Bulletin de la S. M. F.

E. Cartan

Sur les variétés à connexion projective

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 205-241
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__205_0>

SUR LES VARIÉTÉS A CONNEXION PROJECTIVE;

PAR M. E. CARTAN.

J'ai indiqué, il y a plus de deux ans, dans plusieurs Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹), un point de vue très général d'où l'on peut envisager la théorie des variétés métriques et ses diverses généralisations. L'idée fondamentale se rattache à la notion de *parallélisme* que M. T. Levi-Civita a introduite d'une manière si féconde (²). Si nous considérons, par exemple, une surface de l'espace ordinaire (euclidien), on peut dire que le petit morceau de cette surface qui entoure un de ses points présente tous les caractères d'un espace euclidien proprement dit à deux dimensions (plan), mais ce n'est que grâce à la notion du parallélisme qu'on peut *raccorder* en un même plan euclidien les deux petits morceaux de surface qui entourent deux points infiniment voisins; c'est la notion de parallélisme qui doue la surface d'une *connexion* euclidienne, pour employer un terme dû à M. H. Weyl.

Les nombreux auteurs qui ont généralisé la théorie des espaces métriques sont tous partis de l'idée fondamentale de M. Levi-Civita, mais, semble-t-il, sans pouvoir la détacher de l'idée de *vecteur*. Cela n'a aucun inconvénient quand il s'agit des variétés à connexion *affine* dont la théorie joue, par rapport à celle des variétés métriques, le rôle de la Géométrie affine par rapport à la Géométrie euclidienne. Mais cela semblait interdire tout espoir de fonder une théorie *autonome* des variétés à connexion conforme ou projective. En fait, ce qu'il y a d'essentiel dans l'idée de M. Levi-Civita, c'est qu'elle donne un moyen pour raccorder entre eux deux petits morceaux infiniment voisins d'une variété, et c'est cette idée de *raccord* qui est féconde. On conçoit dès lors, en développant cette

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 437, 593, 734, 857, 1104.
(²) *Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. 42, 1917, p. 173-205.

idée, la possibilité d'arriver à une théorie générale des variétés à connexion *affine*, *conforme*, *projective*, etc.

J'ai développé dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure* (1) la théorie générale des variétés à connexion affine, et dans un Mémoire des *Annales de la Société polonaise de mathématique* (2), celle des variétés à connexion conforme (3). Je me propose d'indiquer rapidement dans cet article les points fondamentaux de la théorie des variétés à connexion *projective*. Le point le plus intéressant peut-être de cette théorie est le suivant :

Les *géodésiques* d'une variété à connexion projective sont définies par des équations différentielles du second ordre d'une forme particulière; or, la classe des équations de cette forme est *identique* à celle des équations qui donnent les géodésiques des variétés à connexion *affine*. Mais, alors qu'il est impossible, parmi toutes les connexions *affines* qui attribuent à une variété des géodésiques données, d'en distinguer une par des propriétés intrinsèques simples, cela est possible si l'on prend en considération les connexions *projectives* : je donne le nom de *normale* à cette connexion projective privilégiée. Il existe ainsi une correspondance univoque entre un système différentiel de la classe considérée et une variété à connexion projective normale, de sorte que c'est la notion de connexion *projective* qui permet de donner une forme géométrique satisfaisante à la théorie des systèmes différentiels en question, en particulier à la théorie de la représentation géodésique. On peut dire à un autre point de vue que les variétés à connexion projective normale jouent, par rapport à ces systèmes différentiels, le rôle des variétés de Riemann (avec la définition du parallélisme due à M. Levi-Civita) par rapport aux formes différentielles quadratiques.

Dans le cas $n = 2$, la classe d'équations différentielles, susceptibles de définir des géodésiques de variétés à connexion affine, est formée des équations pour lesquelles $\frac{d^2y}{dx^2}$ est un polynome entier du troisième degré au plus en $\frac{dy}{dx}$. On peut se demander si l'on ne

(1) *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XL, 1923, p. 325-412; t. XLI, 1924, p. 1-25.

(2) *Ann. Soc. pol. Math.*, t. II, 1923, p. 171-221.

(3) Ce Mémoire est un développement de la Note citée plus haut (*C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 857-860).

pourrait pas généraliser la théorie de manière que les courbes intégrales de *n'importe quelle équation* différentielle du second ordre puissent être, elles aussi, regardées comme des géodésiques. Je montre, dans la seconde partie (§ VII et VIII) de cet article, qu'on peut y arriver en introduisant la notion nouvelle de *variété d'éléments* à connexion projective, les variétés précédemment considérées étant *ponctuelles*. A toute équation différentielle du second ordre est associée d'une manière intrinsèque (indépendante de toute transformation ponctuelle) une variété d'éléments à connexion projective normale, et les variétés ponctuelles à connection projective normale rentrent, comme cas particulier, dans ces nouvelles variétés. La notion de connexion projective confère ainsi à la théorie des invariants différentiels d'une équation différentielle du second ordre vis-à-vis du groupe ponctuel ([1]) un aspect géométrique assez inattendu. Il n'est pas douteux que cette géométrisation pourrait être effectuée dans beaucoup de questions analogues; je citerai, par exemple, la théorie des caractéristiques des systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes; dans cette théorie, le groupe projectif général du plan serait remplacé par un certain groupe simple à 14 paramètres ([2]).

I. — La notion de variété a connexion projective.

1. Une variété (ou espace) à connexion projective est une variété numérique, qui, au voisinage immédiat de chaque point, présente tous les caractères d'un espace projectif ([3]) et douée de plus d'une loi permettant de raccorder en un seul espace projectif les deux petits morceaux qui entourent deux points infiniment voisins.

([1]) Cette théorie a fait l'objet d'un important Mémoire de M. A. Tresse : *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre* $y'' = \omega(x, y, y')$, Mémoire couronné par l'Académie Jablonowski; S. Hirkel, Leipzig (1896).

([2]) La méthode et les calculs sont virtuellement indiqués dans mon Mémoire : *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Ann. Ec. Norm.*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 109-192).

([3]) J'appelle espace projectif un espace dans lequel les seules propriétés des figures regardées comme essentielles sont celles qui se conservent par la transformation projective (ou homographique) la plus générale.

Pour donner un sens précis à cette définition, il suffit d'imaginer qu'on a attaché à chaque point de la variété un espace projectif dont ce point fait partie, et qu'on a une loi permettant de raccorder en un seul les espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins de la variété : c'est cette loi qui définit la connexion projective de la variété. Analytiquement on choisira, d'une manière d'ailleurs arbitraire, dans l'espace projectif attaché à chaque point **a** de la variété, un *repère* définissant un système de coordonnées projectives (trilinéaires dans le cas de deux dimensions, tétraédriques dans le cas de trois dimensions, etc.). Le raccord entre les espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins **a** et **a**$'$ se traduira analytiquement par une transformation homographique, celle qui permet de passer des coordonnées d'un point **m**$'$ de l'espace projectif attaché au point **a**$'$ aux coordonnées de celui des points **m** de l'espace projectif attaché au point **a** qui coïncide avec **m**$'$ quand on fait le raccord des deux espaces. Naturellement on supposera que cette transformation homographique est infiniment voisine de la transformation identique. Les coefficients des formules de cette transformation définiront la connexion projective de la variété.

On peut se placer à un point de vue un peu différent en interprétant la transformation homographique dont il vient d'être question comme la traduction analytique du *déplacement projectif* qui permet de passer, dans l'espace projectif unique provenant du raccord des espaces projectifs attachés aux points **a** et **a**$'$, du repère attaché à **a** au repère attaché à **a**$'$. La connaissance de ce déplacement projectif (une fois choisis les repères attachés aux différents points de la variété) détermine la connexion projective de la variété.

Il résulte naturellement de ce qui précède que la connexion projective de la variété peut être définie analytiquement d'une infinité de manières différentes suivant le choix des repères attachés aux différents points de la variété; on peut même — et il y a souvent avantage à procéder ainsi — choisir en chaque point un repère dépendant de paramètres arbitraires; les composantes analytiques de la connexion projective dépendent alors de ces paramètres. Si le repère est choisi de la manière la plus générale possible, celles des fonctions des composantes de la connexion projective qui sont indépendantes des paramètres fournissent une définition analytique *intrinsèque* de la connexion projective [1].

2. Avant d'aller plus loin, il ne sera pas inutile d'indiquer d'une manière précise ce qu'on entend par *repère* projectif. Adoptons, dans un espace à n dimensions, un système de coordonnées (cartésiennes par exemple) homogènes; convenons de désigner par une seule lettre $\mathbf{m}$ l'ensemble de $n+1$ coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, de sorte qu'un point géométrique sera désigné aussi bien par le symbole $t\mathbf{m}$, où t est un coefficient numérique arbitraire, que par le symbole $\mathbf{m}$; nous conviendrons, néanmoins, de parler du point $\mathbf{m}$, que nous regarderons comme distinct du point $2\mathbf{m}$, du point $3\mathbf{m}$, etc. [2].

Cela posé, prenons $n+1$ points

$$\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_2, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_{n+1}$$

tels que le déterminant de leurs coordonnées ne soit pas nul. Tout point $\mathbf{m}$ peut, d'une manière et d'une seule, en adoptant une notation qui se comprend d'elle-même, se mettre sous la forme

$$\mathbf{m} = y^1\mathbf{a}_1 + y^2\mathbf{a}_2 + \ldots + y^n\mathbf{a}_n + y^{n+1}\mathbf{a}_{n+1};$$

les coefficients numériques $y^1, y^2, \ldots, y^{n+1}$ constituent les coordonnées du point $\mathbf{m}$ par rapport au *repère* formé des $n+1$ points $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n+1}$. Un repère projectif est donc l'ensemble de $n+1$ points non situés dans un même hyperplan à $n-1$ dimensions : nous les appellerons les *sommets* du $(n+1)$-èdre de référence.

