

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Fonctions $\Theta(x)$ de Jacobi et $\wp(u)$ de Weierstrass

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 62-73

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__62_1

© Bulletin de la S. M. F., 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS $\theta(x)$ DE JACOBI ET $P(u)$ DE WEIERSTRASS :

PAR M. A. PELLET.

1. Je me propose de déduire les propriétés essentielles de la fonction $P(u)$ de Weierstrass de l'étude de la fonction $\theta(x)$ de

Jacobi, en appliquant la théorie des équations majorantes, que je commencerai par développer.

J'appelle *équation majorante* d'ordre m de l'équation

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

l'équation qui, ordonnée, offre deux variations de signes

$$A_m X^m - F(X) = 0,$$

où $A_m = |a_m|$, et $F(X)$ est une fonction majorante de $f(x)$; ainsi

$$F(X) \geq |f(x)| \quad \text{si} \quad X = |x|.$$

Supposons que l'équation majorante d'ordre m ait deux racines positives, X_1 et $X_2 > X_1$; et celle d'ordre m_1 également deux racines positives X_3 et $X_4 > X_3$, m_1 étant supérieur à m ; X_3 sera supérieur à X_2 . En effet, on aura les deux inégalités

$$A_m X_2^m > A_{m_1} X_2^{m_1}, \quad A_{m_1} X_3^{m_1} > A_m X_3^m;$$

d'où, par multiplication,

$$X_3^{m_1-m} > X_2^{m_1-m}.$$

Pour les valeurs de x dont le module est compris entre X_1 et X_2 , le logarithme de $\frac{f(x)}{x^m}$, $\text{et } \frac{f(x)}{x^{m_1}}$, est développable suivant les puissances positives et négatives de x , car

$$\frac{f(x)}{x^m} = a_m \left(1 + \frac{f(x) - a_m x^m}{a_m x^m} \right),$$

et une fonction majorante de $\frac{f(x) - a_m x^m}{a_m x^m}$, savoir $\frac{F(X) - A_m X^m}{A_m X^m}$, est inférieure à 1 entre ces limites. Nous poserons

$$\text{et } \frac{f(x)}{x^m} = \text{I } a_m + G + H, \quad X_2 > |x| > X_1,$$

G ne contenant que des puissances positives de x et un terme indépendant de x , H que des puissances négatives de x ; ces fonctions s'obtiennent par des opérations algébriques.

De même $l \frac{f(x)}{x^{m_1}}$ est développable suivant les puissances positives et négatives de x , pour les valeurs de x dont le module est compris entre X_3 et X_4 ; nous poserons

$$l \frac{f(x)}{x^{m_1}} = l a_{m_1} + G_1 + H_1, \quad X_4 > |x| > X_3,$$

G_1, H_1 analogues à G, H .

Soit

$$P(x) = x^\nu - p_1 x^{\nu-1} + \dots + p_\nu$$

le produit des facteurs binomes correspondant aux racines de $f(x) = 0$, comprises entre les cercles de rayons X_2 et X_3 , en tenant compte de leur degré de multiplicité; le rapport

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \varphi(x)$$

est développable suivant les puissances positives et négatives de x pour $X_2 > |x| > X_1$, car $\frac{1}{P}$ et lP sont développables suivant les puissances positives de x pour $|x| < X_2$, puisque les modules des racines de $P(x) = 0$ sont supérieurs à X_2 , et l'on a

$$(1) \quad l \frac{\varphi(x)}{x^{m_1}} = l a_{m_1} + G + H - lP, \quad X_2 > |x| > X_1;$$

mais le second membre étant ordonné suivant les puissances de x , les termes semblables de G et lP réduits entre eux, l'égalité subsiste pour tous les autres points situés dans la couronne comprise entre les cercles de rayons X_1 et X_4 , car le premier membre est holomorphe en tous les points de cette couronne. De même $l \frac{P(x)}{x^\nu}$ est développable suivant les puissances négatives de x , pour $|x| > X_3$, et l'on a, en raisonnant de même,

$$(2) \quad l \frac{\varphi(x)}{x^{m_1-\nu}} = l a_{m_1} + G_1 + H_1 - l \frac{P}{x^\nu}, \quad X_4 > |x| > X_1,$$

$l \frac{P}{x^\nu}$ étant développé suivant les puissances décroissantes de x , et la différence $H_1 - l \frac{P}{x^\nu}$ ordonnée, les coefficients réduits.

