BULLETIN DE LA S. M. F.

R. GÂTEAUX

Sur diverses questions de calcul fonctionnel

Bulletin de la S. M. F., tome 50 (1922), p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1922__50__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR DIVERSES QUESTIONS DE CALCUL FONCTIONNEL (¹);

PAR M. R. GATEAUX.

PREMIER MÉMOIRE.

Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques (²).

RAPPEL DE QUELQUES DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS.

1. *Fonctionnelle.* — Soit *l'ensemble* Ω *des fonctions réelles* $z(\alpha)$, continues pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$, et telles que $A \leqq z \leqq B$. A toute fonction z de Ω nous faisons correspondre un nombre réel $U(z)$, qui est dit une fonctionnelle de z, définie dans le champ Ω.

$U(z)$ est dite *continue au point* $z_0(\alpha)$, si, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer η tel que $|z - z_0| < \eta$ entraîne

$$|U(z) - U(z_0)| < \varepsilon.$$

Si $U(z)$ est continue en tout point z de Ω, elle est dite continue dans Ω, mais en général *elle n'est pas uniformément continue dans* Ω.

2. *Ensemble compact de fonctions continues.* — C'est un ensemble E tel que, de toute infinité de fonctions de E, on peut

(¹) Ce qui suit sous ce titre constitue la fin de la publication des papiers de R. Gateaux, que nous avons commencée dans le précédent volume de ce Bulletin. (Paul LÉVY.)

(²) Un résumé de ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 4 août 1913.

extraire une suite de fonctions tendant uniformément vers une fonction limite, appartenant ou non à E.

On démontre qu'un tel ensemble E de fonctions $z(\alpha)$ (définies pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$) est un ensemble de fonctions *bornées dans son ensemble et également continues;* c'est-à-dire qu'étant donné $\varepsilon > 0$, on peut déterminer η, *le même pour toute fonction* z *de* E, tel que $|\alpha_1 - \alpha_2| < \eta$ entraîne $|z(\alpha_2) - z(\alpha_1)| < \varepsilon$.

3. Théorème. — *Une fonctionnelle continue dans* Ω *est uniformément continue en tous les points d'un ensemble compact* E, *extrait de* Ω; c'est-à-dire qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre η tel que $|z' - z| < \eta$ entraîne $|U(z') - U(z)| < \varepsilon$, *$z$ étant une fonction quelconque de* E, *z' une fonction quelconque de* Ω.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver $\varepsilon > 0$, et pour chaque valeur de n deux fonctions z_n de E et z'_n de Ω telles que $|z_n - z'_n| < \frac{1}{n}$ et $|U(z_n) - U(z'_n)| > \varepsilon$. Mais E est compact; de la suite $z_1 \ldots z_n$ on peut extraire une suite convergeant uniformément vers une fonction limite ζ. On peut supposer cette suite extraite et $z_1 \ldots z_n \ldots$ tendant vers ζ. Or $|z_n - z'_n| < \frac{1}{n}$; la suite $z'_1 \ldots z'_n \ldots$ tend donc aussi uniformément vers ζ. $U(z_n)$ et $U(z'_n)$ tendent vers $U(\zeta)$. On ne peut donc avoir toujours

$$|U(z_n) - U(z'_n)| > \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

4. Théorème. — *Une fonctionnelle* $U(z)$ *continue dans* Ω *est bornée dans tout ensemble compact extrait de* Ω (1).

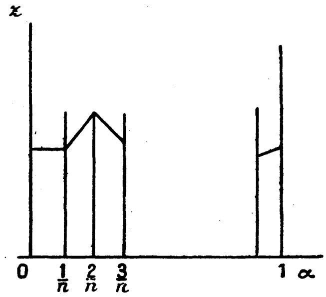
I. — Représentation d'une fonctionnelle continue.

5. *Représentation par la limite pour n infini d'un polynome à n variables.* — Extrayons de Ω un ensemble de fonctions $\zeta^{(n)}$. Une fonction $\zeta^{(n)}$ est représentée par la ligne brisée de la figure,

(1) Ce théorème est rajouté en marge du manuscrit et sa démonstration manque. Le lecteur la reconstituera aisément en s'inspirant de la méthode de démonstration du théorème précédent. (P. L.)

dont le premier côté est parallèle à $O\alpha$. Elle est déterminée quand on se donne les valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ pour $\alpha = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$.

Fig. 1.



Si $U(z)$ est une fonctionnelle réelle continue dans Ω, on a alors $U(\zeta_n) = u_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, u_n étant une fonction réelle, continue par rapport à l'ensemble de ses variables.

Soit maintenant $z(\alpha)$ une fonction quelconque de Ω; $z_1, \ldots, z_n$ ses valeurs quand α prend des valeurs quelconques appartenant aux intervalles $\left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$.

6. Théorème. — *Je dis que l'on a*

$$U(z) = \lim_{n=\infty} u_n(z_1, \ldots z_n),$$

et que de plus la convergence est uniforme dans tout ensemble compact de fonctions continues.

En effet, soit E un ensemble compact de fonctions z. Étant donné $\varepsilon > 0$, je puis déterminer η tel que $|z' - z| < \eta$ entraîne

$$|U(z') - U(z)| < \varepsilon,$$

z étant une fonction quelconque de E et z' une fonction quelconque de Ω (théorème I).

Les fonctions z de E étant également continues, je puis trouver N tel que pour $\eta > N$ l'oscillation de toute fonction z dans chaque intervalle $\left(\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right)$ soit $< \frac{n}{2}$. Je considère alors la fonction $\zeta^{(n)}$ définie par $z_1, \ldots, z_n$, valeurs de $z(\alpha)$ dans les intervalles $\left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$. Il est facile de vérifier que l'on a

$$|\zeta^{(n)}(\alpha) - z(\alpha)| < \eta.$$

Alors

$$|U(\zeta^{(n)}) - U(z)| < \varepsilon.$$

Mais $U(\zeta^{(n)}) = u_n(z_1, \ldots, z_n)$. Donc u_n converge uniformément vers $U(z)$ dans l'ensemble compact E. C. Q. F. D.

