BULLETIN DE LA S. M. F.

H. VOGT

Sur les systèmes d'équations différentielles simultanées linéaires à coefficients constants

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS;

PAR M. H. VOGT.

---

1. Je me propose d'étudier un système d'équations différentielles linéaires simultanées à coefficients constants avec ou sans seconds membres, et d'établir un mode de discussion et de résolution de ce système, analogue à celui qu'a développé Rouché pour les équations linéaires algébriques.

J'emploierai le symbole D et ses puissances pour représenter les dérivées des divers ordres par rapport à la variable indépendante x, de sorte qu'une équation différentielle linéaire à n fonctions inconnues s'écrira

$$a_1(\mathrm{D})y_1 + a_2(\mathrm{D})y_2 + \ldots + a_n(\mathrm{D})y_n = u(x),$$

a_1, a_2, ... étant des polynomes entiers en D, supposés à coefficients constants, et le second membre étant une fonction quelconque de x.

J'ai déjà étudié, dans un précédent article (¹), un système de n équations à n inconnues

$$(1) \qquad \sum_j a_{ij}(\mathrm{D})y_j = u_i(x) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

(¹) *Réduction à une forme normale d'un système d'équations différentielles simultanées linéaires à coefficients constants* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. XIX, 1919, p. 201).

lorsque le déterminant des coefficients des inconnues

$$A(D) = |a_{ij}(D)|$$

n'est pas nul; j'ai utilisé le lemme suivant :

En composant les équations (1) *avec les éléments d'un système* $a'_{ij}(D)$ *dont le déterminant* $A'(D)$ *est égal à l'unité, on forme un système d'équations*

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{j=n}\left(\sum_{k=1}^{k=n} a'_{ik}a_{kj}\right)y_j = \sum_{k=1}^{k=n} a'_{ik}u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

équivalent au premier. Cela résulte immédiatement de ce qu'on passe des équations (2) aux premières en les composant avec les éléments du système complémentaire de a'_{ij}, et que ces éléments sont des polynomes entiers en D; toute solution des équations (1) satisfait aux équations (2) et réciproquement.

Le système a'_{ij} que j'ai utilisé est obtenu de la manière suivante : Soit $A_j(D)$ le plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre maximum de la matrice

$$M_j = \| a_{ij+1} \quad a_{ij+2} \quad \ldots \quad a_{in} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

chacun des polynomes de la suite

$$A, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}, \quad A_n$$

dont le dernier est pris égal à l'unité, est divisible par le suivant; les quotients

$$d_1(D) = \frac{A(D)}{A_1(D)}, \qquad d_2(D) = \frac{A_1(D)}{A_2(D)}, \qquad \ldots, \qquad d_n(D) = \frac{A_{n-1}(D)}{A_n(D)}$$

jouent un rôle important. Par des opérations élémentaires que j'ai indiquées dans l'article cité, on peut former une suite de déterminants

$$\begin{aligned} B &= | b_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \quad a_{in} |, \\ C &= | c_{i1} \quad c_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \quad a_{in} |, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H &= | h_{i1} \quad h_{i2} \quad \ldots \quad h_{in-1} \quad a_{in} | \end{aligned}$$

respectivement égaux à $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. En prenant les mineurs A_{i1} de A par rapport aux éléments de la première colonne, les mineurs B_{i2} de B par rapport aux éléments de la seconde colonne, et ainsi de suite, on forme des polynomes dont les premiers sont divisibles par A_1, les suivants par A_2, etc. ; le système a'_{ij} est constitué par les éléments

$$\frac{A_{i1}}{A_1},\quad \frac{B_{i2}}{A_2},\quad \ldots,\quad \frac{H_{in}}{A_n},$$

i variant de 1 à n.