Les deux formules (1) et (2) sont identiques, sans quoi, par

soustraction, on en déduirait lx en série de puissances de x , donc $\nu = m_1 - m$, puis

$$l a_m + G - l P = l a_{m_1} + G_1, \quad H = H_1 - l \frac{P}{x^\nu};$$

par suite,

$$P = \frac{a_m}{a_{m_1}} e^{G-G_1} = x^{m_1-m} e^{H_1-H}, \quad \varphi(x) = a_{m_1} x^m e^{G_1+H}, \quad X_4 > |x| > X_1;$$

dans le cas où $f(x)$ est une fonction holomorphe pour $x = 0$, on a un théorème de Weierstrass (¹).

2. Soit $f_1(x)$ une fonction de même forme que $f(x)$, convergente pour $|x|$ compris entre X_1 et X_4 . D'après la théorie de la décomposition en fractions simples, on peut poser

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{P_1(x)}{P(x)} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}, \quad X_4 > |x| > X_1,$$

$P_1(x)$ étant un polynome de degré égal ou inférieur à $\nu - 1$ et $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$ une fonction développable suivant les puissances positives et négatives de x , d'après le théorème de Laurent.

Posons

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = G_2 + H_2, \quad X_2 > |x| > X_1,$$

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = G_3 + H_3, \quad X_4 > |x| > X_3,$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} = G_4 + H_4, \quad X_4 > |x| > X_1,$$

les H ne contenant que des puissances négatives de x , les G des puissances positives ou nulles.

On en déduit

$$H_2 = H_4, \quad G_2 = G_4 + \frac{P_1}{P}, \quad X_2 > |x| > X_1,$$

$\frac{P_1}{P}$ étant développé suivant les puissances positives de x , puis

$$G_3 = G_4, \quad H_3 = \frac{P_1}{P} + H_4, \quad X_4 > |x| > X_3,$$

(¹) *Des équations majorantes* (Bulletin de la Société mathématique, 1909).

$\frac{P_1}{P}$ étant développé cette fois suivant les puissances négatives de x .

En définitive,

$$\frac{P_1}{P} = G_3 + H_2, \quad X_4 > |x| > X_1$$

et

$$\frac{P_1}{P} = H_3 - H_2,$$

le module de x étant supérieur à X_3 ,

$$\frac{P_1}{P} = G_2 - G_3,$$

le module de x étant inférieur à X_2 .

On peut déduire de ces formules une démonstration de la formule de Lagrange : *Sur un mode de séparation des racines et la formule de Lagrange* (*Bulletin des Sciences mathématiques* de G. Darboux, 1881).

3. La fonction de Jacobi, $\theta(x)$,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 1 + q \left(x + \frac{1}{x} \right) + q^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \dots \\ &\quad + q^{n^2} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) + \dots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} x^n, \end{aligned}$$

convergente pour toutes les valeurs de x , si le module de q , Q est inférieur à 1, jouit de la propriété

$$\theta(x) = q^{m^2} x^m \theta(q^{2m} x).$$

Les équations majorantes de tous les ordres ont deux racines positives si Q est inférieur à la racine positive de l'équation

$$\frac{1}{2} = Q + Q^3 + Q^9 + \dots + Q^{n^2} + \dots,$$

qui est comprise entre 0,45593 et 0,45594. On en déduit que toutes les racines de l'équation $\theta(x) = 0$ sont comprises dans la formule $x = -q^{2m+1}$, d'abord lorsque $Q < 0,45593$, et, par continuité, lorsque $Q < 1$.

Observant que $\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \theta(x)$, posons

$$\iota \theta(x) = g_0 + g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{Q} > |x| > Q,$$

avec

$$\mathcal{G}(x) = g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_n x^n + \dots + |x| < \frac{1}{Q},$$

il vient

$$l \frac{\theta(x)}{x^m} = m^2 l q + g_0 + \mathcal{G}(q^{2m} x) + \bar{\mathcal{G}}\left(\frac{1}{q^{2m} x}\right), \quad \frac{1}{Q^{2m+1}} > |x| > \frac{1}{Q^{2m-1}},$$

pour toute valeur entière, positive ou négative, de m .

