BULLETIN DE LA S. M. F.

P. FATOU

Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 37-41

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__37_1>

NOTE SUR LES FONCTIONS INVARIANTES PAR UNE SUBSTITUTION RATIONNELLE [1];

PAR M. FATOU.

Nous avons vu que les solutions de l'équation fonctionnelle

$$I[R(z)] = I(z),$$

uniformes dans le domaine D_α d'un point double attractif de multiplicateur $s \neq 0$ et ne prenant qu'un nombre fini de fois la même

[1] Cette Note n'est qu'un complément au Chapitre VII de mon Mémoire sur les équations fonctionnelles (*B. S. M. F.*, 1920); le lecteur devra se reférer au paragraphe 68 de ce Chapitre.

valeur dans un domaine fondamental du groupe G, s'obtiennent en remplaçant dans la fonction elliptique $\Phi(w)$, aux périodes $2i\pi$ et $\log s$, l'argument w par $\log f(z)$, $f(z)$ étant la solution holomorphe en α de l'équation fonctionnelle de Schröder

$$f[R(z)] = s f(z).$$

La fonction $I(z)$ admet comme points singuliers essentiels isolés le point α et tous ses antécédents α_{-p} intérieurs à D_α, les points limites des α_{-p} formant un ensemble parfait qui n'est autre que la frontière de D_α. Je dis que, lorsque z décrit un chemin tendant vers au moins un point singulier essentiel de $f(z)$, cette fonction ne tend vers aucune valeur limite déterminée.

En effet, si z tend vers un point α_{-p}, $f(z)$ tend vers zéro; le point $w = \log f(z)$ tend vers l'infini et décrit ainsi un chemin qui traverse une infinité de parallélogrammes des périodes de $\Phi(w)$, de sorte que $\Phi(w)$ admet une infinité continue de valeurs limites. Si z décrit un chemin tendant vers au moins un point frontière, nous avons vu que l'infini est toujours l'une des limites d'indétermination de $f(z)$; le point $w = \log f(z)$ décrit une courbe dont certaines parties s'éloignent indéfiniment et la même conclusion subsiste.

Il s'ensuit que la fonction inverse $z(I)$ n'admet comme points singuliers que des points critiques algébriques. Considérons, en effet, un élément de cette fonction inverse et supposons que I, décrivant un certain chemin l, le rayon de convergence des séries de Taylor qui donnent le prolongement de cet élément le long de l tende vers zéro quand I tend vers le point I_0 de l; z reste évidemment à l'intérieur du domaine de méromorphie de la fonction $I(z)$; car si une branche de fonction analytique telle que $z(I)$ est méromorphe à l'intérieur et sur le contour d'un domaine fermé Δ auquel elle fait correspondre un domaine Δ', la fonction inverse $I(z)$ ne peut admettre comme points singuliers dans Δ' que des pôles ou des points critiques algébriques, mais non des points essentiels; Δ' est donc intérieur au domaine ouvert D_α dont on a enlevé le point α et ses antécédents. Lorsque I tend vers I_0, le point z tend vers une solution bien déterminée de l'équation $I(z) = I_0$. En effet, $I(z)$ n'ayant jamais la valeur asymptotique I_0 quand z décrit un chemin tendant vers au moins un point singulier essentiel, il s'ensuit que l'on pourra trouver deux nombres positifs ε et η, tels que I restant à l'intérieur d'un cercle de centre I_0 et de rayon η, z reste à l'intérieur d'un domaine T compris dans D_α et dont tous les points sont à une distance $> \varepsilon$ des points α_{-p} et des points frontières de D_α. Dans T, l'équation $I(z) = I_0$ n'a qu'un nombre fini de solutions et, comme $I(z)$ est continue dans T, z tend nécessairement vers l'une de ces solutions z_0 quand I tend vers I_0. Un raisonnement classique montre alors que I_0 est un point ordinaire, un pôle ou un point critique algébrique de $z(I)$ (¹).

Je dis que *ces points critiques algébriques sont en nombre fini.* En effet, ces points sont ceux qui s'obtiennent en remplaçant z dans $I(z)$ par une racine z_0 de l'équation $I'(z) = 0$, et y adjoignant au besoin le point à l'infini si $I(z)$ a des pôles multiples. Or on a

$$I'(z) = \Phi'(w)\frac{f'(z)}{f(z)} \qquad [w = \log f(z)].$$

L'équation $I'(z) = 0$ se décompose en deux autres. Considérons d'abord les valeurs de w, qui vérifient la première équation $\Phi'(w) = 0$. Les valeurs correspondantes de $I = \Phi(w)$ [auxquelles on adjoindra le point à l'infini si $\Phi(w)$ a des pôles multiples] sont les valeurs critiques de l'intégrale abélienne de première espèce et de genre 1 : $w(\Phi)$. Ces points sont en nombre fini, au moins égal à 4 si $w(\Phi)$ n'a que des points de ramification simples, exactement égal à 4 si $\Phi(w)$ est une fonction elliptique du second ordre. Mais il peut être égal à 3 dans certains cas singuliers. C'est ce qui arrive si $\Phi(w)$ satisfait à une équation différentielle du type binôme de Briot et Bouquet telle que

$$\left(\frac{d\Phi}{dw}\right)^3 = G(\Phi - a)^2(\Phi - b)^2,$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dw}\right)^4 = G(\Phi - a)^2(\Phi - b)^3,$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dw}\right)^6 = G(\Phi - a)^3(\Phi - b)^4,$$

les trois points critiques de la fonction $w(\Phi)$ étant alors a, b et ∞. Les fonctions elliptiques qui vérifient ces équations ont un module

