J. DRACH

Sur deux classes remarquables de congruences W.

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 434-467
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__434_1>

SUR DEUX CLASSES REMARQUABLES DE CONGRUENCES W;

PAR M. JULES DRACH.

INTRODUCTION.

I. Les congruences W sont congruences de droites où les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

Parmi ces congruences, que l'on sait définir avec quatre solutions d'une équation de Laplace à invariants égaux, en existe-t-il qui découpent sur la surface moyenne un réseau conjugué, c'est-à-dire qui soient aussi congruences de Ribaucour? Dans une Thèse récente, M. Vaulot s'est proposé l'étude des congruences WR; il a ramené leur détermination à celle des systèmes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = M\xi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \sigma\xi, \tag{2}$$

qui possèdent *trois* solutions communes linéairement distinctes, ou encore à celle des équations (1) pour lesquelles le déterminant Δ

$$\Delta = \left| \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} \frac{\partial \xi_1}{\partial v} \right|$$

formé avec trois solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3, de (1) est encore une solution de (1). Le problème général conduit à deux équations aux dérivées partielles du second ordre à deux inconnues et paraît inabordable. J'ai réussi à traiter complètement le cas où les équations (1) et (2) possèdent *quatre* solutions communes linéairement distinctes.

L'équation (2) s'écrit dans ce cas

$$U \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + V \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = N \xi,$$

où N s'obtient par une quadrature en partant de M. Deux cas essentiellement distincts sont à envisager :

1° Pour $U = V = 1$, l'équation (1) est l'équation *harmonique* générale, $M = f(u + v) - g(u - v)$ et les solutions communes à (1) et (2) sont les quatre solutions harmoniques relatives aux fonctions $f + h$, $g + h$ où h est une constante arbitraire.

Les éléments ξ_1, ξ_2, ξ_3 qui permettent de définir la congruence WR dépendent linéairement de douze constantes dont neuf correspondent à une transformation affine. La définition de la surface moyenne étant invariante par une transformation affine, on a seulement trois constantes essentielles.

La surface (A) de Darboux, lieu du point de coordonnées $\frac{\xi_1}{\Delta}$, $\frac{\xi_2}{\Delta}$, $\frac{\xi_3}{\Delta}$, où Δ est une quatrième combinaison linéaire des solutions harmoniques, est du second degré; on sait qu'elle correspond à la surface moyenne de la congruence WR par plans tangents parallèles. Cette surface moyenne S_y est ici une *surface de translation* et les tangentes à l'une des courbes de translation de chaque système coupent le plan de l'infini suivant une conique. La surface S_x rapportée à ses asymptotiques, qui correspond à la surface moyenne par orthogonalité des éléments, est aussi de translation et possède la même propriété.

2° Lorsque U, V ne sont pas constants, on peut former des identités

$$M\,du\,dv = f'(u_1 - v_1)\,du_1\,dv_1 = [\Phi(u_2 + v_2) - \Psi(u_2 - v_2)]\,du_2\,dv_2,$$

où l'on a posé

$$du_2 = \frac{du}{\sqrt{U}}, \qquad du_1 = \frac{du}{U'}, \qquad \ldots.$$

La détermination de U, V, M est ainsi ramenée au problème classique traité par M. Kœnigs, des *éléments linéaires de révolution réductibles à la forme de Liouville*. Les tableaux donnés par l'éminent géomètre peuvent être immédiatement utilisés.

A chacune des équations harmoniques *spéciales* (1), que l'on forme ainsi (avec les variables u_1, v_1 ou u_2, v_2), correspond une équation (2) qui dépend de constantes nouvelles, dont le nombre peut aller jusqu'à 6 dans le cas d'un $ds^2 = M\,du\,dv$, à courbure constante et qui possède avec (1) quatre solutions communes linéairement distinctes. Par exemple, si l'on part de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\, \partial v_1} = \frac{m(1-m)}{(u_1 - v_1)^2}\,\xi,$$

on obtient pour (2) l'équation

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} F(u_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial u_1}[F'(u_1) - 1] + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2} F(v_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial v_1}[F'(v_1) - 1] - N\xi = 0,$$

où $F(u_1)$ est un polynome quelconque du quatrième degré et où N peut s'écrire

$$\frac{1}{4}N = m(1-m)\left\{ 2\frac{F(u_1) + F(v_1)}{(u_1 - v_1)^2} + \frac{F'(v_1) - F'(u_1)}{u_1 - v_1} + \frac{1}{6}[F''(v_1) + F''(u_1)] \right\} + h.$$

La détermination de ces solutions communes dépend généralement d'un système linéaire du quatrième ordre à coefficients rationnels en u_1, v_1, mais en raison des transformations qu'admet (1) on peut réduire F à une forme canonique. Il y a plus : si ξ *est une solution quelconque de* (1), *c'est-à-dire de* $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = M\xi$, *le premier membre de* (2) $\sigma = U\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + V\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - N\xi$ *est une solution nouvelle de* (1). C'est la généralisation d'une propriété connue de l'équation harmonique *générale*.

Les solutions communes à (1) et (2) peuvent être algébriques ou transcendantes en u_1, v_1 ; la surface (A) correspondante n'est plus nécessairement algébrique. L'étude complète du système (1), (2) au point de vue analytique semble présenter quelque intérêt.

II. Une autre classe de congruences W remarquables est formée de celles *dont la surface moyenne est un plan.*

M. U. Sbrana dans un travail déjà ancien [1] avait donné pour les définir en coordonnées cartésiennes une équation du troisième ordre. En reprenant la question j'ai obtenu les résultats suivants :

Si l'on forme la congruence (Δ) en menant par les divers points P d'un plan, qui correspond à une surface *génératrice* (S) par orthogonalité des éléments, des droites Δ parallèles à la normale à (S) au point correspondant M, on doit écrire que les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale de (Δ). Il semble que cela puisse être obtenu de deux façons : l'étude de la première hypothèse conduit à une équation du troisième ordre pour (S), qui exprime que *les lignes* $s^2 - rt =$ const. *sont asymptotiques sur* (S). En intégrant cette équation et déterminant les nappes focales de (Δ), on constate que l'une d'elles se réduit à une courbe. On a donc traité ici la *détermination des surfaces génératrices* (S) *de manière que l'une des nappes focales de* (Δ) *soit une courbe.* J'ai montré que pour toutes ces surfaces (S), *les asymptotiques de l'autre système peuvent se déterminer par une quadrature en partant de l'équation cartésienne.*

L'équation du second ordre $s^2 - rt =$ const. donne le cas particulier des surfaces (S) pour lesquelles les deux nappes focales de (Δ) sont des courbes planes quelconques situées dans des plans parallèles au plan moyen (P).

Dans la deuxième hypothèse on retrouve d'abord simplement l'équation de M. U. Sbrana, que j'ai remplacée par une équation cartésienne du deuxième ordre

$$\frac{r}{s} = \Phi\left(\frac{s}{t}\right),$$

Φ demeurant arbitraire.

---

(1) U. Sbrana. *Le congruence* W *con superficie media piana* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIII, 1902, p. 169-184).

Si l'on transforme cette équation, en prenant pour variables u, v les paramètres des asymptotiques, on peut lui donner une forme sous laquelle elle exprime que *l'élément linéaire*

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2,$$

où A *et* C *sont fonction l'un de l'autre, convient au plan.*

Le problème précédent est ainsi rapproché du problème de Weingarten :

La détermination des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonction l'un de l'autre se ramène à mettre l'élément linéaire de la *sphère* sous la forme $A^2 du^2 + C^2 dv^2$, où A et C sont fonction l'un de l'autre.

Cette interprétation permet d'indiquer des relations entre A et C, et par suite des formes de Φ, pour lesquelles on sait trouver *toutes* les solutions. Les plus intéressantes sont : 1° la relation $A = C^m$ qui donne pour $m + 1 = 0$ l'équation cartésienne

$$4(s^2 - rt) + t^2 = 0$$

et pour m quelconque l'équation

$$4ms^2 + rt(m-1)^2 = 0$$

que l'on ramène toutes deux à l'équation des télégraphistes $\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = Z$; 2° la relation $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{C^2} = 1$ qui convient à un plan rapporté à un *système orthogonal de coniques géodésiques ;* l'équation cartésienne correspondante est transcendante et s'écrit

$$8\sqrt{s^2 - rt} = t\left(e^{\frac{4s}{t}} - e^{-\frac{4s}{t}}\right)$$

Elle correspond à l'équation transcendante découverte par Weingarten, qui l'a conduit aux surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

La connaissance *a priori* des systèmes orthogonaux du plan formés de coniques géodésiques donne les surfaces (S) solutions de cette équation rapportées à leurs lignes asymptotiques. Une autre méthode, où l'on met en évidence les *variables caractéristiques*, conduit simplement à l'équation $\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0$.