Faisant, dans les formules du n° 1, $m = 0$ et $m_1 = 1$, il vient

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{q} &= \frac{1}{q} e^{\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(q^2 x)}, & |x| < \frac{1}{Q}, \\ x + \frac{1}{q} &= x e^{\mathcal{G}\left(\frac{1}{q^2 x}\right) - \mathcal{G}\left(\frac{1}{x}\right)}, & |x| > \frac{1}{Q}. \end{aligned}$$

Ces deux identités donnent chacune

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{q}{1 - q^2}, & g_2 &= -\frac{q^2}{2(1 - q^4)}, & \dots, \\ g_n &= (-1)^{n-1} \frac{q^n}{n(1 - q^{2n})}, & \dots, \end{aligned}$$

et laissent g_0 indéterminé. Remplaçant ensuite m et m_1 par $-m$ et m , on a

$$P = (x + q) \left(x + \frac{1}{q}\right) \dots (x + q^{2m-1}) \left(x + \frac{1}{q^{2m-1}}\right);$$

$$\varphi(x) = q^{m^2} x^{-m} e^{g_0} e^{\mathcal{G}(q^{2m} x) + \mathcal{G}\left(q^{2m} \frac{1}{x}\right)},$$

d'où enfin

$$\theta(x) = e^{g_0} (1 + qx) \left(1 + \frac{q}{x}\right) \dots (1 + q^{2m-1} x) \left(1 + q^{2m-1} \frac{1}{x}\right),$$

multiplié par le facteur

$$e^{\mathcal{G}(q^{2m} x) + \mathcal{G}\left(q^{2m} \frac{1}{x}\right)}$$

qui tend vers 1 lorsque m tend vers l'infini, x étant déterminé.

Posons $e^{g_0} = \mathfrak{A}_0(q)$; on a, en faisant $x = \sqrt{-1} = i$,

$$\theta(i) = \theta(-i)$$

$$= \mathfrak{A}_0(q) \prod_{n=0}^{\infty} [1 + q^{2(2m+1)}] = 1 - 2q^4 + 2q^{16} - 2q^{36} + \dots = \theta(q^4 - 1),$$

en désignant par $\theta(q^4, x)$ la fonction $\theta(x)$ où l'on a remplacé q

par q^4 . Donc $\theta(i)$ est aussi égal à

$$\mathfrak{A}_0(q^4) \prod_0^{\infty} [1 - q^{4(2m+1)}]^2;$$

il en résulte

$$\mathfrak{A}_0(q) = \mathfrak{A}_0(q^4) \prod_0^{\infty} [1 - q^{2(2m+1)}] [1 - q^{4(2m+1)}].$$

Remplaçant q par q^4 , puis par q^{16} , q^{64} , ..., on a en définitive

$$\mathfrak{A}_0(q) = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2^m}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \theta(1) &= \mathfrak{A}_0(q) (1+q)^2 \dots (1+q^{2n+1})^2 \dots, \\ \theta(-1) &= \mathfrak{A}_0(q) (1-q)^2 \dots (1-q^{2n+1})^2 \dots, \\ \theta(1)\theta(-1) &= \mathfrak{A}_0^2(q) \prod_0^{\infty} [1 - q^{2(2n+1)}]^2, \\ \theta(q) &= \theta\left(\frac{1}{q}\right) = 2 \mathfrak{A}_0(q) (1+q^2)^2 \dots (1+q^{2n})^2, \\ \theta(1)\theta(-1)\theta(q) &= 2 \mathfrak{A}_0^3(q), \\ \theta'\left(-\frac{1}{q}\right) &= q \mathfrak{A}_0^3(q), \quad \theta'(-q) = -\frac{1}{q} \mathfrak{A}_0^3(q), \end{aligned}$$

$\theta'(x)$ désignant la dérivée de $\theta(x)$.

