résiste pas à une analyse rigoureuse, me semble bien sévère pour elle et je demande à en appeler de son jugement. Nous serions d'ailleurs plus portés encore aujourd'hui qu'il y a dix ans, à le trouver un peu trop radical, étant donnés les phénomènes avec lesquels nous nous sommes familiarisés entre temps. Les moins militaires d'entre nous ont en effet acquis des notions d'artillerie dont ils se seraient sans doute bien passés : ils savent que le même projectile dont le mouvement à travers l'air se traduit en général pour notre oreille par le sifflement donne lieu, pour un observateur et à un instant déterminés, au claquement, c'est-à-dire à un bruit d'explosion analogue à celui qui a accompagné le départ du coup et plus violent encore. Le sifflement et le claquement, si différents entre eux pour nos sens, ont donc une seule et même origine, les ondes sonores nées au contact de l'obus et de l'atmosphère qu'il fend; seulement, dans le premier cas, elles nous arrivent isolément, tandis que, le long de leur enveloppe, elles s'accumulent et déferlent en quelque sorte au grand dommage de notre tympan. Le claquement est au sifflement exactement ce que le mouvement final retenu par Huygens est à celui qu'il propose de négliger; et nous voyons qu'une telle accumulation d'ondes est capable de donner l'impression d'un phénomène physique nouveau, là où il n'y a en réalité qu'une différence du moins au plus. Cela tient certainement à ce que cette différence est infiniment grande. Dans le cas de Huygens comme dans le cas, tout à fait identique, du claquement, la densité d'énergie vibratoire est, au niveau de l'enveloppe, infiniment grande par rapport à ce qu'elle est en deçà.

Quittons maintenant le texte même de Huygens; venons à Fresnel et à Poisson, dont les discussions eurent précisément pour objet la proposition dont nous parlons. L'objection de Poisson est bien simple. Admettons, si on le veut, qu'il n'existe pas d'effet à l'intérieur du front d'onde pour l'instant t_1 et appliquons le raisonnement de Huygens à l'instant ultérieur $t_2 = t_1 + k$. Admettons encore, comme le veut Huygens, que les ondes sphériques issues, à l'instant t_1, des différents points de la sphère S_1, front d'onde à cet instant, sont sans effet là où elles ne s'accumulent pas, c'est-à-dire partout ailleurs que le long de leur enveloppe. Mais cette enveloppe ne se compose pas uniquement de la sphère S_2 de rayon $ct_2 = c(t_1 + k)$; elle comprend encore une seconde sphère S'_2 concentrique aux premières et de rayon $c(t_1 - k)$. Tous les raisonnements qui serviront à prouver l'existence d'un effet sensible sur une de ces sphères semblent devoir s'appliquer à l'autre. Voilà donc assurément des points — tous ceux de la sphère S'_2 — intérieurs à S_2 et en lesquels cependant il doit rester, à l'instant t_2, un effet de la perturbation primitive.

Pour prévoir immédiatement que cette objection, si forte qu'elle paraisse, n'est pas fondée, disons tout de suite qu'elle n'est nullement spéciale à la proposition B, que nous examinons actuellement, et que la même difficulté intervient, même si l'on suppose que cette proposition n'a pas lieu, c'est-à-dire si l'on admet qu'il puisse y avoir diffusion.