(¹) *Cf.* Iversen, *loc. cit.*, p. 7-10.

singulier, le triangle principal des périodes étant équilatéral ou isoscèle rectangle. Il en résulte une valeur particulière pour le multiplicateur s, par exemple $s = e^{-2\pi}$ (il est probable qu'il n'existe pas de fonctions elliptiques de module arbitraire ayant la même propriété).

Considérons maintenant les points critiques de la seconde catégorie, correspondant aux racines de l'équation $f'(z) = 0$ [nous admettrons que le point à l'infini n'a pas d'antécédents confondus avec les points critiques de $R_{-1}(z)$]. Les zéros de $f'(z)$ sont les antécédents des zéros de $R'(z)$ intérieurs au domaine D_α; ces derniers sont en nombre fini, et il y en a au moins un; soit β l'un d'eux; en un point antécédent de rang q de β, $f(z)$ prend la valeur $\frac{1}{s^q}f(\beta)$ et $I(z)$ reprend la même valeur $\Phi[\log f(\beta)]$, quel que soit l'antécédent considéré. Nous n'obtenons donc ainsi qu'un nombre fini de points critiques algébriques qui peuvent se confondre en totalité ou en partie avec ceux de la première catégorie. Si, en particulier, il y a un seul point β, on pourra, en changeant $\Phi(w)$ en $\Phi(w+h)$, ce qui ne change pas les points critiques de la première catégorie, disposer de la constante h de manière que le point critique $\Phi[\log f(\beta)+h]$ coïncide avec l'un des précédents. On pourra donc former, au moins pour certaines valeurs singulières de s, des fonctions $I(z)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$I[R(z)] = I(z),$$

et telles que la fonction $z(I)$, qui possède une infinité de branches, n'admette comme singularités que trois points critiques algébriques. Il suffira de prendre pour $R(z)$ la fonction rationnelle du second degré

$$R(z) = \frac{z(s-z)}{1-sz}$$

avec $s = e^{-2\pi}$, qui définit une substitution à cercle fondamental de première espèce, et pour fonction elliptique associée

$$\Phi(w) = A + B\wp^2(w+h \mid g_2, 0),$$

$\wp$ étant la fonction de Weierstrass; g_2, A, B, h des constantes faciles à déterminer.

Remarquons que, pour l'intégrale $w(\psi)$, on aura, en appelant

$m-1$, $n-1$, $p-1$ les ordres des trois points de ramification, la relation

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1,$$

$\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{\pi}{p}$ étant, comme l'on sait, les trois angles d'un triangle rectiligne dont la fonction $\psi(w)$ fait la représentation conforme sur un demi-plan. Quand on passe de là à la fonction $z(\mathrm{I})$, l'ordre de l'un des trois points de ramification se trouve augmenté d'une unité du fait qu'un point racine de $f'(z)=0$ coïncide avec un point racine de $\Phi'[\log f(z)]=0$. On aura donc, entre les trois entiers m', n', p' correspondant aux trois points critiques, la relation

$$\frac{1}{m'}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{p'}<1,$$

comme pour les fonctions de Schwarz.

Si nous prenons pour $\Phi(w)$ une fonction elliptique du second ordre, donnant lieu par conséquent à quatre points de ramification simples, et si le point unique β donne lieu à un point de ramification simple distinct des précédents, la fonction $z(\mathrm{I})$ aura cinq points de ramification simples. Il est facile de voir que ces cinq points peuvent être pris arbitrairement.

Observons encore que les différentes valeurs de $z(\mathrm{I})$ se déduisent de r d'entre elles, r étant l'ordre de $\Phi(w)$, par les substitutions (algébriques) du groupe G; en général, un point critique de $z(\mathrm{I})$ sera régulier pour certaines branches de cette fonction.

Ce qui précède suffit à mettre en évidence les analogies et les différences des fonctions $\mathrm{I}(z)$ avec les fonctions fuchsiennes. On pourrait, d'ailleurs, préciser quelque peu le mécanisme de permutation des différentes valeurs de $z(\mathrm{I})$; quoi qu'il en soit, nous voyons que, parmi les fonctions uniformes à domaine d'existence borné et telles que la fonction inverse n'admette comme points singuliers qu'un nombre fini de points critiques algébriques, il y a, outre certaines fonctions fuchsiennes, une infinité d'autres fonctions possédant également des propriétés fonctionnelles simples; l'étude générale de ces fonctions serait sans doute un sujet de recherches des plus intéressants.