BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 78-92
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__78_1>

Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles; par M. LAGUERRE.

(Séance du 7 mars 1877.)

La méthode que je développe dans cette Note, pour les cas les plus simples, s'applique sans difficulté aux fonctions de la forme e^{W}, où W désigne une fonction rationnelle quelconque de x, et aux fonctions de la forme

$$(ax+b)^{\alpha}(a'x+b')^{\alpha'}\ldots,$$

où α, α', ... désignent des quantités arbitraires quelconques.

Le principe que j'ai mis en usage est le suivant : $\mathrm{F}(x)$ étant une fonction donnée et $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ la fraction rationnelle dont le dénominateur est d'un degré donné et qui se rapproche le plus de la valeur de la fonction, je cherche à établir entre $\varphi(x), f(x)$ et leurs dérivées du premier ordre une relation algébrique qui soit linéaire par rapport à l'une de ces fonctions, $\varphi(x)$ par exemple, et par rapport à sa dérivée.

Cela posé, en considérant pour un instant $f(x)$ comme connue, et $\varphi(x)$ comme une fonction inconnue, on aura une équation linéaire du premier ordre que l'on saura intégrer au moyen d'une quadrature. Comme le résultat de l'intégration est connu d'avance, il suffira de déterminer à quelles conditions doit satisfaire $f(x)$ pour que ce résultat soit de la forme voulue.

On déterminera généralement ainsi une équation linéaire et du second ordre à laquelle satisfera le polynôme $f(x)$; cette équation admet une seconde solution qui s'exprime facilement au moyen du polynôme $\varphi(x)$, ou encore, si l'on pose

$$f(x)\mathrm{F}(x)=\varphi(x)+\mathrm{R},$$

au moyen de R, comme l'a fait voir M. Christoffel [1] relativement aux polynômes de Legendre.

I.

Développement de $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Soit

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad [2],$$

[1] *Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben* (*Journal de Crelle*, t. 55).

[2] Pour abréger, je désignerai dans tout ce qui suit par $\left(\frac{1}{x^m}\right)$ une série ordonnée

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ désignent respectivement des polynômes du degré n et du degré $(n-1)$.

On en déduit

$$\log \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \log\varphi(x) - \log f(x) + \left(\frac{1}{x^{2n}}\right),$$

parce que $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ est du degré (-1) en x; puis, en prenant les dérivées des deux nombres,

$$-\frac{x}{x^2-1} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

et

$$(1)\qquad x\varphi(x)f(x) + (x^2-1)[f(x)\varphi'(x) - \varphi(x)f'(x)] = \mathrm{A},$$

A désignant une constante.

Si, dans cette équation, on regarde $f(x)$ comme connue, on a, pour déterminer $\varphi(x)$, une équation linéaire et du premier ordre; en l'intégrant et négligeant d'abord le second membre, on sera conduit à poser

$$(2)\qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}z,$$

z étant déterminé par l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx}f^2(x)\sqrt{x^2-1} = \mathrm{A},$$

d'où

$$(3)\qquad z = \int \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{x^2-1}\,f^2(x)}dx,$$

ou encore, si l'on désigne par α, β, ... les racines de l'équation $f(x)=0$, et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{A}}{f^2(x)} = \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

$$z = \sum \int \left[\frac{p}{\sqrt{x^2-1}\,(x-\alpha)^2} + \frac{q}{\sqrt{x^2-1}\,(x-\alpha)}\right]dx,$$

---

suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme en $\frac{1}{x^m}$, et par (x^m) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^m.

ou encore, en effectuant une intégration par parties,

$$z=\sum\left\{-\frac{p}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}}\right.$$

$$\left.+\int\left[\frac{q}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}}-\frac{px}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]dx\right\}$$

$$=\sum\left[-\frac{p}{(x-\alpha)\sqrt{x^2-1}}+\int\frac{q(x^2-1)-px}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx\right].$$

On déduit de là facilement que z se compose d'une partie algébrique, d'une expression de la forme

$$\int\frac{Px+Q}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$$

et de termes de la forme

$$\int\frac{q(\alpha^2-1)-p\alpha}{(x-\alpha)(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

