

BULLETIN DE LA S. M. F.

ET. DELASSUS

Sur les lois du frottement de glissement

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 22-33

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__22_1

© Bulletin de la S. M. F., 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT (1);

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Nous allons nous proposer d'étudier le mouvement de début d'un solide S placé au contact d'un solide fixe Σ et lancé avec les conditions initiales du roulement.

Pour y arriver au moyen de calculs simples, nous commencerons par établir une propriété.

Considérons le mouvement \mathfrak{M} que prend réellement le solide S avec frottement de glissement et le mouvement \mathfrak{M}_1 qu'il prendrait si le roulement était forcé. Si, rapportant tout à des axes fixes, nous désignons par q_1, q_2, \dots, q_6 les paramètres de définition de S; par V, V' les deux vitesses de la molécule de contact; par X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 les composantes des deux réactions, nous voyons que les q^0, q'^0 sont les mêmes dans les deux mouvements, que les composantes de la vitesse de la molécule de contact étant de la forme linéaire et homogène

$$V_x = f(q'), \quad V_y = \varphi(q'), \quad V_z = \psi(q'),$$

(1) Cet article est le développement d'une Note présentée à l'Académie des Sciences dans sa séance du 23 mai 1921.

on a, à l'instant initial,

$$\frac{dV_x}{dt} - \frac{dV'_x}{dt} = f(p),$$

$$\frac{dV_y}{dt} - \frac{dV'_y}{dt} = \varphi(p),$$

$$\frac{dV_z}{dt} - \frac{dV'_z}{dt} = \psi(p),$$

les p désignant les variations des q^{r_0} quand on passe de \mathfrak{M}_1 à \mathfrak{M} et qu'enfin ces formules se simplifient par le fait que V'_x, V'_y, V'_z sont identiquement nulles, donc aussi leurs dérivées.

Quant aux p , ils sont fournis par l'identité

$$-\sum \frac{\partial \tau}{\partial p} \delta q + u f(\delta q) + v \varphi(\delta q) + w \psi(\delta q) \equiv 0,$$

obtenue par soustraction des équations de d'Alembert initiales des deux mouvements et dans laquelle u, v, w sont les composantes $X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1$ de la différence géométrique $R - R_1$ des deux réactions.

D'un théorème que j'ai démontré (1) résulte que $f(p), \varphi(p), \psi(p)$ sont les dérivées partielles d'une même forme quadratique homogène, définie et positive, $\Theta(u, v, w)$, qui est une transformée de la force vive τ , de sorte que nous obtenons finalement

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \quad \frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial v}, \quad \frac{dV_z}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial w}.$$

2. O étant à l'instant initial le point de contact et Oz la normale du côté libre, nous y adjoindrons deux axes Ox, Oy dans le plan tangent, ce qui nous constituera le trièdre fixe dont nous allons faire usage.

Nous supposons que le point $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$ ne se trouve pas à l'intérieur du cône de frottement de façon que le roulement soit impossible.

(1) DELASSUS, *Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales* (Ann. École Normale, 1917). Les calculs employés ici sont d'ailleurs exactement les mêmes que ceux de la théorie indiquée des liaisons unilatérales et aussi que ceux de la théorie des percussions.

Nous supposons aussi que ce point est au-dessus du plan

$$(P) \quad \frac{\partial \theta}{\partial w}(x, y, z) = 0,$$

sans quoi, dans le mouvement libre caractérisé par

$$X = Y = Z = 0,$$

on aurait

$$\frac{dV_z}{dt} = - \frac{\partial \theta}{\partial w}(X_1 Y_1 Z_1) > 0;$$

donc V_z deviendrait positive et il y aurait échappement.