2. Considérons un système (1) de n équations à n inconnues, le déterminant A(D) des coefficients des inconnues étant nul ou non ; nous appellerons *déterminant principal* un mineur de A(D) non nul, tel que tous les mineurs d'ordre supérieur à celui de ce déterminant soient nuls; il pourra être A(D) lui-même; dans le cas contraire, nous supposerons qu'il est d'ordre $n-p$, et qu'il est formé par les coefficients des $n-p$ dernières inconnues dans les $n-p$ dernières équations. En même temps que ce déterminant, nous envisagerons tous ceux d'ordre maximum de la matrice

$$M_p = \| \, a_{ip+1} \quad a_{ip+2} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|$$

que nous appellerons *matrice principale;* leur plus grand commun diviseur sera $A_p(D)$. Un rôle important sera joué par les déterminants d'ordre maximum de la matrice

$$N_p = \| \, u_i \quad a_{ip+1} \quad a_{ip+2} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|$$

que nous appellerons *matrice caractéristique* et par les quotients symboliques de ces déterminants par A_p.

Dans le cas où p n'est pas nul, nous introduisons dans les calculs un déterminant

$$A''(D) = | \, a''_{i1} \quad a''_{i2} \quad \ldots \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \, |$$

obtenu en bordant la matrice principale par p colonnes d'éléments constants arbitraires de façon que ce déterminant A″ ne soit pas nul. Ceci peut être obtenu d'une infinité de manières; nous nous limiterons à celle qui consiste à prendre

$$a''_{11} = a''_{22} = \ldots = a''_{pp} = 1$$

et tous les autres éléments a'' égaux à zéro.

En partant de A″ (ou de A si p est nul), nous considérons les matrices

$$M''_j = \| \, a''_{ij+1} \quad a''_{ij+2} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|,$$

nous formons, comme nous l'avons indiqué précédemment, les plus grands communs diviseurs,

$$A'', \quad A''_1, \quad A''_2, \quad \ldots, \quad A''_{p-1}, \quad A_p, \quad \ldots, \quad A_n \; 1$$

des déterminants d'ordre maximum de ces matrices et les déterminants

$$A'', \quad B'', \quad C'', \quad \ldots, \quad E, \quad F, \quad \ldots, \quad H$$

respectivement égaux à ces plus grands communs diviseurs; ils ont la forme

$$\begin{array}{l}
B'' = | \; b''_{i1} \quad a''_{i2} \quad a''_{i3} \quad \ldots \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |, \\
C'' = | \; c''_{i1} \quad c''_{i2} \quad a''_{i3} \quad \ldots \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
E = | \; e_{i1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad e_{ip} \; a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
H = | \; h_{i1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad h_{in-1} \; a_{in} \; |;
\end{array}$$

les derniers à partir de E sont les mêmes qu'en partant de A'(D).

Les mineurs A''_{i1} de A'' par rapport aux éléments de la première colonne sont divisibles par A''_1; les mineurs B''_{i2} de B par rapport aux éléments de la seconde colonne sont divisibles par A''_2 et ainsi de suite; nous déduisons de là un système d'éléments

$$\frac{A''_{i1}}{A''_1}, \quad \frac{B''_{i2}}{A''_2}, \quad \ldots, \quad \frac{E_{ip+1}}{A_{p+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{H_{in}}{A_n}$$

dont le déterminant est égal à l'unité et que nous prenons comme système a'_{ij}; le dernier dénominateur A_n est pris égal à l'unité, comme nous l'avons dit.

Nous composons symboliquement les équations (1) avec les éléments de ce système; nous formons ainsi un système d'équations équivalent au premier

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\left(\sum \frac{A''_{i1}}{A''_1} a_{i1}\right) y_1 + \left(\sum \frac{A''_{i1}}{A''_1} a_{i2}\right) y_2 + \ldots = \sum \frac{A''_{i1}}{A''_1} u_i, \\
\left(\sum \frac{B''_{i2}}{A''_2} a_{i1}\right) y_1 + \left(\sum \frac{B''_{i2}}{A''_2} a_{i2}\right) y_2 + \ldots = \sum \frac{B''_{i2}}{A''_2} u_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\left(\sum \frac{E_{ip+1}}{A_{p+1}} a_{i1}\right) y_1 + \left(\sum \frac{E_{ip+1}}{A_{p+1}} a_{i2}\right) y_2 + \ldots = \sum \frac{E_{ip+1}}{A_{p+1}} u_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\left(\sum \frac{H_{in}}{A_n} a_{i1}\right) y_1 + \left(\sum \frac{H_{in}}{A_n} a_{i2}\right) y_2 + \ldots = \sum \frac{H_{in}}{A_n} u_i.
\end{array} \right.$$