Chacun de ces termes doit évidemment être nul; or un calcul facile donne

$$\frac{p}{-f'(\alpha)}=\frac{q}{f''(\alpha)};$$

on a donc la relation

$$(\alpha^2-1)f''(\alpha)+\alpha f'(\alpha)=0,$$

qui doit avoir lieu pour toute racine de l'équation $f(x)=0$; d'où il suit que $f(x)$ satisfait à une équation différentielle du second ordre de la forme

$$(x^2-1)y''+xy'+Py=0.$$

La valeur de P s'obtient immédiatement en écrivant que le coefficient de x^n, dans le premier membre, est égal à zéro. On obtient ainsi l'équation bien connue

$$(4)\qquad (x^2-1)y''+xy'-n^2y=0.$$

2. Puisque le polynôme $f(x)$ est une solution de l'équation (4),

on obtiendra une seconde solution de cette équation en posant

$$y = f(x) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}\, f^2(x)},$$

ou bien, en vertu de l'équation (3),

$$y = f(x) z,$$

et, en vertu de l'équation (2),

$$y = \varphi(x) \sqrt{x^2 - 1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (4) est donc

$$\mathrm{A} f(x) + \mathrm{B} \varphi(x) \sqrt{x^2 - 1}.$$

3. Supposons maintenant que, dans l'équation (1), $\varphi(x)$ soit regardée comme connue; pour intégrer cette équation, nous posons

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}\, \varphi(x) t,$$

t étant déterminée par l'équation différentielle

$$-\frac{dt}{dx} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \varphi^2(x) = \mathrm{A},$$

d'où

$$-t = \int \frac{\mathrm{A}\, dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \varphi^2(x)}.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{A}}{\varphi^2(x)} = \sum \frac{p}{(x - \alpha)^2} + \frac{q}{(x - \alpha)},$$

α, β, γ, ... désignant les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, un calcul entièrement analogue à celui que j'ai développé plus haut montre que l'on doit avoir pour chacune des racines

$$q(\alpha^2 - 1) - 3p\alpha = 0,$$

et par suite

$$(\alpha^2 - 1)\varphi''(\alpha) + 3\alpha\varphi'(\alpha);$$

d'où l'on conclut que $\varphi(x)$ est une solution de l'équation différentielle du second ordre

(5) $$(x^2-1)u''+3xu'+(1-n^2)u=0.$$

Si l'on remarque maintenant que cette équation n'est autre que la dérivée de l'équation (4), dans laquelle on aurait remplacé y' par u, on en conclut qu'à un facteur numérique près $\varphi(x)$ est égal à $f'(x)$.

Il est clair du reste, ce qui est facile à vérifier, que l'équation (5) se déduit aussi de l'équation (4) par la substitution

$$y=u\sqrt{x^2-1}.$$

II.

Développement de $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^m$.

4. Soit m une quantité quelconque; posons

$$\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m+\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynômes entiers du degré n.

On en déduit

$$m\log\frac{x+a}{x+b}=\log\varphi(x)-\log f(x)+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right);$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{m(b-a)}{(x+a)(x+b)}=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)}+\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right),$$

d'où

(6) $$m(b-a)\varphi(x)f(x)+(x+a)(x+b)[\varphi(x)f'(x)-f(x)\varphi'(x)]=\mathrm{A},$$

A désignant une constante.

Si dans cette équation on regarde $f(x)$ comme connue, on a, pour déterminer $\varphi(x)$, une équation linéaire et du premier ordre; en l'intégrant et négligeant d'abord le second membre, on posera

(7) $$\varphi(x)=f(x)\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m z,$$

z étant déterminée par la relation

$$(8)\qquad -z=\int\frac{A(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f^2(x)}\,dx.$$

On doit chercher quelle forme doit avoir $f(x)$ pour que z ait une expression de la forme donnée par la relation (7); m étant quelconque, on y parviendrait aisément en suivant une marche analogue à celle que j'ai suivie dans le paragraphe précédent; mais on parviendra plus vite à l'équation du second ordre à laquelle satisfait $f(x)$ en supposant que m est un nombre entier.