Si l'on choisit deux repères différents

$$\begin{array}{llll} \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2, & \ldots, & \mathbf{a}_{n+1}; \\ \mathbf{b}_1, & \mathbf{b}_2, & \ldots, & \mathbf{b}_{n+1}, \end{array}$$

on a évidemment des formules de la forme

$$(1) \qquad \mathbf{b}_i = \alpha_i^1\mathbf{a}_1 + \alpha_i^2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_i^{n+1}\mathbf{a}_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

qui définissent analytiquement la position du second repère par

---

[1] C'est ainsi que si la connexion euclidienne d'une variété de Riemann est définie en partant de la notion du parallélisme de M. Levi-Civita, cette connexion est définie complètement par le ds^2 de la variété.

[2] Le symbole $\mathbf{m}$ désigne en quelque sorte un point affecté d'une masse.

rapport au premier, ou encore le déplacement projectif qui fait coïncider le premier avec le second. Les formules

(2) $$x^i = \alpha_1^i y^1 + \alpha_2^i y^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^i y^{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

qui traduisent analytiquement l'égalité géométrique

$$x^1 \mathbf{a}_1 + x^2 \mathbf{a}_2 + \ldots + x^{n+1} \mathbf{a}_{n+1} = y^1 \mathbf{b}_1 + y^2 \mathbf{b}_2 + \ldots + y^{n+1} \mathbf{b}_{n+1},$$

définissent le passage des coordonnées y^i d'un point rapporté au second repère aux coordonnées x^i du même joint rapporté au premier repère. Les $(n+1)^2$ coefficients α_i^j sont les mêmes dans les formules (1) et (2).

Mais il importe de remarquer que la transformation homographique (2) *ne change pas* si l'on multiplie tous les coefficients α_i^j par un même facteur; il n'y a donc, en réalité, de géométriquement essentiels que les rapports mutuels des α_i^j, ou encore les quotients des α_i^j par la racine $(n+1)^{\text{ième}}$ de leur déterminant [1].

3. Revenons aux variétés à connexion projective. Il sera naturel de prendre chaque point $\mathbf{a}$ de la variété pour l'un des sommets du repère attaché à ce point : c'est ce que nous ferons désormais. Nous désignerons par $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ les n autres sommets. Soient alors deux points infiniment voisins $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ de la variété et désignons par $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ les n derniers sommets du repère attaché à $\mathbf{a}'$. *Quand on aura fait le raccord* des espaces projectifs attachés à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{a}'$, on aura des formules analogues à (1), mais où les coefficients α_i^i seront très voisins de l'unité et les coefficients $\alpha_i^j (i \neq j)$ seront très petits. Nous écrirons

(3) $$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}' = (1 + \omega_0^0)\mathbf{a} + \omega^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega^n \mathbf{a}_n, \\ \mathbf{a}'_1 = \omega_1^0 \mathbf{a} + (1 + \omega_1^1)\mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_1^n \mathbf{a}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathbf{a}'_n = \omega_n^0 \mathbf{a} + \omega_n^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + (1 + \omega_n^n)\mathbf{a}_n, \end{array}\right.$$

ou, symboliquement,

(3') $$\left\{\begin{array}{l} d\mathbf{a} = \omega_0^0 \mathbf{a} + \omega^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega^n \mathbf{a}_n, \\ d\mathbf{a}_1 = \omega_1^0 \mathbf{a} + \omega_1^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_1^n \mathbf{a}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d\mathbf{a}_n = \omega_n^0 \mathbf{a} + \omega_n^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_n^n \mathbf{a}_n. \end{array}\right.$$

---

[1] On peut dire encore qu'on a essentiellement le même repère en multipliant les sommets par un même facteur numérique.

Les quantités infiniment petites ω_0^0, ω_i^0, ω^i, ω_i^j définissent le déplacement projectif infinitésimal qui amène en coïncidence le repère attaché au point **a** avec le repère attaché au point **a**$'$, une fois qu'on a fait le raccord des espaces projectifs attachés à ces deux points. Mais, en réalité, le raccord de ces deux espaces est défini analytiquement par les rapports mutuels des coefficients (3), c'est-à-dire par les quantités

$$\omega^i, \quad \omega_i^0, \quad \omega_i^i - \omega_0^0, \quad \omega_i^j \qquad (i \neq j;\; i, j = 1, 2, \ldots, n) :$$

ce sont les composantes de la connexion projective de la variété.

Si l'on a choisi sur la variété donnée un système quelconque de coordonnées $u^1, u^2, \ldots, u^n$, et si le repère attaché à chaque point de la variété dépend de paramètres $v^1, v^2, \ldots, v^r$, les composantes de la connexion projective seront naturellement supposées linéaires par rapport aux du^i et dv^i, les coefficients étant des fonctions (que nous supposerons dérivables) des u^i et des v^i.

Il importe de remarquer que les n composantes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n$ ne dépendent linéairement que de $du^1, du^2, \ldots, du^n$, car si on laisse fixes les coordonnées u^i, le point *géométrique* **a** ne varie pas, **a**$'$ est de la forme $(1+\varepsilon)$ **a**, et les n expressions ω^i s'annulent. Réciproquement $du^1, du^2, \ldots, du^n$ peuvent s'exprimer linéairement au moyen de $\omega^1, \ldots, \omega^n$, car si ces n dernières expressions s'annulent, on reste au même point géométrique de la variété et les du^i s'annulent.

4. On peut toujours choisir les repères attachés aux différents points de la variété de manière que la somme des n composantes $\omega_i^i - \omega_0^0$ soit identiquement nulle. Choisissons, en effet, d'une manière quelconque, mais déterminée, le repère attaché à un point de la variété (il n'y a donc pas de paramètres v^i); soient

$$\omega^i, \quad \omega_i^0, \quad \omega_i^i - \omega_0^0, \quad \omega_i^j$$

les composantes correspondantes de la connexion projective. Remplaçons maintenant les sommets

$$\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_1, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n$$

par

$$\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_1 + m_1 \mathbf{a}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n + m_n \mathbf{a},$$

en désignant par $m_1, \ldots, m_n$ des fonctions provisoirement arbitraires des u^i. Les nouvelles composantes $\overline{\omega}_i^i - \overline{\omega}_0^0$ de la connexion projective seront, comme on le voit facilement,

$$\omega_i^i - \omega_0^0 + m_i \omega^i + \sum_{k=1}^{k=n} m_k \omega^k.$$

Il n'y aura qu'à déterminer les fonctions m_i par l'identité

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i^i - \omega_0^0) + (n+1) \sum_{k=n}^{k=1} m_k \omega^k = 0$$

pour satisfaire à la condition demandée : cela est possible puisque l'expression de Pfaff $\Sigma(\omega_i^i - \omega_0^0)$, linéaire en $du^1, \ldots, du^n$, peut s'exprimer linéairement en $\omega^1, \ldots, \omega^n$.

Remarquons, d'autre part, qu'on peut toujours aussi choisir les repères de manière à avoir

$$\omega^1 = du^1, \qquad \omega^2 = du^2, \qquad \ldots, \qquad \omega^n = du^n;$$

il suffit, pour cela, sans changer le sommet **a** (qui dépend, comme on sait, d'un facteur arbitraire), de mettre l'expression

$$\omega^1 \mathbf{a}_1 + \omega^2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \omega^n \mathbf{a}_n$$

sous la forme

$$du^1 \overline{\mathbf{a}_1} + du^2 \overline{\mathbf{a}_2} + \ldots + du^n \overline{\mathbf{a}_n}.$$

Enfin, les deux conditions précédentes peuvent être réalisées simultanément. En effet, nous pouvons d'abord réaliser la seconde, c'est-à-dire supposer d'ores et déjà qu'on a

$$\omega^i = du^i;$$

nous pouvons ensuite réaliser la première en remplaçant $\mathbf{a}_i$ par $\mathbf{a}_i + m_i \mathbf{a}$, avec des coefficients m_i convenablement choisis, ce qui ne change pas la valeur des ω^i.

Si nous supposons maintenant les deux conditions réalisées :

$$\omega^i = du^i, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i^i = n\,\omega_0^0,$$

les composantes ω_i, $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_i^j *de la connexion affine sont bien* *déterminées*. Supposons, en effet, qu'on ait fait un choix particulier des repères satisfaisant aux conditions indiquées ; pour tout autre choix on aura

$$\bar{\mathbf{a}} = m\mathbf{a},$$
$$d\bar{\mathbf{a}} = (m\omega_0^0 + dm)\mathbf{a} + m\,du^1\mathbf{a}_1 + \ldots + m\,du^n\mathbf{a}_n ;$$

il en résulte qu'on devra prendre

$$\bar{\mathbf{a}}_i = m\mathbf{a}_i + m_i\mathbf{a} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On trouve alors, par un calcul facile,

$$\sum_{i=1}^{i=n}(\bar{\omega}_i^i - \bar{\omega}_0^0) = (n+1)\sum_{i=1}^{i=n} m_i\,du^i ;$$

il faut donc que les coefficients $m_1, \ldots, m_n$ soient tous nuls, et les nouvelles composantes de la connexion projective sont identiques aux anciennes.

Il résulte de là que, lorsqu'on a choisi sur la variété un système de coordonnées $(u^1, \ldots, u^n)$, *la connexion projective est univoquement déterminée par les expressions de Pfaff*

$$\omega_i^0, \quad \omega_i^i - \omega_0^0, \quad \omega_i^j,$$

une fois qu'on s'est arrangé pour réduire les ω^i *aux* du^i *et pour annuler la somme des n expressions* $\omega_i^i - \omega_0^0$. La connexion projective dépend donc de $n^2 + n - 1$ expressions de Pfaff arbitraires, autrement dit de $n(n^2 + n - 1)$ fonctions arbitraires de $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

Dans ce qui suit, nous supposerons, sauf avis contraire, les repères arbitrairement choisis, de sorte que les composantes ω^i, ω_i^0, $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_i^j seront des expressions de Pfaff quelconques.