Nous avons pu alors transformer, *de manière générale*, l'équation qui détermine u en x, y de manière que

$$\frac{du^2}{\omega^2} + \frac{dv^2}{\varphi^2(\omega)} = 4\,dx\,dy$$

(et de laquelle tout résulte), par l'introduction de *variables caractéristiques* α, β et l'amener à la forme, à invariants égaux,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{1}{8}\,\frac{\omega(\varphi'^2 + \varphi\varphi'') - \varphi\varphi'}{\varphi'\sqrt{\omega\varphi\varphi'}}\left(\frac{\partial Z}{\partial\alpha} - \frac{\partial Z}{\partial\beta}\right) = 0,$$

où ω est lié aux variables α, β par

$$\frac{\beta-\alpha}{2} = \int\sqrt{\frac{\varphi'}{\omega\varphi}}\,d\omega.$$

Ainsi la détermination des congruences W à surface moyenne plane se ramène en dernière analyse à *l'intégration d'une équation harmonique particulière*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = F(\alpha-\beta)\,\theta,$$

où la forme de la fonction F ne dépend que de la forme de Φ dans l'équation

$$\frac{r}{s} = \Phi\left(\frac{s}{t}\right),$$

ou encore de la relation entre A et C dans le ds^2 plan

$$A^2\,du^2 + C^2\,dv^2.$$

L'équation harmonique en question s'intègre d'ailleurs par des intégrales définies quand on a préalablement intégré l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = F(\lambda)\,\theta \quad [1].$$

I. — Les congruences W qui sont en même temps congruences de Ribaucour.

1. Une congruence R, ou de Ribaucour, est une congruence de droites dont les développables découpent un réseau conjugué sur

---

[1] Une partie de ces résultats a été communiquée à l'Académie des Sciences, *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, Paris, 4 juin 1923.

la surface moyenne. Les congruences W, ou de Weingarten, sont d'autre part celles pour lesquelles les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale. Dans une Thèse récente (1), M. Vaulot s'est proposé l'étude des congruences WR qui possèdent à la fois les deux propriétés précédentes : leur détermination a été réduite par lui à un problème d'Analyse que nous allons d'abord indiquer.

On définit de manière générale une congruence R en partant d'une surface S_x rappportée à ses lignes asymptotiques, qui sera donnée par les formules de Lelieuvre en partant de trois solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3 de l'équation à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = M \xi, \tag{1}$$

c'est-à-dire que les coordonnées x_1, x_2, x_3 du point (x) de S_x satisfont aux conditions

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\left(\xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial v}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots$$

La surface S_y la plus générale qui correspond à S_x par orthogonalité des éléments est le lieu du point (y) dont les coordonnées y_1, y_2, y_3 sont données par

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} = -\xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial v} = \xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où λ est une quatrième solution, quelconque, de l'équation (1), et l'on obtient la congruence R en menant par le point (y) une parallèle Δ à la normale de S_x au point (x), c'est-à-dire une droite de paramètres directeurs ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Les coordonnées des deux points focaux (z) et (t) de la droite Δ sont alors

$$z_i = y_i + \lambda \xi_i, \qquad t_i = y_i - \lambda \xi_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$\frac{\partial z_i}{\partial u} = 2\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z_i}{\partial v} = 2\xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial v}; \qquad \frac{\partial t_i}{\partial u} = -2\xi_i \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \frac{\partial t_i}{\partial v} = -2\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial v}.$$

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, 1923.

Formons en partant de là l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface F_z : on sait que les développables d'une congruence découpent sur les deux nappes de la surface focale un réseau conjugué ; l'équation cherchée sera donc

$$\left| \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \; \frac{\partial z}{\partial u} \; \frac{\partial z}{\partial v} \right| du^2 + \left| \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \; \frac{\partial z}{\partial u} \; \frac{\partial z}{\partial v} \right| dv^2 = 0,$$

où les coefficients de du^2 et dv^2 sont des déterminants construits avec les dérivées indiquées de z_1, z_2, z_3. Cette équation donnera immédiatement avec les mêmes notations

$$8\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial v}\left[\lambda \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \; \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \xi \right| du^2 + \frac{d\lambda}{dv} \left| \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \xi \right| dv^2 \right] = 0.$$

L'équation correspondante pour la deuxième nappe focale F_t, lieu du point (t), s'en déduira en permutant u et v et changeant λ en $-\lambda$.

Elle est donc

$$-8\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial u}\left[\lambda \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right| dv^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right| du^2 \right] = 0.$$

Si l'on veut que la congruence R soit aussi W, c'est-à-dire que les asymptotiques se correspondent sur F_z et F_t, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$(\Sigma_0) \qquad \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \; \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \xi \right| \times \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right| = -\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v}}{\lambda^2} \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right|^2.$$

2. C'est cette condition (Σ_0) que nous allons transformer en suivant la méthode de M. Vaulot.

Les quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3 peuvent évidemment être déterminées par un système de trois équations (à une transformation linéaire près)

$$(X) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = A \dfrac{\partial \xi}{\partial u} + B \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + C\xi, \qquad \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = A_1 \dfrac{\partial \xi}{\partial u} + B_1 \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + C_1\xi, \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = M\xi \end{cases}$$

et la condition (Σ_0) donne simplement, entre les coefficients, la relation

$$(\Sigma) \qquad BA_1 = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v}}{\lambda^2}.$$

D'autre part, le système (X) possédant trois solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3 linéairement distinctes est complètement intégrable : en écrivant l'identité des dérivées troisièmes $\frac{\partial^3\xi}{\partial u^2\partial v}$, $\frac{\partial^3\xi}{\partial u\,\partial v^2}$ calculées de deux manières différentes, on obtient entre les coefficients A, B, C, A_1, B_1, C_1 et M les relations nécessaires et suffisantes

$$(\Omega)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial v} = \dfrac{\partial B_1}{\partial u} = M - BA_1, \\ \dfrac{\partial B}{\partial v} + BB_1 + C = 0, \qquad \dfrac{\partial A_1}{\partial v} + AA_1 + C_1 = 0, \\ \dfrac{\partial M}{\partial u} = \dfrac{\partial C}{\partial v} + AM + BC_1, \qquad \dfrac{\partial M}{\partial v} = \dfrac{\partial C_1}{\partial u} + B_1 M + A_1 C. \end{cases}$$

Les deux premières équations s'intègrent immédiatement si l'on tient compte de la condition Σ; elles deviennent en effet, puisque l'on a

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\partial v} = M\lambda, \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\partial v},$$

d'où l'on conclut

$$A = \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{\lambda} + f(u), \qquad B_1 = \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\lambda} + g(v).$$

Mais si l'on observe que (Ω) a, ainsi que (Σ), une signification indépendante du choix des variables u, v et que, d'autre part, une transformation $u_1 = \varphi(u)$, $v_1 = \psi(v)$ change la forme des coefficients A, ..., M, on reconnaît aisément qu'*un choix particulier des variables u et v permet de prendre* $f(u) = g(v) = 0$, c'est-à-dire qu'on peut écrire simplement

$$A = \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial u}}{\lambda}, \qquad B_1 = \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\lambda},$$

d'où l'on conclut $AB_1 = BA_1$, ou encore

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \omega.$$

Les deux premières équations du système (X) donnent alors

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = \omega\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} + \sigma\xi$$

avec $\sigma = C - \omega C_1$ et le système formé par les équations

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = M\xi \tag{1}$$

et (2) admet les trois solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3.

3. Cette condition que le système (1), (2) possède trois solutions distinctes suffit à assurer la correspondance des asymptotiques sur F_z et F_t.

Si l'on pose

$$H = \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right|,$$

on trouve d'abord l'identité

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} = MH + \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \; \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \; \xi \right|,$$

d'où l'on peut conclure que la condition précédente est équivalente à celle qui exprime que H est encore une solution de (1).

Comme d'autre part

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left| \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right| = AH, \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} \; \xi \right| = B_1 H,$$

les expressions de A et de B_1 montrent que l'on a nécessairement $H = k\lambda$, k désignant une constante.