7. D'après le théorème de Weierstrass, u_n étant continue par rapport à l'ensemble de ses variables, *on peut trouver un polynome $p_n(z_1, \ldots, z_n)$ de degré m_n tel que $|u_n - p_n| < \varepsilon_n$* $\left(\varepsilon_n \text{ donné tendant vers zéro avec } \frac{1}{n}\right)$; *$p_n$ converge donc vers $U(z)$ dans les mêmes conditions que u_n.*

8. *Représentation par la limite d'une somme d'intégrales* (résultat obtenu par une autre voie par M. Fréchet. — Reprenons : $p_n(z_1, \ldots, z_n)$ converge uniformément vers $U(z)$ dans tout ensemble compact de fonctions continues; $z_1, \ldots, z_n$ sont des valeurs *quelconques* de z dans les intervalles

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

On peut prendre pour $z_1, \ldots, z_n$ les valeurs moyennes de z dans chaque intervalle; plus généralement, $a_n(\alpha)$ étant une fonction positive ou nulle telle que

$$\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} a_n(\alpha)\, d\alpha = 1,$$

on peut prendre

$$z_p = \int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} a_n(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha.$$

Développons p_n :

$$p_n = a + b_1 z_1 + \ldots + b_n z_n + \ldots + e z_1^{\mu_1} \ldots z_p^{\mu_p} + \ldots.$$

Termes du premier degré :

$$b_1 \int_0^{\frac{1}{n}} a_n(\alpha) z(\alpha)\, d\alpha + \ldots + b_n \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} a_n(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha = \int_0^1 B(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha,$$

en posant $B(\alpha) = b_p a_n(\alpha)$ dans $\left(\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}\right)$. On peut profiter de l'indétermination de $a_n(\alpha)$ pour rendre $B(\alpha)$ continue; il suffit de prendre $a_n(\alpha)$ continue, nulle pour $\alpha = \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$.

De même les termes de degré q donnent une intégrale d'ordre q

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 C(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_q)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_q,$$

la fonction C étant continue à cause des hypothèses faites sur $a_n(\alpha)$. En permutant les α de toutes les façons possibles, on obtient $q!$ intégrales égales à la précédente. En en prenant la moyenne, on obtient une intégrale de même forme dans laquelle la fonction C est symétrique.

Finalement, en posant

$$z_p = \int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} a_n(\alpha)\, d\alpha,$$

on a

$$p_n = U_n(z) = K_{n,0} + \int_0^1 K_{n,1}(\alpha) z(\alpha)\, d\alpha + \ldots$$
$$+ \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{n,m_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}) z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_{m_n})\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m_n},$$

les $K_{n,i}$ *étant des fonctions continues symétriques.* On pourrait même les remplacer par des polynomes. On aurait alors

$$p_n = U_n + \varepsilon'_n.$$

En résumé,

$$U(z) = \lim_{n=\infty} p_n(z_1, \ldots, z_n) = \lim_{n=\infty} U_n(z),$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact de fonctions continues.

9. *Remarque.* — Si l'on n'avait pas $A < z < B$, on opérerait comme précédemment, en employant pour calculer $p_n(z_1, \ldots, z_n)$ et $U_n(z)$ les fonctions z comprises entre $-n$ et $+n$.

10. *Cas d'une fonctionnelle continue de plusieurs fonctions indépendantes.* — Soient par exemple les fonctions $z(\alpha)$ et $t(\alpha)$,

($0 \leqq \alpha \leqq 1$, $A \leqq z \leqq B$, $A \leqq t \leqq B$) et $U(z, t)$ une fonctionnelle continue par rapport à l'ensemble des variables z, t. On a de même

$$U(z, t) = \lim_{n=\infty} p_n(z_1, \ldots, z_n; t_1, \ldots, t_n),$$

p_n étant un polynome de degré r_n par rapport à $z_1, \ldots, z_n$ et de degré s_n par rapport à $t_1, \ldots, t_n$;

$$U(z, t) = \lim_{n=\infty} \sum_{r,s} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{n,r,s}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r; \beta_1, \ldots, \beta_s)$$
$$\times z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_r)\, t(\beta_1)\ldots t(\beta_s)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_r\, d\beta_1 \ldots d\beta_s,$$

r variant de o à r_n, s de o à s_n, $K_{n,r,s}$ étant une fonction continue et symétrique ou un polynome. La convergence est uniforme quand z, t appartient à un ensemble compact.

Tout ceci s'étend sans difficulté au cas où z, t sont des fonctions $z(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, $t(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ de plusieurs variables indépendantes.

II. — Fonctionnelles d'ordre entier.

11. *Définition fonctionnelle d'un polynome réel de variables réelles.* — M. Fréchet en a donné la définition suivante : soit $u(z_1, \ldots, z_p)$ que je note $u(z)$ une fonction réelle continue par rapport à l'ensemble des variables réelles $z_1, \ldots, z_p$. Désignons par $z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}$, n systèmes de valeurs des variables z. Posons

$$\Delta_n u = u(z^{(1)} + \ldots + z^{(n)}) - \sum_{n-1} u(z^{(i_1)} + \ldots + z^{(i_{n-1})})$$
$$+ \sum_{n-2} u(z^{(i_1)} + \ldots + z^{(i_{n-2})}) - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1} u(z^{(i_1)}) + (-1)^n u(0).$$

Exemple : soit $u(z)$ une fonction d'une variable réelle; on a

$$\Delta_3 u = u(x+y+z) - u(y+z) - u(z+x) - u(x+y)$$
$$+ u(x) + u(y) + u(z) - u(0).$$

Dans la formule générale, le signe $\sum_K$ indique qu'on doit faire la somme de tous les termes obtenus en remplaçant $i_1, \ldots, i_K$ par une combinaison quelconque des n premiers nombres entiers K à K.

On démontre que si l'on a $\Delta_{n+1} u \equiv 0$, $\Delta_n u \not\equiv 0$, *u est un polynome de degré n par rapport à l'ensemble des variables* $z_1, \ldots, z_p$.

12. *Définition d'une fonctionnelle réelle d'ordre entier d'une fonction réelle.* — Par analogie, $U(z)$, fonctionnelle réelle continue par rapport à la fonction réelle z, sera dite *fonctionnelle d'ordre entier n*, si

$$\Delta_{n+1} U \equiv 0, \qquad \Delta_n U \not\equiv 0.$$

Dans l'expression de $\Delta_n U$, $z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}$ représentent chacun, non plus un système de valeurs, mais une fonction z.

Nous nous proposons maintenant d'étendre ces notions au champ complexe.

13. *Définition fonctionnelle d'un polynome de variables complexes.* — Si $z_1, \ldots, z_p$ sont complexes, les propriétés indiquées n° 11 ne suffisent pas pour que u soit un polynome. Par exemple, la fonction d'une variable $\mathcal{R}(z)$ (partie réelle de z) est continue, vérifie $\Delta_2 \mathcal{R} \equiv 0$, $\Delta_1 \mathcal{R} \not\equiv 0$. Cependant ce n'est pas un polynome du premier degré.

Nous caractérisons le polynome $u(z_1, \ldots, z_p)$ par la propriété suivante :

Théorème. — *Soit la fonction* $u(z_1, \ldots, z_p)$ *des variables complexes* $z_1, \ldots, z_p$; λ *et* μ *deux nombres complexes. Si*

$$u(\lambda z_1 + \mu z'_1, \ldots, \lambda z_p + \mu z'_p)$$

est un polynome de degré n en λ, μ *quels que soient* $z_1, z'_1, \ldots, z_p, z'_p$, *u est un polynome de degré n par rapport à l'ensemble des variables* $z_1, \ldots, z_p$.