Dans les premiers membres des p premières de ces équations, les coefficients de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont identiquement nuls; dans la première, par exemple, ces coefficients sont les quotients par A''_1 des déterminants

$$| \; a_{ij} \quad a''_{i2} \quad \ldots \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |;$$

dans la seconde, ils sont les quotients par A''_2 des déterminants

$$| \; b''_{i1} \quad a_{ij} \quad a''_{i3} \quad \ldots \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |$$

et ainsi de suite; tous ces déterminants sont nuls, d'après les hypothèses faites sur le déterminant principal ou comme ayant deux colonnes identiques. Quant aux seconds membres de ces p équations, ils s'expriment au moyen des quantités connues et constituent ce que nous appellerons *les fonctions caractéristiques;* nous pouvons les écrire sous forme de déterminants

$$(4) \quad \begin{cases} v''_1 = \dfrac{1}{A''_1} | \; u_i \quad a''_{i2} \quad a''_{i3} \quad \ldots \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |, \\ v''_2 = \dfrac{1}{A''_2} | \; b''_{i1} \quad u_i \quad a''_{i3} \quad \ldots \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \; |, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les p premières équations du système (3) forment ainsi un premier groupe de la forme

$$(5) \qquad 0 = v''_1, \qquad 0 = v''_2, \qquad \ldots, \qquad 0 = v''_p$$

Dans la suivante, le coefficient de y_{p+1} est

$$\sum \frac{E_{ip+1}}{A_{p+1}} a_{ip+1} = \frac{E}{A_{p+1}} = \frac{A_p}{A_{p+1}},$$

et nous le désignerons, comme nous l'avons dit, par $d_{p+1}(D)$; celui d'une autre inconnue d'indice j a pour valeur

$$\frac{1}{A_{p+1}} | \; e_{i1} \quad e_{i2} \quad \ldots \quad e_{ip} \quad a_{ij} \quad a_{ip+2} \quad \ldots \quad a_{in} \; |;$$

il est nul si j est supérieur à $p+1$; nous le désignerons par α_{p+1j} pour les valeurs de j inférieures ou égales à p; le second membre. que nous désignerons par v_{p+1}, a pour valeur

$$v_{p+1} = \frac{1}{A_{p+1}} | \; e_{i1} \quad \ldots \quad e_{ip} \quad u_i \quad a_{ip+2} \quad \ldots \quad a_{in} \; |$$

et est une fonction déterminée des seconds membres des équations données.

De la même manière, dans l'équation de rang $p+k$, le coefficient de y_{p+k} est le quotient $\frac{A_{p+k-1}}{A_{p+k}}$ que nous désignons par $d_{p+k}(D)$, ceux des inconnues d'indice supérieur à $p+k$ sont nuls, les autres coefficients et le second membre sont des quantités connues s'exprimant sous forme de déterminants analogues aux précédents. Nous arrivons ainsi à un deuxième groupe d'équations de la forme

$$(6) \qquad \alpha_{p+k1}(D)y_1 + \alpha_{p+k2}(D)y_2 + \ldots + d_{p+k}(D)y_{p+k} = v_{p+k},$$

k prenant les valeurs 1, 2, ..., $n-p$. Elles constituent des équations de *forme normale* que l'on peut encore écrire sous la forme

$$(6\ bis) \quad d_{p+1}(D)y_{p+1} = w_{p+1}, \quad d_{p+2}(D)y_{p+2} = w_{p+2}, \quad \ldots, \quad d_n(D)y_n = w_n,$$

chacun des premiers membres renfermant une seule fonction inconnue, le second membre correspondant étant une fonction déterminée des quantités données et des inconnues dont l'indice est inférieur à celui de l'inconnue entrant au premier membre. La somme des ordres de ces équations est égale à la somme des degrés par rapport à D des quotients

$$\frac{A_p}{A_{p+1}}, \quad \frac{A_{p+1}}{A_{p+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

et il est égal au degré de $A_p(D)$.