Reportons-nous aux considérations que nous exposions tout à l'heure à propos de la majeure de Huygens, soit en ce qui regarde l'équation des ondes sphériques, soit pour n'importe quelle autre équation aux dérivées partielles de type analogue. Je ferai la figure comme s'il s'agissait de l'équation des ondes cylindriques, quoique pour le raisonnement il vaille mieux, pour des raisons sur lesquelles je n'ai pas à insister en ce moment, porter son attention sur les équations à un nombre pair de variables indépendantes. Partons encore de la perturbation qui, à l'instant t_0, est localisée en un point O et dont l'effet se propagera par une onde qui s'étendra progressivement autour de ce point. Soit S_1 le front d'onde à l'instant $t = t_1$. Il y aura ou il n'y aura pas d'effet de diffusion dans la région de l'espace intérieure à S_1 ; mais assurément — cela ressort du calcul précédemment mentionné, celui qui aboutit à la conclusion C — il y aura un autre effet spécial le long de la surface S_1 elle-même. Nous avons ensuite (conformément au principe A) à étudier le contre-coup de tout ceci à l'instant ultérieur $t_2 = t_1 + k$. Or les ondes issues à l'instant t_1 des différents points de la surface S_1 auront une enveloppe composée de deux nappes, et qui, dans le cas général comme dans celui visé par Poisson, donnera à l'instant t_2 deux fronts distincts, un front externe qui n'est autre que celui de l'onde primitive de A et un front interne analogue ou identique à la sphère S'_2 de Poisson. Exactement comme dans le raisonnement de Poisson, le calcul prévoit, au premier abord, un terme spécial correspondant à ce front interne. Il faut bien évidemment qu'il n'y ait là qu'une apparence, que le terme spécial s'élimine, tout calcul fait, puisque les instants t_0 et t_2 étant donnés, l'instant intermédiaire $t = t_1$ peut être choisi arbitrairement, de sorte que le front interne en question aurait à volonté toutes sortes de positions à l'intérieur de S_1. Mais la vérification analytique de ce fait est une difficulté exactement du même ordre, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de diffusion, c'est-à-dire que la proposition B soit fausse ou vraie.

La polémique entre Fresnel et Poisson se poursuivit donc sur le point de savoir si et comment il est possible que les effets au front interne se détruisent. C'est l'explication de ce fait que Fresnel recherchait dans le caractère ondulatoire, sinusoïdal de la perturbation. Comme nous l'avons dit, la question n'est pas là.

Au reste, vous trouverez peut-être, comme moi, superflu de rechercher si la compensation dont il s'agit est concevable, alors que la vraie question est de savoir si elle a effectivement lieu et que la démonstration de ce second fait nous dispenserait évidemment de celle du premier.

Or le piquant de l'histoire est que cette démonstration était apportée par Poisson lui-même. On se demande comment, dans cette controverse, qui est de 1823, il ne fait aucune allusion à la formule qu'il avait établie en 1819 et qui résout entièremeut la question. C'est celle qui fournit l'intégrale générale de l'équation des ondes sphériques lorsqu'on se donne les valeurs de l'inconnue u et de sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de x, y, z pour $t = 0$. Pour obtenir, dans ces conditions, la valeur numérique prise par u au point A (x_1, y_1, z_1, t_1) de l'espace-temps, c'est-à-dire au point (x_1, y_1, z_1) et à l'instant t_1, on sait qu'on doit décrire, du point (x_1, y_1, z_1) comme centre, une sphère de rayon ct_1 : la valeur cherchée de u_A est alors obtenue à l'aide d'intégrales doubles étendues à la surface de cette sphère, et qu'on peut écrire explicitement à l'aide des seules données du problème (c'est-à-dire à l'aide de ce qui se passe pour $t = 0$).

Or cette sphère Σ, ainsi introduite par Poisson, n'est autre, on le devine, que le lieu des points de l'espace qui, considérés à l'instant $t = 0$, sont en onde avec A.