II. — La structure d'une variété a connexion projective.

5. On arrive à la notion de structure d'une variété à connexion projective en considérant ce qui se passe lorsqu'on fait le raccord de proche en proche des espaces projectifs attachés aux différents points d'une ligne fermée tracée sur la variété. Si l'on considère d'abord deux points infiniment voisins $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ de la variété, à cha-

cun desquels on a attaché un repère, le point (x^i) de l'espace projectif attaché au point $\mathbf{a}$ viendra coïncider, quand le raccord sera fait, avec le point $x^i + dx^i$ de l'espace projectif attaché au point $\mathbf{a}'$, si l'on a symboliquement, en tenant compte des équations (3'),

$$d(x\mathbf{a} + x^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + x^n \mathbf{a}_n) = 0.$$

Cette équation se décompose en $n+1$ autres :

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} dx \;\; + \omega_0^0 x + \omega_1^0 x^1 + \ldots + \omega_n^0 x^n = 0, \\ dx^1 + \omega^1 x + \omega_1^1 x^1 + \ldots + \omega_n^1 x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dx^n + \omega^n x + \omega_n^1 x^1 + \ldots + \omega_n^n x^n = 0. \end{array}\right.$$

Si le point $\mathbf{a}$ décrit sur la variété une ligne fermée, les coordonnées $u^1, \ldots, u^n$ peuvent être exprimées en fonction d'un même paramètre t; les expressions ω_i^j prennent la forme $p_i^j dt$, et les équations (4) deviennent des équations différentielles linéaires aux $n+1$ fonctions inconnues $x, x^1, \ldots, x^n$ de la variable indépendante t. Leur intégration permet de définir analytiquement le raccord de proche en proche, le long de la ligne considérée, de l'espace projectif attaché au point d'arrivée avec l'espace projectif attaché au point de départ.

Supposons, en particulier, que la ligne soit fermée. L'espace projectif attaché au point de départ ne coïncidera pas, en général, par ce raccord de proche en proche, avec l'espace projectif attaché au point d'arrivée, comme cela se produirait évidemment si la variété constituait un seul et même espace projectif. Par ces raccords successifs, le point $(x, x^1, \ldots, x^n)$ de l'espace projectif attaché au point de départ viendra coïncider avec le point $(y, y^1, \ldots, y^n)$ de ce même espace, et les expressions des y^i s'obtiendront encore par l'intégration des équations (4) avec les valeurs initiales (x^i) des inconnues.

Si, en outre, le contour fermé est infiniment petit, les y^i seront infiniment voisins des x^i, et si l'on pose

$$y^i = x^i + \Delta x^i,$$

on aura des formules telles que

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta x \;\; + \Omega_0^0 x + \Omega_1^0 x^1 + \ldots + \Omega_n^0 x^n = 0, \\ \Delta x^1 + \Omega^1 x + \Omega_1^1 x^1 + \ldots + \Omega_n^1 x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta x^n + \Omega^n x + \Omega_1^n x^1 + \ldots + \Omega_n^n x^n = 0, \end{array}\right.$$

où les Ω_i^j sont des éléments d'intégrales doubles étendues à l'aire (orientée) limitée par le contour. On peut démontrer [1] qu'on a

$$
(6)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\Omega^i &= (\omega^i)' - [\omega_0^0\,\omega^i] - \sum_{k=1}^{k=n}[\omega^k\,\omega_k^i],\\
\Omega_0^0 &= (\omega_0^0)' - \sum_{k=1}^{k=n}[\omega^k\,\omega_k^0],\\
\Omega_i^0 &= (\omega_i^0)' - [\omega_i^0\,\omega_0^0] - \sum_{k=1}^{k=n}[\omega_i^k\,\omega_k^0],\\
\Omega_i^j &= (\omega_i^j)' - [\omega_i^0\,\omega^j] - \sum_{k=1}^{k=n}[\omega_i^k\,\omega_k^j].
\end{aligned}
\right.
$$

6. Les formules (5) définissent un déplacement projectif infinitésimal dont les composantes sont

$$\Omega^i,\quad \Omega_i^0,\quad \Omega_i^i - \Omega_0^0,\quad \Omega_i^j,$$

de la même manière que les formules (4) définissent le déplacement projectif infinitésimal de composantes

$$\omega^i,\quad \omega_i^0,\quad \omega_i^i - \omega_0^0,\quad \omega_i^j.$$

On peut remarquer du reste que les premières composantes sont formées uniquement au moyen des dernières et de leurs covariants bilinéaires.

A tout contour fermé infiniment petit tracé sur la variété est donc associé un déplacement projectif infinitésimal dont les composantes sont des éléments d'intégrales doubles de la forme $\Sigma a_{ik}\, du^i\, du^k$. Ces composantes définissent analytiquement la *structure* de la variété ; elles généralisent le tenseur de Riemann-Christoffel. On peut dire aussi qu'elles définissent la *courbure* de la variété, en ce sens qu'elles manifestent la divergence qui existe entre la variété donnée et un espace projectif (plan) proprement dit lorsqu'on parcourt un contour fermé infiniment petit de cette variété.

---

[1] La démonstration est analogue à celle que j'ai indiquée dans le cas des variétés à connexion affine (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XL, 1923, p. 369-373).

Comme dans le cas des variétés à connexion affine, il existe un *théorème de la conservation de la courbure*, obtenu analytiquement en dérivant extérieurement les deux membres des formules (6) et tenant compte de ces formules elles-mêmes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} (\Omega^i)' &= -[\Omega_0^0\omega^i] + [\omega_0^0\Omega^i] - \sum_{k=1}^{k=n}[\Omega^k\omega_k^i] + \sum_{k=1}^{k=n}[\omega^k\Omega_k^i],\\ (\Omega_0^0)' &= -\sum_{k=1}^{k=n}[\Omega^k\omega_k^0] + \sum_{k=1}^{k=n}[\omega^k\Omega_k^0],\\ (\Omega_i^0)' &= -[\Omega_i^0\omega_0^0] + [\omega_i^0\Omega_0^0] - \sum_{k=1}^{k=n}[\Omega_i^k\omega_k^0] + \sum_{k=1}^{k=n}[\omega_i^k\Omega_k^0],\\ (\Omega_i^j)' &= -[\Omega_i^0\omega^j] + [\omega_i^0\Omega^j] - \sum_{k=1}^{k=n}[\Omega_i^k\omega_k^j] + \sum_{k=1}^{k=n}[\omega_i^k\Omega_k^j]. \end{aligned}\right.$$

Ce théorème admet une formulation géométrique qui fait intervenir un domaine infiniment petit à trois dimensions de la variété et qu'il est inutile d'indiquer ici [1].

III. — Les variétés a connexion projective sans torsion.

7. Une variété à connexion projective est dite sans torsion si le déplacement projectif infinitésimal associé à un contour fermé infiniment petit quelconque partant d'un point **a** arbitraire de cette variété et y revenant laisse invariant le point (géométrique) **a**. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les formules (5) donnent pour $\Delta x^1, \Delta x^2, \ldots, \Delta x^n$ des valeurs nulles, lorsque les coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sont nulles; autrement dit *les variétés sans torsion sont caractérisées par les égalités*

$$(8)\qquad \Omega^1 = 0, \qquad \Omega^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega^n = 0.$$

Les composantes de la connexion projective satisfont donc aux identités

$$(9)\qquad (\omega_i)' = [\omega^i(\omega_i^i - \omega_0^0)] + \sum_{k \neq i}[\omega^k\omega_k^i].$$

---

[1] Voir *Ann. Éc. Norm., loc. cit.*, p. 373-375.

Les formules (7) montrent en outre que les composantes non nulles Ω_i^0, $\Omega_i^i - \Omega_0^0$, Ω_i^j, de la courbure ne sont pas arbitraires, car elles sont liées par les n relations

$$(10)\qquad [\omega^i(\Omega_i^i - \Omega_0^0)] + \sum_{k \neq i} [\omega^k \Omega_k^i] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit en particulier que si l'on a pris $\omega^i = du^i$, et si l'on pose

$$\omega_i^i - \omega_0^0 = \sum_{r=1}^{r=n} \Gamma_{ir}^i \, du^r, \qquad \omega_i^j = \sum_{r=1}^{r=n} \Gamma_{ir}^j \, du^r,$$

les coefficients Γ_{ij}^k satisfont à la loi de symétrie

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

On peut encore dire qu'il existe n formes quadratiques $\Phi^1, \Phi^2, \ldots, \Phi^n$ en $du^1, \ldots, du^r$, telles que l'on ait

$$\omega_i^i - \omega_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^i}{\partial (du^i)}, \qquad \omega_i^j = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^j}{\partial (du^i)}.$$

Quant aux identités (10), elles montrent que si l'on pose

$$\Omega_i^i - \Omega_0^0 = \sum_{h,k}^{1,\ldots,n} A_{ihk}^i [\omega^h \omega^k], \qquad \Omega_i^j = \sum_{h,k}^{1,\ldots,n} A_{ihk}^j [\omega^h \omega^k],$$

on a les identités

$$(11)\qquad A_{\alpha\beta\gamma}^i + A_{\beta\gamma\alpha}^i + A_{\gamma\alpha\beta}^i = 0.$$

8. On obtient une catégorie importante de variétés sans torsion en remarquant que le groupe projectif qui laisse un point fixe admet un sous-groupe invariant : ce groupe est en effet la dualistique du groupe qui laisse un hyperplan fixe, c'est-à-dire en somme du groupe *affine*, lequel admet le sous-groupe invariant des transformations affines qui conservent les volumes (groupe de Möbius). Or la dualistique de la transformation projective (5) est

$$\begin{aligned}
\Delta\xi\ &= \Omega_0^0 \xi, \\
\Delta\xi_1 &= \Omega_1^0 \xi + \Omega_1^1 \xi_1 + \ldots + \Omega_1^n \xi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta\xi_n &= \Omega_n^0 \xi + \Omega_n^1 \xi_1 + \ldots + \Omega_n^n \xi_n;
\end{aligned}$$

en prenant des coordonnées *non homogènes*, elle devient la transformation affine

$$\Delta\xi_i = \Omega_i^0 + (\Omega_i^i - \Omega_0)\,\xi_i + \sum_{k \neq i} \Omega_i^k \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

elle appartient au groupe de Möbius si l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\Omega'_i - \Omega_0^0) = 0. \tag{12}$$

Telle est l'identité qui définit, avec (8), la catégorie considérée de variétés. Elle peut encore s'écrire, d'après (6),

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i^i - \omega_0^0)' = -(n+1) \sum_{i=1}^{i=} [\omega^i \omega_i^0].$$

Si en particulier, ce qu'on peut toujours réaliser (n° 4), on a

$$\omega^i = du^i, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (\omega_i^i - \omega_0^0) = 0,$$

on aura

$$\omega_i^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial (du^i)},$$

Φ étant une forme quadratique en du^1, du^2, ..., du^n.