Le système des équations (5) et (6) est équivalent au système (1) si p est nul, c'est-à-dire si $A(D)$ est différent de zéro, ce système est toujours compatible et réductible à n équations normales donnant successivement chacune des inconnues. Si p n'est pas nul, les équations données ne peuvent avoir de solutions que si les fonctions caractéristiques (4) sont toutes nulles, et si elles le sont, le système se réduit aux $n-p$ équations (6). On peut choisir arbitrairement les fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et les $n-p$ autres s'en déduisent par l'intégration d'équations de forme normale. Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Théorème I. — *Étant données n équations différentielles linéaires simultanées à n inconnues, à coefficients constants,* *avec ou sans second membre, on forme le déterminant* A(D) *des coefficients des inconnues. Si ce déterminant n'est pas nul, la solution des équations est déterminée par l'intégration de n équations différentielles successives de forme normale.*

Si le déterminant A(D) *est nul, et si le déterminant principal est d'ordre* $n - p$, *on considère la matrice principale correspondante et l'on forme en partant des éléments de cette matrice et des seconds membres p fonctions caractéristiques. Si ces dernières ne sont pas toutes nulles, le système donné n'a aucune solution; si elles sont toutes nulles, ce système a une infinité de solutions; on peut donner des valeurs arbitraires à p des fonctions inconnues; les* $n - p$ *autres sont déterminées successivement au moyen de celles-là et des quantités connues par des équations de forme normale.*

La somme des ordres des équations à intégrer est égale au degré par rapport à D *du plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre maximum de la matrice principale.*

3. Les fonctions caractéristiques (4) dont l'annulation est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations données soient compatibles sont en nombre minimum, mais leur calcul peut être assez long, et dépend des quantités arbitraires a''. On peut se proposer de remplacer le système des équations (5) par un autre équivalent, constitué par des relations en nombre généralement supérieur à p, mais plus faciles à établir, ce qui peut être dans certains cas un avantage.

Nous avons appelé *matrice caractéristique* la matrice

$$N_p = \| \, u_i \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \, \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

dans cette matrice, les déterminants d'ordre $n - p$ formés au moyen des coefficients a sont tous divisibles par A_p; nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Le système des p relations caractéristiques* (5) *peut être remplacé par celui que l'on obtient en égalant à zéro les quotients par* A_p *de tous les déterminants d'ordre maximum tirés de la matrice caractéristique.*

Démontrons d'abord que si les équations proposées sont compatibles, tous ces quotients sont nuls. Considérons $n-p+1$ quelconques des équations (1), par exemple les $n-p+1$ premières, formons le déterminant

$$| a_{i1} \quad a_{ip+1} \quad \dots \quad a_{in} | \qquad (i=1, 2, \dots, n-p+1)$$

et ses mineurs relatifs aux éléments de la première colonne, mineurs qui sont tous divisibles par A_p. Si nous effectuons les divisions de ces mineurs par A_p, si nous multiplions par les quotients les deux membres respectivement des $n-p+1$ équations et si nous ajoutons les résultats, les coefficients de $y_1, y_2, \dots, y_n$ dans la somme sont les quotients par A_p de déterminants nuls comme étant d'ordre $n-p+1$ ou ayant deux colonnes identiques, et ils sont nuls; le second membre doit l'être; on obtient ainsi la condition

$$\frac{1}{A_p} | u_i \quad a_{ip+1} \quad \dots \quad a_{in} | = 0 \qquad (i=1, 2, \dots, n-p+1).$$

On obtiendrait, de la même manière, les autres équations analogues; nous les réunirons dans la notation abrégée

$$(7) \qquad \frac{N_p}{A_p} = \frac{1}{A_p} \| u_i \quad a_{ip+1} \quad \dots \quad a_{in} \| = 0 \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

Nous allons démontrer que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes et que, si elles sont remplies, les fonctions caractéristiques $v''_1, v''_2, \dots, v''_p$ sont nulles. Nous nous contenterons de le montrer dans le cas où ces fonctions résultent du choix particulier des éléments a'' que nous avons mentionné

$$a''_{ii} = 1, \qquad a''_{ij} = 0 \qquad (i=1, 2, \dots, p;\ j \text{ quelconque} \neq i),$$

car ce cas est suffisant pour le but que nous nous proposons.