Les lois du frottement et le contact géométrique nous conduisent alors à admettre qu'il y a glissement avec une réaction dont l'extrémité $R(X, Y, Z)$ se trouve sur le cône de frottement et satisfait aux conditions

$$\frac{\frac{\partial \theta}{\partial u}(X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1)}{X} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial v}(X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1)}{Y} = -\sigma < 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial w}(X - X_1, Y - Y_1, Z - Z_1) = 0.$$

Ce point R est donc l'intersection d'une conique avec le cône de frottement et l'on est ramené à étudier une équation du quatrième degré en σ , équation dépendant du point R_1 et dont il ne faut prendre que les racines réelles et positives.

Si elle n'a qu'une telle racine il n'y a qu'elle qui peut fournir la solution; mais, si elle en a plusieurs, la question se pose de choisir parmi elles celle qui donne la véritable solution.

3. Au lieu de laisser le point R_1 variable dans tout l'espace E extérieur au cône de frottement et au-dessus de P , bornons-nous aux points R_1 situés dans un même plan P_1 parallèle à P et situé au-dessus; Z_1 sera alors une fonction linéaire et l'équation du quatrième degré en σ devenant

$$\Phi(X_1, Y_1, \sigma) = 0$$

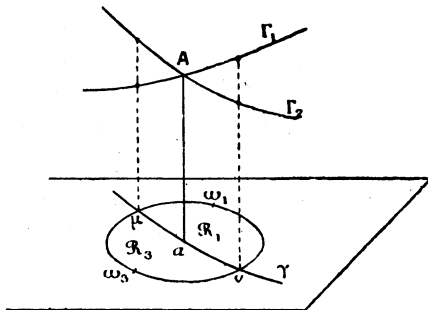
pourra, dans l'espace à trois dimensions, s'interpréter comme intersection de la surface

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

avec la parallèle à Oz issue du point $\omega(X, Y_1)$ du plan des xy . Ce point ω ne pourra se déplacer que dans une région \mathcal{R} extérieure à une certaine conique et l'on ne devra considérer comme acceptables que les points d'intersection au-dessus du plan des xy .

Supposons alors que les hypothèses suivantes soient réalisées :

La surface Φ possède un cylindre circonscrit parallèle à Oz , ayant Γ_2 pour courbe de contact et coupant la surface suivant une



autre courbe Γ_1 , rencontrée par toute génératrice du cylindre en deux points réels ou imaginaires. Ces deux courbes réelles se coupent en un point simple et réel A d'altitude positive et dont la projection a se trouve dans la région \mathcal{R} .

Quant au second point d'intersection de Γ_1 avec la génératrice Aa , il est supposé être au-dessous du plan des xy .

Traçons autour du point a un cercle de rayon suffisamment petit que la projection commune γ de Γ_2 et Γ_1 décomposera en deux petites régions $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_3$.

Pour tout point ω de \mathcal{R}_1 , l'équation aura une et une seule racine positive variant d'une façon continue avec ω . Pour tout point de la région \mathcal{R}_3 , elle aura trois racines positives variant toutes trois d'une façon continue avec ω .

Sur l'arc $a\mu$ l'équation a, comme racines positives, une racine double et une racine simple, la simple étant la plus petite. Sur l'arc $a\nu$ c'est l'inverse, la simple est la plus grande.

Dans \mathcal{R}_1 nous avons une solution parfaitement déterminée, tandis que dans \mathcal{R}_3 nous avons indétermination. Pour arriver à lever cette indétermination en un point ω_3 , l'idée toute naturelle et logique est, puisque l'on a une représentation mathématique

d'un phénomène physique variant d'une façon continue avec les conditions qui le produisent, que l'on doit partir d'un point ω_1 à solution unique, déplacer ω d'une façon continue de ω_1 en ω_3 , suivre par continuité la racine qui donnait la solution en ω_1 et obtenir ainsi une racine bien déterminée parmi les trois que l'on a en ω_3 , racine qui donnera la véritable solution en ce point.