On aura aussi, d'après (7),

$$\sum_{i=1}^{i=n} [\omega^i \Omega_i^0] = 0,$$

ou encore, en utilisant une notation qui se comprend d'elle-même,

$$A_{\alpha\beta\gamma}^0 + A_{\beta\gamma\alpha}^0 + A_{\gamma\alpha\beta}^0 = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n).$$

9. Une dernière catégorie, plus restreinte, de variétés sans torsion est formée de celles pour lesquelles le déplacement projectif infinitésimal associé à un contour fermé infiniment petit partant de **a** et y revenant laisse fixes, non seulement le point **a**, mais toutes les droites issues de **a**. Il faut et il suffit pour cela que, dans les formules (5), Δx^1, Δx^2, ..., Δx^n soient proportionnelles

à x^1, x^2, ..., x^n; autrement dit qu'on ait les identités

$$\Omega_1^1 = \Omega_2^2 = \ldots = \Omega_n^n, \qquad \Omega_i^j = 0 \qquad (i \neq j).$$

S'il en est ainsi les formules (10) montrent, en supposant $n > 2$, qu'on a

$$\Omega_i^i - \Omega_0^0 = 0;$$

puis les formules (7) donnent

$$[\Omega_i^0 \omega^j] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où

$$\Omega_i^0 = 0.$$

Toutes les composantes de la courbure sont donc nulles et la variété se réduit à un seul et même espace projectif.

Il n'y a donc, si $n > 2$, que l'espace projectif proprement dit pour lequel le déplacement projectif infinitésimal associé à un contour fermé partant de **a** *laisse invariants le point* **a** *et toutes les droites passant par* **a**.

Cette conclusion tombe naturellement en défaut si $n = 2$ (1).

IV. — Les géodésiques des variétés a connexion projective.

10. Une ligne (C) tracée sur une variété à connexion projective est dite *géodésique* de cette variété si, en raccordant de proche en proche les espaces projectifs attachés aux différents points de la ligne, tous ces points se mettent en ligne droite. On exprimera qu'une ligne est géodésique en écrivant qu'en vertu des formules (3') qui définissent la connexion projective de la variété, le point $d^2\mathbf{a}$ est situé sur la droite qui joint le point **a** au point $d\mathbf{a}$. On est conduit ainsi aux équations différentielles du second ordre

$$\frac{d\omega^1 - \omega^1\omega_0^0 + \sum_{i=1}^{i=n} \omega^i\omega_i^1}{\omega^1} = \frac{d\omega^2 - \omega^2\omega_0^0 + \sum_{i=1}^{i=n} \omega^i\omega_i^2}{\omega^2} = \ldots$$
$$= \frac{d\omega^n - \omega^n\omega_0^0 + \sum_{i=1}^{i=n} \omega^i\omega_i^n}{\omega^n}.$$

(1) Il existe un théorème analogue dans la théorie des variétés à connexion conforme, mais il faut alors que n soit supérieur à trois (*Ann. Soc. pol. Mat.*, *loc. cit.*, p. 185).

Supposons en particulier que l'on ait choisi les repères de manière à réduire ω^i à du^i. Les équations sont de la forme

$$\frac{d^2u^1 + P^1(du)}{du^1} = \frac{d^2u^2 + P^2(du)}{du^2} = \ldots = \frac{d^2u^n + P^n(du)}{du^n},$$

où les $P^i(du)$ sont des formes quadratiques en $du^1, du^2, \ldots, du^n$. On voit que si l'on exprime par exemple $u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}$ en fonction de u^n, on obtient les équations

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2u^1}{(du^n)^2} &= -P^1\left(\frac{du^i}{du^n}\right) + \frac{du^1}{du^n}P^n\left(\frac{du^i}{du^n}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^2u^{n-1}}{(du^n)^2} &= -P^{n-1}\left(\frac{du^i}{du^n}\right) + \frac{du^{n-1}}{du_n}P^n\left(\frac{du^i}{du^n}\right), \end{aligned}\right.$$

les P^i étant maintenant n polynomes entiers du second degré (non nécessairement homogènes) en $\frac{du^1}{du^n}, \ldots, \frac{du^{n-1}}{du^n}$, avec des coefficients fonctions données de $u^1, u^2, \ldots, u^n$ [1].

On voit d'après cela qu'étant donnée dans une variété numérique à n dimensions une famille de courbes définie par un système de $n - 1$ équations différentielles du second ordre, *il est en général impossible d'attribuer à la variété une connexion projective telle que ces courbes en deviennent les géodésiques:* il faut que les équations différentielles puissent se mettre sous la forme (13).

Réciproquement, étant donné un système quelconque d'équations différentielles de la forme (13), il sera possible de les regarder comme des géodésiques de la variété, supposée douée d'une connexion projective convenablement choisie. On peut en effet toujours supposer qu'on a $\omega^i = du^i$; il suffit alors de prendre les composantes $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_i^j de manière qu'on ait

$$du^i(\omega_i^i - \omega_0^0) + \sum_{k \neq i} du^k \omega_k^i = P^i(du),$$

---

[1] Dans le cas $n = 2$, ces équations se réduisent à une seule qui, en changeant les notations, est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A + 3B\frac{dy}{dx} + 3C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + D\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

les coefficients A, B, C, D étant des fonctions de x, y.

et, plus généralement,

$$(14)\qquad du^i(\omega_i^i-\omega_0^0)+\sum_{k\neq i}du^k\omega_k^i = \mathrm{P}^i(du)+du^i\sum_{k=1}^{k=n}c_k\,du^k,$$

où les c_k sont des fonctions arbitraires.

11. Cherchons en particulier toutes les connexions projectives *sans torsion* compatibles avec ces identités. Comme on l'a vu on peut, sans resteindre la généralité, supposer

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}(\omega_i^i-\omega_0^0)=0.$$

Or, la variété étant sans torsion, les expressions $\omega_i^i-\omega_0^0$, ω_k^i sont les demi-dérivées partielles du second membre de l'identité (14), regardé comme forme quadratique en du^1, du^2, ..., du^n. On a donc

$$\omega_i^i-\omega_0^0=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{P}^i}{\partial(du^i)}+\frac{1}{2}\sum c_k\,du^k+\frac{1}{2}c_i\,du^i,$$
$$\omega_k^i=\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{P}^i}{\partial(du^k)}+\frac{1}{2}c_k\,du^i.$$

La condition (15) donne

$$\sum_{i=1}^{i=n}c_i\,du^i=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\mathrm{P}^i}{\partial(du^i)};$$

elle détermine sans ambiguïté les coefficients c_i, et par suite les composantes $\omega_i^i-\omega_0^0$, ω_k^i de la connexion projective cherchée. On voit que *les courbes* (C) *intégrales du système* (13) *peuvent toujours être regardées comme les géodésiques de la variété supposée sans torsion, la connexion projective qu'il est nécessaire d'attribuer à cette variété dépendant de n expressions de Pfaff arbitraires* ω_1^0, ω_2^0, ..., ω_n^0.

V. — Les variétés a connexion projective normale.

12. Il est intéressant de se demander si, parmi toutes les connexions projectives qui confèrent à une variété numérique donnée les mêmes géodésiques, il en existe une douée de propriétés intrinsèques plus particulièrement simples. Il est naturel de supposer que la connexion projective est sans torsion; nous venons de voir que, dans cette hypothèse, il restait n expressions de Pfaff arbitraires ω_i^0. Nous pouvons maintenant nous arranger pour que l'on ait

$$\sum_{=1}^{i=n}(\Omega_i^i - \Omega_0^0) = \sum_{i=1}^{i=n}(\omega_i^i - \omega_0^0)' + (n+1)\sum_{i=1}^{i=n}[\omega^i\omega_i^0] = 0;$$

satisfaire à cette condition, étant donné le choix fait précédemment des repères, revient à prendre pour les ω_i^0 les demi-dérivées partielles d'une forme quadratique Φ en $du^1, du^2, \ldots, du^n$:

$$\omega_i^0 = \sum_{k=1}^{k=n}\Gamma_{ik}\,du^k \qquad (\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}).$$

Il reste encore $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients arbitraires Γ_{ij}. On a

$$\Omega_i^i - \Omega_0^0 = (\omega_i^i - \omega_0^0)' - \sum_{k=1}^{k=n}[\omega_i^k\omega_k^i] + [\omega^i\omega_i^0] + \sum_{k=1}^{k=n}[\omega^k\omega_k^0],$$

$$\Omega_j^i = (\omega_j^i)' - \sum_{k=1}^{k=n}[\omega_j^k\omega_k^i] + [\omega^i\omega_j^0].$$

Désignons par a_{ikl}^i, a_{jkl}^i les coefficients des formes $\Omega_i^i - \Omega_0^0$, Ω_j^i quand on annule les ω_i^0; dans le cas général ces coefficients deviendront

$$\begin{aligned}
A_{iil}^i &= a_{iil}^i + \Gamma_{il},\\
A_{ikl}^i &= a_{ikl}^i \qquad (k, l \neq i),\\
A_{jil}^i &= a_{jil}^i + \Gamma_{jl},\\
A_{jkl}^i &= a_{jkl}^i \qquad (k, l \neq i).
\end{aligned}$$

On pourra, d'une manière et d'une seule, disposer des coefficients Γ_{ij} de manière à avoir

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_{jik}^k = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

il suffira de prendre

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{k=n} a^k_{ijk};$$

les deux valeurs obtenues pour Γ_{ij} sont égales (n° 7) en vertu des formules (11), où l'on remplace i par γ et où l'on somme par rapport à γ.