En effet, soit par exemple $u(x, y, z)$. Par hypothèse

$$u(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') = P_n(\lambda, \mu).$$

Faisons $x' = y = z = 0$, $x = \mu = 1$:

$$u(\lambda, y', z') = P_n(\lambda, 1) \quad \text{(polynome en } \lambda\text{)};$$

u est donc un polynome par rapport à chacune des variables. C'est un polynome en x, y, z, évidemment de degré n.

14. *Définition d'une fonctionnelle complexe d'une fonction complexe.* — Soit la fonction complexe $z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$ de la variable réelle α définie et continue pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$. On peut la représenter par la courbe continue Γ, tracée entre les plans $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, rencontrée en un seul point par tout plan $\alpha =$ const.

A toute fonction z, nous faisons correspondre un nombre complexe

$$U(z) = V(x, y) + iW(x, y).$$

Continuité : $|z' - z| < \eta$ entraîne $|U' - U| < \varepsilon$ (mêmes propriétés que dans le champ réel).

15. *Définition d'une fonctionnelle d'ordre entier d'une fonction complexe.* — La fonction $U(z)$ sera dite *d'ordre entier n* si elle est continue et si, λ et μ étant deux nombres complexes, $U(\lambda z + \mu z')$ est un polynome de degré n par rapport à λ, μ quels que soient z et z'.

Si ce polynome est toujours homogène et de degré n, $U(z)$ sera dite *homogène d'ordre n*.

Par conséquent, une fonctionnelle d'ordre entier qui vérifie

$$U(\lambda z) = \lambda^n U(z)$$

est homogène d'ordre n.

Il est facile de voir que ces définitions sont équivalentes à celles de M. Fréchet, quand on se borne au champ réel.

16. *Décomposition d'une fonctionnelle d'ordre entier en fonctionnelles homogènes d'ordre entier* (d'après M. Fréchet). — Soit $U(z)$ une fonctionnelle d'ordre n, λ un nombre complexe :

$$U(\lambda z) = U_0 + \lambda U_1(z) + \ldots + \lambda^p U_p(z) + \ldots + \lambda^n U_n(z).$$

$U_p(z)$ est définie pour toute fonction z. Je dis qu'elle est d'ordre entier.

Donnons à λ les valeurs particulières $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$. Nous obtenons $(n+1)$ équations en $U_0, \ldots, U_n(z)$:

$$U(\lambda_i z) = U_0 + \lambda_i U_1(z) + \ldots + \lambda_i^n U_n(z).$$

Résolvons

$$U_p(z) = A_{p,1} U(\lambda_1 z) + \ldots + A_{p,n+1} U(\lambda_{n+1} z),$$

les $A_{p,k}$ ne dépendant que des λ_i. Cette expression montre que $U_p(z)$ est d'ordre entier.

D'autre part,

$$U[\lambda(\mu z)] = U_0 + \ldots + \lambda^p U_p(\mu z) + \ldots$$
$$= U[(\lambda\mu)z] = U_0 + \ldots + \lambda^p \mu^p U_p(z) + \ldots,$$

d'où

$$U_p(\mu z) = \mu^p U_p(z).$$

Donc : $U_p(z)$ *est homogène d'ordre* p, et l'on a, en faisant $\lambda = 1$,

$$U(z) = U_0 + U_1(z) + \ldots + U_n(z).$$

17. *Représentation d'une fonctionnelle homogène d'ordre* p. — La méthode employée dans le cas d'une fonctionnelle continue réelle s'applique sans modification essentielle. La ligne brisée plane qui représente une fonction $\zeta^{(n)}$ doit être remplacée par une ligne brisée gauche ayant ses sommets dans les plans

$$\alpha = 0, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{n}, \quad 1.$$

$\zeta^{(n)}$ est déterminée par ses sommets $\zeta_1 = x_1 + iy_1$, ζ_2, ..., ζ_n:

$$U_p(\zeta^{(n)}) = u_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n).$$

Je dis que u_n est un polynome de degré p.

Je remarque que, si $\zeta^{(n)}$ est déterminée par ζ_1, ..., ζ_n et $\zeta'^{(n)}$ par ζ'_1, ..., ζ'_n, il s'ensuit que $\lambda\zeta^{(n)} + \mu\zeta'^{(n)}$ est déterminée par

$$\lambda\zeta_1 + \mu\zeta'_1, \quad \ldots, \quad \lambda\zeta_n + \mu\zeta'_n.$$

Donc

$$U_p(\lambda\zeta^{(n)} + \mu\zeta'^{(n)}) = u_n(\lambda\zeta_1 + \mu\zeta'_1, \ldots, \lambda\zeta_n + \mu\zeta'_n).$$

Le premier membre est un polynome homogène de degré p en λ, μ. Donc aussi le second, c'est-à-dire que $u_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ est un polynome de degré n en ζ_1, ..., ζ_n.

Soit maintenant une fonction continue $z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$. Quand α décrit l'intervalle $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, z décrit dans son plan une courbe C contenue à l'intérieur d'un cercle Γ_1 de diamètre $\frac{\eta}{2}$ (*voir* n° **6**).

Soient z_1 une valeur de z intérieure à ce cercle, z_2 une valeur analogue quand α est compris dans $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, etc. On a, comme aux nos 6 et 7,

$$U_p(z) = \lim_{n=\infty} u_n(z_1, \ldots, z_n),$$

u_n étant un polynome de degré p, la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact de fonctions continues.

Si l'on reprend maintenant la fonction positive ou nulle $a_n(\alpha)$ du n° 8,

$$(\alpha) \qquad z_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} a_n(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha$$

est le centre de gravité de masses disposées sur C; il est bien intérieur à Γ_1. On choisit de même z_2.

Le polynome u_n devient finalement, en tenant compte de la relation (α),

$$u_n(z_1, \ldots, z_n) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)\, z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_p)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p.$$

On sait qu'on peut s'arranger de façon que K_n soit continue et symétrique. Donc

$$U_p(z) = \lim_{n=\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_p)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p.$$

18. *Cas particulier : fonctionnelle linéaire.* — C'est la fonctionnelle d'ordre 1. Elle est continue et vérifie

$$U(\lambda z + \mu z') = A\lambda + B\mu$$

Faisons $\lambda = 1$, $\mu = 0$:

$$U(z) = A,$$

et $\lambda = 0$, $\mu = 1$:

$$U(z) = B.$$

La condition devient

$$U(\lambda z + \mu z') = \lambda U(z) + \mu U(z')$$

et l'on a

$$U(z) = \lim_{n=\infty} (a_{n,1} z_1 + a_{n,2} z_2 + \ldots + a_{n,n} z_n) = \lim_{n=\infty} \int_0^1 K_n(\alpha)\, z(\alpha)\, d\alpha,$$

K_n étant continue. Cette dernière expression est celle qu'a trouvée pour la première fois M. Hadamard.