Ainsi la solution λ à l'aide de laquelle a été formée la surface moyenne S_y est telle que

$$k\lambda = \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right|$$

On peut d'ailleurs supposer $k = 1$, ce qui revient à remplacer la congruence WR par une congruence homothétique. Il n'y aura donc dans les congruences WR pas d'autres arbitraires que celles qui figurent dans ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Les remarques précédentes permettent de réduire l'équation différentielle des asymptotiques pour F_z et F_t, donnée plus haut, à la forme simple

$$\omega \, du^2 + dv^2 = 0,$$

commune aux deux surfaces.

La condition que le système

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = M\xi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \sigma\xi \tag{2}$$

possède trois solutions linéairement distinctes ξ_1, ξ_2, ξ_3 *est donc nécessaire et suffisante pour que ces solutions et*

$$\lambda = \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} \xi \right|$$

[qui est alors une quatrième solution de (1)] *définissent la surface moyenne* S_y *d'une congruence* WR.

C'est le résultat obtenu par M. Vaulot. Il en a tiré diverses conséquences particulières pour lesquelles nous renvoyons à son travail. Nous allons montrer qu'il est possible de *trouver tous les cas où le système* (1), (2) *possède, non pas trois, mais quatre solutions linéairement distinctes.*

Au sujet du problème général, nous nous bornerons ici aux remarques suivantes :

Les conditions pour que (1) et (2) aient *trois* solutions communes peuvent s'écrire en ω, M, σ ; elles ne conduisent pas aisément à des équations à une seule fonction inconnue.

On peut déduire du système (Ω) signalé plus haut, en posant

$$A = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad B_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \qquad B\lambda = \beta, \qquad A_1\lambda = \alpha_1,$$

le système suivant.

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial v^2} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + \lambda \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial u^2} + \frac{\alpha_1}{\lambda} \frac{\partial \beta}{\partial v} + \lambda \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}\right) = 0$$

avec

$$\alpha_1 \beta = \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Cette dernière relation permet de poser

$$\beta = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

et l'on obtient ainsi, à l'aide de λ, les deux dérivées

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}.$$

Quand λ est fixé, μ dépend au plus de quatre constantes, puisque toutes ses dérivées troisièmes sont connues.

II. — Congruences WR attachées a l'équation harmonique générale.

4. *Nous allons chercher les conditions pour que le système*

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = M\xi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \sigma\xi \tag{2}$$

possède quatre solutions linéairement distinctes.

L'équation (1) dérivée en u et en v donne

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial v} = M\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial u}\xi, \qquad \frac{\partial^3 \xi}{\partial u \partial v^2} = M\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v}\xi.$$

On a d'autre part, en dérivant (2) par rapport à u, une seconde expression de $\frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial v}$

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2 \partial v} = \omega\frac{\partial^3 \xi}{\partial v^3} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \sigma\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}\xi;$$

d'où il résulte

$$\omega\frac{\partial^3 \xi}{\partial v^3} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \sigma\frac{\partial \xi}{\partial v} - M\frac{\partial \xi}{\partial u} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}\right)\xi = 0. \tag{3}$$

Cette équation donne, si $\omega \neq 0$, l'expression de la dérivée $\frac{\partial^3 \xi}{\partial v^3}$. Ainsi la solution du système (1), (2) dépend au plus de quatre constantes : les valeurs initiales de

$$\xi, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}.$$

Elle aura cette généralité quand le système (1), (2), (3) sera complètement intégrable. Il faut et il suffit pour cela que les expressions réduites de $\frac{\partial^4 \xi}{\partial v^3 \partial u}$ qu'on peut déduire de (3) et de l'équation antérieure qui donne $\frac{\partial^3 \xi}{\partial u \partial v^2}$ soient identiques. Nous obtenons en égalant les coefficients de

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \xi$$

les quatre conditions

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \omega}{\partial v}}{\omega}\right) = 0,$$

$$M \frac{\frac{\partial \omega}{\partial v}}{\omega} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sigma}{\omega}\right) + 2 \frac{\partial M}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}}{\omega} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\omega}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} \frac{\frac{\partial \omega}{\partial v}}{\omega} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u}}{\omega}\right) + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} = 0.$$

La première d'entre elles donne immédiatement $\omega = -\frac{U}{V}$, en désignant respectivement par V et par U des fonctions des seules variables v et u. Si l'on écrit alors l'équation (2) sous la forme symétrique

$$U \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + V \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = N \xi, \tag{2'}$$

en posant $N = \sigma U$ les conditions précédentes prennent la forme symétrique

$$\frac{\partial N}{\partial u} = 2 V \frac{\partial M}{\partial v} + M V', \qquad \frac{\partial N}{\partial v} = 2 U \frac{\partial M}{\partial u} + M U', \tag{4}$$

la dernière s'écrivant

$$\frac{\partial^2 M U}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(V \frac{\partial M}{\partial v}\right). \tag{5}$$

On observera tout de suite que la condition d'intégrabilité des équations (4) qui donnent N

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(2 V \frac{\partial M}{\partial v} + M V'\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(2 U \frac{\partial M}{\partial u} + M U'\right)$$

conduit à remplacer (5) par l'équation symétrique

$$\frac{\partial^2 M V}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(U \frac{\partial M}{\partial u}\right). \tag{6}$$

En résumé, M est déterminé par le système de deux équations

$$\frac{\partial^2 MU}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(V\frac{\partial M}{\partial v}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 MV}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(U\frac{\partial M}{\partial u}\right) \tag{6}$$

et l'on obtient ensuite N, avec une constante additive, par une quadrature.

5. Examinons d'abord le cas singulier où les équations (5) et (6) se réduisent à une seule : si $UV \neq 0$ cette équation unique sera du second ordre en M et la condition pour une seule équation sera que l'addition de (5) et (6) qui donne

$$U'\frac{\partial M}{\partial u} + V'\frac{\partial M}{\partial v} + (U'' + V'')M = 0$$

conduise à une identité. Il faut donc que U' et V' soient nuls et un changement linéaire des variables u et v, qui modifie naturellement M et N, permet de prendre $U = V = 1$.

L'équation unique en M est alors

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial v^2};$$

elle donne

$$M = f(u+v) - g(u-v).$$

On trouve immédiatement

$$N = 2[f(u+v) + g(u-v) + h],$$

où h désigne une constante arbitraire que l'on peut regarder comme provenant du remplacement de f par $f + h$, et de g par $g + h$, qui ne change pas M.

Le système (1), (2) est ici

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = [f(u+v) - g(u-v)]\xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 2[f(u+v) + g(u-v) + 2h]\xi.$$

On reconnaît dans la première équation *l'équation harmonique générale*. Si l'on se reporte à la théorie classique de cette équation

(G. Darboux, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, 2^e série, Chap. IX) ; on voit aisément que les solutions du système sont des combinaisons linéaires des quatre solutions *harmoniques*, qui sont le produit d'une fonction de $(u+v)$ par une fonction de $(u-v)$.

En posant

$$\xi = \varphi(u+v)\,\psi(u-v)$$

l'équation harmonique donne

$$\frac{\varphi''}{\varphi} - f = \frac{\psi''}{\psi} - g$$

et la seconde équation

$$\frac{\varphi''}{\varphi} - f + \frac{\psi''}{\psi} - g = 2h.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = f + h, \qquad \frac{\psi''}{\psi} = g + h,$$

c'est-à-dire que φ et ψ sont données par l'intégration de deux équations différentielles linéaires du second ordre, renfermant le paramètre arbitraire h.

Pour chaque valeur déterminée de h, on peut faire entrer h dans f et dans g en modifiant ces dernières, mais si l'on fixe M, c'est-à-dire la différence $f-g$, N dépend nécessairement d'une constante nouvelle h.

La détermination de toutes les congruences WR qui correspondent à une fonction donnée M exige donc l'intégration des équations

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = f + h, \qquad \frac{\psi''}{\psi} = g + h$$

quel que soit le paramètre h. Les recherches de l'auteur, résumées ailleurs (¹), où il a déterminé toutes les formes de f pour lesquelles l'équation $\frac{\varphi''}{\varphi} = f + h$ peut s'intégrer par quadratures, trouveront ici une nouvelle application.