Suivons le chemin $\omega_1 \mu \omega_3$; de ω_1 à μ l'unique racine positive σ_1 variera d'une façon continue; quand on arrivera en μ il apparaîtra une racine double σ' supérieure à σ_1 qui, en continuant à faire marcher ω , va se décomposer en deux racines simples σ_2, σ_3 ; ces deux racines ne viendront ensuite jamais se confondre avec σ_1 puisque, de μ à ω_3 , on ne traverse plus la ligne γ des racines doubles, et il en résulte que la racine σ_1 obtenue par continuité en ω_3 est certainement *la plus petite des trois racines* en ce point.

Suivons maintenant le chemin $\omega_1 \nu \omega_3$; le même raisonnement pourra se faire; mais, comme la racine double qui apparaît quand ω passe en ν est ici plus petite que σ_1 , on voit que la continuité conduit à *la plus grande des trois racines* au point ω_3 .

Nous arrivons ainsi à une singularité, à une véritable discontinuité incompatible avec la représentation d'un phénomène physique continu.

Cette singularité, qui pourrait se produire avec des équations d'ordre quelconque au moins égal à trois, tient à l'existence dans la région \mathcal{R} d'un point réel α donnant une racine triple acceptable, toutes les autres racines étant inacceptables; ce point α réel, et qui n'est pas un point singulier de γ , force cette courbe γ à être réelle au voisinage de α , de sorte que l'on se trouve bien dans les conditions précédentes.

4. Il est essentiel maintenant de montrer rigoureusement que cette singularité peut se présenter effectivement dans la théorie du frottement et, pour y arriver, il est nécessaire d'établir un certain nombre de faits.

Les équations du paragraphe 2 sont identiques à celles des percussions et la surface

$$2\theta(u, v, \omega) = 1$$

peut se définir comme lieu du point u, v, ω tel que la percussion $u v \omega$ appliquée au point de contact du solide S entière-

ment libre et au repos lui communique une force vive égale à l'unité. Cette surface est donc un ellipsoïde qui, en grandeur et orientation, est indépendant du choix des axes.

Formons un solide S de la façon suivante : S' sera une surface rigide de masse nulle tangente à Σ au point de contact considéré O ; par exemple, ce sera une enveloppe sphérique rigide et sans masse. A son intérieur nous prendrons arbitrairement un point G et, au moyen de tiges sans masses, nous attacherons à cette enveloppe S' un solide S'' , formé de deux tiges homogènes soudées orthogonalement en leur milieu, de façon que ce milieu soit en G et le plan du croisillon perpendiculaire à OG .

Le solide $S' + S''$ ainsi formé a G comme centre de gravité et ses axes principaux d'inertie sont GO et les directions des deux tiges du croisillon. Ce sont ces axes $G\zeta$, $G\xi$, $G\eta$ que nous allons prendre pour traiter le problème de percussion donnant la surface Θ . La percussion est ici appliquée au point O de $G\zeta$ et l'on aura

$$\begin{aligned} MV_x &= u, & MV_y &= v, & MV_z &= w, \\ Ap &= -Pv, & Bq &= Pu, & Cr &= 0, \end{aligned}$$

de sorte qu'en portant dans

$$2\tau = M(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2,$$

il viendra

$$2\Theta(u, v, w) = u^2 \left(\frac{1}{M} + \frac{l^2}{B} \right) + v^2 \left(\frac{1}{M} + \frac{l^2}{A} \right) + \frac{w^2}{M}.$$

Comme M , A , B , l ont été choisis arbitrairement, les trois longueurs d'axes de l'ellipsoïde sont arbitraires; en outre, les directions de ces axes sont absolument arbitraires puisque ce sont les directions G , ξ , η , ζ , de sorte que finalement :

Les axes $Oxyz$ étant précédemment définis (§ 3), il est possible de construire le solide S au contact en O avec Σ de façon qu'il donne une fonction $\Theta(u, v, w)$ choisie arbitrairement, sauf la condition d'être définie et positive.