La réponse à la question que nous nous étions posée devient alors évidente. Si, le milieu étant primitivement au repos, la perturbation a eu lieu à l'instant O (ou plutôt à un instant infiniment peu antérieur $t = -\varepsilon$) uniquement au voisinage immédiat du point O, u et $\frac{\partial u}{\partial t}$, pour $t = 0$, seront en général identiquement nuls; ils ne seront différents de zéro qu'à l'intérieur d'une très petite sphère ayant pour centre ce point. Pour que les intégrales doubles qui figurent dans la formule de Poisson aient des éléments différents de zéro, et, par conséquent, que u_A soit différent de zéro, il est nécessaire que cette petite sphère rencontre la sphère Σ de Poisson, c'est-à-dire que (à un infiniment petit près) les points O et A soient *en onde*. S'ils sont *sous onde*, c'est-à-dire si la petite sphère dont nous venons de parler est intérieure à la sphère de Poisson, u sera nul en A, tout comme si les deux points étaient hors d'onde. Autrement dit, inversement, si nous considérons l'onde issue, à l'instant o, du point O (x_0, y_0, z_0), u, identiquement nul, au point (x_1, y_1, z_1) jusqu'à l'instant t'_1 où cette onde atteindra le point en question, pourra être différent de zéro pour $t = t'_1$, puisque les points (points d'espace-temps) (x_0, y_0, z_0, o) et (x_1, y_1, z_1, t'_1) seront en onde; mais il redeviendra et restera nul aux instants ultérieurs, parce qu'alors on aura des points d'univers qui seront sous onde avec le point O, siège de la perturbation initiale.

C'est précisément la proposition B annoncée, celle que Poisson contestait à Fresnel.

Il est à peine besoin de dire que le même fait se lit tout pareillement sur la formule obtenue par Kirchhoff.

Mais, ainsi fixés sur la question relative aux ondes sphériques, il ne nous convient pas de borner là notre curiosité. Nous avons à nous demander si les choses se passent de même lorsque l'équation aux dérivées partielles du problème est autre que notre équation primitive (E).

Il est clair qu'une première réponse ressortira de l'examen des équations traitées tout d'abord, celles de Riemann et celle de M. Volterra.

Cette réponse est négative. Cette fois, ce n'est pas uniquement au point de vue théorique que la question s'est présentée : elle a été soulevée de la manière la plus précise et la plus nécessaire par une application pratique, la transmission télégraphique. Cet effet résiduel à l'intérieur du front d'onde, qui disparaissait complètement dans le cas de Poisson et de Kirchhoff, se produit alors et les vices de fonctionnement qu'il occasionnait sur les lignes ont tout d'abord grandement embarrassé les ingénieurs télégraphistes. C'est alors que, chacun de son côté, Poincaré et M. Picard en ont fourni l'interprétation. Celle de M. Picard est particulièrement lumineuse. Si classique qu'elle soit devenue aujourd'hui, rappelons-la brièvement.

Un câble électrique étant supposé parfaitement homogène dans toutes ses parties, nous avons dit que le potentiel u, considéré comme fonction de l'abscisse x et du temps t, doit satisfaire à l'équation « des télégraphistes »

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial t} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

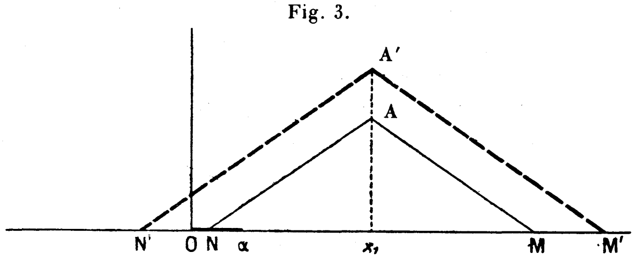
Cette équation relève de la méthode de Riemann et la fonction de Riemann a pu être aisément formée par M. Picard. Supposons alors qu'on donne, pour $t = 0$, une perturbation localisée à un très petit segment $(0, \alpha)$ du câble, c'est-à-dire que l'on assujettisse u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ à être nuls pour $t = 0$ en dehors du segment en question et que l'on se donne, plus ou moins arbitrairement, leurs valeurs à l'intérieur de ce segment. Soit à calculer, à l'aide de ces données, la valeur de u pour un instant (positif) donné $t = t_1$ et une abscisse donnée $x = x_1$, que, pour fixer les idées, nous supposerons également positive et même notablement plus grande que α, puisqu'il s'agit d'étudier un signal reçu à grande distance. Si, avec M. Picard, nous appliquons purement et simplement la méthode de Riemann, nous serons conduits à mener par le point $A(x_1, t_1)$ les deux caractéristiques

$$x + \omega t = \text{const.}, \qquad x - \omega t = \text{const.},$$

en désignant par ω la vitesse de propagation des oscillations électriques dans les conditions actuelles du problème. Si M et N sont les deux points où ces deux caractéristiques coupent respectivement l'axe des x, la méthode de Riemann fournit la valeur cherchée u_A comme une somme de trois termes, l'un en u_M, le second en u_N, pendant que le troisième est une intégrale définie étendue au segment MN. Le premier de ces termes est assurément nul, le point M étant évidemment extérieur au seul segment $(0, \alpha)$ de l'axe des x où les données soient différentes de zéro.