Si l'on veut simplement étudier les propriétés géométriques des

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Paris, 6 janvier 1919.

congruences WR, on peut non seulement fixer la valeur de h, prendre par exemple $h = 0$, mais encore partir des solutions φ, ψ pour définir f et g. Les quatre solutions harmoniques du système (1), (2) sont alors

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\Phi'\Psi'}}, \qquad \theta_2 = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi'\Psi'}}, \qquad \theta_3 = \frac{\Psi}{\sqrt{\Phi'\Psi'}}, \qquad \theta_4 = \frac{\Phi\Psi}{\sqrt{\Phi'\Psi'}}$$

où Φ est arbitraire en $(u+v)$, Ψ arbitraire en $(u-v)$, et les fonctions f et g sont respectivement les *invariants projectifs* de Cayley

$$-2f = \{\Phi, u+v\} = \frac{\Phi'''}{\Phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)^2,$$

par exemple, $\frac{1}{\sqrt{\Phi'}}$ et $\frac{\Phi}{\sqrt{\Phi'}}$ désignant les deux solutions de l'équation $F'' = Ff$.

Nous rappellerons encore que si l'on pose

$$\xi' = \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} - 2[f(u+v) + g(u-v) + 2h]\xi,$$

ξ' est en même temps que ξ une solution de l'équation harmonique (1) : les solutions harmoniques de (1) sont donc celles pour lesquelles ξ' se réduit à zéro.

Les solutions harmoniques θ_i sont liées par la relation quadratique évidente

$$\theta_1\theta_4 = \theta_2\theta_3.$$

Les congruences WR attachées à l'équation harmonique générale peuvent donc être obtenues en prenant pour ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois combinaisons linéaires distinctes des quantités θ_i, soit

$$\xi_1 = a_1\theta_1 + \ldots + a_4\theta_4,$$
$$\xi_2 = b_1\theta_1 + \ldots + b_4\theta_4,$$
$$\xi_3 = c_1\theta_1 + \ldots + c_4\theta_4.$$

6. Calculons le déterminant $\left| \frac{\partial\xi}{\partial u} \; \frac{\partial\xi}{\partial v} \; \xi \right|$ qui doit, d'après notre analyse, être une quatrième solution λ de l'équation harmonique.

En posant $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$, on trouve d'abord

$$\lambda = \left| \frac{\partial \xi}{\partial u} \; \frac{\partial \xi}{\partial v} \; \xi \right| = -2 \left| \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \; \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \; \xi \right|$$

et si l'on observe que les θ_i sont des produits d'une fonction de α par une fonction de β, on en peut conclure que les dérivées $\frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \theta_i}{\partial \beta}$ sont proportionnelles aux θ_i. Dans le développement du déterminant λ on n'a donc qu'à associer les éléments des colonnes relatifs à trois θ_i différents, c'est-à-dire que $\frac{-\lambda}{2}$ est une somme de déterminants

$$\left| a_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha}, \quad a_k \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta}, \quad a_l \, \theta_l \right| \quad (i \neq k \neq l),$$

qui se réduisent à

$$\theta_l \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha} \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} \left| a_i \quad a_k \quad a_l \right|.$$

On peut ajouter qu'un même déterminant numérique (au signe près) se trouve associé à tous les éléments qui dérivent du précédent par permutation des indices (i, k, l) entre eux, de telle sorte que l'ensemble de ces termes donne le produit

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ b_i & b_k & b_l \\ c_i & c_k & c_l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta} & \theta_i \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} & \theta_k \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_l}{\partial \beta} & \theta_l \end{vmatrix}$$

Il n'y a donc à calculer que les quatre déterminants du type

$$\Omega_{i,k,l} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_i}{\partial \beta} & \theta_i \\ \frac{\partial \theta_k}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_k}{\partial \beta} & \theta_k \\ \frac{\partial \theta_l}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_l}{\partial \beta} & \theta_l \end{vmatrix}$$

chacun d'eux étant caractérisé par l'indice *exclu*.

Ce calcul, fait en tenant compte des relations

$$\theta_1\theta_4 = \theta_2\theta_3,$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\theta_1\frac{\Phi''}{\Phi'}, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} = \theta_2\left(\frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi'}\right), \qquad \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\theta_3\frac{\Phi''}{\Phi'},$$

$$\frac{\partial\theta_4}{\partial\alpha} = \theta_4\left(\frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi'}\right);$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} = -\frac{1}{2}\theta_1\frac{\Psi''}{\Psi'}, \qquad \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} = -\frac{1}{2}\theta_2\frac{\Psi''}{\Psi'}, \qquad \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta} = \theta_3\left(\frac{\Psi'}{\Psi} - \frac{1}{2}\frac{\Psi''}{\Psi'}\right),$$

$$\frac{\partial\theta_4}{\partial\beta} = \theta_4\left(\frac{\Psi'}{\Psi} - \frac{1}{2}\frac{\Psi''}{\Psi'}\right),$$

donne les résultats suivants :

$$\Omega_{1,2,3,} = \theta_1\theta_2\theta_3\frac{\Phi'\Psi'}{\Phi\Psi} = \theta_1, \qquad \Omega_{2,3,4,} = -\theta_2\theta_3\theta_4\frac{\Phi'\Psi'}{\Phi\Psi} = -\theta_4,$$

$$\Omega_{3,4,1,} = -\theta_3\theta_4\theta_1\frac{\Phi'\Psi'}{\Phi\Psi} = -\theta_3, \qquad \Omega_{4,1,2,} = \theta_4\theta_1\theta_2\frac{\Phi'\Psi'}{\Phi\Psi} = \theta_2.$$

Ainsi l'expression de

$$\lambda = \left| \frac{\partial\xi}{\partial u}\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\,\xi \right|$$

peut s'écrire simplement

$$-\frac{\lambda}{2} = |\,a_1a_2a_3\,|\,\theta_1 - |\,a_2a_3a_4\,|\,\theta_4 - |\,a_3a_4a_1\,|\,\theta_3 + |\,a_4a_1a_2\,|\,\theta_2,$$

c'est donc une combinaison linéaire à coefficients constants de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, — en général (¹) linéairement distincte de ξ_1, ξ_2, ξ_3, — c'est-à-dire une solution commune aux équations (1) et (2).

Remarque. — On pourrait se demander à quelle condition la solution λ de l'équation

(1) $$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = M\xi$$

donnée par

$$\lambda = \left| \frac{\partial\xi}{\partial u}\,\frac{\partial\xi}{\partial v}\,\xi \right|,$$

(¹) On voit d'ailleurs que si ξ_1, ξ_2, ξ_3 se réduisent à des combinaisons de *trois* des quantités θ_i, λ est aussi une combinaison de ces trois quantités. Ces cas sont donc *singuliers*.

dans le cas d'une congruence WR, satisfait à la seconde équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \sigma \xi$$

qui possède déjà les solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3. Un calcul facile, que nous supprimons, donne pour cela

$$\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0.$$

Cette condition est bien satisfaite pour $\omega =$ const., mais elle ne l'est pas lorsque $\omega = \frac{-V}{U}$, c'est-dire qu'elle ne coïncide pas avec la condition pour que (1) et (2) aient quatre solutions communes.

7. Si nous revenons à l'étude de l'équation harmonique générale, nous pouvons conclure des calculs précédents que la surface A dont les coordonnées sont

$$a_1 = \frac{\xi_1}{\lambda}, \qquad a_2 = \frac{\xi_2}{\lambda}, \qquad a_3 = \frac{\xi_3}{\lambda}$$

est une surface de *second degré*, transformée projective de

$$\theta_1 \theta_4 = \theta_2 \theta_3.$$

Cette surface A fait partie du groupe des *douze surfaces* associées par M. Darboux au couple S_x, S_y de deux surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires (cf. *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, 2e partie, § 890).

Le rayon vecteur de A est parallèle à la normale à la surface S_x lieu du point (x) et l'on a d'autre part

$$\frac{\partial y_i}{\partial u} + \lambda^2 \frac{\partial a_i}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial v} - \lambda^2 \frac{\partial a_i}{\partial v} = 0,$$

ce qui exprime que la surface A et la surface S_y (surface moyenne de notre congruence WR) se correspondent par plans tangents parallèles, les lignes u, v constituant le système conjugué commun qui est à invariants égaux.