Comme on sait seulement que A_p divise les polynomes A''_1, $A''_2, \dots$, on ne peut pas affirmer immédiatement que le quotient symbolique de certains déterminants, par A''_1 par exemple, est nul lorsque leur quotient par A_p est égal à zéro; il est donc nécessaire de faire un raisonnement plus complet, et d'établir une suite de propositions que nous allons développer.

4. Considérons dans la matrice principale M_p des lignes quelconques en nombre $q = n-p+1$; désignons par A_{pq} le plus

grand commun diviseur des déterminants d'ordre $n-p$ formés avec les éléments de ces lignes, et par N_{pq} le déterminant obtenu en bordant les mêmes lignes par les q seconds membres correspondants. Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

THÉORÈME III. — *Si les relations* (7) *sont satisfaites, le quotient symbolique*

$$\frac{N_{pq}}{A_{pq}} = \frac{1}{A_{pq}} | \; u_i \quad a_{ip+1} \quad \dots \quad a_{in} \; |$$

est nul, i prenant les valeurs des indices des q lignes considérées.

Pour fixer les idées et simplifier l'écriture, nous supposerons que les lignes envisagées sont les q premières; nous allons introduire tous les déterminants d'ordre maximum de la matrice principale M_p, et nous désignerons d'une manière générale par $(\alpha\beta\dots\lambda)$ celui qui est formé par les éléments des lignes d'indice $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ dans cette matrice; nous allons d'abord montrer que les relations (7) entraînent les équations symboliques

$$\frac{(\alpha\beta\dots\lambda)}{A_p}\left[\frac{N_{pq}}{A_{pq}}\right] = 0 \tag{8}$$

pour tous les choix possibles des $n-p$ indices $\alpha, \beta, \dots, \lambda$.

1° Examinons d'abord le cas où ces indices sont choisis parmi les $q = n-p+1$ premiers nombres; tous les déterminants $(\alpha\beta\dots\lambda)$ satisfaisant à cette condition sont divisibles par A_{pq} qui est leur plus grand commun diviseur; le quotient $\frac{N_{pq}}{A_p}$ étant nul d'après les relations (7), son produit par un quelconque des polynomes entiers

$$\frac{(\alpha\beta\dots\lambda)}{A_{pq}}$$

est aussi nul; on a donc

$$\frac{(\alpha\beta\dots\lambda)}{A_{pq}}\left[\frac{N_{pq}}{A_p}\right] = \frac{(\alpha\beta\dots\lambda)}{A_p}\left[\frac{N_{pq}}{A_{pq}}\right] = 0$$

car on peut intervertir l'ordre des facteurs dans le dénominateur; ce sont bien là des équations de la forme (8).

2° Examinons maintenant le cas où parmi les $n-p$ indices α, β, ... il s'en trouve k supérieurs à q, désignés par $r, s, \ldots, t$, les autres, en nombre $n-p-k=q-k-1$ étant au plus égaux à q; nous supposerons, pour fixer les idées, que ces derniers sont les nombres consécutifs $k+2, k+3, \ldots, q$, ce qui ne nuit pas à la généralité des raisonnements.

Considérons toutes celles des équations (7) dont les indices des lignes sont les q nombres

$$\alpha, \quad k+2, \quad k+3, \quad \ldots, \quad q, \quad r, \quad s, \quad \ldots, \quad t,$$

α prenant successivement les valeurs $1, 2, \ldots, k+1$; en développant les déterminants suivant les éléments de la première colonne, nous écrirons ces équations

$$\begin{gathered}\frac{(k+2\ldots qrs\ldots)}{A_p}u_\alpha-\frac{(\alpha k+3\ldots qrs\ldots)}{A_p}u_{k+2}+\ldots\\ \pm\frac{(\alpha k+2\ldots qs\ldots)}{A_p}u_r\mp\frac{(\alpha k+2\ldots qr\ldots)}{A_p}u_s\pm\ldots=0,\end{gathered}$$

le premier coefficient étant pour toutes égal au quotient entier

$$\mu=\frac{(k+2\ldots qrs\ldots)}{A_p}.$$

Nous allons éliminer $u_r, u_s, \ldots$ entre ces équations; nous multiplions les deux membres de celle qui correspond à $\alpha=i$ par l'expression