4. Si, dans la fonction où β et μ sont entiers, le dernier positif

$$\mathfrak{X}(x) = x^\beta \frac{\theta(\alpha_1 x) \theta(\alpha_2 x) \dots \theta(\alpha_\mu x)}{\theta^\mu(x)!},$$

on change x en $q^2 x$, elle se reproduit, multipliée par le facteur

$$q^{2\beta(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)^{-1}} = \alpha;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ étant donnés, on peut choisir β de manière que le module de α soit compris entre 1 et $\frac{1}{Q^2}$ ou égal à 1.

Soit

$$\frac{A_1}{1+xq} + \frac{A_2}{(1+xq)^2} + \dots + \frac{A_\mu}{(1+xq)^\mu} = \frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu}$$

la somme des fractions simples, correspondant à la racine $-\frac{1}{q}$

de $\theta(x) = 0$, pour $\mathfrak{X}(x)$; celle correspondant au zéro $-q^{2m-1}$ sera

$$\left[\frac{A_1}{1+xq^{-2m+1}} + \frac{A_2}{(1+xq^{-2m+1})^2} + \dots + \frac{A_u}{(1+xq^{-2m+1})^u} \right] \alpha^m;$$

on le voit en substituant dans la relation

$$\mathfrak{X}(q^{2m}x) = \alpha^m \mathfrak{X}(x);$$

et faisant tendre x vers $-\frac{1}{q}$.

Pour $|x|$ compris entre Q et $\frac{1}{Q}$, soit

$$\mathfrak{X}(x) = G(x) + H\left(\frac{1}{x}\right);$$

pour $|x|$ compris entre $\frac{1}{Q^{2m-1}}$ et $\frac{1}{Q^{2m+1}}$, on aura

$$\mathfrak{X}(x) = \alpha^{-m} \left[G(q^{2m}x) + H\left(\frac{1}{q^{2m}x}\right) \right], \quad \frac{1}{Q^{2m+1}} > |x| > \frac{1}{Q^{2m-1}}.$$

Il vient

$$\mathfrak{X}(x) = G(x) + H\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{1}{Q} > |x| > Q,$$

$$\mathfrak{X}(x) = \alpha^{-1} \left[G(q^2x) + H\left(\frac{1}{q^2x}\right) \right], \quad \frac{1}{Q^3} > |x| > \frac{1}{Q},$$

$$\mathfrak{X}(x) = \frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} + H\left(\frac{1}{x}\right) + \alpha G(q^2x), \quad \frac{1}{Q^3} > |x| > Q,$$

$$\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} = \alpha^{-1} H\left(\frac{1}{q^2x}\right) - H\left(\frac{1}{x}\right), \quad |x| > \frac{1}{Q},$$

$$\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} = G(x) - \alpha^{-1} G(q^2x), \quad \frac{1}{Q} > |x|,$$

d'après les formules du n° 2. Posons

$$G(x) = g_0 + g_1x + \dots + g_nx^n + \dots,$$

$$H\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{h_1}{x} + \frac{h_2}{x^2} + \dots + \frac{h_n}{x^n} + \dots$$

Les deux dernières formules donnent

$$\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} = \frac{h_1}{x} \left(\frac{\alpha^{-1}}{q^2} - 1 \right) + \dots + h_n \frac{1}{x^n} \left(\frac{\alpha^{-1}}{q^{2n}} - 1 \right) + \dots, |x| > Q^{-1},$$

$$\frac{P_1(x)}{(1+xq)^\mu} = g_0(1-\alpha^{-1}) + g_1x(1-\alpha^{-1}q^2) + \dots \\ + g_nx^n(1-\alpha^{-1}q^{2n}) + \dots, |x| < Q^{-1}.$$

Tous les coefficients g, h sont déterminés si α est différent de 1 et son module inférieur à $\frac{1}{Q^2}$, $\frac{1}{Q^2} > |\alpha|$. Pour $\alpha = 1$, le seul coefficient de g_0 est nul; tous les autres g et tous les h sont déterminés; alors la somme $A_1 + A_2 + \dots + A_\mu$ est nulle et g_0 peut être déterminé par les équations

$$0 = G(x_0) + H\left(\frac{1}{x_0}\right)$$

ou

$$0 = P_1(x_0) \frac{1}{(1+x_0q)^\mu} + H\left(\frac{1}{x_0}\right) + G(q^2x_0),$$

x_0 étant l'une des μ racines de l'équation $\mathfrak{X}(x) = 0$, comprises dans la couronne Q et $\frac{1}{Q}$, la première devant être rejetée si le module de x_0 est égal à $\frac{1}{Q}$, la série $G(x_0)$ étant alors divergente.