Examinons d'un peu près la surface S_x qui est rapportée à ses lignes asymptotiques (u, v). On a pour la définir

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\left(\xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial v}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En revenant aux variables $\alpha = u + v$, $\beta = u - v$, on aura donc

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial \beta} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial \beta} = \xi_2 \frac{\partial \xi_3}{\partial \alpha} - \xi_3 \frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}.$$

Si, pour simplifier l'écriture, nous représentons d'une manière générale par $(b_i c_k)$ l'expression alternée $b_i c_k - c_i b_k$ et de même par $\left(\theta_i \frac{\partial \theta_k}{\partial \alpha}\right)$ l'expression

$$\theta_i \frac{\partial \theta_k}{\partial \alpha} - \theta_k \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha},$$

on aura par exemple

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = (b_1 c_2)\left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) + (b_1 c_3)\left(\theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) + (b_1 c_4)\left(\theta_1 \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha}\right)$$
$$+ (b_2 c_3)\left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) + (b_2 c_4)\left(\theta_2 \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha}\right) + (b_3 c_4)\left(\theta_3 \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha}\right).$$

Reportons-nous aux expressions indiquées plus haut pour les $\frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha}$ on en conclura aisément

$$\left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right) = \theta_1 \theta_2 \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{1}{\Psi'}, \qquad \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) = 0, \qquad \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha}\right) = \theta_1 \theta_4 \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\Psi}{\Psi'},$$
$$\left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right) = -\theta_2 \theta_3 \frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{\Psi}{\Psi'}, \qquad \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha}\right) = 0, \qquad \left(\theta_3 \frac{\partial \theta_4}{\partial \alpha}\right) = \theta_3 \theta_4 \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\Psi^2}{\Psi'}.$$

Les formules analogues pour les $\left(\theta_i \frac{\partial \theta_k}{\partial \alpha}\right)$ s'en déduisent en permutant Φ et Ψ et aussi θ_2 et θ_3.

Ce qui apparaît immédiatement sur ces formules, c'est que les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial \beta}$ ne dépendent que de β, les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$ ne dépendant que de α. La surface S_x est donc une *surface de translation*. Elle sera définie par les formules

$$\frac{\partial x_1}{\partial \beta} = (b_1 c_2)\frac{1}{\Psi'} + [(b_1 c_4) - (b_2 c_3)]\frac{\Psi}{\Psi'} + (b_3 c_4)\frac{\Psi^2}{\Psi'},$$
$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} = (b_1 c_3)\frac{1}{\Phi'} + [(b_1 c_4) + (b_2 c_3)]\frac{\Phi}{\Phi'} + (b_2 c_4)\frac{\Phi^2}{\Phi'},$$

les expressions correspondantes pour x_2, x_3 se déduisant des précédentes par une permutation circulaire des lettres a, b, c de même indice.

Par exemple

$$\frac{\partial x_2}{\partial \beta} = (c_1 a_2)\frac{1}{\Psi'} + [(c_1 a_4) - (c_2 a_3)]\frac{\Psi}{\Psi'} + (c_3 a_4)\frac{\Psi^2}{\Psi'}.$$

En remarquant que $\frac{\partial x_1}{\partial \beta}$, $\frac{\partial x_2}{\partial \beta}$, $\frac{\partial x_3}{\partial \beta}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $\frac{1}{\Psi'}$, $\frac{\Psi}{\Psi'}$, $\frac{\Psi^2}{\Psi'}$ et résolvant par rapport à ces derniers éléments, on obtiendra sans difficulté une identité

$$\begin{aligned}&\left(A_1\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + A_3\frac{\partial x_2}{\partial \beta} + A_3\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\right)\left(B_1\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + B_2\frac{\partial x_2}{\partial \beta} + B_3\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\right)\\ &= \left(C_1\frac{\partial x_1}{\partial \beta} + C_2\frac{\partial x_2}{\partial \beta} + C_3\frac{\partial x_3}{\partial \beta}\right)^2\end{aligned}$$

qui exprime que les tangentes aux diverses courbes $\alpha =$ const. sont parallèles aux génératrices d'un cône du second degré, ou coupent le plan de l'infini suivant une *conique* (Γ_β). De même, les tangentes aux courbes $\beta =$ const. coupent le plan de l'infini suivant une autre conique (Γ_α).

Si l'on observe que λ est de la forme

$$\lambda = d_1\theta_1 + d_2\theta_2 + d_3\theta_3 + d_4\theta_4,$$

où les valeurs des constantes d_i ont été indiquées plus haut en a_i, b_k, c_l, on peut également conclure des calculs précédents

$$\frac{\partial y_1}{\partial \beta} = (a_1 d_2)\frac{1}{\Psi'} + [(a_1 d_4) - (a_2 d_3)]\frac{\Psi}{\Psi'} + (a_3 d_4)\frac{\Psi^2}{\Psi'},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \alpha} = (a_1 d_3)\frac{1}{\Phi'} + [(a_1 d_4) + (a_2 d_3)]\frac{\Phi}{\Phi'} + (a_2 d_4)\frac{\Phi^2}{\Phi'}$$

les formules analogues pour y_2 et y_3 se déduisant de celles-là par le remplacement des a par les b ou les c de même indice, en maintenant les valeurs des d_i. *La surface* S_y, surface moyenne de la congruence WR obtenue, *est donc aussi de translation*, — *et les tangentes aux lignes* $\alpha =$ const. ou $\beta =$ const. *qui sont les courbes de translation coupent encore le plan de l'infini suivant deux coniques* (H_α), (H_β), — dont on pourrait préciser la relation avec (Γ_β), (Γ_α) et le cercle imaginaire de l'infini. Les deux surfaces S_x, S_y sont donc deux surfaces de translation qui se correspondent par orthogonalité des éléments, les courbes de translation se correspondant.

Enfin les nappes focales de la congruence WR, lieux des points (z), (t) définis par

$$z_i = y_i + \lambda\xi_i, \qquad t_i = y_i - \lambda\xi_i,$$

ont leurs asymptotiques définies par $-du^2 + dv^2 = 0$; ces asymptotiques correspondent donc encore aux courbes de translation de S_x et S_y.

Remarque. — L'examen d'un cas très particulier redonnerait des résultats classiques dans la théorie de la déformation infiniment petite des surfaces minima (cf. *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, 2e partie, § 912, 913). Si l'on suppose

$$\xi_1 = \theta_1 + \theta_3, \qquad \xi_2 = i(\theta_3 - \theta_2), \qquad \xi_3 = \theta_1 - \theta_4$$

on trouve

$$\lambda = -4i(\theta_1 + \theta_4).$$

En prenant, au lieu de λ, la solution $\omega = \frac{i\lambda}{4}$, les coordonnées $\frac{\xi_1}{\omega}$, $\frac{\xi_2}{\omega}$, $\frac{\xi_3}{\omega}$ sont celles d'un point d'une sphère de rayon 1 à laquelle se réduit ici A. La surface S_x est une surface minima quelconque, la surface S_y est la surface moyenne d'une *congruence de normales* (c'est le seul cas où une congruence R est formée des normales à une surface).

Les surfaces S′ normales aux droites de la congruence sont données par

$$x'_i = y_i + k\frac{\xi_i}{\omega},$$

où k est une constante. L'une d'elles est donc la surface moyenne S_y qui correspond à $k = 0$ et comme les surfaces focales de la congruence sont F_z où

$$z_i = y_i + \omega^2\frac{\xi_i}{\omega},$$

et F_t où

$$t_i = y_i - \omega^2\frac{\xi_i}{\omega},$$

on voit que les rayons de courbure de S_y sont $+\omega^2$ et $-\omega^2$. C'est donc aussi une surface minima; le système conjugué (u, v) est formé des lignes de courbure de cette surface qui est l'*adjointe* de la première. Ainsi la congruence WR est ici formée des normales à une surface minima quelconque.