5. Si nous posons

$$\begin{aligned} \Theta(u, v, w) &= A u^2 + B v^2 + C w^2 + 2 D vw + 2 E wu + 2 F uv, \\ \Omega(u, v) &= (AC - E^2) u^2 + (BC - O^2) v^2 + 2 (DE - CF) uv, \end{aligned}$$

on peut démontrer facilement ou vérifier directement que la pro-

jection sur le plan des xy de la conique considérée au paragraphe 3 a pour équation

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial u}(X - X_1, Y - Y_1)}{X} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial v}(X - X_1, Y - Y_1)}{Y} < 0,$$

ce qui permet de reconnaître en elle l'hyperbole aux pieds des normales menées de l'origine O à l'ellipse

$$2\Omega(x, y) = 1,$$

transportée par translation de façon à avoir son centre au point $\omega(X_1, Y_1)$. Les deux points O et ω sont forcément sur une même branche de cette hyperbole équilatère et l'inégalité auxiliaire exprime que le point X, Y doit se trouver sur l'arc $O\omega$ de cette branche.

Quant à l'intersection du plan parallèle à P mené par R_1 avec le cône de frottement, sa projection est une conique ayant l'origine pour foyer,

$$X^2 + Y^2 - f^2 \left[\frac{E}{C}(X - X_1) + \frac{D}{C}(Y - Y_1) - Z_1 \right] = 0.$$

Nous avons donc à voir s'il peut arriver effectivement que ces deux coniques soient osculatrices en un point de l'arc $O\omega$ de l'hyperbole ou, d'une façon plus précise, si nous pouvons disposer de A, B, C, D, E, F , soumis à la seule restriction que Θ soit définie et positive, et de X_1, Y_1, Z_1 soumis à la seule restriction que le point R_1 soit au-dessus de P et extérieur au cône de frottement pour que le fait indiqué se produise.

Nous pouvons d'ailleurs simplifier un peu en remarquant que la conique Ω est le contour apparent de l'ellipsoïde Θ sur le plan des xy ; elle est indépendante du choix des deux axes Ox, Oy , qui jusqu'à présent n'ont pas été précisés, de sorte que nous pourrions prendre pour Ox et Oy les axes de Ω , ce qui nous introduira la simplification

$$DE - CF = 0$$

et nous donnera toujours une hyperbole équilatère à asymptotes parallèles aux axes,

6. On peut se proposer de chercher une conique connaissant un foyer F , un point M et le centre de courbure C en ce point. C'est

une question de géométrie analytique que l'on résoudra facilement et qui donne le résultat suivant : il existe toujours une et une seule conique répondant à la question et qui est une ellipse ou une hyperbole suivant que le foyer F est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle décrit sur MC comme diamètre.

Soit \mathcal{H} une hyperbole équilatère dont \mathfrak{u} est une branche ; marquons sur cette branche un point M , et soit C le centre de courbure. Le cercle décrit sur MC comme diamètre est tangent en M , et \mathfrak{u} , tout au moins dans sa portion au voisinage de M , est extérieure à ce cercle ; nous pourrons donc, toujours sur cette branche \mathfrak{u} , marquer un point F qui sera extérieur au cercle et obtenir une ellipse \mathcal{C} ayant F pour foyer, passant en M et ayant C comme centre de courbure en ce point. Cette ellipse \mathcal{C} sera donc osculatrice à \mathfrak{u} en M .

Le point F partage \mathfrak{u} en deux demi-branches \mathfrak{u}' , \mathfrak{u}'' allant toutes deux à l'infini. Partant de F qui est à l'intérieur de l'ellipse \mathcal{C} et suivant l'une ou l'autre de ces deux demi-branches, on est obligé de sortir de \mathcal{C} : il y a donc des points d'intersection sur \mathfrak{u}' et sur \mathfrak{u}'' ; sur \mathfrak{u}' on a M qui est racine triple, donc sur \mathfrak{u}'' il y en a un qui est racine simple et l'on a ainsi tous les points d'intersection, il n'y en a pas d'autres.