Dans ce cas, je ferai remarquer d'abord qu'en vertu de l'équation (6), $f(x)$ ne peut être divisible par $(x+a)$, car autrement ce binôme diviserait la constante A qui n'est pas nulle; il est clair également que $f(x)=0$ a toutes ses racines distinctes. En appelant donc α, β, ... les racines de cette équation, on aura un développement de la forme

$$\frac{A(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f^2(x)}=\sum\frac{p}{(x-\alpha)^2}+\sum\frac{q}{x-\alpha}$$
$$+\frac{A_m}{(x+a)^{m+1}}+\frac{A_{m-1}}{(x+a)^m}+\ldots+\frac{A_0}{x+a};$$

et, pour que z ait la forme donnée par la relation (7), il faut que $A_0=0$, et ensuite que $q=0$ pour toutes les racines de l'équation $f(x)=0$. En tenant compte seulement de cette dernière condition, le calcul de q montre facilement que, pour toutes les racines de l'équation $f(x)=0$, on doit avoir

$$(\alpha+a)(\alpha+b)f''(\alpha)+[2\alpha-m(a-b)+a+b]f'(\alpha)=0;$$

d'où l'on voit que $f(x)$ satisfait à l'équation du second ordre

$$(9)\quad (x+a)(x+b)y''+[2x-m(a-b)+a+b]y'-n(n+1)y=0.$$

5. Cette équation pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+a)^{m+1}}{A(x+b)^{m-1}}y'\right]+Py=0;$$

on voit que, le polynôme $f(x)$ étant une de ses solutions, une autre sera donnée par la formule

$$y = f(x)\int \frac{A(x+b)^{m-1}}{(x+a)^{m+1}f^2(x)}\,dx,$$

ou, en vertu des équations (8) et (7),

$$y = -\varphi(x)\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(x)\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m = \varphi(x) + \mathrm{R},$$

une seconde solution sera également donnée par l'équation

$$(10)\qquad y = \mathrm{R}\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m.$$

6. L'équation à laquelle satisfait le polynôme $\varphi(x)$ s'obtiendrait par la même méthode; mais on voit immédiatement qu'elle se déduit de la première en changeant m en $-m$; cette équation est donc

$$(x+a)(x+b)u'' + [2x + m(a-b) + a + b]u' - n(n+1)u = 0.$$

Elle se déduit évidemment de l'équation (9), et il est facile de le vérifier par la substitution

$$y = u\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^m.$$

7. Pour obtenir sous forme explicite les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, je remarque qu'en posant

$$x = (a-b)\xi - a$$

l'équation (9) devient

$$(\xi - \xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} + (m + 1 - 2\xi)\frac{dy}{d\xi} + n(n+1)y = 0;$$

cette équation est un cas particulier de celle qui définit la série hypergéométrique $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$,

$$(\xi - \xi^2)\frac{d^2y}{d\xi^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi]\frac{dy}{d\xi} - \alpha\beta y = 0;$$

on a

$$\gamma = m + 1, \quad \alpha = -n \quad \text{et} \quad \beta = n + 1.$$

Le polynôme $f(x)$ sera donc donné par la formule

$$f(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{m+1}\left(\frac{x+a}{a-b}\right) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(m+1)(m+2)}\left(\frac{x+a}{a-b}\right)^2$$
$$\pm \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{(m+1)(m+2)-(m+n)}\left(\frac{x+a}{a-b}\right)^n.$$

Le polynôme $\varphi(x)$ s'obtiendrait, à un facteur numérique près, en changeant le signe de m dans la formule précédente.

8. Comme application, supposons $a = 1$ et $b = -1$, on aura alors

$$f(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{m+1}\left(\frac{1+x}{2}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(m+1)(m+2)}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 - \ldots$$

et

$$\varphi(x) = \left[1 - \frac{n(n+1)}{1-m}\left(\frac{1+x}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2\,(1-m)(2-m}\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \ldots\right]$$
$$\times \frac{(1-m)(2-m)\ldots(n-m)}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}(-1)^n.$$

Comme $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$ se change en son inverse quand on change x en $-x$, on en conclut que les polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)$, donnés par les formules précédentes, sont liés par la relation

$$\varphi(x) = f(-x).$$

Faisons, par exemple, $m = \frac{1}{2}$ et $n = 3$, il viendra

$$f(x) = 1 - 4(1+x) + 4(1+x)^2 - \frac{8}{7}(1+x)^3$$

et

$$\varphi(x) = -\frac{1}{7}[1 - 12(1+x) + 20(1+x)^2 - 8(1+x)^3],$$

ou, en réduisant,

$$f(x) = \frac{1}{7}(-1 + 4x + 4x^2 - 8x^3)$$

et

$$\varphi(x) = \frac{1}{7}(-1 - 4x + 4x^2 + 8x^3).$$

Si l'on désigne par S_n la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$, on doit avoir

$$S_1 = S_3 = S_5 = \frac{1}{2} \quad (^1).$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier au moyen des formules de Newton.