III. — Congruences WR attachées aux équations harmoniques spéciales.

8. Passons à l'étude du cas général où M est donné par un système de deux équations

$$\frac{\partial^2 MU}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(V\frac{\partial M}{\partial v}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 MV}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(U\frac{\partial M}{\partial u}\right). \tag{6}$$

On déduit de ces équations en les ajoutant membre à membre

$$U'\frac{\partial M}{\partial u} + U''M = -\left(V'\frac{\partial M}{\partial v} + V''M\right),$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial u}(MU') = -\frac{\partial}{\partial v}(MV').$$

Si nous posons

$$\frac{du}{U'} = du_1, \qquad \frac{dv}{V'} = dv_1,$$

l'expression

$$MU'V'(du_1 - dv_1)$$

est une différentielle exacte; en la désignant par $d\omega$, on aura nécessairement

$$\omega = f(u_1 - v_1)$$

et par suite

$$MU'V' = f'(u_1 - v_1),$$

ou encore

$$M\,du\,dv = f'(u_1 - v_1)\,du_1\,dv_1.$$

Retranchons membre à membre les deux équations (5), (6), on obtient

$$2U\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} + 3U'\frac{\partial M}{\partial u} + U''M = 2V\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} + 3V'\frac{\partial M}{\partial v} + V''M, \tag{L}$$

et l'on reconnaît ici la condition classique (G. Darboux, *Théorie* *des Surfaces*, 2[e] partie, § 413) pour que la transformation

$$\frac{du}{\sqrt{U}} = du_2, \qquad \frac{-dv}{\sqrt{V}} = dv_2$$

donne à l'élément linéaire $M\,du\,dv$ la forme de Liouville

$$M\,du\,dv = [\varphi(u_2+v_2) - \psi(u_2-v_2)]\,du_2\,dv_2.$$

Le système des relations (5), (6) entre les éléments U, V, M, exprime donc que l'élément linéaire $ds^2 = M\,(u, v)\,du\,dv$ est d'une part réductible à la forme $f'(u_1-v_1)\,du_1\,dv_1$ qui convient à une surface de révolution, et d'autre part à la forme générale de Liouville

$$[\varphi(u_2+v_2) - \psi(u_2-v_2)]\,du_2\,dv_2.$$

Les recherches connues, celles de M. G. Kœnigs en particulier, sur les éléments linéaires réductibles de plusieurs manières à la forme de Liouville vont nous donner à la fois U, V et M. Nous partirons des résultats indiqués par l'éminent géomètre dans la Note II (G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, 4[e] partie) consacrée aux *Lignes géodésiques à intégrales quadratiques.*

Proposons-nous de former le système des équations en ξ, qui ont quatre solutions distinctes, *au moyen des variables* u_1, v_1 *de l'élément linéaire de révolution.*

On a

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1\,\partial v_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial u}\,\frac{\partial v_1}{\partial v} = M\xi,$$

donc

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1\,\partial v_1} = f'(u_1-v_1)\,\xi. \tag{1}$$

D'autre part

$$du_1 = \frac{du}{U'}, \qquad du_2 = \frac{du}{\sqrt{U}}$$

donnent

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_1} = \frac{U'}{\sqrt{U}}; \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial u_1^2} = \left(\frac{U''}{\sqrt{U}} - \frac{U'^2}{2U\sqrt{U}}\right)U' = \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\left[U'' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2\right].$$

L'équation

$$U\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + V\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = N\xi$$

s'écrit alors, en raison des formules de dérivation,

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{\partial\xi}{\partial u_1}\,\frac{1}{U'}; \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}\,\frac{1}{U'^2} - \frac{\partial\xi}{\partial u_1}\,\frac{U''}{U'^2}, \qquad \ldots,$$

sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\frac{1}{\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2}-\frac{\partial \xi}{\partial u_1}\left[\frac{1}{2}+\frac{\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial u_1^2}}{\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^3}\right]+\ldots=\mathrm{N}\xi,$$

où, pour simplifier l'écriture, on n'a pas écrit la partie symétrique relative aux dérivées $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1}$. La définition de N par la différentielle totale

$$d\mathrm{N}=\left(2\mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v}+\mathrm{MV}'\right)du+\left(2\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial u}+\mathrm{MU}'\right)dv$$

donnera de même

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,d\mathrm{N}=&\left\{\frac{-f''(u_1-v_1)}{\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\right)^2}-f'(u_1-v_1)\frac{\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial v_1^2}}{\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial v_1}\right)^3}\right\}du_1\\&+\left\{\frac{f''(u_1-v_1)}{\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2}-f'(u_1-v_1)\frac{\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial u_1^2}}{\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^3}\right\}dv_1,\end{aligned}$$

cette expression n'étant différentielle exacte que pour des formes convenables de $f(u_1-v_1)$, u_2, v_2.

La classification des $ds^2=\mathrm{M}(u,v)\,du\,dv$ réductibles de plusieurs manières à la forme de Liouville est faite d'après le nombre des solutions en U, V, linéairement distinctes, de l'équation fondamentale (L). Si l'une des formes est de révolution, il y a au moins trois solutions distinctes ; s'il y en a plus de trois, il y en a cinq, le ds^2 est à courbure totale constante, cette courbure pouvant être nulle.

Nous allons examiner sommairement ces divers cas en commençant par ceux où il y a cinq solutions distinctes.

Remarque. — Pour chacun des cas envisagés les équations (1) et (2) ont *quatre* solutions communes linéairement distinctes, mais il y a plus : si l'on désigne par ξ une solution quelconque de (1) et si l'on pose

$$\sigma=\mathrm{U}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}+\mathrm{V}\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}-\mathrm{N}\xi,$$

σ est une nouvelle solution de l'équation (1) ; cette solution σ peut dépendre de six constantes arbitraires, mais en raison des transformations qu'admet (1), il semble qu'il n'y en a que trois nouvelles, c'est-à-dire distinctes de celles qui résultent des transformations de (1) en elle-même. C'est là une extension intéressante d'une propriété classique de l'équation harmonique générale.

9. Élément linéaire du plan. — Si nous écrivons l'élément linéaire du plan, avec les variables u_1, v_1, sous la forme $du_1\,dv_1$, l'équation (L) écrite avec ces variables sera $\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial v_1^2}$ et donnera

$$U_1 = a_0 + a_1 u_1 + h u_1^2, \qquad V_1 = b_0 + b_1 v_1 + h v_1^2.$$

On aura ensuite

$$du_2 = \frac{du_1}{\sqrt{a_0 + a_1 u_1 + h u_1^2}}, \qquad dv_2 = \frac{dv_1}{\sqrt{b_0 + b_1 v_1 + h v_1^2}}.$$

Les équations (1) et (2) sont alors

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\, \partial v_1} = \xi.$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}(a_0 + a_1 u_1 + h u_1^2) - \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\left(\frac{1 - a_1 - 2hu_1}{2}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2}(b_0 + b_1 v_1 + h v_1^2) - \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\left(\frac{1 - b_1 - 2hv_1}{2}\right) \\ &= (b_1 u_1 + a_1 v_1 + 2h u_1 v_1 + 2k)\,\xi, \end{aligned}$$

puisque

$$dN = (b_1 + 2hv_1)\,du_1 + (a_1 + 2hv_1)\,dv_1.$$

Si l'on suppose $h \neq 0$, on peut en ajoutant des constantes à u_1 et à v_1, ce qui ne change pas la forme réduite de (1), amener a_1 et b_1 à être nuls. On pourrait même en remplaçant u_1 par λu_1, v_1 par $\frac{v_1}{\lambda}$ fixer la valeur de a_0 ou de b_0. Le système (1), (2) réduit est donc formé de (1) et de

$$(2') \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}(a_0 + h u_1^2) - \frac{\partial \xi}{\partial u_1}\left(\frac{1}{2} - h u_1\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2}(b_0 + h v_1^2) \\ &- \frac{\partial \xi}{\partial v_1}\left(\frac{1}{2} - h v_1\right) = 2\xi(h u_1 v_1 + k) \end{aligned}$$

avec seulement trois constantes essentielles.