Supposons m entier positif. On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(x) &= \alpha^m \left[G(q^{-2m}x) + H\left(\frac{q^{2m}}{x}\right) \right], & Q^{2m-1} > |x| > Q^{2m+1}, \\ \mathfrak{X}(x) &= \alpha^{-m} \left[G(q^{2m}x) + H\left(\frac{1}{q^{2m}x}\right) \right], & \frac{1}{Q^{2m+1}} > |x| > \frac{1}{Q^{2m-1}}, \end{aligned}$$

puis

$$\mathfrak{X}(x) = \sum_{n=-m+1}^{n=m-1} \left[\frac{A_1}{1+xq^{2n+1}} + \frac{A_2}{(1+xq^{2n+1})^2} + \dots + \frac{A_\mu}{(1+xq^{2n+1})^\mu} \right] \alpha^{-n} + R_m$$

avec

$$R_m = \alpha^{-m} G(q^{2m}x) + \alpha^m H\left(\frac{q^{2m}}{x}\right).$$

R_m tend vers zéro lorsque m tend vers l'infini, si α est compris entre 1 et $\frac{1}{Q^2}$, $\frac{1}{Q^2} > |\alpha| > 1$. Si $|\alpha| = 1$, R_m tend vers $g_0 \alpha^{-m}$ et par conséquent varie avec m si α est différent de 1 lorsque g_0 n'est pas nul; $g_0 = A_1 + A_2 + \dots + A_\mu$ pour α différent de 1.

Pour $\alpha = 1$,

$$\mathfrak{X}(x) = g_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A_1}{1+xq^{2n+1}} + \frac{A_2}{(1+xq^{2n+1})^2} + \dots + \frac{A_\mu}{(1+xq^{2n+1})^\mu} \right],$$

et nous avons vu qu'alors $A_1 + A_2 + \dots + A_\mu = 0$, et que g_0 est

déterminé par l'équation

$$0 = g_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A_1}{1 + x_0 q^{2n+1}} + \frac{A_2}{(1 + x_0 q^{2n+1})^2} + \dots + \frac{A_\mu}{(1 + x_0 q^{2n+1})^\mu} \right],$$

x_0 étant l'une des racines de $\mathfrak{N}(x) = 0$.

5. Observant que

$$\frac{1}{(1 + x q^{2n+1})^2} - \frac{1}{1 + x q^{2n+1}} = \frac{-x q^{2n+1}}{(1 + x q^{2n+1})^2},$$

désignons par $p(x)$ la fonction

$$p(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x q^{2n+1}}{(1 + x q^{2n+1})^2}$$

On a

$$p(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) = p(q^2 x)$$

Il vient

$$\frac{1}{q^2} \frac{\theta^2\left(-\frac{1}{q}\right)}{\theta\left(-\frac{\alpha_1}{q}\right) \theta\left(-\frac{1}{\alpha_1 q}\right)} \frac{\theta(\alpha_1 x) \theta\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)}{\theta^2(x)} = p(x) - p\left(-\frac{1}{\alpha_1 q}\right);$$

d'ailleurs

$$p\left(-\frac{1}{\alpha_1 q}\right) = p\left(-\frac{\alpha_1}{q}\right),$$

$-\frac{1}{\alpha_1 q}$ est un zéro de $\theta(\alpha_1 x)$ et $-\frac{\alpha_1}{q}$ un zéro de $\theta\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)$.

