

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HAAG

Sur une question de probabilité

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 219-223

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__219_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__219_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE QUESTION DE PROBABILITÉ ;

PAR M. J. HAAG.

1. M. Borel a démontré (*Introduction géométrique à quelques théories physiques*, note V) que, si des points M sont distribués au hasard sur une droite indéfinie, à raison d'un point en moyenne par unité de longueur, la probabilité pour qu'il y en ait n dans un intervalle de longueur x est $e^{-x} \frac{x^n}{n!}$. Je me propose d'étendre cette formule au cas où la densité des points le long de la droite n'est pas uniforme.

2. Soit $f(x)$ la densité au point A, d'abscisse x . Cela veut dire que la probabilité pour qu'il y ait au moins un point M dans le segment $(x, x + dx)$ est $f(x) dx$.

Il est à peu près évident que la probabilité pour qu'il y en ait plus d'un est du second ordre par rapport à dx . Démontrons-le néanmoins.

Si p est son ordre infinitésimal, elle est de la forme $A(dx)^p$, A étant une certaine fonction de x . Considérons alors, de part et d'autre de A, deux intervalles infiniment petits du premier ordre ε et ε' . Pour qu'il y ait au moins deux points dans l'intervalle total $\varepsilon + \varepsilon'$, il faut qu'il n'y en ait pas dans ε et qu'il y en ait au moins deux dans ε' ; ou bien qu'il n'y en ait pas dans ε' et qu'il y en ait au moins deux dans ε ; ou enfin qu'il y en ait au moins un dans ε et au moins un dans ε' . On a donc

$$A(\varepsilon + \varepsilon')^p = A(\varepsilon^p + \varepsilon'^p) + f^2 \varepsilon \varepsilon'.$$

Ceci exige $p = 2$ et l'on a ensuite $A = \frac{f^2}{2}$.

La probabilité pour qu'il y ait juste un point dans dx est, au second ordre près, $f(x) dx$.

La probabilité pour qu'il n'y en ait aucun est $1 - f(x) dx$.

3. Cela posé, nous commencerons par calculer la probabilité P_0 pour qu'il n'y ait aucun point sur le segment $(0, x)$.

Pour qu'il n'y ait aucun point sur le segment $(0, x + dx)$, il faut et il suffit qu'il n'y en ait pas sur le segment $(0, x)$, ni sur le segment $(x, x + dx)$. Dès lors, si nous admettons, comme nous l'avons d'ailleurs fait implicitement tout à l'heure, que *les probabilités relatives à des segments différents sont indépendantes*, nous avons

$$P_0 + dP_0 = P_0[1 - f(x) dx]$$

ou

$$\frac{dP_0}{P_0} = -f(x) dx;$$

d'où

$$(1) \quad P_0 = e^{-\int_0^x f(x) dx} = e^{-Q_0},$$

en posant

$$1 = \int_0^x f(x) dx.$$

4. Cherchons maintenant la probabilité P_n pour qu'il y ait n points sur le segment $(0, x)$. Il peut y avoir n points sur le segment $(0, x + dx)$ de trois manières différentes dont chacune exclut les deux autres :

1° Il y a n points sur $(0, x)$ et zéro sur $(x, x + dx)$; la probabilité correspondante est $P_n[1 - f(x) dx]$;

2° Il y a $n - 1$ points sur $(0, x)$ et 1 point sur $(x, x + dx)$; la probabilité correspondante est $P_{n-1}f(x) dx$;

3° Il y a $n - p$ points sur $(0, x)$ et p points sur $(x, x + dx)$, p étant plus grand que 1; la probabilité correspondante est infiniment petite du second ordre au moins par rapport à dx .

On a donc, au second ordre près,

$$P_n + dP_n = P_n[1 - f(x) dx] + P_{n-1}f(x) dx$$

ou

$$(2) \quad \frac{dP_n}{dx} + P_n f(x) = P_{n-1} f(x).$$

Posons

$$P_n = e^{-1} Q_n.$$

L'équation (2) devient

$$(3) \quad \frac{dQ_n}{dx} = Q_{n-1} f(x).$$

Comme nous savons que $Q_0 = 1$ et que Q_n doit s'annuler avec x , dès que $n \geq 1$, on peut calculer, par des quadratures successives, toutes les fonctions Q_n . Ces quadratures s'effectuent aisément, en intégrant par parties. Mais, il est plus simple de vérifier *a posteriori* que la fonction

$$Q_n = \frac{I^n}{n!}$$

satisfait à l'équation (3) et aux conditions ci-dessus.