$$(-1)^{i-1}\frac{(12\ldots i-1\,i+1\ldots q)}{A_{pq}}$$

qui est une fonction entière de D, et nous ajoutons les résultats. Les premiers termes contiennent tous le coefficient μ en facteur et fournissent la somme

$$\mu\left[\frac{(23\ldots q)}{A_{pq}}u_1-\frac{(13\ldots q)}{A_{pq}}u_2+\ldots\pm\frac{(1\ldots k\,k+2\ldots q)}{A_{pq}}u_{k+1}\right];$$

considérons parmi les termes suivants ceux qui renferment u_l

$$(k+2\leqq l\leqq q);$$

le coefficient de u_l est

$$(-1)^{l-k-1}\sum_{i=1}^{i=k+1}(-1)^{i-1}\frac{(12\ldots i-1\,i+1\ldots q)}{A_{pq}}\,\frac{(i\,k+2\ldots l-1\,l+1\ldots qr\ldots)}{A_p};$$

mais, d'après une propriété des déterminants de la matrice M_p exprimée par l'égalité (¹)

$$(9)\qquad \sum(-1)^{i-1}(1\,2\ldots i-1\; i+1\ldots q)(i\,k+2\ldots l-1\;l+1\ldots q\,r\ldots)=0,$$

la somme étant cette fois étendue aux valeurs de i égales à 1, 2, ..., $k+1$, $k+2$, ..., l, on voit que, dans la somme (9), les termes relatifs à $i=k+2$, ..., $l-1$ sont nuls et que le coefficient de u_i a pour valeur

$$(-1)^{2l-k-1}\frac{(1\,2\ldots l-1\;l+1\ldots q)}{A_{pq}}\,\frac{(l\,k+2\ldots l-1\;l+1\ldots q\,r\ldots)}{A_p};$$

dès lors, en intervertissant dans le dernier numérateur l'ordre des colonnes et mettant en évidence le coefficient μ, on voit que le coefficient de u_l est

$$(-1)^{l-1}\mu\frac{(1\,2\ldots l-1\;l+1\ldots q)}{A_{pq}}.$$

Les coefficients des termes u_r, u_s, ... d'indices supérieurs à q sont nuls; celui de u_r, par exemple, est égal, au signe près, à

$$\sum_{i=1}^{i=k+1}(-1)^{i-1}\frac{(1\,2\ldots i-1\;i+1\ldots q)}{A_{pq}}\,\frac{(i\,k+2\ldots q\,s\ldots)}{A_p};$$

mais rien n'empêche de remplacer r par l dans l'identité (9) et dans la conclusion que nous en avons tirée; elle indique bien que le coefficient de u_r est nul et il en est de même des suivants.

Il résulte de là que les termes qui subsistent constituent le produit par μ du développement de $\frac{N_{pq}}{A_{pq}}$; les relations (8) sont ainsi établies pour tous les systèmes d'indices α, β, ..., λ considérés, et, en général, pour tous les choix de ces indices tels que k d'entre eux soient supérieurs à q, et $n-p-k$ au plus égaux à ce nombre, k étant un entier arbitraire.

3° Ces mêmes relations (8) sont encore satisfaites lorsque tous

---

(¹) THOMAS MUIR, *The Theory of Determinants in the historical Order of Development*, 2ᵉ édition, t. I, 1906, p. 138 et 145. Mon article *Sur certaines relations entre les déterminants tirés d'une matrice rectangulaire* (*Bulletin de la Société des Sciences de Nancy*, 4ᵉ série, t. I, 1922, p. 139).

les indices α, β, ..., λ sont des nombres r, s, ..., t supérieurs à q (dans le cas où $2q-1$ est égal ou inférieur à n). Pour le voir, il suffit de faire $k+1$ égal à q dans le raisonnement précédent, d'écrire les équations (7) dont les indices des lignes sont les nombres

$$\alpha, \quad r, \quad s, \quad \ldots, \quad t,$$

où α prend les valeurs 1, 2, ... q et d'éliminer u_r, u_s, ..., u_t; nous arrivons ainsi à l'égalité

$$\frac{(rs\ldots t)}{\mathrm{A}_p}\left[\frac{\mathrm{N}_{pq}}{\mathrm{A}_{pq}}\right] = 0.$$