Ce système équivaut à un système *linéaire* du quatrième ordre qui donne les dérivées en u_1 et v_1 des éléments ξ, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \xi}{\partial v_1}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2}$; il est à coefficients rationnels en u_1, v_1 et à points singuliers réguliers à distance finie. On sait d'autre part que si l'on fait la transformation qui conduit de u_1, v_1 à u_2, v_2, où

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1}{\sqrt{a_0 + hu_1^2}}, \qquad \frac{dv_2}{dv_1} = \frac{1}{\sqrt{b_0 + hv_1^2}},$$

on obtiendra pour définir ξ en u_2, v_2 une équation harmonique. Si nous supposons, pour fixer les idées, h négatif, en posant

$$a_0 = -h\alpha^2, \qquad b_0 = -h\beta^2,$$

on aura par exemple

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1}{\sqrt{-h}\sqrt{\alpha^2 - u_1^2}},$$

d'où

$$u_1 = \alpha \sin \sqrt{-h}\, u_2,$$

et de même

$$v_1 = \beta \sin \sqrt{-h}\, v_2.$$

L'équation harmonique en question sera

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_2\, \partial v_2} = -h\sqrt{\alpha^2 - u_1^2}\sqrt{\beta^2 - v_1^2}\,\xi = -\left(h\alpha\beta \cos \sqrt{-h}\, u_2 \cos \sqrt{-h}\, v_2\right)\xi,$$

ou encore

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_2\, \partial v_2} = -\frac{h\alpha\beta}{2}\left[\cos \sqrt{-h}(u_2 + v_2) + \cos \sqrt{-h}(u_2 - v_2)\right]\xi.$$

Or cette équation possède des solutions *harmoniques* définies par

$$\xi = f(u_2 + v_2)\, g(u_2 - v_2),$$

si l'on a

$$f'' = \left(-\frac{h\alpha\beta}{2}\cos \sqrt{-h}\, t + \mathrm{H}\right) f' \qquad \text{où} \quad t = u_2 + v_2,$$

et en même temps

$$g'' = \left(\frac{h\alpha\beta}{2}\cos \sqrt{-h}\, s + \mathrm{H}\right) g' \qquad \text{où} \quad s = u_2 - v_2,$$

H désignant une constante arbitraire. Ces solutions harmoniques ξ

satisfont, on le voit aisément, à l'équation

$$(4)\quad \Omega(\xi) = \frac{\partial^2\xi}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial v_2^2} - 2\xi\left[\frac{h\alpha\beta}{2}\cos\sqrt{-h}(u_2 - v_2) - \frac{h\alpha\beta}{2}\cos\sqrt{-h}(u_2 + v_2) + 2\mathrm{H}\right] = 0.$$

Écrivons cette équation avec les variables u_1, v_1, nous aurons

$$(4')\qquad \Omega(\xi) = \frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}(a_0 + hu_1^2) + \frac{\partial\xi}{\partial u_1}hu_1 + \ldots - 2\xi[hu_1v_1 + 2\mathrm{H}].$$

On voit qu'elle est distincte de $(2')$, c'est-à-dire que *les solutions harmoniques de* (3), *communes aux équations* (1) [transformée de (3)] *et* (4), *ne satisfont pas aux équations* (1) et $(2')$.

L'équation $(2')$ pourra en outre s'écrire, en prenant $k = 2\mathrm{H}$, sous la forme simple

$$(2'')\qquad \Omega(\xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u_1} + \frac{\partial\xi}{\partial v_1}\right) = 0.$$

Les solutions harmoniques de l'équation (1) satisfont d'ailleurs à l'équation

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial v_1^2} = (2\mathrm{K} + 1)\xi,$$

où K est constant, également distincte de $(2'')$, et qui ne dépend que d'une constante K.

Ces remarques ne permettent pas la détermination des solutions communes à (1) et à $(2'')$, mais elles établissent que *ces solutions sont distinctes des solutions harmoniques de* (3) *et de* (1). L'examen des cas particuliers où l'intégration du système peut se faire confirme ce résultat.

10. Élément linéaire a courbure constante. — Un élément linéaire à courbure constante peut s'écrire $-\,\mathrm{K}\dfrac{du_1\,dv_1}{(u_1 - v_1)^2}$; il garde sa forme par une même transformation projective $\left(u_1 \sim \dfrac{a u_1 + b}{c u_1 + d}\right)$ exécutée sur u_1 et v_1. La solution générale de l'équation (L) écrite en variables u_1, v_1

$$12(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V}_1) - 6(u_1 - v_1)(\mathrm{U}_1' + \mathrm{V}_1') + (u_1 - v_1)^2(\mathrm{U}_1'' - \mathrm{V}_1'') = 0$$

est ici

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{F}(u_1) = a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + a_3u_1^3 + a_4u_1^4,\qquad \mathrm{V}_1 = \mathrm{F}(v_1).$$

On aura donc

$$du_2 = \frac{du_1}{\sqrt{F(u_1)}}, \qquad dv_2 = \frac{dv_1}{\sqrt{F(v_1)}},$$

où F est un polynome arbitraire du quatrième degré et l'on observera que la transformation projective, signalée plus haut, permet de le réduire à une forme normale,

L'équation (1) écrite en variables u_1, v_1 est, si l'on pose

$$-K = m(1-m),$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1 \partial v_1} = \frac{m(1-m)}{(u_1 - v_1)^2}\xi,$$

équation dont la solution $\xi = (x-y)^m Z(m, m)$ où $Z(m, m)$ satisfait à l'équation d'Euler et Poisson

$$(u_1 - v_1)\frac{\partial^2 Z}{\partial u_1 \partial v_1} - m\frac{\partial Z}{\partial u_1} + m\frac{\partial Z}{\partial v_1} = 0.$$

La constante m est donc ici une constante essentielle, suivant sa valeur l'équation $E(m, m)$ s'intègre sous forme explicite [m entier positif ou négatif] ou seulement par des intégrales définies.

On a pour l'équation (2)

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}F(u_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial u_1}[F'(u_1) - 1] + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2}F(v_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial v_1}[F'(v_1) - 1] = N\xi$$

avec

$$\frac{1}{2}dN = m(1-m)\left\{\left[\frac{-4F(v_1)}{(u_1-v_1)^3} - \frac{F'(v_1)}{(u_1-v_1)^2}\right]du_1 + \left[\frac{4F(u_1)}{(u_1-v_1)^3} - \frac{F'(u_1)}{(u_1-v_1)^2}\right]dv_1\right\},$$

d'où l'on déduit aisément

$$\frac{1}{2}N = m(1-m)\left[\frac{2F(v_1)}{(u_1-v_1)^2} + \frac{F'(v_1)}{u_1-v_1}\frac{1}{6}F''(v_1)\right] + K,$$

expression qui, malgré son apparence, ne change pas quand on échange u_1 et v_1, en raison de l'équation (L).

L'étude analytique de l'intégration du système (1), (2) nous entraînerait trop loin. Nous nous bornerons à observer que lorsque l'équation (1) s'intègre explicitement (m entier positif ou négatif) ce système (1), (2) peut se remplacer par deux équations *linéaires* du deuxième ordre aux variables séparées u et v.

Par exemple si $m = -1$, l'équation à intégrer $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1 \partial v_1} = \frac{-2\xi}{(u_1 - v_1)^2}$ est l'équation générale **à invariants égaux** de *rang un :* on a nécessairement

$$\xi = U' + V' - 2\frac{U - V}{u_1 - v_1}, \qquad \text{où} \quad U' = \frac{dU}{du_1}, \qquad \ldots,$$

et si l'on exprime que cette expression satisfait à (2) on trouve, *après réduction de l'équation fonctionnelle correspondante*, que U et V satisfont à *une même* équation différentielle

$$-2F(u_1)U'' + U'[1 + F'(u_1)] - \frac{U}{3}[F''(u_1) + 4a_2] = l + ku_1 + hu_1^2,$$

l, k, h désignant trois constantes nouvelles.

La détermination de ξ pour l'élément linéaire $\frac{-2\,du_1\,dv_1}{(u_1 - v_1)^2}$ revient donc essentiellement à l'intégration de l'équation homogène

$$6F(u_1)U'' - 3U'[1 + F'(u_1)] + U[F''(u_1) + 4a_2] = 0,$$

où l'on peut remplacer F par une des formes réduites adoptées dans la théorie des fonctions elliptiques.

Si l'on prend, par exemple, $F = 4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3$, on aura l'équation

$$\text{(A)} \quad (4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3)U'' - \left[6u_1^2 + \frac{1 - g_2}{2}\right]U' + 4u_1 U = 0,$$

qui est régulière avec trois points singuliers à distance finie. L'équation *complète* correspondante admet toujours une solution U du second degré. Lorsque g_3 est nul, il en est de même pour l'équation (A), qui s'intègre alors par une quadrature.

Examinons d'un peu près, ici encore, l'équation harmonique en u_2, v_2.