La branche \mathfrak{u}' traverse l'ellipse en l'unique point M , l'arc FM est entièrement à l'intérieur et la portion au delà de M entièrement à l'extérieur ; c'est sur cette dernière portion que nous marquerons un point Q et nous aurons ainsi constitué une figure composée d'une hyperbole équilatère \mathcal{H} sur une même branche de laquelle sont marqués deux points F et R , puis d'une ellipse \mathcal{C} de foyer F , le point Q étant extérieur à l'ellipse, cette figure possédant la propriété que si l'on cherche les points d'intersection de \mathcal{H} et de \mathcal{C} on en trouve un et un seul sur l'arc FQ , ce point donnant d'ailleurs une racine triple.

Prenons la figure ainsi tracée et déplaçons-la de façon que le point F vienne à l'origine O de nos axes, les asymptotes de \mathcal{H} devenant parallèles à Ox , Oy .

Dans cette position, les deux coniques auront pour équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}) \quad & xy + \lambda x + \mu y = 0, \\ (\mathcal{C}) \quad & x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0; \end{aligned}$$

le point Q prendra des coordonnées a, b et l'on aura les égalités et inégalités

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + b) &> 0, & ab + \lambda a + \mu b &= 0, \\ \mu(\mu + a) &> 0, & a^2 + b^2 - (\alpha a + \beta b + \gamma)^2 &> 0, \end{aligned}$$

exprimant que Q est sur \mathcal{H} , à l'extérieur de \mathcal{C} et que O et Q sont sur une même branche de \mathcal{H} .

La question sera complètement résolue si nous parvenons à identifier cette figure avec celle du paragraphe précédent, à laquelle nous conduit le problème de frottement. L'identification du point Q avec le point ω nous donne

$$X_1 = a, \quad Y_1 = b.$$

L'identification des deux coniques de foyer O nous donne

$$f \frac{E}{C} = \varepsilon \alpha, \quad f \frac{D}{C} = \varepsilon \beta, \quad \frac{f}{C} (EX_1 + DY_1 + CZ_1) = -\varepsilon \gamma \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

comme f et C sont essentiellement positifs, la condition que le point R_1 soit au-dessus du plan P nous montre que $-\varepsilon \gamma$ doit être positif, ce qui fixe le signe de ε . La troisième égalité, où X_1, Y_1 ont des valeurs connues, détermine ainsi Z_1 .

Identifions les deux hyperboles équilatères. Elles ont déjà quatre points communs : O, ω et les points à l'infini sur Ox et Oy , de sorte que l'on obtiendra une seule condition, facile d'ailleurs à former,

$$\frac{AC - E^2}{BC - D^2} = \frac{\lambda + b}{\lambda}.$$

Enfin il faut tenir compte de l'égalité

$$DE - CF = 0,$$

qui a lieu par hypothèse.

Des quatre égalités ainsi obtenues on tire

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon \frac{C\beta}{f}, & E &= \varepsilon \frac{C\alpha}{f}, & F &= \frac{C\alpha\beta}{f^2}, \\ A &= \frac{C\alpha^2}{f^2} + \sigma(\lambda + b), & B &= \frac{C\beta^2}{f^2} + \sigma\lambda, \end{aligned}$$

σ étant un paramètre que nous pouvons choisir arbitrairement.

La fonction 2Θ formée avec ces coefficients est

$$2\Theta(u, v, w) = \frac{C}{f^2} [\alpha u + \beta v + \varepsilon f w]^2 + \sigma(\lambda + b)u^2 + \sigma\lambda v^2;$$

elle contient deux indéterminées C et σ et il suffit de voir si l'on peut les préciser de façon que Θ soit essentiellement positive. Il suffit manifestement de donner à C une valeur quelconque positive, puis de prendre σ satisfaisant à

$$\sigma(\lambda + b) > 0, \quad \sigma\lambda > 0,$$

ce qui se réalise en prenant pour σ une quantité quelconque ayant le signe commun de $\lambda + b$ et λ , expressions qui ont bien le même signe d'après une inégalité écrite au début et provenant de ce que O et Q étaient sur une même branche de \mathcal{H} .