4° Les égalités (8) étant établies pour tous les choix possibles des $n-p$ indices α, β, ..., λ, il suffit de remarquer que les déterminants $(\alpha\beta\ldots\lambda)$ sont tous ceux de la matrice principale M_p et ont pour plus grand commun diviseur A_p. Or, on sait calculer des polynomes entiers du symbole D dont les produits respectifs par ces déterminants ont une somme égale à A_p; si donc nous multiplions symboliquement les équations (8) par ces polynomes et si nous ajoutons les résultats, nous obtiendrons précisément l'égalité

$$\frac{\mathrm{N}_{pq}}{\mathrm{A}_{pq}} = 0, \tag{10}$$

ce qui démontre le théorème III.

Nous en déduisons immédiatement ce corollaire :

Corollaire. — *Si l'on prend dans la matrice caractéristique des lignes particulières en nombre r supérieur à $q = n-p+1$, si l'on désigne par N_{pr} la nouvelle matrice ainsi formée, par A_{pr} le plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre maximum constitués par les éléments a de cette matrice, les relations précédentes entraînent les égalités contenues dans la relation symbolique*

$$\frac{\mathrm{N}_{pr}}{\mathrm{A}_{pr}} = 0. \tag{11}$$

En effet, les déterminants d'ordre maximum de la matrice N_{pr} sont de la forme N_{pq}, et le plus grand commun diviseur A_{pq} correspondant est divisible par A_{pr}; on a donc, pour tous ces déterminants

$$\frac{N_{pq}}{A_{pr}} = \frac{A_{pq}}{A_{pr}}\left(\frac{N_{pq}}{A_{pq}}\right) = 0$$

Remarquons que dans le cas particulier où r est égal à n, on retombe sur les équations (7).

5. Cela posé, envisageons les matrices

$$\begin{aligned}
M''_{p-1} &= \| \, a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|, \\
M''_{p-2} &= \| \, a''_{ip-1} \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

ainsi que les matrices caractéristiques correspondantes

$$\begin{aligned}
N''_{p-1} &= \| \, u_i \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|, \\
N''_{p-2} &= \| \, u_i \quad a''_{ip-1} \quad a''_{ip} \quad a_{ip+1} \quad \ldots \quad a_{in} \, \|, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

i prenant les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et limitons-nous au cas déjà envisagé où

$$a''_{ii} = 1, \qquad a''_{ij} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i);$$

nous allons démontrer ce théorème :

Théorème IV. — *Si l'on prend dans les matrices* M''_k *et* N''_k $(k < p)$ *des lignes particulières quelconques en nombre* $r \geqq n - k$, *si l'on désigne par* M''_{kr} *et* N''_{kr} *les matrices ainsi formées, par* A''_{kr} *le plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre maximum de* M''_{kr}, *les relations* (10) *et* (11) *entraînent les égalités contenues dans la relation symbolique*

$$\frac{N''_{kr}}{A''_{kr}} = 0. \tag{12}$$

En effet, pour $k = p - 1$, les matrices M''_{p-1} et N''_{p-1} se réduisent aux matrices déduites de M_p et N_p par suppression de la ligne d'indice p, puisque le seul élément a'' non nul est $a''_{pp} = 1$; dès lors les égalités (12) se réduisent dans ce cas à celles qui se rapportent aux matrices M_{pr}, N_{pr} ainsi réduites, et elles sont contenues dans les équations (11) qui sont satisfaites; elles le sont donc également. On passe, de proche en proche, aux cas de $k = p - 2$, $p - 3$, ... et le théorème est ainsi démontré.

La proposition que nous avons en vue en découle immédiatement, et nous allons démontrer que les égalités précédentes entraînent les relations (5). Développons, en effet, les déterminants entrant dans v''_2, v''_3, ... suivant les mineurs

$$b''_{i1}, \quad \begin{vmatrix} c''_{i1} & c''_{i2} \\ c''_{j1} & c''_{j2} \end{vmatrix}, \quad \cdots$$

v''_1, d'une part, et les coefficients de ces mineurs, d'autre part, rentrent tous dans les quotients représentés par les symboles $\frac{N''_{kr}}{A''_{kr}}$, et ils sont tous nuls d'après les relations (12). Nous voyons ainsi que les relations (7) et (5) sont équivalentes, et le théorème II est entièrement démontré; on peut encore l'énoncer sous cette forme :

Théorème V. — *Les relations* (7) *expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations* (1) *soient compatibles; leur solution est alors fournie par les équations* (6) *de forme normale.*

CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A UN NOMBRE QUELCONQUE D'INCONNUES.