19. Théorème (d'après M. Fréchet). — *Lorsqu'une suite de fonctionnelles d'ordre entier p* : $U_1(z), \ldots, U_n(z), \ldots$ *tendent vers une fonctionnelle continue* $U(z)$, $U(z)$ *est d'ordre entier au plus égal à p.*

Formons

$$U(\lambda z + \lambda z') = f(\lambda, \lambda').$$

Il suffit de montrer que $f(\lambda, \lambda')$ est un polynome de degré $\leqq p$. Or

$$U_n(\lambda z + \lambda' z') = P_n(\lambda, \lambda') \qquad \text{(polynome de degré } p\text{)}.$$

Quand n augmente indéfiniment, $U_n(\lambda z + \lambda' z')$ tend vers

$$U(\lambda z + \lambda' z').$$

Donc $P_n(\lambda, \lambda')$ tend vers $f(\lambda, \lambda')$. Or il est facile de montrer que la limite d'un polynome de degré p ne peut être qu'un polynome de degré $\leqq p$. C. Q. F. D.

Remarques. — 1° Si les fonctionnelles $U_n(z)$ sont *homogènes* d'ordre p, il en est de même de $U(z)$.

2° Les définitions et propriétés précédentes s'étendent sans difficulté aux fonctionnelles, d'ordre entier, de plusieurs fonctions à un nombre quelconque de variables.

III. — Variation d'une fonctionnelle.

20. *Rappel de quelques définitions.* — Prenons par exemple la fonctionnelle continue réelle $U(z)$ de la fonction continue réelle $z(\alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$.

Considérons $U(z + \lambda t_1)$ (t_1 fonction analogue à z). Supposons que $\left[\frac{d}{d\lambda} U(z + \lambda t_1)\right]_{\lambda=0}$ existe quel que soit t_1. On l'appelle la *variation première* de U au point z : $\delta U(z, t_1)$. C'est une fonctionnelle de z et de t_1, qu'on suppose habituellement linéaire, en chaque point z, par rapport à t_1.

Si $\delta U(z, t_1)$ admet encore une variation première par rapport à z, soit $\delta^2 U(z, t_1, t_2)$ on dit que $U(z)$ admet au point z une *variation seconde*, qu'on suppose habituellement linéaire en t_2. En prenant $t_1 = t_2 = t$, elle devient $\delta^2 U(z, t)$, homogène et du second ordre en t. On a

$$\delta^2 U(z, t) = \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} U(z + \lambda t)\right]_{\lambda=0}.$$

On définit de même la variation d'ordre n : $\delta^n U(z, t)$ qu'on suppose habituellement homogène et d'ordre n en t. On a

$$\delta^n U(z, t) = \left[\frac{d^n}{d\lambda_n} U(z + \lambda t)\right]_{\lambda=0}.$$

Représentation d'une fonctionnelle réelle admettant des variations.

21. Soit la fonctionnelle réelle $U(z)$ de la fonction réelle $z(\alpha)$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1, A \leqq z \leqq B)$. Supposons que $U(z)$ admette en tout point z *une variation première* $\delta U(z, t)$, que nous noterons $V(z, t)$, continue par rapport à l'ensemble des variables z, t.

U et V sont alors uniformément continues quand z, t appartiennent à un ensemble compact.

Nous savons représenter $U(z)$ sous la forme

$$U(z) = \lim_{n=\infty} p_n(z_1, \ldots, z_n) = \lim_{n-\infty} U_n(z)$$

avec

$$U_n(z) = \sum_{r=0}^{r=r_n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{n,r}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_r)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_r.$$

Cette représentation peut être choisie telle que la variation de $U(z)$ *soit la limite de la différentielle totale de* p_n *et la limite de la variation d'*$U_n(z)$.

22. Reportons-nous n° 8. Soient z, t appartenant à l'ensemble compact E. Nous déterminons η tel que

$$|z' - z| < \eta, \qquad |t' - t| < \eta$$

entraîne, ε étant arbitraire,

$$|U(z') - U(z)| < \varepsilon, \qquad |V(z, t') - V(z, t)| < \varepsilon,$$

z, t appartenant à E, z', t' à Ω.

Nous déterminons ensuite N tel que, si $n > N$, l'oscillation de toute fonction z, t de E dans un intervalle $\left(\frac{K-1}{n}, \frac{K}{n}\right)$ soit $< \frac{n}{2}$. Considérons alors les fonctions $\zeta^{(n)}$ définies par $z_1, \ldots, z_n$, et $\tau^{(n)}$ par $t_1, \ldots, t_n$; z_K et t_K étant des valeurs de $z(\alpha)$, $t(\beta)$ quand α, β appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{K-1}{n}, \frac{K}{n}\right)$.

On a

$$|\zeta^{(n)}(\alpha) - z(\alpha)| < \eta, \qquad |\tau^{n}(\alpha) - t(\alpha)| < \eta,$$

d'où

$$|U(\zeta^{(n)}) - U(z)| < \varepsilon, \qquad |V(\zeta^{(n)}, \tau^{(n)}) - V(z, t)| < \varepsilon.$$

Évaluons $V(\zeta^{(n)}, \tau^{(n)})$. On a vu

$$U(\zeta^{(n)}) = u_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Alors, par définition,

$$V(\zeta^{(n)}, \tau^{(n)}) = \left[\frac{d}{d\lambda} u_n(z_1 + \lambda t_1, \ldots, z_n + \lambda t_n)\right]_{\lambda=0}.$$

Par hypothèse, cette dérivée existe quels que soient $z_1, \ldots, z_n$, $t_1, \ldots, t_n$ compris entre A et B. Elle est continue par rapport à l'ensemble de ces variables. Son expression est donc

$$V(\zeta^{(n)}, \tau^{(n)}) = (u_n)'_{z_1} t_1 + \ldots + (u_n)'_{z_n} t_n,$$

et l'on a, la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact E,

$$V(z, t) = \lim_{n=\infty} [(u_n)'_{z_1} t_1 + \ldots + (u_n)'_{z_n} t_n].$$

Remplaçons $u_n(z_1, \ldots, z_n)$ par un polynome $p_n(z_1, \ldots, z_n)$ tel que, $z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_n$ variant dans (A, B), on ait

$$|u_n - p_n| < \varepsilon_n, \qquad |du_n - dp_n| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, les mêmes conclusions subsistent.