Le second peut être au contraire différent de zéro. Si, considérant un point déterminé du câble, c'est-à-dire supposant x_1

Fig. 3.



donné une fois pour toutes, nous donnons à t_1 des valeurs positives et croissantes, ce second terme devient différent de zéro à un moment déterminé t'_1 ou, plus exactement (si t'_1 a la signification indiquée précédemment) $t'_1 - \frac{\alpha}{\omega}$, celui où le point correspondant sera *en onde* avec la perturbation donnée. Ceci n'est autre chose que la réception du signal télégraphique, réception dont le moment est bien celui de l'émission, décalée du temps $\frac{x_1}{\omega}$ nécessaire à sa propagation.

Mais à partir de ce moment-là, et lorsque l'on continue à faire croître t_1, commence aussi à intervenir le troisième terme qui est le terme intégral. Bientôt $\left(\text{au bout du temps très petit } \frac{\alpha}{\omega}\right)$ ce troisième terme reste seul, puisque, alors, le point (x_1, t_1) a cessé d'être en onde avec le signal primitif, c'est-à-dire que la réception de ce signal a cessé. Or à ce moment, ce troisième terme (terme de diffusion), qui fait intervenir non plus des points en onde avec le point A', mais des points *sous onde* avec lui, ce troisième terme reste différent de zéro; il constitue l'*effet nuisible* des télégraphistes, par lequel les transmissions suivantes sont troublées.

La présence expérimentalement constatée de cet effet nuisible est donc toute naturelle : on peut même en calculer, en fonction des données, la valeur et par conséquent rechercher le mode d'émission du signal le plus propre à en diminuer l'importance.

L'examen des résultats obtenus par M. Volterra conduit à des conclusions tout analogues. Ayant à intégrer l'équation des ondes cylindriques dans une portion de l'espace-temps à trois (et non plus quatre) dimensions, toute semblable à celle que considérait Kirchhoff, M. Volterra arrive lui aussi — à des singularités près sur lesquelles il n'y a pas lieu d'insister en ce moment — à représenter le phénomène par l'action de centres fictifs distribués sur les courbes à l'extérieur desquelles il se place. Mais cette fois, ces centres n'agissent plus seulement lorsqu'ils sont en onde avec le point A, ils agissent aussi lorsqu'ils sont sous onde avec lui. Là encore, comme dans l'exemple précédent, une perturbation localisée au voisinage immédiat d'un point O de l'espace-temps — j'entends encore de l'espace-temps à trois dimensions seulement — fait sentir son action en un point quelconque, non seulement au moment précis de l'arrivée de l'onde correspondante, mais indéfiniment après ce moment; l'onde laisse un effet résiduel, et un de nos confrères a pu dire qu'il est bien heureux que l'espace dans lequel nous vivons ait trois dimensions : car s'il n'en avait que deux, et que, par conséquent, la propagation du son y soit régie par l'équation des ondes cylindriques, nous entendrions encore — très étouffés, rassurez-vous — tous les bruits qui se sont produits depuis la naissance du monde.

Nous voici donc amenés au véritable jugement que nous devons porter sur la mineure de Huygens. Bien loin qu'elle puisse servir de fondement à la proposition C, elle est loin d'être vraie au même titre qu'elle. Elle n'est ni d'évidence immédiate comme A, ni de validité générale comme C, pour toutes les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre et, par conséquent, pour tous les phénomènes correspondants. Elle est une propriété particulière de l'équation des ondes sphériques.

