

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. ANDOYER

Sur un problème simple de mécanique céleste

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 1-12

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR UN PROBLÈME SIMPLE DE MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. H. ANDOYER.

G.-W. Hill a indiqué, pour le mouvement de la Lune autour de la Terre, une orbite intermédiaire relativement très simple, et en a étudié sommairement la théorie, d'ailleurs inutile en réalité. Je me propose de reprendre dans ces quelques pages le problème ainsi défini par Hill, et d'en développer avec toute l'étendue nécessaire la solution qu'en savent donner les astronomes, dans l'espoir qu'un analyste voudra bien en discuter la valeur; je serais particulièrement heureux de voir appliquer au moins une fois les profondes et admirables recherches théoriques modernes à l'étude d'un problème particulier d'énoncé simple et précis, dans lequel on peut déjà trouver cependant toutes les difficultés analytiques qui caractérisent les problèmes de la Mécanique céleste.

1. Désignons par S , T , L les centres de gravité du Soleil, de la Terre et de la Lune; par M' , M_0 , M les masses respectives de ces trois astres; par G le centre de gravité du système Terre-Lune; par r la distance TL , rayon vecteur de la Lune; et par H l'angle des deux vecteurs TL et GS .

Négligeant l'excentricité de l'orbite solaire, nous supposons que cette orbite est un cercle de centre G et de rayon a' , décrit avec une vitesse angulaire constante n' , liée à a' par la relation $fM' = n'^2 a'^3$, en représentant par f le coefficient d'attraction.

Si l'on néglige aussi le rapport $\frac{r}{a'}$, la théorie *solaire* de la Lune revient à regarder le mouvement de L par rapport à T comme celui

d'un point matériel de masse égale à l'unité sous l'action de la fonction de forces

$$f \frac{(M_0 + M)}{r} + n'^2 r^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 H - \frac{1}{2} \right).$$

Soient x, y, z les coordonnées de L par rapport à des axes rectangulaires Tx, Ty, Tz de directions fixes; appelons t le temps, et en supposant le plan Txy parallèle à celui de l'orbite de S autour de G, soit $N' = n' t + l'_0$ l'angle de Tx avec GS , l'_0 désignant une constante. On aura

$$r^2 \cos^2 H = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2} \cos 2N' + xy \sin 2N'.$$

Négligeons alors les termes en $\cos 2N'$ et $\sin 2N'$; il nous restera la fonction de forces

$$U = \frac{f(M_0 + M)}{r} + \frac{n'^2 r^2}{4} - \frac{3}{4} n'^2 z^2;$$

c'est celle qui détermine l'orbite intermédiaire considérée par Hill et le problème que nous avons en vue. On n'en peut trouver de plus simple, en dehors des exercices classiques de mécanique rationnelle.

2. Soient, comme d'habitude, e et i la base des logarithmes hyperboliques et l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et appelons a et n deux constantes arbitraires liées par la relation

$$f(M_0 + M) = \left(n^2 + \frac{1}{2} n'^2 \right) a^3;$$

introduisons encore l'argument $N = nt + l_0$, où l_0 est une nouvelle constante arbitraire, et faisons

$$\begin{aligned} x + iy &= a(1 + \xi + \eta) e^{iN}, \\ x - iy &= a(1 + \xi - \eta) e^{-iN}, \\ iz &= a\zeta, \\ \frac{a}{r} &= 1 + \rho. \end{aligned}$$

de sorte que $a(1 + \xi)$ et $\frac{a\eta}{i}$ sont les projections de TL sur deux

axes rectangulaires $T\xi$, $T\eta$ situés dans le plan Txy , et tels que l'angle de Tx avec $T\xi$ soit constamment égal à N .