23. Enfin on a vu qu'en posant

$$z_K = \int_{\frac{K-1}{n}}^{\frac{K}{n}} a_n(\alpha) z(\alpha)\, d\alpha,$$

on a

$$p_n(z_1, \ldots, z_n) \equiv U_n(z).$$

Par conséquent, en posant

$$t_K = \int_{\frac{K-1}{n}}^{\frac{K}{n}} a_n(\alpha) t(\alpha)\, d\alpha,$$

on a

$$(p_n)'_{z_1} t_1 + \ldots + (p_n)'_{z_n} t_n = \delta U_n(z, t).$$

En résumé,

$$U(z) = \lim_{n=\infty} p_n(z_1, \ldots, z_n) = \lim U_n(z),$$

$$\delta U(z, t) = \lim_{n=\infty} [(p_n)'_{z_1} t_1 + \ldots + (p_n)'_{z_n} t_n] = \lim \delta U_n(z, t),$$

avec

$$U_n(z) = K_{n,0} + \int_0^1 K_{n,1}(\alpha) z(\alpha) d\alpha + \ldots$$
$$+ \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{n,m_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}) z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_{m_n})\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m_n},$$

et, en supposant les $K_{n,i}$ symétriques,

$$\delta U_n(z, t) = \int_0^1 K_{n,1}(\alpha) t(\alpha) d\alpha$$
$$+ 2\int_0^1 \int_0^1 K_{n,2}(\alpha_1, \alpha_2) t(\alpha_1) z(\alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 + \ldots$$
$$+ m_n \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{n,m_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}) t(\alpha_1)$$
$$\times z(\alpha_2) \ldots z(\alpha_{m_n}) d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m_n}.$$

24. Théorème. — *Étant donnée la fonctionnelle réelle $U(z)$ continue par rapport à la fonction réelle*

$$z(\alpha), \qquad (0 \leq \alpha \leqq 1, \ A \leqq z \leqq B);$$

si cette fonctionnelle admet quel que soit z une variation première $\delta U(z, \delta z)$ $(A \leq \delta z \leq B)$ continue par rapport à l'ensemble des fonctions z, δz; cette variation première est linéaire en δz.

Car elle est continue par rapport à δz, et c'est la limite de dp_n et de $\delta U_n(z, \delta z)$ qui sont linéaires par rapport à δz.

25. *Remarque*. — Les résultats précédents s'étendent sans difficulté au cas où $U(z)$ admet des variations continues jusqu'à l'ordre p, ou indéfiniment. $\delta^2 U, \ldots, \delta^p U, \ldots$ sont d'ordres $2, \ldots, p, \ldots$ par rapport à δz, dans les mêmes conditions que précédemment.

Ils sont également faciles à étendre aux fonctionnelles de plusieurs fonctions à un nombre quelconque de variables.

26. *Variations d'une fonctionnelle d'ordre entier.* — C'est la somme des variations des fonctionnelles homogènes qui la composent. Il suffit d'étudier les variations d'une fonctionnelle homogène d'ordre entier.

a. Soit $U(z)$, homogène d'ordre n. Il est naturel d'étudier ses variations à partir de leur définition :

$$U(z+\lambda t) = U(z) + \ldots + \lambda^q A_q(z, t) + \ldots + \lambda^n A_n(z, t).$$

Comme

$$\delta^q U(z, t) = \left[\frac{d^q}{d\lambda^q} U(z+\lambda t)\right]_{\lambda=0},$$

on a

$$\delta^q U(z, t) = q!\, A_q(z, t).$$

M. Fréchet montre que $A_q(z, t)$, par suite $\delta^q U(z, t)$, *est homogène, d'ordre $n-q$ par rapport à z, d'ordre q par rapport à t.*

En particulier,

$$A_n(z, t) = U(t);$$

donc

$$\delta^n U(z, t) = n!\, U(t).$$

b. Nous pouvons donner une expression de ces variations en remarquant que les résultats obtenus dans le cas d'une fonctionnelle réelle s'étendent sans difficulté aux fonctionnelles complexes d'ordre entier. On a

$$\begin{aligned} U(z) &= \lim_{m=\infty} p_m(z_1, \ldots, z_m) \\ &= \lim_{m=\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n; \end{aligned}$$

p_m, polynome homogène de degré n ; K_m, fonction symétrique ; et

$$\delta^q U(z, t) = \lim d^q p_m = \lim \delta^q U_m(z)$$

avec

$$d^q p_m = \left(\frac{\partial p_m}{\partial z_1} t_1 + \ldots + \frac{\partial p_m}{\partial z_m} t_m\right)^{(q)} \quad \text{(puissance symbolique)},$$

$$\begin{aligned} \delta^q U_m(z) = q! \int_0^1 \ldots \int_0^1 & K_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, t(\alpha_1) \ldots t(\alpha_q) \\ & \times z(\alpha_{q+1}) \ldots z(\alpha_n)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \end{aligned}$$

27. Citons encore une propriété des fonctionnelles d'ordre entier, facile à démontrer.

D'une fonctionnelle *continue dans un domaine fermé* de fonctions continues, on sait seulement qu'elle est bornée et uniformément continue dans tout ensemble *compact* de fonctions continues.

Une fonctionnelle *d'ordre entier* est bornée et uniformément continue dans tout ensemble *borné* de fonctions continues.

IV. — Fonctionnelles analytiques.

A. — *Définition analogue à la définition de Weierstrass.*

28. *Définition* (d'après M. Fréchet). — Soit la fonction

$$z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1),$$

et la série

$$U(z) = U_0 + U_1(z) + \ldots + U_n(z) + \ldots, \tag{1}$$

$U_n(z)$ fonctionnelle homogène d'ordre n.

Soit $R(\alpha)$ une fonction supérieure à un nombre positif fixe. Désignons par D_R le domaine $|z(\alpha)| < |R\alpha)|$.

Si la série $U(z)$ *est uniformément convergente dans tout ensemble compact* E *extrait d'un domaine* D_{KR} (K constante quelconque entre 0 et 1), *nous dirons que* $U(z)$ *est une fonctionnelle de z holomorphe dans* D_R.

Conséquence : $U(z)$ est continue dans D_R. Elle est bornée et uniformément continue dans tout ensemble compact extrait du domaine fermé $|z| \leqq KR$.

29. Théorème. — *La série des modules*

$$|U_0| + |U_1(z)| + \ldots + |U_n(z)| + \ldots \tag{1'}$$

est uniformément convergente dans tout ensemble compact E *extrait du domaine* $|z| \leqq KR$.

a. Il suffit de montrer que ses termes sont inférieurs à ceux d'une série convergente, la même pour toute fonction z de E. Pour cela, considérons la série

$$U(\lambda z) = U_0 + \lambda U_1(z) + \ldots + \lambda^n U_n(z) + \ldots, \tag{2}$$

série entière en λ dont le rayon de convergence est déterminé par $|\lambda z| < R$. Or $|z| < KR$. Donc la série convergente *a fortiori* si $|\lambda| < \frac{1}{K}$. Le rayon de convergence est $\geqq \frac{1}{K} > 1$.

Nous voulons une limite supérieure de $|U_n(z)|$. Évaluons $U_n(z)$:

$$\frac{U(\lambda z)}{\lambda^{n+1}} = \ldots + \frac{U_n(z)}{\lambda} + \ldots.$$

Soit un cercle C du plan λ, de centre O, de rayon r, $1 < r < \frac{1}{K}$.