C et σ étant ainsi fixées, il nous suffira de construire, ce qui est toujours possible d'après les remarques du paragraphe 5, le solide S donnant la fonction Θ que nous venons de former, puis à lui imprimer une rotation initiale et à lui appliquer des forces de telle façon que la réaction initiale du roulement forcé soit celle dont les composantes X_1, Y_1, Z_1 ont été déterminées.

7. La singularité que nous venons d'étudier résulte uniquement de la notion de continuité du phénomène, de sorte qu'aucune considération auxiliaire ne peut la supprimer et qu'elle infirme complètement la loi ordinaire du frottement même à titre d'approximation grossière.

Nous avons vu qu'avec une enveloppe extérieure donnée à l'avance on pouvait construire le solide S fournissant une fonction Θ également donnée à l'avance. Si donc nous prenons comme surface extérieure celle d'une toupie ordinaire, le contact se faisant par une pointe, c'est-à-dire par un élément sphérique de rayon extrêmement petit, les frottements de roulement et de pivotement seront physiquement négligeables, et cependant la singularité pourra se présenter. Elle ne tient donc pas à ce que l'on néglige les frottements de roulement et de pivotement.

Imaginons une loi plus compliquée pour l'intensité de la force de frottement de glissement, par exemple

$$F = A + BN,$$

A et B étant deux coefficients, dont le premier est essentiellement positif, pouvant dépendre de la vitesse de glissement V , de la vitesse de roulement ρ et de la vitesse de pivotement π . Si nous nous assujettissons à partir du repos, nous n'aurons à appliquer que la loi

$$F = A_0 + B_0 N \quad (A_0 > 0)$$

obtenue en faisant V , ρ et π nuls dans A et B, et l'on verra encore que les calculs du paragraphe précédent s'appliquent, de sorte que la singularité pourra encore se présenter effectivement.

Essayons de modifier la loi de direction de la force de frottement. Quelle que soit cette modification, il semble bien que, dans le cas de la toupie, cette loi se réduira forcément à la loi ordinaire et la singularité ne sera pas supprimée.

Tout cela montre que la loi du frottement de glissement pour devenir acceptable, c'est-à-dire ne pas conduire à des absurdités, doit être complètement modifiée, mais non dans le sens de la recherche d'une nouvelle loi de grandeur et de direction pour la force de frottement en essayant de la faire dépendre de diverses choses dont ne tenait pas compte la loi ordinaire. En réalité, c'est à la notion même de force de frottement qu'il faut s'attaquer.

8. Il me reste, pour terminer cet article, à faire remarquer que, si la singularité étudiée ici n'a jamais été rencontrée en étudiant des problèmes de départ avec conditions initiales de roulement, c'est que de tels problèmes dans l'espace conduisent à des calculs effectifs très compliqués qui incitent à se limiter aux cas les plus simples. Généralement, on se borne à étudier le cas de la sphère homogène. Plus généralement, on pourrait étudier le cas du solide dont le centre de gravité se trouve au départ sur la normale de contact, celle-ci étant en même temps axe de révolution de l'ellipsoïde central d'inertie.

Le fait remarquable est que, dans tous ces cas simples, la singularité ne peut jamais se présenter. Cela tient à ce que la quadrique Θ est alors de révolution autour de Oz et le plan P confondu avec Oxy ; les coniques Ω et \mathcal{C} sont des cercles; l'hyperbole \mathcal{H} se décompose en deux droites dont l'une est la droite de l'infini, l'autre étant $O\omega$ dont il faut prendre l'intersection avec le cercle \mathcal{C} de centre O.

On obtient toujours ainsi deux points réels : l'un entre O et ω qui convient, l'autre extérieur à $O\omega$ qui ne convient jamais, de sorte que la solution est toujours obtenue d'une façon unique et que la singularité étudiée dans cet article ne se présente jamais.

L'étude du cas général au moyen de calculs convenables pouvait seule la mettre en évidence.