Nommons encore m le rapport $\frac{n'}{n}$, et employons la caractéristique D comme signe de dérivation par rapport à la variable iN qui remplacera le temps. Si l'on pose

$$Q = \frac{a^3}{r^3} - 1 = 3\rho + 3\rho^2 + \rho^3,$$

les équations immédiates du mouvement s'écrivent sous la forme

$$D^2\xi + 2D\eta - \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)(1 + \xi)Q = 0,$$

$$D^2\eta + 2D\xi - \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)\eta Q = 0,$$

$$\left(D^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2\right)\zeta - \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)\zeta Q = 0,$$

et si l'on fait encore

$$P = 3\rho^2 - 4\rho^3 + 5\rho^4 - 6\rho^5 + \dots,$$

on a

$$\xi + \rho = \frac{1}{2}(P - \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Sans faire attention ici à l'intégrale des aires projetées sur le plan Txy , nous nous servirons seulement encore de l'intégrale des forces vives, mise sous la forme avantageuse pour notre objet

$$\frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{dt^2} = 2U + x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} + \text{const.},$$

et due à Laplace. Ceci devient

$$\left(D^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2\right)\rho - \left(\frac{1}{2}D^2 + m^2\right)P - 3m^2\zeta^2 = \text{const.}$$

Il sera commode, au point de vue du calcul, de poser

$$1 - \frac{3}{2}m^2 = p^2, \quad 1 + \frac{3}{2}m^2 = q^2,$$

de sorte que

$$p^2 + q^2 = 2,$$

et de mettre l'ensemble des équations précédentes sous la forme

définitive

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} (D^2 - p^2) \rho = \left(\frac{1}{2} D^2 + \frac{q^2 - p^2}{3} \right) P + (q^2 - p^2) \zeta^2 + \text{const.}, \\ \xi = -\rho + \frac{P}{2} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{p^2 + q^2}{2} \frac{\eta^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2}, \\ (p^2 + q^2) D\eta = -D^2 \xi + \frac{p^2 + 2q^2}{3} (1 + \xi) Q, \\ D^2 \eta = -2D\xi + \frac{p^2 + 2q^2}{3} \eta Q, \\ (D^2 - q^2) \zeta = \frac{p^2 + 2q^2}{3} \zeta Q, \end{array} \right.$$

les paramètres p et q étant considérés dorénavant comme indépendants.

3. Les équations (a) admettent la solution particulière $\xi = \eta = \zeta = \rho = 0$. Si on les réduit à la forme linéaire, on les vérifie en faisant

$$\begin{aligned} \rho = -\xi &= \alpha e^{piN} + \alpha' e^{-piN}, \\ \eta &= \frac{2}{p} (\alpha e^{piN} - \alpha' e^{-piN}), \\ \zeta &= \beta e^{qiN} + \beta' e^{-qiN}, \end{aligned}$$

$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ désignant des constantes arbitraires; et comme n et l_0 sont déjà deux constantes arbitraires, cette solution est générale.

Tenons maintenant compte des puissances supérieures des inconnues ξ, η, ζ, ρ . Conformément aux pratiques de la Mécanique céleste, nous pouvons chercher une solution *formelle* définie de la façon suivante :

Soient G et H deux arguments de la forme

$$gN + G_0, \quad hN + H_0,$$

en désignant par g et h deux coefficients constants à déterminer, par G_0 et H_0 deux angles constants arbitraires. Soient aussi ϵ et γ deux autres constantes arbitraires réelles, et faisons

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2} e^{iG}, \quad \epsilon_{-1} = \frac{\epsilon}{2} e^{-iG}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH}, \quad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH}.$$

Désignons généralement par M_n les différents monomes $\epsilon_1^{p_1} \epsilon_{-1}^{p_{-1}} \gamma_1^{q_1} \gamma_{-1}^{q_{-1}}$, les exposants étant des entiers non négatifs dont la somme n'est pas nulle, et distinguons spécialement parmi les

monomes M_n ceux qui se réduisent à des constantes, soit les M_n , de la forme $(\varepsilon, \varepsilon_{-1})^p (\gamma, \gamma_{-1})^q$.

Les inconnues ρ, ξ, η, ζ sont développables sous la forme

$$\rho = \Sigma \rho_n M_n, \quad \xi = \Sigma \xi_n M_n, \quad \dots,$$

et il en est de même des quantités intermédiaires P, Q ; de plus, les coefficients g et h sont développables eux aussi sous la forme plus particulière

$$g = g_0 + \Sigma g_n M_n, \quad h = h_0 + \Sigma h_n M_n.$$

Dans les monomes M_n qui figurent dans les développements de ρ, ξ, η , la somme $q_1 + q_{-1}$, des exposants de γ_1 et γ_{-1} est paire; cette même somme est impaire quand il s'agit du développement de ζ .