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{U(\lambda z)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda.$$

Admettons pour un instant que l'on ait $|U(\lambda z)| < M$, nombre fixe indépendant de la fonction z de E et du nombre λ sur C. Nous aurons alors

$$|U_n(z)| < \frac{M}{r^n},$$

terme général d'une série convergente.

b. Reste à montrer que l'on a bien $|U(\lambda z)| < M$. Il suffit de prouver que l'ensemble E_1 des fonctions λz est compact; cet ensemble étant extrait du domaine fermé $|z| \leqq rKR$, contenu dans D_R, U sera bornée dans cet ensemble E_1. C'est-à-dire qu'il suffit de prouver que de toute infinité de fonctions λz on peut extraire une suite tendant uniformément vers une fonction limite. D'abord les nombres λ, étant tous situés sur le cercle C, ont au moins un point limite λ'. On peut donc extraire la suite $\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n, \ldots$, les λ tendant vers λ'.

De plus, $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ appartenant à E, nous pouvons en extraire une suite tendant vers une fonction limite z', ou encore supposer que c'est $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ qui tendent vers z'. Alors $\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n, \ldots$ tendent uniformément vers z'. C. Q. F. D.

30. Théorème. — *$U(z)$ étant une fonctionnelle holomorphe de z dans le domaine D_R : $|z(\alpha)| < R(\alpha)$; λ et λ' étant deux nombres complexes; $U(\lambda z + \lambda' z')$ est une fonction de λ, λ' holomorphe pour $|\lambda z + \lambda' z'| < R(\alpha)$.*

Car on peut écrire, en se rappelant la définition d'une fonctionnelle homogène d'ordre entier :

$$U(\lambda z+\lambda' z')=U_0+p_1(\lambda,\lambda')+\ldots+p_n(\lambda,\lambda')+\ldots,$$

p_n, polynome homogène de degré n par rapport à λ, λ'. Cette série est uniformément convergente pour $|\lambda z+\lambda' z'|\leqq KR$ $(0<K<1)$, car l'ensemble $\lambda z+\lambda' z'$, z et z' étant fixes, est compact. D'après un théorème de M. Painlevé, $U(\lambda z+\lambda' z')$ est une fonction holomorphe de λ, λ', pour $|\lambda z+\lambda' z'|<R$.

31. Réciproque. — *Soit la fonctionnelle* $U(z)$ *continue pour* $|z|<R(\alpha)$ (domaine D_R); *si* $U(\lambda z+\lambda' z')$ (λ, λ', nombres complexes) *est holomorphe en* λ, λ' *pour* $|\lambda z+\lambda' z'|<R(\alpha)$, $U(z)$ *est fonctionnelle holomorphe de* $z(\alpha)$ *dans* D_R.

Prenons une fonction z telle que $|z|\leqq KR(\alpha)$, $(0<K<1)$. Par hypothèse, on peut écrire

$$U(\lambda z)=U_0+\lambda U_1(z)+\ldots+\lambda^n U_n(z)+\ldots. \tag{1'}$$

On voit comme précédemment (n° 29, a) que le rayon de convergence de cette série en λ est $\geqq \frac{1}{K}>1$. Pour $\lambda=1$,

$$U(z)=U_0+U_1(z)+\ldots+U_n(z)+\ldots, \tag{1}$$

puis

$$U_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{U(\lambda z)\,d\lambda}{\lambda^{n+1}},$$

expression qui montre que $U_n(z)$ est *continue par rapport à* z.

De plus, si z appartient à un ensemble compact E extrait du domaine fermé $|z|\leqq KR$, on a comme précédemment (n° 29), $|U(\lambda z)|<M$, d'où $|U_n(z)<\frac{M}{r^n}$, terme général d'une série convergente, ce qui prouve que la série

$$|U_0|+|U_1(z)|+\ldots+|U_n(z)|+\ldots$$

est uniformément convergente dans E.

Enfin

$$\begin{aligned}U[\rho(\lambda z+\lambda' z')]&=\Sigma\rho^n U_n(\lambda z+\lambda' z')\\&=\text{fonction holomorphe de } \rho\lambda,\ \rho\lambda',\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$= P_0 + \rho P_1(\lambda, \lambda') + \ldots + \rho^n P_n(\lambda, \lambda') + \ldots,$$

P_n, polynome homogène de degré n; d'où

$$U_n(\lambda z + \lambda' z') = P_n(\lambda, \lambda').$$

U_n est donc homogène d'ordre n.

32. *Variations d'une fonctionnelle holomorphe.* — Soit

$$U(z) = U_0 + U_1(z) + \ldots + U_n(z) + \ldots,$$

holomorphe dans D_R, $[|z| < R(\alpha)]$,

$$U(\lambda z + \lambda' t) = U_0 + U_1(\lambda z + \lambda' t) + \ldots + U_n(\lambda z + \lambda' t) + \ldots,$$

série entière en λ, λ', convergente pour $|\lambda z + \lambda' z'| = R$, en particulier pour $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$, si l'on suppose $|z| \leqq KR$. Les séries dérivées par rapport à λ' convergent aussi pour $|\lambda z + \lambda' z'| < R$. Si nous y faisons $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$, nous obtenons par définition :

$$\begin{aligned} \delta U(z, t) &= \delta U_1(z, t) + \ldots + \delta U_n(z, t) + \ldots, \\ \delta^2 U(z, t) &= \delta^2 U_2(z, t) + \ldots + \delta^2 U_n(z, t) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta^n U_n(z, t) &= \delta^n U_n(z, t) + \ldots. \end{aligned}$$

L'intégrale de Cauchy permet de montrer que les séries précédentes sont uniformément convergentes quand z appartient à un ensemble compact extrait de $|z| \leqq KR$, t à un ensemble compact quelconque.

Les variations d'une fonctionnelle $U(z)$ holomorphe dans $|z| < \mu$ sont donc des fonctionnelles holomorphes de z, t dans $|z| < \mu$.

Leurs expressions montrent de plus que $\delta U(z, t)$ est linéaire par rapport à t, $\delta_n U(z, t)$ homogène et d'ordre n par rapport à t.

Enfin, faisons $z = 0$, nous obtenons (*voir* n° 26, a)

$$\begin{aligned} U(0) &= U_0, \\ \delta U(0, t) &= \delta U_1(0, t) = U_1(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta^n U(0, t) &= \delta^n U_n(0, t) = n!\, U_n(t), \end{aligned}$$

d'où la formule analogue à celle de Maclaurin

$$U(z) = U(o) + \delta U(o, z) + \ldots + \frac{1}{n!}\delta^n U(o, z) + \ldots.$$

B. — *Définition analogue à la définition de Cauchy.*

33. Soit la fonction continue

$$z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

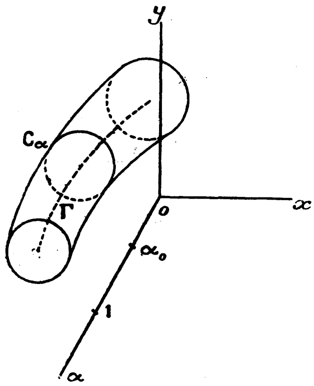
Elle est représentée par une courbe continue Γ, tracée entre les plans $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, rencontrée en un seul point par tout plan $\alpha =$ const.