9. Si l'on considère l'expression $\frac{1}{m}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m - 1\right]$, son développement en fraction continue donnera des réduites dont le dénominateur $f(x)$ sera le même que celui des réduites auxquelles conduit le développement de $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m$.

En faisant, dans l'équation (9), $b = -1$ et $a = +1$, on voit donc que ce dénominateur satisfait à l'équation différentielle

$$(9)' \qquad (x^2 - 1)y'' + 2(x - m)y' - n(n+1)y = 0;$$

et, de ce que j'ai dit plus haut, il résulte qu'en posant

$$f(x)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m = \varphi(x) + R$$

l'équation (9)' a encore pour solution $R\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^m$.

Si nous supposons maintenant que m tende vers zéro,

$$\frac{1}{m}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^m - 1\right]$$

---

(1) *Voir* ma Note *Sur un problème d'Algèbre*. (*Bulletin de la Société mathématique*, t. V).

Je saisis cette occasion pour déclarer que M. Borchardt était déjà parvenu antérieurement aux résultats renfermés dans cette Note.

a pour limite $\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, l'équation $(9)'$ devient l'équation bien connue qui définit les polynômes de Legendre et l'on voit, comme l'a fait voir M. Christoffel, que R en est une solution.

10. Considérons maintenant l'expression

$$\left[1+\frac{\alpha+\beta x}{m(\gamma+\delta x)}\right]^m=\left[\frac{(m\delta+\beta)x+m\gamma+\alpha}{m\gamma+m\delta x}\right]^m$$

$$=\left(\frac{m\delta+\beta}{m\delta}\right)^m\left(\frac{x+\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}}{x+\frac{\gamma}{\delta}}\right)^m;$$

pour avoir son développement en fraction continue, nous poserons

$$\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}=a \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\delta}=b;$$

le dénominateur de degré n de la fraction satisfera à l'équation suivante, que l'on déduit immédiatement de l'équation (9) :

$$\left(x+\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}\right)\left(x+\frac{\gamma}{\delta}\right)$$
$$+\left[2x-\frac{m(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\delta(m\delta+\beta)}+\frac{m\gamma+\alpha}{m\delta+\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right]-n(n+1)y=0.$$

Faisons maintenant croître indéfiniment le nombre m, la fonction $\left[1+\frac{\alpha+\beta x}{m(\gamma+\delta x)}\right]^m$ aura pour limite $e^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}$, et l'équation précédente deviendra

$$(11)\quad (\gamma+\delta x)^2y''+[2\delta(\gamma+\delta x)-(\alpha\delta-\beta\gamma)]y'-n(n+1)\delta^2y=0.$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur $f(x)$ d'une réduite de la fonction $e^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}$; en posant

$$f(x)e^{\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}=\varphi(x)+\mathrm{R},$$

$\varphi(x)$ désignant le numérateur de la réduite, une deuxième solution de cette équation sera donnée par la formule

$$y = \varphi(x) e^{-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}},$$

ou encore par celle-ci

$$y = \mathrm{R} e^{-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}.$$

De ce que j'ai dit plus haut, il résulte aussi que $\varphi(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$(\gamma + \delta x)^2 u'' + [2\delta(\gamma + \delta x) + (\alpha\delta - \beta\gamma)] u' - n(n+1)\delta^2 u = 0,$$

et cette équation se déduit de l'équation (11) par la substitution

$$y = u e^{-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}}.$$

III.

Développement de $e^{F(x)}$.

11. Pour traiter un cas un peu plus général, considérons la fonction $e^{F(x)}$, où $F(x)$ désigne un polynôme quelconque de degré m et posons

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + (x^{2n+1}),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ désignant des polynômes du degré n.

On en déduit

$$F(x) = \log \varphi(x) - \log f(x) + (x^{2n+1})$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} + (x^{2n}),$$

puis

$$(12) \quad F'(x)\,\varphi(x) f(x) - \varphi'(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) = x^{2n}\Theta(x),$$

$\Theta(x)$ désignant un polynôme du degré $m-1$.