Les quantités ρ, ξ sont réelles, tandis que η et ζ sont purement imaginaires; si donc M_{-n} désigne le monome conjugué de M_n , on a

$$\rho_{-n} = \rho_n, \quad \xi_{-n} = \xi_n, \quad \eta_{-n} = -\eta_n, \quad \zeta_{-n} = -\zeta_n;$$

par suite, dans le cas d'un monome M_n , qui est son propre conjugué, $\eta_n = 0$.

On peut choisir arbitrairement, par exemple, les coefficients ρ_n et ζ_n qui correspondent aux monomes ε_1, γ_1 , et plus généralement à ceux de la forme $\varepsilon_1 M_n, \gamma_1 M_n$; nous supposons les deux premiers égaux à l'unité, et tous les autres nuls.

Il est clair que l'on a

$$g_0 = p, \quad h_0 = q,$$

ces quantités étant prises positivement, si l'on veut.

D'après la forme des équations (a), ρ, ξ, ζ sont alors des fonctions de p et q homogènes et de degré zéro; tandis que η d'un côté, g et h d'un autre, sont de même homogènes des degrés -1 et 1 , respectivement.

Si enfin on veut revenir à la forme réelle, on aura en particulier

$$x = a \cos N + a \Sigma (\xi_n + \eta_n) \alpha_n \cos(N + V_n),$$

$$y = a \sin N + a \Sigma (\xi_n + \eta_n) \alpha_n \sin(N + V_n),$$

$$z = a \Sigma \zeta_n \alpha_n \sin V_n,$$

$$\frac{a}{r} = 1 + \Sigma \rho_n \alpha_n \cos V_n,$$

en faisant

$$\alpha_n = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p_1+p_{-1}} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{q_1+q_{-1}}, \quad V_n = (p_1 - p_{-1}) G + (q_1 - q_{-1}) H.$$

4. Substituant dans les équations (a) les valeurs supposées pour les diverses inconnues, g et h comprises, on voit immédiatement que l'on pourra déterminer sans peine les coefficients $\rho_n, \xi_n, \eta_n, \zeta_n, g_n, h_n$, en identifiant dans les deux membres de chaque équation les coefficients d'un même monome M_n (*ce n'est qu'un procédé de calcul formel*). On ne rencontrera aucune difficulté si l'on envisage successivement les monomes M_n de degrés croissants; le calcul est rendu très facile en observant que

$$DM_n = [(p_1 - p_{-1}) g + (q_1 - q_{-1}) h] M_n.$$

Mais précisons un peu plus, en distinguant les divers cas qui peuvent se présenter, et supposant d'abord connues les parties principales

$$\begin{aligned} \rho &= \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}, & \xi &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}), & \eta &= \frac{2}{p}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}), \\ \zeta &= \gamma_1 - \gamma_{-1}, & g &= p, & h &= q. \end{aligned}$$

1° M_n contient γ à une puissance paire, et n'est ni un monome $M_{n'}$, ni de la forme $\varepsilon_{\pm 1} M_{n'}$.

La première équation (a) détermine alors ρ_n ; la seconde fournit ensuite ξ_n , et les deux suivantes doivent donner deux valeurs concordantes pour η_n : c'est une importante vérification du calcul.

2° M_n est de la forme $\varepsilon_{\pm 1} M_{n'}$.

On a alors $\rho_n = 0$, par convention, et la première équation (a) donne g_n ; les trois suivantes fournissent ξ_n et η_n , comme ci-dessus.

3° M_n est de la forme $M_{n'}$.

La première et la quatrième équation (a) sont alors inutiles; la troisième donne ρ_n , et ensuite la seconde fournit ξ_n .

4° M_n contient γ à une puissance impaire et n'est pas de la forme $\gamma_{\pm 1} M_{n'}$.

La dernière équation (a) donne ζ_n .

5° M_n est de la forme $\gamma_{\pm 1} M_{n'}$.

On a alors $\gamma_n = 0$, par convention, et la dernière équation (a) donne h_n .