Dans chaque plan $\alpha = \alpha_0$, $(0 \leqq \alpha_0 \leqq 1)$, considérons un contour C_α. La condition imposée à ces contours C_α est qu'il existe une courbe Γ perçant le plan de chaque contour en un point intérieur à ce contour, la plus grande distance de ce point au contour étant supérieur à un nombre positif fixe.

Cette condition est réalisée sur la figure où les contours C_α forment une sorte de tube.

S'il existe une courbe Γ vérifiant cette condition, il en existe

Fig. 2.



évidemment une infinité. Nous dirons que ces courbes Γ, et les fonctions z qu'elles représentent, sont intérieures aux contours C_α.

34. *Définition.* — Soit la fonctionnelle $U(z)$ continue dans le champ D des fonctions z intérieures aux C_α. *Si en tout point z*

de ce champ elle admet une variation première $\delta U(z, t)$, *nous dirons qu'elle est holomorphe dans* D.

35. *Lien entre les deux définitions :*

Théorème. — Soit z_0 une fonction de D, $R(\alpha)$ la plus grande fonction positive telle que, si $|z(\alpha) - z_0(\alpha)| < R(\alpha)$, $z(\alpha)$ appartienne à D. *Si* $U(z)$ *est holomorphe dans* D (*deuxième définition*), *c'est une fonction holomorphe* (*première définition*) *de* $z - z_0$ *dans* $|z - z_0| < R(\alpha)$.

Au moyen du changement de variable $z - z_0 = z'$, nous pouvons nous ramener au cas où $z_0 = 0$, c'est-à-dire où Γ_0 coïncide avec $O\alpha$. Le domaine $|z - z_0| < R(\alpha)$ devenu $|z| < R(\alpha)$ est alors limité par la plus grande surface de révolution autour de $O\alpha$ intérieure aux contours C_α.

Formons $U(\lambda z + \lambda' z')$. C'est une fonction de λ, λ' qui admet des dérivées par rapport à λ, λ', puisque $U(z)$ admet une variation première. C'est donc une fonction analytique de λ, λ', *qui est holomorphe quand* $|\lambda z + \lambda z'| < R$. Comme $U(z)$ est *continue*, cela suffit pour démontrer qu'elle est holomorphe (première définition) en z pour $|z| < R(\alpha)$.

Le Mémoire précédent est suivi d'une feuille contenant les Notes suivantes :

« Si $U(z)$ est holomorphe dans Γ, $U(\lambda z + \mu t)$ est holomorphe en λ, μ.

» Une série uniformément convergente de fonctions U_n holomorphes dans Γ est holomorphe dans Γ.

» Théorèmes de Poincaré et Volterra; du prolongement.

» Théorème de Mittag-Leffler. »

En se reportant au Mémoire sur les fonctions d'une infinité de variables indépendantes, déjà publié dans le présent Bulletin, on voit à quels développements ces indications correspondaient dans la pensée de l'auteur.

Deuxième Mémoire.

Sur la représentation des fonctionnelles continues (1).

1. Les fonctions $z(\alpha)$ dont il sera question sont ici des fonctions

(1) Un résumé de ce Mémoire a été présenté à la R. Accademia dei Lincei le 21 décembre 1913.

réelles continues de la variable réelle α ($0 \leqq \alpha \leqq 1$). Nous désignerons par D l'ensemble de ces fonctions telles que $A \leqq z \leqq B$, par M le plus grand des nombres $|A|$, $|B|$.

Nous désignerons par $V(z)$, avec ou sans indice, des expressions de la forme

$$(a)\quad V(z) = K_0 + \sum_{p}^{1,\ldots,m} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) z(\alpha_1) \ldots z(\alpha_p)\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p,$$

K_0 étant une constante, K_p une fonction continue de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Soit $U(z)$ *une fonctionnelle définie et continue dans* D. *On peut déterminer une suite d'expressions* $V_n(z)$ *telles que*

$$(1)\qquad U(z) = \lim_{n=\infty} V_n(z),$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact extrait de D.

Ce théorème est analogue au théorème de Weierstrass sur la représentation d'une fonction continue comme limite d'une suite de polynomes. Il a été démontré par M. Fréchet (*Comptes rendus*, 18 janvier 1909, 1er février 1909; *Annales de l'École Normale supérieure*, mai 1910). J'en ai indiqué une démonstration plus élémentaire (*Comptes rendus*, 4 août 1913) (1).

Il peut être intéressant de posséder une représentation (1), la convergence étant uniforme dans tout le domaine D. Le but du présent travail est de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire $U(z)$ pour que ce résultat puisse être obtenu.

Propriétés des expressions $V(z)$:

2. Théorème I. — *Toute fonctionnelle* $V(z)$ *est uniformément continue dans le domaine* D.

Il suffit de démontrer la propriété pour un des termes de $V(z)$. Je dis qu'étant donné ε positif, je puis déterminer η tel que

$$|z(\alpha) - t(\alpha)| < \eta$$

(1) Et premier Mémoire ci-dessus, n° 8.

entraîne

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 K_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)[z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_p) - t(\alpha_1)\ldots t(\alpha_p)]\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_p\right| < \varepsilon.$$

Soit K un nombre supérieur à $|K_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)|$. Il suffit que l'on ait

$$K \times \max[z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_p) - t(\alpha_1)\ldots t(\alpha_p)] < \varepsilon.$$

Or le multiplicateur de K s'écrit

$$\begin{aligned}
&z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_p) - z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_{p-1})\,t(\alpha_p)\\
&+ z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_{p-1})\,t(\alpha_p) - z(\alpha_1)\ldots z(\alpha_{p-2})\,t(\alpha_{p-1})\,t(\alpha_p)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ z(\alpha_1)\,t(\alpha_2)\ldots t(\alpha_p) \quad - t(\alpha_1)\ldots t(\alpha_p).
\end{aligned}$$

Le module de chaque ligne est plus petit que $M^{p-1}\eta$, Il y en a p. Donc il suffit que l'on ait

$$\eta < \frac{\varepsilon}{K_p M^{p-1}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Théorème II. — *Quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, on peut diviser l'intervalle* (0, 1) *dans lequel sont définies les fonctions $z(\alpha)$, en un nombre fini d'intervalles tels que, si $z(\alpha)$, $t(\alpha)$ sont deux fonctions du domaine D ayant même valeur moyenne dans chacun de ces intervalles, on ait*

$$|V(z) - V(t)| < \varepsilon.$$

Les intervalles que nous déterminerons ici seront égaux. Nous démontrerons que l'inégalité précédente est vérifiée dès que le nombre q des intervalles est plus grand qu'un certain nombre q_1. Il suffit de démontrer cette propriété pour un terme de $V(z)$, par exemple pour l'intégrale double. Le nombre des intervalles étant q, cette intégrale s'écrit

