

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. ANGELESCO

Détermination de certaines courbes par des ensembles discrets de points

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 236-238

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__236_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉTERMINATION DE CERTAINES COURBES
PAR DES ENSEMBLES DISCRETS DE POINTS ;**

PAR M. A. ANGELESCO

(Cluj).

Soit

$$(1) \quad A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire à coefficients réels et cons-

tants. Désignons par $r_1, r_2, \dots, r_n$ les racines de l'équation caractéristique.

Proposons-nous de déterminer les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$, en fonction du paramètre λ , de manière que l'on ait identiquement

$$(2) \quad f(x + n\lambda) + C_1 f(x + \overline{n-1}\lambda) + \dots + C_{n-1} f(x + \lambda) + C_n f(x) = 0,$$

$f(x)$ étant une quelconque des intégrales de l'équation (1).

On trouve immédiatement que ces coefficients sont déterminés, dans le cas où les racines $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont toutes distinctes, par le système des n équations linéaires

$$e^{n\lambda r_i} + C_1 e^{(n-1)\lambda r_i} + \dots + C_{n-1} e^{\lambda r_i} + C_n = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il résulte de là, que les coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont respectivement égaux aux coefficients de $v^{n-1}, v^{n-2}, \dots, v^0$ dans le produit

$$(3) \quad (v - e^{\lambda r_1}) (v - e^{\lambda r_2}) \dots (v - e^{\lambda r_n}).$$

On voit sans difficulté que cette détermination des coefficients $C_1, C_2, \dots, C_n$ est valable même dans le cas où les racines $r_1, r_2, \dots, r_n$ ne sont pas toutes distinctes.

Ceci établi, considérons, dans le plan xOy de la variable imaginaire $x + iy$, les n points

$$z_p = x_p + iy_p \quad (p = 0, 1, \dots, n-1).$$

Soient $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ les n intégrales particulières de la forme $x^p e^{\alpha x} \cos \beta x$ ou $x^p e^{\alpha x} \sin \beta x$ de l'équation différentielle (1). Déterminons les $2n$ coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ par les $2n$ relations

$$(4) \quad \begin{cases} x_p = a_1 u_1(t_0 + p\lambda_0) + a_2 u_2(t_0 + p\lambda_0) + \dots + a_n u_n(t_0 + p\lambda_0), \\ y_p = b_1 u_1(t_0 + p\lambda_0) + b_2 u_2(t_0 + p\lambda_0) + \dots + b_n u_n(t_0 + p\lambda_0), \end{cases} \quad (p = 0, 1, \dots, n-1),$$

où t_0 et λ_0 sont deux nombres arbitrairement choisis. De la relation (2), que l'on peut écrire aussi

$$f(x + \overline{n+p}\lambda) + C_1 f(x + \overline{n+p-1}\lambda) + \dots + C_n f(x + n\lambda) = 0,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} x_{p+n} + C_1 x_{p+n-1} + \dots + C_n x_p &= 0, \\ y_{p+n} + C_1 y_{p+n-1} + \dots + C_n y_p &= 0, \end{aligned}$$

où les x_m et y_m sont donnés, *quel que soit l'entier positif* m , par les formules (4) et où le paramètre λ des expressions des C_p et supposé remplacé par λ_0 . En posant toujours $z_m = x_m + i y_m$, on aura donc

$$(5) \quad z_{p+n} + C_1 z_{p+n-1} + \dots + C_n z_p = 0,$$

ce qu'on peut écrire aussi, d'une manière symbolique,

$$z^p (z - e^{\lambda_0 r_1}) (z - e^{\lambda_0 r_2}) \dots (z - e^{\lambda_0 r_n}) = 0,$$

en convenant de remplacer, après avoir effectué le produit, z^n par z_m .

Si nous désignons par $M_0, M_1, M_2, \dots$ les points figuratifs des quantités complexes $z_0, z_1, z_2, \dots$, on voit que tous ces points, qu'on déduit à partir des n points donnés $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ par la relation récurrente (5), sont situés sur la courbe

$$(6) \quad \begin{cases} x = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \dots + a_n u_n(t), \\ y = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) + \dots + b_n u_n(t). \end{cases}$$

Application. — Prenons pour équation différentielle (1), l'équation

$$y''' - k y' = 0.$$

La relation récurrente (5) devient alors

$$z_{p+3} - (1 + e^{\lambda \sqrt{k}} + e^{-\lambda \sqrt{k}}) (z_{p+2} - z_{p+1}) - z_p = 0,$$

ou bien, en posant $\mu = 1 + e^{\lambda \sqrt{k}} + e^{-\lambda \sqrt{k}}$,

$$(7) \quad \frac{z_{p+3} - z_p}{z_{p+2} - z_{p+1}} = \mu.$$

Dans ce cas, la courbe (6), sur laquelle sont situés tous les points $M_0, M_1, M_2, \dots$, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que k est négatif, nul ou positif, ou bien, suivant que μ est inférieur, égal ou supérieur au nombre 3.

Cette proposition par laquelle on détermine la nature de la courbe algébrique qui passe par tous les points $M_0, M_1, M_2, \dots$ reliés par la relation récurrente (7), est due à M. Pompeiu.

Des développements plus étendus sur les questions qui font l'objet de cette Note et sur d'autres qui s'y rattachent seront donnés dans un autre travail.