Calculant ainsi tous les termes jusqu'au troisième degré inclus, et en outre les termes du quatrième degré de ρ , ξ , η , qui correspondent à des monomes constants ou bien dépendant de l'argument $G - H$, on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= p - \frac{(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{6p^3} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} + \frac{2(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{p(p^2 - 4q^2)} \gamma_1 \gamma_{-1} + \dots, \\ h &= q + \frac{2(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{q(p^2 - 4q^2)} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} - \frac{(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{2q(p^2 - 4q^2)} \gamma_1 \gamma_{-1} + \dots; \\ \rho &= \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1} + \frac{5p^2 + q^2}{3p^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) + \frac{p^2 - q^2}{p^2 - 4q^2} (\gamma_1^2 + \gamma_{-1}^2) \\ &\quad + \frac{(3p^2 + q^2)(25p^2 + 2q^2)}{24p^4} (\varepsilon_1^3 + \varepsilon_{-1}^3) \\ &\quad + \frac{(p - q)(-p^3 + 16p^2q + 10pq^2 + 8q^3)}{4pq(p^2 - 4q^2)} (\varepsilon_1 \gamma_1^2 + \varepsilon_{-1} \gamma_{-1}^2) \\ &\quad + \frac{(p + q)(p^3 + 16p^2q - 10pq^2 + 8q^3)}{4pq(p^2 - 4q^2)} (\varepsilon_1 \gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1} \gamma_1^2) \\ &\quad - \frac{p^2 - q^2}{3p^2} \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1} + \frac{8(p^2 - q^2)}{p^2 - 4q^2} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} - \frac{p^2 - q^2}{p^2 - 4q^2} \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2 \\ &\quad + \frac{(p+q)(p-q)^2 \left(15p^6 + 167p^5q - 676p^4q^2 + 518p^3q^3 - 400p^2q^4 + 128pq^5 - 16q^6 \right)}{6p^3q(p+2q)(p-2q)^3(3p-2q)} (\varepsilon_1^2 \gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}^2 \gamma_1^2) \\ &\quad + \dots; \\ \xi &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) + \frac{p^2 + 2q^2}{3p^2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) - \frac{2q^2}{p^2} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} - \frac{p^2 + 2q^2}{2(p^2 - 4q^2)} (\gamma_1^2 + \gamma_{-1}^2) - \gamma_1 \gamma_{-1} \\ &\quad + \frac{(p^2 + 2q^2)(3p^2 + q^2)}{8p^4} (\varepsilon_1^3 + \varepsilon_{-1}^3) - \frac{5p^4 + 5p^2q^2 + 2q^4}{6p^4} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) \\ &\quad + \frac{(p^2 + 2q^2)(3p^2 - 3pq - 2q^2)}{4pq(p^2 - 4q^2)} (\varepsilon_1 \gamma_1^2 + \varepsilon_{-1} \gamma_{-1}^2) - \frac{3p^2}{p^2 - 4q^2} \gamma_1 \gamma_{-1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1}) \\ &\quad + \frac{(p^2 + 2q^2)(-3p^2 - 3pq + 2q^2)}{4pq(p^2 - 4q^2)} (\varepsilon_1 \gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1} \gamma_1^2) \\ &\quad + \frac{15p^6 - 213p^4q^2 - 16p^2q^4 + 92q^6}{72p^6} \varepsilon_1^2 \varepsilon_{-1} \\ &\quad + \frac{-20p^8 + 66p^6q^2 - 80p^4q^4 - 48p^2q^6 + 64q^8}{p^4(p^2 - 4q^2)^2} \varepsilon_1 \varepsilon_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} \\ &\quad + \frac{-p^6 + 21p^4q^2 - 72p^2q^4 - 20q^6}{8q^2(p^2 - 4q^2)^2} \gamma_1^2 \gamma_{-1}^2 \\ &\quad + \frac{(p^2 + 2q^2) \left(9p^7 + 300p^6q - 519p^5q^2 - 278p^4q^3 + 698p^3q^4 - 444p^2q^5 + 184pq^6 - 16q^7 \right)}{24p^3q(p+2q)(p-2q)^3(3p-2q)} (\varepsilon_1^2 \gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}^2 \gamma_1^2) \\ &\quad + \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta = & \frac{2}{p}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}) + \frac{p^2 + 2q^2}{6p^3}(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_{-1}^2) + \frac{p^2 + 2q^2}{2q(p^2 - 4q^2)}(\gamma_1^2 - \gamma_{-1}^2) \\ & + \frac{(p^2 + 2q^2)(13p^2 + q^2)}{36p^5}(\varepsilon_1^3 - \varepsilon_{-1}^3) + \frac{5p^4 - 4p^2q^2 - 4q^4}{6p^5}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}) \\ & + \frac{(p^2 + 2q^2)(-2p + 5q)}{2q(p + 2q)^2(p - 2q)}(\varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}^2) + \frac{2p^4 - 4p^2q^2 + 8q^4}{p^3(p^2 - 4q^2)}\gamma_1\gamma_{-1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_{-1}) \\ & + \frac{(p^2 + 2q^2)(2p + 5q)}{2q(p - 2q)^2(p + 2q)}(\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 - \varepsilon_{-1}\gamma_1^2) \\ & + \frac{(p^2 + 2q^2)\left(-3p^5 - 4p^4q - 206p^3q^2 + 228p^2q^3 + 20pq^4 - 8q^5\right)}{12p^2q(p + 2q)(p - 2q)^3(3p - 2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_{-1}^2 - \varepsilon_{-1}^2\gamma_1^2) \\ & + \dots\dots\dots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta = & \gamma_1 - \gamma_{-1} + \frac{p^2 + 2q^2}{p(p + 2q)}(\varepsilon_1\gamma_1 - \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}) - \frac{p^2 + 2q^2}{p(p - 2q)}(\varepsilon_1\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}\gamma_1) \\ & + \frac{(p^2 + 2q^2)(11p^3 + 5pq + 2q^2)}{12p^3(p + 2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_1 - \varepsilon_{-1}^2\gamma_{-1}) \\ & + \frac{(p^2 + 2q^2)(-11p^3 + 5pq - 2q^2)}{12p^3(p - 2q)}(\varepsilon_1^2\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}^2\gamma_1) \\ & + \frac{(p^2 - q^2)(p^2 + 2q^2)}{8q^2(p^2 - 4q^2)}(\gamma_1^3 - \gamma_{-1}^3) \\ & + \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Si l'on supposait $\gamma = 0$, de sorte que $z = 0$, le problème se ramènerait aux quadratures elliptiques.