Si dans cette équation on considère $f(x)$ comme connu, on a une équation linéaire et du premier ordre par rapport à $\varphi(x)$. On l'intégrera en considérant d'abord le second membre comme égal à zéro, et posant

$$\varphi(x) = e^{\mathrm{F}(x)} f(x) z, \tag{13}$$

z étant déterminé par la relation

$$-z = \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)} x^{2n} \Theta(x)\, dx}{f^2(x)}. \tag{14}$$

En désignant par α, β, ... les diverses racines de l'équation $f(x) = 0$, on pourra poser

$$\frac{x^{2n}\Theta(x)}{f^2(x)} = \mathrm{P} + \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

P désignant un polynôme du degré $(m-1)$ en x; d'où

$$-z = \int e^{-\mathrm{F}(x)} \mathrm{P}\, dx + \sum \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)} p\, dx}{(x-\alpha)^2} + \sum \int \frac{e^{-\mathrm{F}(x)} q\, dx}{x-\alpha},$$

ou encore, en intégrant par parties le second terme de la relation précédente,

$$-z = \int e^{-\mathrm{F}(x)} \mathrm{P}\, dx - \sum \int \frac{pe^{-\mathrm{F}(x)}}{x-\alpha} + \sum \int e^{-\mathrm{F}(x)} \frac{q - p\mathrm{F}'(x)}{x-\alpha}\, dx,$$

ou encore

$$\begin{aligned} -z = \int e^{-\mathrm{F}(x)} \mathrm{P}\, dx &- \sum \int \frac{pe^{-\mathrm{F}(x)}}{x-\alpha} \\ &- \sum \int e^{-\mathrm{F}(x)} \frac{p[\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}'(\alpha)]}{x-\alpha}\, dx \\ &+ \sum \int e^{-\mathrm{F}(x)} \frac{q - p\mathrm{F}'(\alpha)}{x-\alpha}\, dx. \end{aligned}$$

Si l'on examine cette expression de z, on voit que, pour qu'elle ait la valeur assignée par la relation (13), on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$q - p\mathrm{F}'(\alpha) = 0.$$

Or un calcul facile donne

$$\frac{p}{f'(\alpha)} = \frac{q}{\left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right] f'(\alpha) - f''(\alpha)};$$

on aura donc, pour toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$,

$$f''(x) - \left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)} - F'(\alpha)\right] f'(\alpha) = 0;$$

d'où il suit que $f(x)$ satisfait à une équation linéaire et du second ordre de la forme

$$(15) \qquad y'' + \left[F'(x) - \frac{2n}{x} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] y' + H(x) y = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{F(x)}}{x^{2n}\Theta(x)} y'\right] + H_1(x) y = 0;$$

on en conclut qu'une seconde solution est donnée par la formule

$$y = f(x) \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n} \Theta(x)}{f^2(x)} dx,$$

ou, en vertu des équations (13) et (14)

$$y = \varphi(x) e^{-F(x)}.$$

12. On déterminerait de même l'équation du second ordre à laquelle satisfait $\varphi(x)$; sans refaire tous les calculs précédents, on voit immédiatement que cette équation est de la forme

$$(16) \qquad u'' - \left[F'(x) + \frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] u' + K(x) u = 0;$$

c'est du reste la transformée de l'équation (15), quand on pose

$$y = u e^{-F(x)}.$$

Effectuant cette transformation sur l'équation (15), il vient

$$(17) \quad u'' - \left[F'(x) + \frac{2n}{x} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] u'$$
$$+ \left[H(x) + \frac{2n}{x} F'(x) + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} F'(x) - F''(x)\right] u = 0.$$

13. Nous avons encore, pour former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait $f(x)$, à déterminer le polynôme

$\Theta(x)$ et la fraction rationnelle $H(x)$, qui est de la forme

$$\frac{K(x)}{x\Theta(x)},$$

$K(x)$ désignant un polynôme du degré $(2m-2)$. A cet effet, si nous posons

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots$$

et

$$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots,$$

et si nous désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les coefficients inconnus des polynômes Θ et K, les équations (16) et (17) permettront d'exprimer, au moyen de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., b_0, a_1, b_2, ...

D'ailleurs, l'équation (12) donne également des relations entre ces coefficients et les coefficients inconnus de Θ; de ces relations on déduira facilement les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Dans une prochaine Note, je communiquerai à la Société le résultat de mes recherches sur le développement de la fonction e^{ax+bx^2} et de la fonction $e^{ax^2+bx^3}$.