Posons

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(x) = g_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + g_2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \dots + g_n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \dots, \\ \frac{1}{Q} > |x| > Q, \end{array} \right.$$

il vient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(x) = -\frac{xq}{(1+xq)^2} + g_1\left(q^2 x + \frac{1}{x}\right) + \dots + g_n\left(q^{2n} x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \dots, \\ \frac{1}{Q^2} > |x| > Q, \end{array} \right.$$

avec, pour déterminer les coefficients g , l'équation

$$-\frac{xq}{(1+xq)^2} + g_1 q^2 x + g_2 q^4 x^3 + \dots \\ + g_n q^{2n} x^n + \dots = g_1 x + g_2 x^2 + \dots + g_n x^n + \dots,$$

qui a lieu pour les valeurs de x dont le module est inférieur à $\frac{1}{Q}$; ce qui donne

$$g_n = (-1)^n n \frac{q^n}{1 - q^{2n}}.$$

Les deux fonctions $\theta(\alpha_1 x)$, $\theta\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)$ ont les mêmes zéros sans être identiques, seulement lorsque $\alpha_1 = -1$, ou q , ou $-q$; et il vient, en simplifiant le facteur dans le premier membre, à l'aide des relations établies au n° 3,

$$\frac{\theta^2(1) \theta^2(-1)}{4} \frac{\theta^2(-x)}{\theta^2(x)} = p(x) - p\left(\frac{1}{q}\right), \\ -q \frac{\theta^2(1) \theta^2\left(\frac{1}{q}\right)}{4} \frac{\theta(qx) \theta\left(\frac{x}{q}\right)}{\theta^2(x)} = p(x) - p(-1), \\ \frac{q}{4} \frac{\theta^2(-1) \theta^2\left(\frac{1}{q}\right)}{\theta^2(x)} \frac{\theta(-qx) \theta\left(-\frac{x}{q}\right)}{\theta^2(x)} = p(x) - p(1);$$

faisant $x = 1, -1, \frac{1}{q}$ successivement dans ces formules, elles donnent

$$\frac{1}{4} \theta^4(1) = p(-1) - p\left(\frac{1}{q}\right), \quad \frac{1}{4} \theta^4(-1) = p(1) - p\left(\frac{1}{q}\right), \\ \frac{-q}{4} \theta^4\left(\frac{1}{q}\right) = p(1) - p(-1)$$

et

$$\theta^4(1) = \theta^4(-1) + q \theta^4\left(\frac{1}{q}\right).$$

En remplaçant $p(-1)$ et $p(1)$ par leurs valeurs déduites de la série (1) et $p\left(\frac{1}{q}\right)$ par sa valeur donnée par la série (2), on obtient des identités qui conduisent à des théorèmes arithmétiques remarquables (voir C. JORDAN, *Cours de l'École Polytechnique*, t. II).

6. La fonction

$$(1) \quad p\left(-\frac{1}{q}e^u\right) + \gamma$$

admet les deux périodes $2\pi i$ et $2\pi\tau i$, avec $e^{\pi\tau i} = q$. Elle a un pôle double au point $u = 0$ et n'admet que des termes de degré pair en u . Le terme indépendant est nul et son développement est de la forme

$$\frac{1}{u^2} + cu^2 + c_1u^4 + \dots$$

si l'on prend γ égal à

$$\frac{1}{12} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2},$$

ou, d'après la série (2),

$$\frac{1}{12} - 2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}}.$$

La fonction (1) est la dérivée seconde changée de signe du logarithme de la fonction

$$e^{-\gamma \frac{u^2}{2} - Cu - C'} \theta\left(-\frac{1}{q}e^u\right).$$

Cette fonction est impaire si l'on donne à C la valeur $\frac{1}{2}$, et sa dérivée est égale à 1 pour $u = 0$ si $e^{-C'}$ est égal à $-\frac{q}{\theta'\left(-\frac{1}{q}\right)}$.

La fonction $P(u)$ de Weierstrass, aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2 = 2\omega_1\tau$, n'est autre que

$$P(u) = -\frac{\pi^2}{\omega_1^2} \left[p\left(-\frac{1}{q}e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}}\right) + \gamma \right],$$

et $\sigma(u)$ est donnée par la formule

$$\sigma(u) = -\frac{q\omega_1}{\pi\theta'\left(-\frac{1}{q}\right)i} e^{\gamma \frac{\pi^2}{2\omega_1^2}u^2 - \frac{\pi i}{2\omega_1}u} \theta\left(-\frac{1}{q}e^{\frac{\pi i u}{\omega_1}}\right).$$