Supposons maintenant $n' = 0$, et par suite $p = q = 1$. C'est le problème de Képler, et il est facile de s'en assurer. On trouve en effet alors

$$g = h = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{r} = & 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_{-1} + 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_{-1}^2) + \frac{9}{2}(\varepsilon_1^3 + \varepsilon_{-1}^3) - \frac{5}{2}(\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 + \varepsilon_{-1}\gamma_1^2) + \dots, \\ x + iy = & ae^{iN} \left[1 + \varepsilon_1 - 3\varepsilon_{-1} + \frac{3}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{-1}^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_{-1} + \gamma_{-1}^2 - \gamma_1\gamma_{-1} \right. \\ & + \frac{8}{3}\varepsilon_1^3 + \frac{1}{3}\varepsilon_{-1}^3 - \frac{5}{2}\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1} - \frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_{-1}^2 \\ & + \varepsilon_{-1}\gamma_{-1}^2 - \varepsilon_1\gamma_1\gamma_{-1} + 3\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1} + \frac{9}{2}\varepsilon_1\gamma_{-1}^2 - \frac{5}{2}\varepsilon_{-1}\gamma_1^2 \\ & \left. - \frac{9}{4}\varepsilon_1^2\varepsilon_{-1}^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_{-1}\gamma_1\gamma_{-1} - \gamma_1^2\gamma_{-1}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2\gamma_{-1}^2 + 5\varepsilon_{-1}^2\gamma_1^2 + \dots \right], \\ \frac{iz}{a} = & \gamma_1 - \gamma_{-1} + \varepsilon_1\gamma_1 - \varepsilon_{-1}\gamma_{-1} + 3(\varepsilon_1\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}\gamma_1) \\ & + \frac{3}{2}(\varepsilon_1^2\gamma_1 - \varepsilon_{-1}^2\gamma_{-1}) + 2(\varepsilon_1^2\gamma_{-1} - \varepsilon_{-1}^2\gamma_1) + \dots\end{aligned}$$

Pour réduire ces formules à celles bien connues du mouvement elliptique, il suffit d'un changement de constantes arbitraires.