6. Il est facile de passer du cas de n équations à n inconnues au cas général de r équations à s inconnues, de la forme

$$(13) \qquad a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{is}y_s = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Si r est inférieur à s, il suffit d'adjoindre au système donné $s - r$ équations nouvelles de la même forme, dont les coefficients et les seconds membres sont tous nuls, pour se ramener au cas précédent, n étant égal à s; l'ordre $n - p$ du déterminant principal est alors égal ou inférieur à r. Dans le cas habituel, $n - p$ est égal à r, et p est égal à $s - r$, les équations sont compatibles, et l'on peut attribuer à $s - r$ des inconnues des valeurs arbitraires.

Si r est supérieur à s, on introduira dans les équations $r - s$ fonctions nouvelles affectées de coefficients nuls, pour se ramener au cas précédent, n étant égal à r. L'ordre $n - p$ du déterminant principal est égal ou inférieur à s, et il y a toujours lieu d'établir les conditions de compatibilité. Lorsqu'elles sont remplies, les inconnues sont données par des équations (6) de forme normale; il est à remarquer que les inconnues supplémentaires introduites n'interviennent pas dans les résultats, car les coefficients α_{kl} dont elles sont affectées sont tous nuls.

Examinons, par exemple, le cas de n équations à une seule inconnue

$$a_i(D)y = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

si $d(D)$ est le plus grand commun diviseur des coefficients a_i, les conditions de compatibilité sont

$$\frac{a_i}{d}u_j - \frac{a_j}{d}u_i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

lorsqu'elles sont remplies, on calcule les polynomes $b_i(D)$ tels que l'on ait

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = d,$$

on multiplie les deux membres des équations données respectivement par b_1, b_2, ..., b_n, on ajoute les résultats, et l'on obtient l'équation de forme normale

$$d(D)y = b_1(D)u_1 + b_2(D)u_2 + \ldots + b_n(D)u_n$$

pour déterminer la solution commune aux équations données.

7. Les résultats que nous avons obtenus peuvent être réunis sous la forme suivante :

Théorème. — *Étant donné un nombre quelconque d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, avec ou sans seconds membres, relatives à un nombre quelconque d'inconnues, on considère le tableau des coefficients des inconnues, et l'on choisit dans ce tableau un déterminant principal satisfaisant aux conditions suivantes : il n'est pas nul et s'il n'est pas d'ordre maximum, tous ceux d'ordre supérieur au sien, tirés du tableau, sont nuls.*

Si l'ordre du déterminant principal est égal au nombre des équations, celles-ci sont compatibles; on peut donner aux inconnues dont le coefficient n'entre pas dans le déterminant *principal, s'il en existe, des valeurs arbitraires, et les autres sont fournies par des équations de forme normale, dont la somme des ordres est égale au degré, par rapport à* D, *du déterminant principal.*

Si l'ordre de ce déterminant est inférieur au nombre des équations, on considère la matrice principale, constituée par les coefficients formant le déterminant principal et par ceux des mêmes inconnues dans les autres équations; on borde cette matrice par une colonne constituée par les seconds membres des équations, et l'on forme ainsi la matrice caractéristique.

Si les quotients symboliques des déterminants d'ordre maximum de cette matrice par le plus grand commun diviseur des déterminants d'ordre maximum de la matrice principale ne sont pas tous nuls, les équations données n'ont pas de solution. Si ces quotients sont tous nuls, les équations sont compatibles; on peut donner aux inconnues dont les coefficients n'entrent pas dans la matrice principale, s'il en existe, des valeurs arbitraires, et les autres sont fournies par des équations de forme normale dont la somme des ordres est égale au degré, par rapport à D, *du plus grand commun diviseur précédent.*