Mais à la suite de cette constatation, nous voyons se poser devant nous toute une série de problèmes. En premier lieu, et bien évidemment, nous devons nous demander quelles sont les équations aux dérivées partielles qui satisfont, elles aussi, à la mineure de Huygens, c'est-à-dire pour lesquelles la propagation des ondes a lieu sans diffusion, sans effet résiduel.

S'il s'agit seulement de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour cette absence de diffusion, la réponse est assez simple.

Il faut d'abord exclure toutes les équations à un nombre impair de variables indépendantes (telles que l'équation des ondes cylindriques); toutes, sans exception, donnent lieu à diffusion. Il en est de même lorsque le nombre n des variables indépendantes est égal à 2.

Prenons maintenant le nombre m pair et au moins égal à 4. Il n'en résultera nullement qu'il n'y ait pas diffusion. Considérons par exemple l'*équation des ondes sphériques amorties*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathrm{K}u = 0$$

et proposons-nous de trouver la solution u telle que, pour $t = 0$, u soit égal à une fonction donnée g de x, y, z et $\frac{\partial u}{\partial t}$ à une autre fonction donnée h des mêmes variables. On effectuera la même construction qu'avait effectuée Poisson pour l'équation (E), c'est-à-dire que (x_1, y_1, z_1, t_1) étant le point de l'espace-temps où l'on veut calculer la valeur numérique de u, on décrira, du point (x_1, y_1, z_1) comme centre, la sphère de rayon ct_1. La sphère Σ ainsi décrite servira encore de domaine d'intégration pour des quadratures portant sur les données g et h; mais cette fois, ces quadratures seront de deux espèces : les unes, des intégrales doubles étendues comme dans le premier cas, à la surface de la sphère; les autres, des intégrales *triples* étendues à tout l'*intérieur* de la même sphère, c'est-à-dire à ceux qui sont *sous onde* avec (x_1, y_1, z_1, t_1). Cela tient à ce que, pour la nouvelle équation que nous considérons en ce moment, la solution élémentaire contient un terme en $\log\Gamma$, en désignant par $\Gamma = 0$ l'équation de la sphère, au lieu que celle de l'équation (E) se réduit à $\frac{1}{\Gamma}$.

La condition nécessaire et suffisante pour l'absence de diffusion pour une perturbation entièrement arbitraire, *est que*, *m étant pair*, *la solution élémentaire ne contienne pas de terme logarithmique*.

Ceci résout jusqu'à un certain point la question. Mais autre chose est d'indiquer, comme nous venons de le faire, une condition nécessaire et suffisante, autre chose de former toutes les équations qui satisfont à cette condition. Nous en connaissons une, l'équation (E), et le même fait aura lieu pour les équations analogues à 6, 8, ... variables. Il en sera de même évidemment pour toutes celles qu'on en déduit par des transformations évidentes : changement de variables indépendantes, multiplication de l'inconnue ou du premier membre de l'équation par un facteur. De telles équations ne doivent pas être considérées comme essentiellement distinctes des premières.

Existe-t-il d'autres cas que ceux-là, cas assurément tout exceptionnels pour lesquels notre mineure B soit vérifiée? Il n'a pas encore été répondu à cette question. Ce qui précède en fait d'ailleurs pressentir la difficulté, puisque, si une équation déterminée répond à la question, l'analyse qui la fera découvrir devra fournir en même temps toutes celles qui en dérivent par une quelconque des transformations ci-dessus mentionnées.

A ce titre, cette question est liée à l'étude des transformations ponctuelles des équations aux dérivées partielles et des invariants correspondants, c'est-à-dire aux travaux de M. Cotton et aussi de M. Levi-Cività. En même temps, elle fait intervenir, et éclairera probablement d'un jour nouveau, une grande théorie classique de Géométrie, celle des lignes géodésiques.

Mais d'autres points de vue encore réclament notre attention.