Soit une orbite képlérienne de demi-grand axe a et de longitude moyenne l égale à $nt + \lambda_0$; appelons α l'excentricité, β le double du sinus de la demi-inclinaison, P l'anomalie moyenne, Q l'argument moyen de la latitude, et faisons

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} e^{iP}, \quad \alpha_{-1} = \frac{\alpha}{2} e^{-iP}, \quad \beta_1 = \frac{\beta}{2} e^{iQ}, \quad \beta_{-1} = \frac{\beta}{2} e^{-iQ}.$$

En remplaçant

$$iN \text{ par } iN + \frac{5}{2}(\alpha_1^2 \beta_{-1}^2 - \alpha_{-1}^2 \beta_1^2) + \dots,$$

$$\varepsilon_1 \text{ par } \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 \alpha_{-1} + \frac{5}{2} \alpha_{-1} \beta_1^2 + \dots,$$

$$\gamma_1 \text{ par } \beta_1 - 2 \alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 - \frac{1}{2} \beta_1^2 \beta_{-1} - \frac{5}{2} \alpha_1^2 \beta_{-1} + \dots,$$

et traitant de même ε_{-1} , γ_{-1} , les formules précédentes deviennent

$$\frac{a}{r} = 1 + \alpha_1 + \alpha_{-1} + 2(\alpha_1^2 + \alpha_{-1}^2) + \frac{9}{2}(\alpha_1^3 + \alpha_{-1}^3) - \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_{-1} (\alpha_1 + \alpha_{-1}) + \dots,$$

$$x + iy = a e^{i\ell} \left[1 + \alpha_1 - 3 \alpha_{-1} + \frac{3}{2} \alpha_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_{-1}^2 - 2 \alpha_1 \alpha_{-1} + \beta_{-1}^2 - \beta_1 \beta_{-1} \right. \\ \left. + \frac{8}{3} \alpha_1^3 + \frac{1}{3} \alpha_{-1}^3 - 3 \alpha_1^2 \alpha_{-1} \right. \\ \left. + \alpha_{-1} \beta_{-1}^2 - \alpha_1 \beta_1 \beta_{-1} + 3 \alpha_{-1} \beta_1 \beta_{-1} - 3 \alpha_1 \beta_{-1}^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \alpha_1^2 \alpha_{-1}^2 + 2 \alpha_1 \alpha_{-1} \beta_1 \beta_{-1} + \frac{1}{2} \alpha_1^2 \beta_{-1}^2 + \dots \right],$$

$$\frac{iz}{a} = \beta_1 - \beta_{-1} + \alpha_1 \beta_1 - \alpha_{-1} \beta_{-1} + 3(\alpha_1 \beta_{-1} - \alpha_{-1} \beta_1) \\ + \frac{3}{2}(\alpha_1^2 \beta_1 - \alpha_{-1}^2 \beta_{-1}) - 2 \alpha_1 \alpha_{-1} (\beta_1 - \beta_{-1}) \\ - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 \beta_{-1} - \alpha_{-1}^2 \beta_1) - \frac{1}{2} \beta_1 \beta_{-1} (\beta_1 - \beta_{-1}) + \dots$$

Ce sont les formules mêmes du mouvement elliptique képlérien.

Si nous revenons aux formules générales, et que nous supposions m petit, comme il arrive réellement dans la théorie de la Lune, on voit qu'il n'en résulte aucune difficulté; les coefficients qui figurent dans les développements des inconnues restent finis; les quantités $g - 1$, $h - 1$ sont de l'ordre de m^2 , et il en est de même de la partie constante de ρ , qui d'ailleurs ne contient pas de

termes en ϵ, ϵ_{-1} et γ, γ_{-1} ; en outre, la partie de ρ qui dépend de l'argument à longue période $2(G-H)$ est de l'ordre de m^4 . Toutes ces particularités, et quelques autres qu'il serait trop long de signaler, sont conformes aux théorèmes généraux de la Mécanique céleste.

5. Pour terminer, imaginons que l'on cherche comment doivent être modifiées les formules générales trouvées précédemment, si l'on vient à compléter la fonction de forces U par une fonction perturbatrice.

Ces formules dépendent des six éléments $n, \epsilon, \gamma, N, G, H$; soit u l'un quelconque d'entre eux et faisons

$$J_u = \left[\frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial u} \right]_0,$$

en marquant par l'indice 0 la partie constante du développement d'une fonction périodique.

On a évidemment $J_n = J_\epsilon = J_\gamma = 0$, et nous appellerons J, J_1, J_2 les quantités J_N, J_G, J_H qui peuvent remplacer n, ϵ, γ .