En définitive, *avec le choix* (*unique*) *des repères réduisant* ω^i *à* du^i *et* $\Sigma\,(\omega^i_i - \omega^0_0)$ *à zéro, il existe une connexion projective et une seule rendant les courbes intégrales de* (13) *géodésiques et satisfaisant aux conditions*

$$(16)\qquad \Omega^i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (\Omega^i_i - \Omega^0_0) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=n} A^k_{ijk} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

13. Nous allons maintenant montrer que les conditions (16) sont *indépendantes de tout choix des repères.* Il en est évidemment ainsi des relations

$$\Omega^i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} (\Omega^i_i - \Omega^0_0) = 0,$$

qui ont, comme nous l'avons vu (n° 8), une signification invariante. Supposant d'ores et déjà ces relations vérifiées, les quantités

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} A^k_{ijk} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfont à la loi de symétrie $B_{ij} = B_{ji}$. Nous allons montrer que, par un changement infinitésimal des repères, elles se transforment entre elles par une substitution linéaire et homogène.

Imaginons en effet que les repères dépendent en chaque point de la variété d'un paramètre variable v, et utilisons le symbole δ pour une variation de ce paramètre, les u^i restant fixes; le symbole d sera réservé à une variation quelconque des u et de v. Les formules (7)

$$(\Omega^i_i - \Omega^0_0)' = -\sum_{k=1}^{k=n} [\Omega^k_i \omega^i_k] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k_i \Omega^i_k] - [\omega^i \Omega^0_i] - \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k \Omega^0_k],$$

$$(\Omega^i_j)' = -\sum_{k=1}^{k=n} [\Omega^k_j \omega^i_k] + \sum_{k=1}^{k=n} [\omega^k_j \Omega^i_k] - [\omega^i \Omega^0_j]$$

montrent qu'on a, pour une variation infinitésimale de v,

$$\delta(\Omega_i^i - \Omega_0^0) = \sum_{k \neq i} (e_i^k \Omega_k^i - e_k^i \Omega_i^k),$$

$$\delta \Omega_j^i = \sum_{k=1}^{k=n} (e_j^k \Omega_k^i - e_k^i \Omega_j^k),$$

en désignant par e_i^i, e_j^i ce que deviennent $\omega_i^i - \omega_0^0$, ω_j^i pour le symbole de différentiation δ.

Les formules

$$(\omega^i)' = [\omega^i(\omega_i^i - \omega_0^0)] + \sum_{k \neq i} [\omega^k \omega_k^i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

donnent d'autre part

$$\delta \omega^i = -\sum_{k=1}^{k=n} e_k^i \omega^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On déduit de là facilement

$$\delta A_{ikl}^j = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (e_i^\rho A_{\rho kl}^j - e_\rho^j A_{ikl}^\rho + e_k^\rho A_{i\rho l}^j + e_l^\rho A_{ik\rho}^j)$$
$$(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite,

$$\delta B_{ij} = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} (e_i^\rho B_{\rho j} + e_j^\rho B_{i\rho});$$

c'est ce qu'il fallait démontrer [1].

Il résulte de là que si les coefficients B_{ij} sont nuls avec un choix particulier des repères, ils sont nuls avec tout autre choix.

Nous dirons qu'une connexion projective satisfaisant aux conditions (16) est *normale*. Nous voyons alors qu'*étant donnée, dans*

---

(1) On peut, d'une manière plus élégante, montrer que la forme quadratique

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} \omega^k \frac{\partial \Omega_k^i}{\partial \omega^i} = \Sigma B_{ij} \omega^i \omega^j$$

(où l'on a écrit Ω_i^i à la place de $\Omega_i^i - \Omega_0^0$), est *invariante* par un changement quelconque de repères.

une variété numérique, une famille de courbes définie par un système d'équations différentielles de la forme (13), *on peut attribuer à la variété, d'une manière et d'une seule, une connexion projective normale telle que les courbes considérées deviennent les géodésiques de cette variété.*

Une conséquence importante du théorème précédent est la suivante : *L'étude analytique des invariants d'un système* (13) *vis-à-vis d'un changement arbitraire de variables est identique à l'étude des propriétés géométriques des variétés à connexion projective normale* [1]. On voit l'importance, tant au point de vue de l'Analyse qu'à celui de la Géométrie, de cette notion de connexion projective normale.

On peut remarquer que les variétés à deux dimensions à connexion projective normale sont caractérisées par la propriété que le déplacement projectif infinitésimal associé à un contour fermé infiniment petit partant d'un point **a** laisse invariants le point **a** et *toutes* les droites issues de **a**.

Remarque. — Étant donné un système d'équations différentielles de la forme (13), il est facile de voir qu'on peut, d'une infinité de manières, attribuer à la variété une connexion *affine* telle que les courbes intégrales (13) deviennent les géodésiques de la variété ; on peut même faire en sorte qu'il existe dans la variété une *unité de volume absolue;* mais, même avec cette condition supplémentaire, le problème comporte une infinité de solutions (dépendant d'une fonction arbitraire des n variables u^i), et aucune ne se distingue des autres par des propriétés intrinsèques simples [2]. C'est donc la notion de connexion projective normale qui seule

---

(1) Les variétés à connexion projective normale jouent, vis-à-vis des systèmes d'équations différentielles (13), le même rôle que les variétés de Riemann vis-à-vis des formes différentielles quadratiques et que les variétés à connexion conforme normale (*voir* la Note citée des *Comptes rendus*, t. 174, p. 857) vis-à-vis des équations quadratiques de Monge.

(2) La condition supplémentaire indiquée revient à rendre symétrique le tenseur $B_{ij} = \sum_k A^k_{ijk}$. *Voir* L.-P. EISENHART, *Spaces with correspondent Paths* (*Proceed. Nat. Acad. of sciences*, t. 8, 1922, p. 336). Dans la « Geometry of the Paths » de MM. L.-P. Eisenhart et O. Veblen (*Proceed. Nat. Acad. of sciences*, t. 8, 1922, p. 19), les géodésiques sont prises comme point de départ de la connexion affine.

permet de faire une théorie *géométrique* satisfaisante des équations de la forme (13).

VI. — La connexion projective normale attachée aux géodésiques d'un ds^2 donné.

14. Le problème de la *représentation géodésique* de deux ds^2 s'éclaire d'un jour nouveau si l'on se place au point de vue précédent. A chaque ds^2 correspond une variété à connexion projective normale bien déterminée; les deux ds^2 admettront une représentation géodésique l'un sur l'autre si les deux variétés à connexion projective normale correspondantes sont *isomorphes*, c'est-à-dire s'il est possible d'établir entre les deux variétés une correspondance ponctuelle conservant les composantes de la connexion projective. Nous ne nous occuperons pas de ce problème général qui peut être traité exactement par les mêmes méthodes que celui de l'isomorphisme (ou applicabilité) de deux variétés de Riemann ([1]). Nous allons nous contenter d'indiquer comment on détermine la connexion projective normale correspondant à un ds^2 donné, et de voir dans quel cas ce ds^2 est représentable géodésiquement sur un ds^2 euclidien.

Considérons un ds^2, qu'on peut toujours ramener à une somme de n carrés :

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + \ldots + (\omega^n)^2\,;$$

la variété de Riemann définie par ce ds^2 admet une connexion euclidienne (sans torsion) dont les composantes sont les ω^i et certaines expressions de Pfaff $\omega_i^j = -\omega_j^i$; cette connexion peut être regardée comme projective en attribuant aux ω_i^0 la valeur zéro.

Utilisons les lettres ϖ pour désigner les composantes de la connexion projective *normale* qui fournit les mêmes géodésiques. Nous avons le droit de prendre

$$\varpi^i = \omega^i, \qquad \varpi_i^i - \varpi_0^0 = \omega_i^i = 0, \qquad \varpi_i^j = \omega_i^j.$$

Comme $\Sigma\,(\varpi_i^i - \varpi_0^0) = 0$, le raisonnement fait plus haut montre

---

([1]) Voir mon mémoire : *Sur les équations de la gravitation d'Einstein* (*J. de Math.*, 1922, fasc. 1).

que les ϖ_i^0 sont de la forme

$$\varpi_i^0 = \sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_{ik}\omega^k \qquad (\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}).$$

Posons

$$\Omega_i^j = \sum_{k,l} a_{ikl}^j [\omega^k \omega^l];$$

nous aurons

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ijk}^k = \frac{b_{ij}}{n-1}.$$

Le premier problème est ainsi résolu, et l'on a

$$\Pi_i^i - \Pi_0^0 = [\omega^i \varpi_i^0] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}[\omega^i\omega^k] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\Pi_i^j = \Omega_i^j + [\omega^j \varpi_i^0] = \sum_{k,l} a_{ikl}^j[\omega^k\omega^l] + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{k=n} b_{ik}[\omega^j\omega^k]$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

15. Si l'on veut que le ds^2 donné soit représentable géodésiquement sur le ds^2 euclidien, il faut et il suffit que les composantes $\Pi_i^i - \Pi_0^0$, Π_i^j, Π_i^0, de la courbure de la variété à connexion projective normale qui vient d'être déterminée, soient identiquement nulles. Si nous supposons d'abord $n > 2$, nous savons (n° 9) qu'il suffit pour cela que les $\Pi_i^i - \Pi_0^0$, et les Π_i^j soient nulles. On voit d'abord que les b_{ij} sont nuls pour $i \neq j$; on voit ensuite que l'on a

$$\Omega_i^j = - b_{ii}[\omega^i\omega^j];$$

mais la relation $\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0$ montre que les n coefficients b_{ii} sont égaux entre eux, de sorte qu'on a

$$\Omega_i^j = - c[\omega^i\omega^j].$$

D'après un théorème classique, qui serait du reste facile à démontrer, c est une constante, de sorte que la *variété de Riemann considérée est à courbure constante.*

Cette conclusion est encore vraie si $n = 2$, mais pour y arriver il faut tenir compte des expressions de Π_1^0 et Π_2^0 :

$$\Pi_1^0 = (\omega_1^0)' - [\omega_1^2 \omega_2^0] = c \left\{ (\omega^1)' - [\omega_1^2 \omega^2] \right\} + [dc\,\omega^1] = [dc\,\omega^1],$$
$$\Pi_2^0 = (\omega_2^0)' - [\omega_2^1 \omega_1^0] = c \left\{ (\omega^2)' - [\omega_2^1 \omega^1] \right\} + [dc\,\omega^2] = [dc\,\omega^2].$$

Ces deux expressions ne sont nulles que si $dc = 0$.