Revenons au cas de Riemann, celui de $m = 2$. Il y a alors toujours diffusion se traduisant par l'existence, dans la région qui est *sous onde* et non plus en onde avec la perturbation initiale, d'une *intégrale résiduelle*, en général différente de zéro. Pour l'équation la plus simple, celle des cordes vibrantes, ou, ce qui revient au même, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

cette intégrale résiduelle se réduit à une constante (qui peut éventuellement être nulle, et dont la valeur dépend de la forme de la perturbation génératrice). Plus généralement, les recherches classiques de Darboux (*Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II) conduisent à se demander s'il n'existe pas des équations appartenant à la catégorie indiquée, dont l'intégrale résiduelle ne dépende que d'un nombre fini de constantes arbitraires, ou pour lesquelles cette intégrale vérifie nécessairement une équation linéaire aux dérivées partielles distinctes de la proposée.

La réponse est simple : pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que l'équation proposée soit intégrable par la méthode de Laplace*, c'est-à-dire que la suite de Laplace se termine au moins dans un sens. C'est une conséquence d'un théorème par lequel M. Goursat a appris à caractériser les équations de Laplace. Comme ce théorème, la conséquence actuelle caractérise ces équations par une propriété intrinsèque de leurs solutions et non par une méthode déterminée que nous avons pu imaginer pour les obtenir.

En dehors des équations intégrables par la méthode de Laplace, l'intégrale résiduelle ne se présente pas sous une forme aussi particulière. Serait-elle alors aussi générale que l'intégrale générale elle-même? Autrement dit, une solution quelconque de l'équation peut-elle être considérée comme étant une intégrale résiduelle?

Sûrement non. Notons d'abord qu'en pratique les deux éléments de l'intégrale générale, savoir l'intégrale résiduelle et celle qui correspond au contraire au passage du front d'onde, se distingueront d'abord par leur ordre de grandeur. N'oublions pas que cette intégrale résiduelle était précisément celle que Huygens proposait de négliger comme infiniment faible, et nous sommes à nouveau amenés à voir là une idée qui n'est pas déraisonnable. Si nous reprenons, par exemple, l'étude de la transmission télégraphique, nous voyons que l'effet nuisible, qui se mesure par une intégrale définie étendue au segment (o, α), siège de la perturbation initiale, est de l'ordre de α, tandis que le signal proprement dit ne contient pas cette quantité en facteur; on pourrait donc rendre l'effet nuisible aussi petit qu'on le désirerait par rapport à l'effet utile si l'on pouvait abréger sans limite la durée de l'émission. Pareil fait se présente dans tous les autres exemples. Prenons, pour fixer les idées, celui de l'équation des ondes sphériques amorties, et supposons que la perturbation initiale soit localisée dans une petite sphère de rayon α. Si cette sphère est traversée par la sphère de Poisson, nous aurons un terme de front d'onde qui sera une intégrale double, et qui, comme tel, sera de l'ordre de α^2; si, au contraire, la petite sphère est tout entière sous onde, c'est-à-dire à l'intérieur de la sphère de Poisson, nous aurons exclusivement l'intégrale résiduelle qui, en sa qualité d'intégrale triple, sera de l'ordre de α^3, et par conséquent, si α est très petit, beaucoup plus faible que la précédente. C'est bien au fond, sous une autre forme, l'idée exprimée par Huygens.

Indépendamment de ce premier criterium, lequel ne joue pas si l'on ne connaît pas l'ordre de grandeur de la perturbation initiale ou celui du terme de front d'onde, nous connaissons, tout au moins, un premier caractère essentiel qui appartient nécessairement à l'intégrale résiduelle, mais non à l'intégrale générale. On sait que les équations du type elliptique à coefficients analytiques, — l'équation des potentiels, par exemple — ont toutes leurs intégrales analytiques; mais il n'en est pas de même pour les équations hyperboliques (celles qui sont compatibles avec l'existence d'ondes), lesquelles admettent toujours des intégrales non analytiques.