Les équations qui déterminent les nouvelles valeurs des éléments J_n, J_G, J_H, N, G, H sont de la forme

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial R}{\partial N}, & \frac{dN}{dt} = n - \frac{\partial R}{\partial J}, \\ \frac{dJ_1}{dt} = \frac{\partial R}{\partial G}, & \frac{dG}{dt} = n_1 - \frac{\partial R}{\partial J_1}, \\ \frac{dJ_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial H}, & \frac{dH}{dt} = n_2 - \frac{\partial R}{\partial J_2}, \end{cases}$$

en appelant n_1, n_2 les quantités ng et nh .

Si l'on fait

$$\begin{aligned} x &= a \sum x_n \cos(N + V_n), \\ y &= a \sum y_n \sin(N + V_n), \\ z &= a \sum z_n \sin V_n, \end{aligned}$$

les arguments V_n étant *différents*, de la forme $rG + sH$, on a

$$\begin{aligned} J &= na^2 \sum (1 + rg + sh) x_n^2, \\ J_1 &= na^2 \sum \left\{ r(1 + rg + sh) x_n^2 + r(rg + sh) z_n^2 \right\}, \\ J_2 &= na^2 \sum \left\{ s(1 + rg + sh) x_n^2 + s(rg + sh) z_n^2 \right\}, \end{aligned}$$

et l'on trouve sans peine, d'après les résultats calculés ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 J &= na^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{4p^4 + 13p^2q^2 + q^4}{72p^4} \varepsilon^4 \right. \\
 &\quad - \frac{17p^6 - 60p^4q^2 + 36p^2q^4 + 16q^6}{4p^2(p^2 - 4q^2)^2} \varepsilon^2 \gamma^2 \\
 &\quad \left. + \frac{3p^4 - 15p^2q^2 + 3q^4}{8(p^2 - 4q^2)^2} \gamma^4 + \dots \right], \\
 J_1 &= na^2 p \left[\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{17p^4 + 5p^2q^2 + 14q^4}{144p^4} \varepsilon^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5p^6 - 11p^4q^2 - 2p^2q^4 + 8q^6}{4p^2(p^2 - 4q^2)^2} \varepsilon^2 \gamma^2 + \dots \right], \\
 J_2 &= na^2 q \left[\frac{\gamma^2}{2} + \frac{p^8 - 6p^6q^2 - 14p^4q^4 + 12p^2q^6 + 16q^8}{4p^2q^2(p^2 - 4q^2)^2} \varepsilon^2 \gamma^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p^2(-p^4 + 5p^2q^2 + 14q^4)}{16q^2(p^2 - 4q^2)^2} \gamma^4 + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Appelons encore P la partie constante de la fonction

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) + U$$

ou bien

$$- \frac{1}{2} \left(x \frac{d^2x}{dt^2} + y \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{d^2z}{dt^2} \right) + U,$$

c'est-à-dire ici

$$\frac{3}{2} f(M_0 + M) \left(\frac{1}{r} \right)_0;$$

on a donc

$$P = n^2 a^2 \frac{p^2 + 2q^2}{p^2 + q^2} (1 + \rho_0),$$

c'est-à-dire

$$P = n^2 a^2 \frac{p^2 + 2q^2}{p^2 + q^2} \left[1 - \frac{p^2 - q^2}{48p^2} \varepsilon^4 + \frac{p^2 - q^2}{2(p^2 - 4q^2)} \left(\varepsilon^2 \gamma^2 - \frac{\gamma^4}{8} \right) + \dots \right].$$

On sait qu'on a l'identité

$$dP = J dn + J_1 dn_1 + J_2 dn_2,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial n} &= J + J_1 \frac{\partial n_1}{\partial n} + J_2 \frac{\partial n_2}{\partial n}, \\
 \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} &= J_1 \frac{\partial n_1}{\partial \varepsilon} + J_2 \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon}, \\
 \frac{\partial P}{\partial \gamma} &= J_1 \frac{\partial n_1}{\partial \gamma} + J_2 \frac{\partial n_2}{\partial \gamma},
 \end{aligned}$$

égalités faciles à vérifier.

De plus, l'identité précédente montre que n, n_1, n_2 sont les dérivées par rapport à J, J_1, J_2 de la fonction

$$nJ + n_1J_1 + n_2J_2 = P,$$

égale ici à la constante des forces vives

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right] = U;$$

par suite, les équations (b) ont la forme rigoureusement canonique.