Nous retrouvons donc ainsi le théorème classique d'après lequel *les seules variétés de Riemann représentables géodésiquement sur l'espace euclidien sont les variétés à courbure constante.*

16. Les considérations précédentes nous conduisent tout naturellement à la définition projective, due à Cayley, des variétés à courbure constante. La manière *analytique* la plus simple de présenter cette définition consiste à prendre dans un espace projectif une quadrique non dégénérée (*absolu*); soit

$$\Phi(X, X^1, \ldots, X^n) = 0$$

son équation. Si l'on convient d'attribuer à tout point de l'espace des coordonnées satisfaisant à la relation $\Phi = k$, k étant une constante donnée, le ds^2 cherché est tout simplement

$$ds^2 = \Phi(dX, dX^1, \ldots, dX^n).$$

Or considérons, dans une variété de Riemann, à courbure constante, la connexion projective normale qui fait de cette variété un espace projectif proprement dit, et dont les composantes sont

$$\varpi^i = \omega^i, \qquad \varpi_i^i - \varpi_0^0 = 0, \qquad \varpi_i^j = \omega_i^j, \qquad \varpi_i^0 = c\,\omega^i;$$

nous supposerons même, ce qui est permis, $\varpi_0^0 = 0$. Cela posé, on vérifie facilement que si l'on considère les coordonnées $(x, x^1, \ldots, x^n)$, rapportées aux différents repères, d'un point fixe de l'espace projectif, la quantité

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 - \frac{1}{c}(x)^2$$

est fixe; cela résulte des formules (4) qui donnent la variation des x^i quand on passe d'un repère au voisin, formules où l'on remplacera naturellement les lettres ω par les lettres ϖ. Si donc on choisit un des repères comme repère *fixe* (avec les coordonnées X^i), on aura pour les coordonnées (x^i) d'un point, rapportées au repère attaché à un point donné **a**,

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(x)^2=(X^1)^2+(X^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(X)^2; \tag{17}$$

en particulier les coordonnées (X^i) du point **a** lui-même satisfont à la relation

$$(X^1)^2+\ldots+(X^n)^2-\frac{1}{c}(X)^2=-\frac{1}{c}.$$

D'autre part, la relation (17) entraîne, pour deux points infiniment voisins de l'espace, la relation

$$(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(dx)^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(dX)^2;$$

appliquons-la au point **a** et au point infiniment voisin **a**$'$; nous aurons

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\ldots+(\omega^n)^2=(dX^1)^2+(dX^2)^2+\ldots-\frac{1}{c}(dX)^2.$$

Nous retrouvons la définition projective de Cayley, avec l'équation

$$\Phi(X, X^1, \ldots, X^n)=(X^1)^2+\ldots+(X^n)^2-\frac{1}{c}(X)^2=0$$

de l'absolu, et la valeur $\frac{1}{c}$ de la constante k qui correspond à la courbure constante donnée.

VII. — La notion de variété d'éléments a connexion projective.

17. Le système d'équations différentielles (13) n'est pas le plus général des systèmes d'équations différentielles ordinaires du second ordre à $n-1$ fonctions inconnues. Les courbes d'une variété numérique à n dimensions définies par un système qui n'est pas de la forme (13) ne peuvent pas être regardées comme les géodésiques d'une variété à connexion projective. On peut se demander s'il n'existerait par une généralisation permettant, elle aussi, de les regarder comme des géodésiques. Nous ne nous occuperons pas du problème en général, nous nous contenterons d'examiner le cas le plus simple $n=2$, c'est-à-dire le cas des courbes intégrales d'une équation différentielle du second ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

que nous pouvons toujours supposer écrite sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{18}$$

La théorie des invariants différentiels de cette équation vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles en (x, y) a fait l'objet d'un Mémoire important de M. Tresse (¹). Nous allons voir que la notion de connexion projective permet de donner à cette théorie une forme géométrique simple.

Nous partirons de la notion d'*élément*, regardé comme l'ensemble d'un point et d'une direction issue de ce point, et défini analytiquement par les coordonnées (x, y) du point et la valeur y' que prend $\frac{dy}{dx}$ quand on se déplace dans la direction donnée. L'ensemble de tous les éléments (x, y, y') constitue une *variété d'éléments* à trois dimensions.

Cela posé, imaginons par la pensée attaché à chaque élément (x, y, y') un plan projectif contenant cet élément. Nous aurons doué la variété d'éléments considérée d'une connexion projective si nous nous donnons une loi permettant de raccorder entre eux les plans projectifs attachés à deux éléments infiniment voisins. Cette loi sera arbitraire, mais elle devra satisfaire toutefois aux deux conditions suivantes :

a. Si l'on considère dans la variété d'éléments une *multiplicité* (au sens de S. Lie), c'est-à-dire une suite continue à un paramètre d'éléments satisfaisant à l'équation

$$dy - y'\,dx = 0,$$

cette multiplicité reste une multiplicité quand on raccorde entre eux de proche en proche les plans projectifs attachés aux différents éléments de la multiplicité donnée (²).

(¹) *Voir* l'Introduction.

(²) On peut exprimer cela d'une manière plus intuitive en disant que toute *b*. Toute multiplicité-point (lieu des éléments issus d'un point fixe) de la variété donnée reste, sous les mêmes hypothèses, une multiplicité-point.

18. Nous choisirons le repère attaché à un élément $\mathbf{e}$ de la variété de la manière suivante. L'élément $\mathbf{e}$ appartenant au plan projectif qui lui est attaché, nous prendrons pour sommet $\mathbf{a}$ du repère le *point* de l'élément $\mathbf{e}$, et nous nous astreindrons à prendre le sommet $\mathbf{a}_1$ sur la droite qui, avec le point $\mathbf{a}$, constitue l'élément considéré du plan projectif. Soient alors

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= \omega_0^0 \mathbf{a} + \omega^1 \mathbf{a}_1 + \omega^2 \mathbf{a}_2, \\ d\mathbf{a}_1 &= \omega_1^0 \mathbf{a} + \omega_1^1 \mathbf{a}_1 + \omega_1^2 \mathbf{a}_2, \\ d\mathbf{a}_2 &= \omega_2^0 \mathbf{a} + \omega_2^1 \mathbf{a}_1 + \omega_2^2 \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

les équations qui définissent la connexion projective de la variété. Les composantes ω_k^j sont linéaires en dx, dy, dy' (et contiennent aussi les différentielles des paramètres dont peut dépendre éventuellement le repère attaché à chaque élément de la variété).

Exprimons maintenant que les conditions *a* et *b* sont vérifiées. Si l'on se déplace le long d'une multiplicité quelconque de la variété, il faut que le point $d\mathbf{a}$ soit sur la droite $\mathbf{aa}_1$, autrement dit que l'expression ω^2 soit nulle. Par suite, ω^2 *s'annule avec* $dy - y'dx$.

Si maintenant le point $\mathbf{a}$ de la variété reste fixe, il faut que le point $d\mathbf{a}$ se confonde géométriquement avec $\mathbf{a}$; autrement dit ω^1 et ω^2 sont des combinaisons linéaires de dx et dy. Donc *la forme* ω^1 *ne dépend linéairement que de dx et dy.*

Ajoutons la remarque suivante. Si l'élément $\mathbf{e}$ reste fixe, le point $\mathbf{a}$ et la droite $\mathbf{aa}_1$ doivent rester fixes; autrement dit ω^1, ω^2 et ω_1^2 s'annulent avec dx, dy, dy'; ou enfin *la forme* ω_1^2 *ne dépend linéairement que de dx, dy, dy'.* Cette remarque n'a du reste d'intérêt que si le repère attaché à un élément de la variété dépend de paramètres variables. S'il n'en est pas ainsi, les expressions ω_i^j seront linéaires en dx, dy, dy', les formes ω^1 et ω^2 satisfaisant aux

---

multiplicité de la variété *se développe* sur un plan projectif suivant une multiplicité de ce plan. On ne pourrait naturellement pas parler du développement d'une figure à deux paramètres de la variété.

conditions énoncées plus haut et les trois formes ω^1, ω^2, ω_1^2 étant linéairement indépendantes.

VIII. — Les variétés d'éléments a connexion projective normale.

19. Nous appellerons *géodésiques* d'une variété d'éléments à connexion projective ainsi définie les lignes de la variété qui se *développent* sur un plan projectif suivant des droites. Ces lignes sont naturellement regardées comme les supports ponctuels de multiplicités. Si $\mathbf{a}$ est un point de la ligne, $\mathbf{a}\mathbf{a}_1$ sa tangente, la ligne sera géodésique si $d\mathbf{a}$ et $d\mathbf{a}_1$ sont tous les deux sur la droite $\mathbf{a}\mathbf{a}_1$, ce qui donne

$$\omega^2 = 0, \qquad \omega_1^2 = 0;$$

ces équations sont réductibles à

$$dy - y'\,dx = 0, \qquad dy' - f(x, y, y')\,dx = 0;$$

et les géodésiques sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{18}$$

Réciproquement les courbes intégrales d'une équation différentielle quelconque du second ordre peuvent être regardées comme les géodésiques de la variété douée d'une connexion projective convenable; il suffit en effet de prendre

$$\omega^1 = \alpha\,dx + \beta\,dy, \qquad \omega^2 = \gamma\,(dy - y'\,dx),$$
$$\omega_1^2 = \lambda\,(dy - y'\,dx) + \mu(dy' - f\,dx),$$

les autres ω étant arbitraires.