Or, contrairement à l'intégrale générale, *l'intégrale résiduelle est toujours analytique* (si, bien entendu, il en est ainsi pour les coefficients de l'équation) ; les raisonnements classiques donnés à cet égard dans la Théorie du potentiel s'appliquent sans modification en ce qui la concerne.

Reste à savoir à quelles conditions une solution analytique de l'équation peut être considérée comme une intégrale résiduelle. Toujours pour $m = 2$, l'examen des formules classiques auquel conduit la formule de Riemann, montre que la question se ramène à l'étude d'une équation intégrale de première espèce. Elle nous obligerait d'ailleurs à considérer de telles équations sous un jour un peu différent de celui sous lequel on les a le plus souvent envisagées jusqu'ici.

La Théorie des équations intégrales de première espèce est, dans un sens, élucidée par des travaux bien connus de tous, ceux de M. Picard et ceux auxquels ils ont donné naissance. Par un emploi heureux des connaissances que nous avons acquises sur les équations intégrales de seconde espèce et la Théorie connexe des fonctions fondamentales, on obtient un système de conditions nécessaires et suffisantes pour la résolubilité de l'équation.

Or malgré la fécondité dont a fait preuve, par les résultats obtenus, le point de vue ainsi adopté, on peut se convaincre aisément qu'il y aurait lieu de ne pas s'y borner, et que la connexion étroite qu'il établit entre les deux espèces d'équations intégrales, tout avantageuse qu'elle soit, pour le moment, en nous permettant d'utiliser dans un domaine inexploré l'important ensemble de renseignements acquis dans un domaine voisin, n'est pas par ailleurs sans inconvénients. Les deux domaines sont profondément différents. A première inspection d'une équation de Fredholm, on s'aperçoit qu'il est essentiel de faire parcourir à la variable principale x, celle qui apparaît en dehors du signe $\int$, le même intervalle exactement qu'on fait parcourir, sous le signe $\int$, à la seconde variable (variable d'intégration) y, puisque ces deux quantités figurent comme arguments d'une même fonction.

Rien de pareil n'a lieu pour une équation de première espèce (tout au moins si le noyau est dépourvu de singularités et si les limites sont fixes); les deux intervalles, l'intervalle d'intégration et celui dans lequel on considère la variable principale x, sont sans rapport entre eux. On peut à volonté les supposer soit identiques, soit distincts; il suffit pour cela d'un changement de variable que l'on peut opérer arbitrairement sur x et arbitrairement aussi sur y. En thèse générale, il y aura lieu de considérer ces intervalles comme différents.

Ceci doit d'autant plus attirer notre attention que, par contre, la nature du problème change profondément avec la relation qui existe entre les deux intervalles en question. Si le problème est possible et déterminé, par exemple, pour un certain choix de l'intervalle (α, β) d'intégration et de l'intervalle (a, b) parcouru par x, il deviendra impossible si l'on diminue le premier intervalle ou si l'on augmente le second, et indéterminé si l'on fait l'inverse, de sorte que, à des valeurs données de α, β, a peut correspondre une valeur parfaitement déterminée de b pour laquelle le problème est bien posé.

Quelques auteurs (surtout, à ma connaissance, M. Bateman) ont considéré déjà les équations de première espèce sous ce point de vue. C'est celui qui s'impose à nous dans l'application qui nous occupe aujourd'hui. Dans cette dernière, les deux intervalles dont nous venons de parler sont, en principe, différents et sans relation entre eux.

Après nous être demandé quelles pouvaient être les propriétés communes à toutes les intégrales résiduelles d'une telle équation, quelles que soient les perturbations initiales qui leur ont donné naissance, retournons la question. On peut rechercher comment il faut choisir la perturbation initiale, et si l'on peut la choisir, de manière que l'intégrale résiduelle s'annule, lorsqu'il n'en est pas ainsi pour une perturbation initiale arbitraire.

Ceci est encore une question d'équations intégrales de première espèce, mais cette fois c'est l'équation homogène que l'on a à résoudre. Ce nouveau problème appelle d'ailleurs les mêmes observations que le précédent.