On a

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1}{\sqrt{4u_1^3 - g_2 u_1 - g_3}},$$

d'où

$$u_1 = p(u_2), \qquad v_1 = p(v_2),$$

et l'équation (1) s'écrit

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_2 \partial v_2} = \frac{-2\,p'(u_2)\,p'(v_2)}{[p(u_2) - p(v_2)]^2}\xi.$$

Elle a la forme harmonique en raison de la relation

$$\wp(u_2+v_2)-\wp(u_2-v_2)=\frac{-\wp'(u_2)\wp'(v_2)}{[\wp(u_2)-\wp(v_2)]^2}$$

et nous aurons aussi

$$\frac{-2}{(u_1-v_1)^2}du_1\,dv_1=2[\wp(u_2+v_2)-\wp(u_2-v_2)]\,du_2\,dv_2.$$

Les solutions harmoniques de (3) sont données par

$$\xi=f(u_2+v_2)\,g(u_2-v_2),$$

où, si l'on pose

$$u_2+v_2=t,\qquad u_2-v_2=s,$$

f et g doivent satisfaire aux relations

$$f''=2[\wp(t)+\mathrm{H}]f,\qquad g''=2[\wp(s)+\mathrm{H}]g,$$

c'est-à-dire à une équation de Lamé [qui pourrait être l'équation générale de Lamé si l'on était parti de l'équation (1) avec m entier quelconque]. Leur détermination est un problème tout différent de l'intégration de l'équation (A). Par exemple, si $g_3=0$ (ce qui n'entraîne pas de réduction pour $\wp$), l'équation (A) admet la solution $\mathrm{U}=u^2+\frac{1+g_2}{4}$; on obtient la solution générale par une quadrature, qui ne donne pas de fonction algébrique.

On peut donc ici former, à une quadrature près, l'expression explicite de la solution générale du système (1), (2), mais le résultat n'est pas simple.

Exemple simple. — Pour obtenir des expressions simples de ξ, nous considérerons le cas *singulier* où $\mathrm{F}(u_1)$ a une racine triple qu'on rendra infinie, la racine simple étant faite égale à zéro. On aura dans ce cas par exemple

$$\mathrm{F}(u)=4u.$$

Les équations (1) et (2) sont respectivement

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial u_1\,\partial v_1}=\frac{m(1-m)}{(u_1-v_1)^2}\xi_1$$

et

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial u_1^2}4u_1+\frac{3}{2}\frac{\partial\xi}{\partial u_1}+\ldots=m(1-m)\frac{8(u_1+v_1)}{(u_1-v_1)^2}\xi.$$

Dans l'hypothèse $m = -1$, on aura pour déterminer U l'équation

$$-8u_1 U'' + 5U' = l + ku_1 + hu_1^2,$$

V étant donné par *la même équation*.

Sa solution générale peut s'écrire

$$U = \frac{lu_1}{5} - \frac{k}{6}u_1^2 - \frac{h}{33}u_1^3 + \alpha_1 + \alpha_2 u_1^{\frac{13}{8}}.$$

On a donc aussi

$$V = \frac{lv_1}{5} - \frac{k}{6}v_1^2 - \frac{h}{33}v_1^3 + \beta_1 + \beta_2 v_1^{\frac{13}{8}}.$$

Le calcul de $\xi = U' + V' - 2\frac{U - V}{u_1 - v_1}$ donne alors

$$\xi = -\frac{h}{33}(u_1 - v_1)^2 - 2\frac{(\alpha_1 - \beta_1)}{(u_1 - v_1)}$$
$$+ \frac{\alpha_2}{8}u_1^{\frac{5}{8}}\frac{(3u_1 + 13v_1)}{(u_1 - v_1)} - \frac{\beta_2}{8}v_1^{\frac{5}{8}}\frac{(3v_1 - 13u_1)}{(u_1 - v_1)},$$

avec seulement quatre constantes : h, $(\alpha_1 - \beta_1)$, α_2, β_2, comme on le savait *a priori*.

11. Éléments linéaires de révolution a courbure variable. — D'après les tableaux de M. Kœnigs, il n'y a, essentiellement, qu'un élément linéaire de révolution, à courbure variable, qui soit plusieurs fois de Liouville. On peut l'écrire

$$ds^2 = M\,du\,dv = \frac{A\left[e^{\frac{u_1 - v_1}{2}} + e^{-\left(\frac{u_1 - v_1}{2}\right)}\right] + B}{\left[e^{\frac{u_1 - v_1}{2}} - e^{-\frac{(u_1 - v_1)}{2}}\right]} du_1\,dv_1 = \Phi(u_1 - v_1)\,du_1\,dv_1,$$

A, B étant des constantes arbitraires.

Les variables u_2, v_2 de la forme harmonique équivalente sont données par

$$du_2 = \frac{du_1}{\sqrt{a_0 + a_1 e^{u_1} + a_2 e^{-u_1}}}, \qquad dv_2 = \frac{dv_1}{\sqrt{a_0 + a_1 e^{v_1} + a_2 e^{-v_1}}}$$

et les équations (1) et (2) sont, avec les variables u_1, v_1,

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\,\partial v_1} = \Phi(u_1 - v_1)\,\xi,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}(a_0 + a_1 e^{u_1} + a_2 e^{-u_1}) + \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial u_1}(1 + a_1 e^{u_1} - a_2 e^{-u_1}) + \ldots = N\xi,$$

où l'on a

$$dN = [-2V\,\Phi'(u_1 - v_1) + V'\,\Phi(u_1 - v_1)]\,du_1$$
$$+ [2U\,\Phi'(u_1 - v_1) + U'\,\Phi(u_1 - v_1)]\,dv_1.$$

Ces deux équations sont à coefficients *transcendants*. Il semble qu'il y ait avantage à introduire ici les arguments

$$x = e^{\frac{u_1}{2}}, \quad y = e^{\frac{v_1}{2}},$$

à l'aide desquels l'élément linéaire s'écrit

$$ds^2 = 4\,\frac{A(x^2+y^2) + Bxy}{(x^2-y^2)^2}\,dx\,dy,$$

forme harmonique évidente

$$ds^2 = \left[\frac{2A+B}{(x-y)^2} + \frac{2A-B}{(x+y)^2}\right] dx\,dy.$$

Avec ces arguments on a

$$du_2 = \frac{2\,dx}{\sqrt{a_1 x^4 + a_0 x^2 + a_2}}, \qquad \ldots,$$

et puisque le ds^2 n'admet pas de transformation en lui-même, on ne peut pas réduire le trinome bicarré.

L'équation (1) sera alors l'équation harmonique

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} = \left[\frac{\alpha}{(x+y)^2} - \frac{\beta}{(x-y)^2}\right]\xi,$$

où $\alpha = 2A - B$, $-\beta = 2A + B$, et (2) pourra s'écrire

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(a_1 x^4 + a_0 x^2 + a_2) + \frac{\partial \xi}{\partial x}[2a_1 x^3 + (a_0+1)x] + \ldots = 4N\xi$$

avec l'expression simple de N

$$4N = \frac{\alpha}{(x+y)^2}[a_1 x^2 y^2 - a_0 xy + a_2]$$
$$+ \frac{\beta}{(x-y)^2}[a_1 x^2 y^2 + a_0 xy + a_2] + k.$$

L'équation (1) est explicitement intégrable quand $\alpha = m(m-1)$ et $\beta = n(n-1)$, m, n étant des entiers positifs ou négatifs. On aura donc une réduction du système (1), (2) dans ces cas.

La forme harmonique du ds^2 en u_2, v_2 s'exprime encore par des fonctions elliptiques, résultant de l'inversion de la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{a_1 x^4 + a_0 x^2 + a_2}}$.

A la forme générale indiquée plus haut avec les deux constantes α et β sont associées diverses *formes dégénérées*.

L'exemple le plus simple est donné par le type

$$M\, du\, dv = (u_1 - v_1)\, du_1\, dv_1,$$

auquel correspond l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1\, \partial v_1} = (u_1 - v_1)\, \xi.$$

On détermine les variables u_2, v_2 du ds^2 harmonique général par

$$du_2 = \frac{du_1}{\sqrt{U}}, \qquad dv_2 = \frac{dv_1}{\sqrt{V}},$$

où

$$3\,U' + U''(u_1 - v_1) = -3\,V' + V''(u_1 - v_1).$$

Ceci donne simplement

$$U = h u_1 - a, \qquad V = -h v_1 + b,$$

et l'on peut ajouter une constante à a et à $-b$, de sorte qu'il est permis de prendre, par exemple, $a = 0$.

On a

$$N = 3 h u_1 v_1 - h \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} - 2 b u_1 - 2 a v_1 + 2 k,$$

et l'équation (2) s'écrit

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}(h u_1 - a) + \frac{h-1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v_1^2}(b - h v_1) - \frac{h+1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial v_1} = N \xi.$$

Ce système (1), (2) est assez simple pour qu'on puisse tenter de l'intégrer par l'emploi d'intégrales définies ; nous remettrons cette étude à une autre occasion.

(*A suivre.*)