Peut-on, parmi toutes les connexions projectives qui font d'une famille donnée à deux paramètres de courbes (C) les géodésiques de la variété, en distinguer une par des propriétés intrinsèques? Nous allons voir qu'il en est effectivement ainsi, ce qui nous conduira à la notion de *variété d'éléments à connexion projective normale.*

Auparavant faisons d'abord une remarque. On peut toujours, quelle que soit la connexion projective de la variété, supposer qu'on a

$$(19) \qquad \omega^1 = dx, \qquad \omega^2 = dy - y'\,dx, \qquad \omega_1^2 = k(dy' - f\,dx).$$

En effet, la multiplication de **a**, **a**$_1$, **a**$_2$ par un même facteur ne changeant pas les composantes de la connexion projective, tout changement de repères peut être réalisé en conservant **a**. En ordonnant d**a** suivant dy', dx, $dy - y'dx$, il suffit de prendre pour **a**$_1$ le coefficient de dx et pour **a**$_2$ le coefficient de $dy - y'dx$: on réduit ainsi ω^1 à dx et ω^2 à $dy - y'dx$. On voit même qu'on peut encore ajouter à **a**$_1$ et **a**$_2$ des multiples arbitraires de **a**.

On peut maintenant évidemment disposer de λ de manière que le coefficient de **a**$_2$ dans d (**a**$_1$ + λ **a**), coefficient qui est

$$\omega_1^2 + \lambda\,\omega^2,$$

soit proportionnel à $dy' - f dx$. La proposition est donc démontrée.

On voit que le repère n'est pas encore complètement déterminé, puisqu'on peut remplacer **a**$_2$ par **a**$_2$ + h **a**, avec un coefficient h arbitraire. Ce coefficient h n'a aucune influence sur ω_1^1, mais modifie ω_0^0 de la quantité $h\,\omega^2$; *on pourra donc en disposer pour modifier la composante* $\omega_1^1 - \omega_0^0$ *d'une quantité de la forme* $h\,\omega^2$.

20. Nous allons maintenant procéder de la manière suivante pour *normer* la connexion projective de la variété. Calculons d'abord la composante Ω^2 de la courbure :

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= (\omega^2)' - [\omega^1\omega_1^2] - [\omega^2(\omega_2^2 - \omega_0^0)] \\ &= (1-k)[dx\,dy'] - [(dy - y'\,dx)(\omega_2^2 - \omega_0^0)].\end{aligned}$$

Il est toujours possible de spécialiser la connexion projective de manière à annuler Ω^2; il faut pour cela prendre $k = 1$ et

$$\omega_2^2 - \omega_0^0 = u(dy - y'\,dx).$$

Nous pouvons de même annuler Ω^1 :

$$\Omega^1 = (\omega^1)' - [\omega^2\omega_2^1] - [\omega^1(\omega_1^1 - \omega_0^0)] = -[dx(\omega_1^1 - \omega_0^0)] - [(dy - y'\,dx)\omega_2^1].$$

Comme on peut, d'après la remarque faite ci-dessus, modifier $\omega_1^1 - \omega_0^0$ d'un multiple arbitraire de $dy - y'dx$, nous pourrons supposer

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = v\,dx,$$
$$\omega_2^1 = w(dy - y'\,dx).$$

Le repère est désormais choisi sans ambiguïté (si toutefois on se donne la connexion projective annulant Ω^2 et Ω^1).

On a maintenant

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= (\omega_1^2)' + [\omega^2\omega_1^0] - [\omega_1^2(\omega_2^2 - \omega_1^1)]\\ &= [dx\,df] - u[(dy' - f\,dx)(dy - y'\,dx)] - v[dx\,dy']\\ &\quad + [(dy - y'\,dx)\omega_1^0].\end{aligned}$$

On peut encore annuler la composante Ω_1^2 de la courbure à condition de prendre

$$v = \frac{\partial f}{\partial y'},$$
$$\omega_1^0 = \frac{\partial f}{\partial y}dx - u(dy' - f\,dx) + \lambda(dy - y'\,dx).$$

On a de même

$$\begin{aligned}\Omega_1^1 + \Omega_2^2 - 2\Omega_0^0 &= (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0)' + 3[\omega^1\omega_1^0] + 3[\omega^2\omega_2^0]\\ &= \left[d\frac{\partial f}{\partial y'}dx\right] + [du(dy - y'\,dx)] - 2u[dx\,dy']\\ &\quad + 3\lambda[dx(dy - y'\,dx)] + 3[(dy - y'\,dx)\omega_2^0],\end{aligned}$$

et l'on peut annuler le second nombre en prenant

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2},$$
$$\omega_2^0 = \lambda\,dx - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}dx - \frac{1}{6}d\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \mu(dy - y'\,dx).$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}\Omega_1^1 - \Omega_0^0 &= (\omega_1^1 - \omega_0^0)' - [\omega_1^2\omega_2^1] + 2[\omega^1\omega_1^0] + [\omega^2\omega_2^0]\\ &= \left[d\frac{\partial f}{\partial y'}dx\right] - w[(dy' - f\,dx)(dy - y'\,dx)]\\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}[dx\,dy'] + \lambda[dx(dy - y'\,dx)]\\ &\quad + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}[dx(dy - y'\,dx)] + \frac{1}{6}\left[d\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(dy - y'\,dx)\right].\end{aligned}$$

On peut encore annuler cette expression en prenant

$$w = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3},$$

$$\lambda = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right),$$

où l'on a utilisé la notation abrégée

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial y'}.$$

En résumé, nous avons obtenu les expressions suivantes des composantes de la connexion projective

$$(20)\quad \begin{cases} \omega^1 = dx, \qquad \omega^2 = dy - y'\,dx, \\ \omega_1^1 - \omega_0^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y'}\,dx, \qquad \omega_2^2 - \omega_0^0 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(dy - y'\,dx), \\ \omega_1^2 = dy' - f\,dx, \qquad \omega_2^1 = \dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 f}{\partial y'^3}(dy - y'\,dx), \\ \omega_1^0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dx + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(dy' - f\,dx) \\ \qquad + \left(\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \dfrac{1}{6}\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)(dy - y'\,dx), \\ \omega_2^0 = \left(\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \dfrac{1}{6}\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right)dx - \dfrac{1}{6}d\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \mu(dy - y'\,dx), \end{cases}$$

avec un coefficient arbitraire μ, et cela en réalisant les conditions

$$(21)\quad \Omega^2 = 0, \qquad \Omega^1 = 0, \qquad \Omega_1^2 = 0, \qquad \Omega_1^1 - \Omega_0^0 = 0, \qquad \Omega_2^2 - \Omega_0^0 = 0.$$

21. Avant d'aller plus loin, voyons ce que les relations (21) nous permettent de prévoir quant aux expressions des composantes restantes Ω_2^1, Ω_1^0, Ω_2^0 de la courbure de la variété. Les identités (7) nous donnent immédiatement

$$[\omega^2\Omega_2^1] = 0, \qquad [\omega^2\Omega_1^0] = 0,$$
$$[\omega^1\Omega_1^0] + [\omega^2\Omega_2^0] = 0, \qquad [\omega_1^2\Omega_2^1] - [\omega^1\Omega_1^0] = 0,$$

d'où l'on tire les expressions générales

$$\Omega_2^1 = a[\omega^2\omega_1^2] + r[\omega^1\omega^2],$$
$$\Omega_1^0 = b[\omega^1\omega^2] + r[\omega^2\omega_1^2],$$
$$\Omega_2^0 = h[\omega^1\omega^2] + k[\omega^2\omega_1^2] + r[\omega^1\omega_1^2].$$

Nous allons voir qu'on peut ici disposer du coefficient arbitraire μ pour annuler r. On a en effet

$$\begin{aligned}\Omega_2^1 &= (\omega_2^1)' + [\omega^1 \omega_2^0] + [\omega_2^1(\omega_2^2 - \omega_1^1)] \\ &= \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}[dx\, dy'] + \frac{1}{6}\left[d\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}(dy - y'\, dx)\right] - \frac{1}{6}\left[dx\, d\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right] \\ &\quad + \mu[dx(dy - y'\, dx)] + \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}[dx(dy - y'\, dx)].\end{aligned}$$

On vérifie bien tout d'abord que le second membre s'annule avec $dy - y'dx$, c'est-à-dire avec ω^2. Quant au coefficient désigné par r, c'est le coefficient de $[dxdy]$ dans le second membre, quand on y a remplacé dy' par $f dx$:

$$r = \mu - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial y'^2} + \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3} + \frac{1}{6}\frac{d}{dx}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}.$$

Nous prendrons donc pour μ la valeur

$$\mu = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial y'^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3} - \frac{1}{6}\frac{d}{dx}\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}. \tag{22}$$

La connexion projective de la variété est ainsi déterminée sans ambiguïté, avec, pour Ω_2^1, Ω_1^0, Ω_2^0, des expressions de la forme

$$\Omega_2^1 = a[\omega^2 \omega_1^2], \qquad \Omega_1^0 = b[\omega^1 \omega^2], \qquad \Omega_2^0 = h[\omega^1 \omega^2] + k[\omega^2 \omega_1^2].$$

On trouve du reste immédiatement

$$a = -\frac{1}{6}\frac{\partial^4 f}{\partial y'^4}, \tag{23}$$

et il est inutile de calculer explicitement b, h, k.

