BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur le développement en fraction continue de $e^{\text{arc tg} \frac{1}{x}}$

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 95-99

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__95_1>

Sur le développement en fraction continue de $e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$;
par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 mars 1877.)

1. Posons

$$e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynômes du degré n et $\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$ une série développée suivant les puissances décroissantes de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme de la forme $\frac{\varepsilon}{x^{2n+1}}$.

Comme $e^{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$ se change en son inverse quand on change x en $-x$, il en résulte qu'à un facteur numérique près $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$; d'ailleurs pour $x = \pm\infty$, le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ se réduit à l'unité; on a donc

$$\varphi(x) = (-1)^n f(-x).$$

En employant la méthode que j'ai exposée dans une Note précédente [1], on obtient facilement l'équation différentielle suivante, à laquelle satisfait le polynôme $f(x)$,

$$(1) \qquad (1+x^2)y'' + (2x-1)y' - n(n+1)y = 0.$$

Le polynôme $\varphi(x)$ satisfait à l'équation

$$(1+x^2)u'' + (2x+1)u' - n(n+1)u = 0,$$

équation qui se déduit de la précédente par la substitution

$$y = ue^{-\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

ou encore

$$y = ue^{\operatorname{arc\,tang} x}.$$

On en conclut que l'intégrale générale de l'équation (1) est donnée par la formule

$$y = \mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}f(-x)e^{\operatorname{arc\,tang} x},$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

2. Posons

$$x = i(1-2z),$$

d'où

$$z = \frac{1+ix}{2},$$

(1) *Sur l'approximation d'une fonction d'une variable au moyen de fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 78 de ce tome).

l'équation (1) deviendra

$$(z - z^2)y'' + \left(1 + \frac{i}{2} - 2z\right)y' + n(n+1)y = 0,$$

équation qui définit une série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, pour laquelle on a

$$\gamma = 1 + \frac{i}{2}, \quad \alpha = -n \quad \text{et} \quad \beta = n + 1.$$

Cette série est évidemment un polynôme du degré n en z; on a, par suite, en désignant par K un facteur indépendant de x,

$$f(x) = \mathrm{K}\,\mathrm{F}\left(-n,\ n+1,\ \gamma,\ \frac{1+ix}{2}\right).$$

Convenons de déterminer le polynôme $f(x)$ par la condition que $\frac{f(x)}{x^n}$ soit, pour $x = +\infty$, égal à

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{2^n.1.2.3\ldots n};$$

en divisant les deux membres de la relation précédente par x^n et en faisant croître indéfiniment x, il viendra

$$1 = \mathrm{K}\frac{i^n}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

d'où

$$\mathrm{F}(-n,\ n+1,\ \gamma,\ z) = \frac{i^n f(x)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

Si, pour plus de clarté, nous représentons $f(x)$ par V_n, et si nous posons, pour abréger,

$$\mathrm{F}(-n,\ n+1,\ \gamma,\ z) = \mathrm{F}(-n),$$

on déduit de là

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{F}(-n)}{\mathrm{V}_n \dfrac{i}{\gamma+n-1}} = \frac{\mathrm{F}(-n+1)}{\mathrm{V}_{n-1}} = -\frac{\mathrm{F}(-n-1)}{\mathrm{V}_{n+1}(\gamma+n)(\gamma+n-1)}.$$

3. Cela posé, en désignant respectivement par Φ, Φ_1 et Φ_2 les

trois fonctions

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z), \quad F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, z) \quad \text{et} \quad F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, z),$$

on déduit facilement, des relations données par Gauss ([1]), la relation suivante :

$$(3) \quad \begin{cases} \left[\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)z + \dfrac{\alpha(\gamma - \alpha - 1)}{\beta - \alpha - 1} + \dfrac{(\gamma - \alpha)(\alpha - 1)}{\beta - \alpha + 1}\right]\Phi \\ \qquad - \dfrac{\beta(\gamma - \alpha)}{\beta - \alpha + 1}\Phi_1 - \dfrac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta - \alpha - 1}\Phi_2 = 0. \end{cases}$$

Si, dans cette relation, on fait

$$z = \frac{1 + ix}{2}, \quad \alpha = -n, \quad \beta = n + 1 \quad \text{et} \quad \gamma = 1 + \frac{i}{2},$$

Φ, Φ_1 et Φ_2 deviennent respectivement $F(-n)$, $F(-n-1)$, $F(-n+1)$, et l'on obtient l'équation

$$-i(2n+1)xF(-n) - (\gamma + n)F(-n-1) + (\gamma - n - 1)F(-n+1) = 0.$$

Remplaçons, dans cette équation, $F(-n)$, $F(-n+1)$ et $F(-n-1)$ par les valeurs proportionnelles déduites des relations (2) et γ par sa valeur $1 + \frac{i}{2}$, il viendra

$$(4) \qquad V_{n+1} = -(2n+1)xV_n + \left(n^2 + \frac{1}{4}\right)V_{n-1}.$$

4. Déduisons de (4) les valeurs de V_{n+1}, V'_{n+1} et V''_{n+1}, et portons-les dans l'identité

$$V''_{n+1} + (2x+1)V'_{n+1} - (n+1)(n+2)V_{n+1} = 0,$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$(5) \qquad 2(1 + x^2)V'_n - (2nx - 1)V_n + 2\left(n^2 + \frac{1}{4}\right)V_{n-1} = 0.$$

5. Des formules précédentes on déduit les valeurs suivantes des

([1]) *Disquisitiones generales circa seriem* (*Gauss Werke*, t. III, p. 130).

polynômes V_n :

$$V_0 = 1, \quad V_1 = \frac{1}{2} - x, \quad V_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}x + 3x^2, \quad \ldots .$$

Si l'on désigne, en général, par S_m la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $V_n = 0$, il est clair que l'on aura

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = \frac{1}{2}$$

et

$$S_2 = S_4 = S_6 = \ldots = -\frac{1}{2},$$

m étant au plus égal à $2n - 1$.

6. De la relation (4) résulte le développement suivant de $e^{\text{arc tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$ en fraction continue :

$$e^{\text{arc tang}\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 - \cfrac{1}{\frac{1}{2} - x + \cfrac{\left(1 + \frac{1}{4}\right)}{-3x + \cfrac{4 + \frac{1}{4}}{-5x + \cfrac{9 + \frac{1}{4}}{-7x + \ldots}}}},$$

dont la loi est évidente.

7. Les considérations qui précèdent s'appliquent, sans aucun changement, au développement en fonction de $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)$, quelles que soient les quantités a, b et m.

Du reste, cette expression donne en particulier la fonction $e^{\text{arc tang}\left(\frac{1}{x}\right)}$ quand on y fait $a = i$, $b = -i$ et $m = -\frac{i}{2}$.