Il est, on le remarquera, le plus voisin de la pratique; c'est lui que suggère l'application télégraphique qui nous a intéressés tout à l'heure. La découverte la plus classique obtenue dans cette voie, le mode d'émission sinusoïdal inventé par lord Kelvin pour la *télégraphie sous-marine*, n'est évidemment pas sans relation avec l'explication tentée par Fresnel pour l'absence de front interne et de diffusion dans les ondes sphériques, et fondée sur le caractère ondulatoire de la perturbation initiale; et cette relation, qu'il y aurait sans doute lieu d'examiner de plus près, nous montre une fois de plus que, dans les intuitions d'un Huygens ou d'un Fresnel, même lorsque nous ne sommes pas conduits à les accepter telles quelles, il y a toujours quelque chose à retenir.

Tous ces problèmes se posent également pour m supérieur à 2. On notera que les équations dont l'intégrale résiduelle dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires, ou encore satisfait à une équation aux dérivées partielles distincte de la proposée, constitueraient une catégorie spéciale analogue aux équations à deux variables pour lesquelles la suite de Laplace se termine, même si cette cironstance ne donnait pas lieu à une méthode particulière d'intégration.

Nous en aurions fini, sinon avec tous les aspects essentiels de la question, du moins avec tous ceux qui se présentent au premier coup d'œil, si le cas des obstacles solides ne venait ouvrir à la recherche un nouveau chapitre dont nous devons dire un mot. On trouve, dans l'Ouvrage de Duhem : *Hydrodynamique*, *Élasticité*, *Acoustique*, un exemple qui semble contredire notre mineure de Huygens, alors qu'il s'agit bien pourtant de l'équation des ondes sphériques. Duhem considère une sphère pulsante, dont le centre fixe sera, par exemple, placé à l'origine des coordonnées et dont le rayon subira, pendant un certain temps θ, des oscillations infiniment petites : il étudie les petits mouvements engendrés par ces oscillations dans le milieu aérien homogène où la sphère est supposée immergée. Or, si, au bout du temps θ, la sphère rentre définitivement dans le repos (et cela avec retour du rayon à sa valeur initiale), il n'en sera pas en général ainsi pour le milieu environnant, même après que les ondes sphériques, nées au cours de la pulsation, auront fini de passer.

Cette contradiction apparente se dissipe si l'on tient compte du fait que, s'il se présente des obstacles solides, et par conséquent des régions où l'équation aux dérivées partielles cesse d'être vérifiée, le problème d'Analyse par lequel se traduit correctement la question physique de la détermination du mouvement n'est plus le même que tout à l'heure, ceci correspondant à ce qu'il faut faire intervenir, non seulement les ondes directes, mais les ondes réfléchies. Ce nouveau problème relève d'ailleurs de considérations analytiques assez analogues aux précédentes; on aura à introduire une nouvelle quantité analogue à ce que nous avons appelé la solution élémentaire (mais devenant infinie sur l'onde réfléchie et non sur l'onde directe) et suivant que cette quantité contiendra ou non un terme logarithmique, il y aura ou non diffusion des ondes réfléchies. Les problèmes seront ensuite les mêmes que pour les ondes directes, mais avec l'influence d'un élément nouveau, la forme de la surface réfléchissante.

Mais n'allongeons pas la liste déjà si étendue de tous ces problèmes. S'ils se posent en si grand nombre, c'est, nous le voyons maintenant, en raison du caractère tout particulier de cette mineure de Huygens. Alors que la majeure A est un de ces « principes directeurs de la connaissance » suivant la terminologie des philosophes — en dehors desquels nous ne saurions penser et raisonner; alors que la conclusion C est une propriété commune à toute la classe de phénomènes qui nous a occupés aujourd'hui, la mineure B, beaucoup plus cachée, différencie ces phénomènes les uns des autres. Elle peut être vérifiée ou pas l'être, suivant celui d'entre eux que l'on considère en particulier.

C'est à ce titre que, mystérieuse encore aujourd'hui, elle reste une partie de la Science de demain.