22. Une question importante reste à régler. Nous avons spécialisé la connexion projective de la variété en partant d'un choix particulier du repère; le résultat obtenu est-il indépendant de ce choix? Autrement dit, *les propriétés de la connexion projective exprimées par les relations* (21), *jointes à la condition* $r = 0$, *ont-elles un caractère invariant?* (dans l'espèce, indépendant de tout changement de coordonnées x, y).

D'abord la propriété $\Omega^2 = 0$ signifie, comme on le voit facilement, que dans le déplacement projectif infinitésimal associé à un contour infiniment petit fermé d'éléments partant d'un élément **e**, l'élément **e**$'$ transformé de **e** est *uni* à **e** : c'est évidement une propriété *invariante*.

En second lieu les conditions

$$\Omega^1 = 0, \qquad \Omega^2 = 0, \qquad \Omega_1^2 = 0$$

expriment que, dans le déplacement infinitésimal qui vient d'être considéré, l'élément **e** reste invariant (absence de *torsion*) : c'est une propriété invariante. La condition $\Omega_1^1 - \Omega_0^0 = 0$ exprime ensuite que sur la droite $\mathbf{aa}_1$ il n'existe, en dehors du point **a**, aucun point *isolé* invariant; puis la condition $\Omega_2^2 - \Omega_0^0 = 0$ exprime que, en dehors de la droite $\mathbf{aa}_1$, il n'existe aucun point *isolé* invariant.

Les relations (21) ont donc effectivement un caractère invariant, indépendant de tout choix des repères.

Il en est de même de la relation $r = 0$; on se rend compte sans difficulté de la signification géométrique suivante qu'on peut lui attribuer : si l'on considère une suite linéaire (ouverte) infiniment petite d'éléments et qu'on ferme cette suite en faisant décrire au point (x, y) le *même* chemin en sens inverse qu'à l'aller, la direction y' de l'élément revenant de sa valeur finale à sa valeur initiale *sans repasser par les mêmes valeurs intermédiaires*, à ce contour fermé d'éléments est associé un déplacement projectif infinitésimal (dans l'espace projectif attaché à l'élément initial). La relation $r = 0$ signifie que tous les points de la droite $\mathbf{aa}_1$ sont invariants dans ce déplacement. Elle a donc bien une signification invariante.

Nous voyons donc, comme conclusion, *qu'à toute équation différentielle ordinaire du second ordre* $\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx}\right) = 0$ *est associée d'une manière invariante une variété d'éléments à connexion projective dont les courbes intégrales de l'équation différentielle sont les géodésiques*. Nous dirons que la connexion projective unique ainsi obtenue est *normale*. Nous avons indiqué ci-dessus les propriétés géométriques qui caractérisent les connexions projectives normales.

Le problème traité par M. Tresse peut donc s'énoncer géométriquement ainsi : *Étudier les propriétés géométriques des variétés d'éléments à connexion projective normale.*

23. La notion d'*élément* est à elle-même, en géométrie projective, sa propre dualistique, ainsi que la notion de *multiplicité*. Par suite toute variété d'éléments à connexion projective se transforme par dualité en une autre variété d'éléments à connexion projective, les *points* de la première correspondant aux *géodésiques* de la seconde et réciproquement. Si l'on désigne par la lettre ϖ les composantes de la connexion projective de la seconde, on a, comme il est facile de le voir,

$$\begin{array}{lll} \varpi_0^0 = \omega_2^2, & \varpi^1 = \omega_1^2, & \varpi^2 = \omega^2, \\ \varpi_1^0 = \omega_2^1, & \varpi_1^1 = \omega_1^1, & \varpi_1^2 = \omega^1, \\ \varpi_2^0 = \omega_2^0, & \varpi_2^1 = \omega_1^0, & \varpi_2^2 = \omega_0^0. \end{array}$$

Les relations (21) qui appartiennent à une connexion projective normale se transforment donc par dualité en

$$\Pi^2 = 0, \quad \Pi_1^2 = 0, \quad \Pi^1 = 0, \quad \Pi_1^1 - \Pi_2^2 = 0, \quad \Pi_0^0 - \Pi_2^2 = 0;$$

elles conservent la même forme. Quant à la condition que le coefficient r de $[\omega^1 \omega^2]$ dans Ω_2^1 est nul, elle devient la condition que le coefficient de $[\varpi^2 \varpi_1^2]$ dans Π_1^0 soit nul. Autrement dit, *la dualistique d'une variété d'éléments à connexion projective normale est encore une variété d'éléments à connexion projective normale.*

La relation qui existe entre les deux familles de géodésiques de deux variétés normales dualistiques est évidente. Si

$$F(x, y, a, b) = 0$$

est l'équation générale des géodésiques de la première, lorsqu'on y regarde x et y comme les variables ponctuelles et a, b comme les constantes arbitraires, c'est aussi l'équation des géodésiques de la seconde variété, à condition d'y regarder a et b comme les variables ponctuelles, x et y comme les constantes arbitraires. La relation entre les variétés normales dualistiques se traduit donc analytiquement par une certaine correspondance entre deux équations différentielles ordinaires du second ordre (ou plutôt entre les deux classes d'équations différentielles qu'on obtient en transformant chacune d'elles par une transformation ponctuelle arbitraire). Cette correspondance a déjà été étudiée par M. A. Koppisch ([1]) sous son aspect purement analytique.

24. Un cas particulier remarquable est celui où le coefficient a de la forme Ω_2^1 est identiquement nul. Les identités (7) donnent alors

$$[\omega^1 \Omega_2^0] = k[\omega^1 \omega^2 \omega_1^2] = 0;$$

autrement dit les seules composantes non nulles Ω_1^0, Ω_2^0 de la courbure de la variété sont de la forme

$$\Omega_1^0 = b[\omega^1 \omega^2], \qquad \Omega_2^0 = h[\omega^1 \omega^2];$$

elles ne font pas intervenir ω_1^2; elles sont simplement proportionnelles à $[dx\, dy]$. Ce résultat peut s'interpréter géométriquement en disant que le raccord des deux plans projectifs attachés à deux éléments donnés $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ de la variété ne dépend que de l'élément initial, de l'élément final et du chemin intermédiaire suivi par le *point* de l'élément mobile, mais ne dépend pas de la loi suivant laquelle a varié la *direction* de cet élément. Autrement dit, la variété d'éléments est au fond une variété *ponctuelle* à connexion projective, au sens de la première partie de ce Mémoire [avec cette circonstance accessoire qu'on a pris en chaque point (x, y) un repère dépendant d'un paramètre y']. Les géodésiques de la variété donnée sont alors les géodésiques d'une variété ponctuelle à connexion projective : en fait, cela résulte immédiatement aussi de l'expression précédemment trouvée du coefficient a; si ce coefficient est nul, l'équation des géodésiques est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A + 3B\frac{dy}{dx} + 3C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + D\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

qui caractérise les courbes susceptibles d'être les géodésiques d'une variété ponctuelle à connexion projective. On peut ajouter que la connexion projective qui a été déterminée est encore *normale*, au sens ancien du mot, puisque Ω^i, $\Omega_i^i - \Omega_0^0$ et Ω_i^i sont des expressions

([1]) A. Koppisch, *Zur Invariantentheorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Inaugural Dissertation*, Leipzig, B.-G. Teubner, 1905. *Voir* aussi l'*Inaugural Dissertation* de M. A. Kaiser; Leipzig, B.-G. Teubner, 1913.

toutes nulles. Autrement dit, *dans le cas où* $\Omega^1_2 = 0$, *la variété d'éléments à connexion projective normale se réduit à une variété ponctuelle à projection projective normale.*

Si l'on avait à la fois $a = 0$, $b = 0$, c'est-à-dire

$$\Omega^1_2 = 0, \qquad \Omega^0_1 = 0,$$

les identités (7) montreraient que les deux coefficients h et k sont nuls, et la variété se réduirait au plan projectif; autrement dit, l'équation différentielle des géodésiques (ainsi que l'équation dualistique) serait réductible à

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Les formules (20) et (22), qui donnent les composantes de la connexion projective, permettent de calculer b, ce qui donne, dans le cas particulier où a est nul,

$$\begin{aligned} b = \Big(& 2\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + 2D\frac{\partial A}{\partial y} + A\frac{\partial D}{\partial y} \\ & - 3D\frac{\partial B}{\partial x} - 3B\frac{\partial D}{\partial x} - 3C\frac{\partial B}{\partial y} + 6C\frac{\partial C}{\partial x}\Big) \\ + \Big(& 2\frac{\partial^2 B}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2A\frac{\partial D}{\partial x} - D\frac{\partial A}{\partial x} \\ & + 3A\frac{\partial C}{\partial y} + 3C\frac{\partial A}{\partial y} + 3B\frac{\partial C}{\partial x} - 6B\frac{\partial B}{\partial y}\Big) y'. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les *deux* conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A, B, C, D de l'équation différentielle donnée pour qu'elle soit réductible à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ [1].

25. Revenons au cas général. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'existence des *invariants intégraux*

$$\int \sqrt[4]{ab}\,\omega^2, \quad \iiint \sqrt{ab}\,\omega^1\omega^2\omega^2_1, \quad \iint a^{\frac{1}{8}} b^{\frac{5}{8}}\,\omega^1\omega^2, \quad \iint a^{\frac{5}{8}} b^{\frac{1}{8}}\,\omega^2\omega^2_1.$$

Nous nous contentons aussi de signaler qu'on pourrait, dans

(1) Ces conditions sont dues à M. A. Tresse, à la page 56 de son Mémoire cité plus haut. *Voir* aussi A. Koppisch, *loc. cit.*, p. 17.

une variété d'éléments à connexion projective normale, faire, comme dans le plan projectif, une théorie des invariants différentiels (projectifs) des courbes, déterminer l'équation différentielle du cinquième ordre des courbes qui *se développent* sur le plan projectif suivant des coniques, c'est-à-dire en somme qui jouent, vis-à-vis d'une famille donnée de courbes à deux paramètres, le rôle joué par les coniques vis-à-vis des droites, etc. Nous nous contentons aussi d'indiquer une généralisation possible de la théorie précédente pour un nombre quelconque de dimensions.