Nous avons donc, en définitive,

$$(4) \quad P_n = e^{-1} \frac{I^n}{n!}.$$

C'est bien la formule de M. Borel, la longueur x de l'intervalle devant être simplement remplacée par la valeur probable du nombre de points situés dans cet intervalle. Cette valeur probable est, en effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P_n = I e^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I^{n-1}}{(n-1)!} = I.$$

§. Voici maintenant une autre méthode, qui a l'avantage de s'appliquer à des points répartis dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Pour simplifier, nous supposerons seulement trois dimensions et nous appellerons $f(x, y, z)$ la densité au point $A(x, y, z)$, ce qui signifie que la probabilité pour qu'il y ait au moins un point dans un volume dV entourant A est $f(x, y, z) dV$.

Appelons encore P_n la probabilité pour qu'il y ait juste n points dans un volume donné V et commençons toujours par calculer P_0 .

Partageons V en volumes infiniment petits v_1, v_2, \dots, v_m . La probabilité pour qu'il n'y ait aucun point dans aucun de ces volumes est

$$(1 - f_1 v_1) (1 - f_2 v_2) \dots (1 - f_m v_m).$$

Son logarithme est, au second ordre près,

$$-(f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_m v_m).$$

Lorsque les volumes élémentaires tendent vers zéro, la somme

entre parenthèses tend vers l'intégrale triple

$$(5) \quad I = \int \int \int_v f(x, y, z) dV.$$

Il s'ensuit que

$$(6) \quad P_0 = e^{-1}.$$

6. Cherchons maintenant la relation entre P_n et P_{n-1} . Parmi toutes les répartitions possibles de points M dans l'espace, appelons répartitions de la classe C_i celles pour lesquelles il y a un point dans le volume élémentaire v_i et $n - 1$ points dans la portion de V extérieure à v_i . Appelons répartition de la classe C toute répartition pour laquelle il y a n points dans V .

Si une répartition est de la classe C , elle appartient à la fois à n classes C_i , sauf si plusieurs points se trouvaient être dans un même volume élémentaire. Mais, cette dernière circonstance a une probabilité infiniment petite du second ordre au moins, si les volumes v_i sont infiniment petits du premier ordre. Il suit de là que l'on a, au second ordre près,

$$(7) \quad n P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_m,$$

en appelant p_i la probabilité pour qu'une répartition appartienne à la classe C_i . Or,

$$(8) \quad p_i = f_i v_i P_{n-1},$$

en remplaçant la probabilité pour qu'il y ait $n - 1$ points dans $V - v_i$, par la probabilité pour qu'il y ait $n - 1$ points dans V , ce qui n'entraîne qu'une erreur du second ordre sur p_i . Portant (8) dans (7), il vient, toujours au second ordre près,

$$n P_n = P_{n-1} (f_1 v_1 + f_2 v_2 + \dots + f_m v_m).$$

A la limite, quand les volumes élémentaires tendent vers zéro, on a

$$n P_n = P_{n-1} I.$$

Telle est la relation de récurrence cherchée. On en déduit immédiatement

$$(9) \quad P_n = P_0 \frac{I^n}{n!} = e^{-1} \frac{I^n}{n!}.$$

On retrouve encore une fois la formule de M. Borel, où I désigne toujours la valeur probable du nombre de points situés dans V .

7. A titre de vérification, on peut faire le raisonnement suivant : Partageons V en m volumes quelconques v_1, v_2, \dots, v_m . Pour qu'une répartition appartienne à la classe C , il faut et il suffit qu'elle ait a_1 points dans V_1 , a_2 points dans v_2 , ..., a_m points dans v_m , avec

$$(10) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_m = n.$$

Or, la probabilité d'une telle répartition est

$$e^{-I_1} \frac{I_1^{a_1}}{a_1!} e^{-I_2} \frac{I_2^{a_2}}{a_2!} \dots e^{-I_m} \frac{I_m^{a_m}}{a_m!} = e^{-I} \frac{I_1^{a_1} I_2^{a_2} \dots I_m^{a_m}}{a_1! a_2! \dots a_m!},$$

en posant

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_m.$$

La probabilité totale pour qu'une répartition appartienne à la classe C est

$$P_n = \sum e^{-I} \frac{I_1^{a_1} I_2^{a_2} \dots I_m^{a_m}}{a_1! a_2! \dots a_m!}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs possibles des a_i satisfaisant à (10). En comparant avec (9), on obtient la formule bien connue qui donne le développement de $(I_1 + I_2 + \dots + I_m)^n$.