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^1 K_2(\alpha_1, \alpha_2)\,z(\alpha_1)\,z(\alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2\\
&= \sum_{r,s}^{1,\ldots,q} \int_{\frac{r-1}{q}}^{\frac{r}{q}} d\alpha_1 \int_{\frac{s-1}{q}}^{\frac{s}{q}} K_2(\alpha_1, \alpha_2)\,z(\alpha_1)\,z(\alpha_2)\,d\alpha_2\\
&= \sum_{r,s}^{1,\ldots,q} K_2\left(\frac{r}{q}, \frac{s}{q}\right) \int_{\frac{r-1}{q}}^{\frac{r}{q}} z(\alpha_1)\,d\alpha_1 \int_{\frac{s-1}{q}}^{\frac{s}{q}} z(\alpha_2)\,d\alpha_2 + h.
\end{aligned}$$

Désignons par $\Lambda_{r,s}$, $\lambda_{r,s}$ les bornes de $K_2(\alpha_1, \alpha_2)$ dans le carré

$$\left(\frac{r-1}{q}, \frac{r}{q}\right)\left(\frac{s-1}{q}, \frac{s}{q}\right).$$

La différence entre deux termes correspondants des deux dernières expressions est en module $< \frac{M^2}{q^2}(\Lambda_{r,s} - \lambda_{r,s})$. Donc

$$|h| < \frac{M^2}{q^2} \sum_{r,s}^{1,\ldots,q} (\Lambda_{r,s} - \lambda_{r,s}).$$

En remplaçant $z(\alpha)$ par $t(\alpha)$, h est remplacé par un nombre k vérifiant la même inégalité. Si $z(\alpha)$ et $t(\alpha)$ ont même valeur moyenne dans chaque intervalle, il vient

$$\int_0^1 \int_0^1 K_2(\alpha_1, \alpha_2)[z(\alpha_1)z(\alpha_2) - t(\alpha_1)t(\alpha_2)]\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = h - k.$$

Or

$$|h - k| < 2M^2 \sum_{r,s}^{1,\ldots,q} \frac{(\Lambda_{r,s} - \lambda_{r,s})}{q^2}.$$

La fonction $K_2(\alpha_1, \alpha_2)$ étant continue, cette quantité tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$, c'est-à-dire qu'on peut trouver q_1 tel que $q > q_1$ entraîne $|h - k| < \varepsilon$. C. Q. F. D.

4. *Application aux fonctionnelles continues.* — Les deux résultats précédemment acquis nous mettent à même de démontrer les suivants :

Théorème III. — *Si la fonctionnelle* $U(z)$ *définie dans* D *est telle que l'on ait*

$$U(z) = \lim_{n=\infty} V_n(z),$$

la convergence étant uniforme dans D :

1° $U(z)$ *est uniformément continue dans* D.

2° *Quel que soit le nombre* ε *positif, on peut décomposer l'intervalle* (0, 1) *en un nombre fini d'intervalles tels que, si* $z(\alpha)$, $t(\alpha)$ *sont deux fonctions du domaine* D *ayant même valeur* *moyenne dans chacun de ces intervalles,* on ait

$$|U(z) - U(t)| < \varepsilon.$$

1° Étant donné ε, il faut montrer qu'on peut trouver η tel que $|z - t| < \eta$ entraîne $|U(z) - U(t)| < \varepsilon$.

Par hypothèse, on peut déterminer n tel que l'on ait, quels que soient z, t,

$$|U(z) - V_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |U(t) - V_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et d'après le théorème I on peut déterminer η tel que $|z - t| < \eta$ entraîne

$$|V_n(z) - V_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors on aura

$$|U(z) - U(t)| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Déterminons n par la même condition que précédemment. D'après le théorème II nous pouvons effectuer une division de l'intervalle $(0, 1)$ telle que les fonctions z, t de l'énoncé vérifient

$$|V_n(z) - V_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors on aura

$$|U(z) - U(t)| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. Réciproque du théorème III. — *Si une fonctionnelle* $U(z)$ *définie dans* D *vérifie les conditions* 1° *et* 2° *du théorème III, on peut trouver une suite d'expressions* $V_n(z)$ *telles que*

$$U(z) = \lim_{n=\infty} V_n(z),$$

la convergence étant uniforme dans D.

Nous nous proposons, étant donné ε positif, de déterminer une expression $V(z)$ telle que

$$|U(z) - V(z)| < \varepsilon.$$

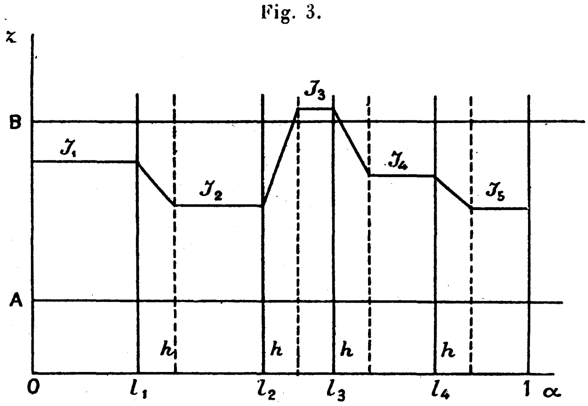
a. Par hypothèse, nous pouvons diviser l'intervalle $(0, 1)$ en intervalles $I_1, \ldots, I_q$, d'étendues $\delta_1, \ldots, \delta_q$, séparés par les points $l_1, \ldots, l_{q-1}$, tels que, si z et t ont mêmes valeurs moyennes dans chacun d'eux, nous ayons

$$|U(z) - U(t)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

b. Les fonctions $\mathfrak{z}(\alpha)$. — Appelons δ le plus petit des nombres $\delta_1, \ldots, \delta_q$, et h un nombre plus petit que δ. Une fonction $\mathfrak{z}(\alpha)$ est continue, constante dans les intervalles $(0, l_1)$, $(l_1 + h, l_2), \ldots, (l_{q-1} + h, 1)$, dans lesquels elle est égale à $\mathfrak{z}_1, \ldots,$ $\mathfrak{z}_q$; elle est linéaire dans les intervalles restants. On n'a pas forcément $A \leqq \mathfrak{z}_K \leqq B$.

Étant donnée une fonction $z(\alpha)$ de D, il lui correspond une fonction $\mathfrak{z}(\alpha)$ et une seule ayant mêmes valeurs moyennes qu'elle

Fig. 3.



dans les intervalles I_K. Nous dirons que z et $\mathfrak{z}$ sont *correspondantes*. Si nous appelons z_K la valeur moyenne de $z(\alpha)$ dans I_K, les I_K sont déterminés par les équations

$$\mathfrak{z} = z_1,$$
$$\left(1 - \frac{h}{2\delta_K}\right)\mathfrak{z}_K + \frac{h}{2\delta_K}\mathfrak{z}_{K-1} = z_K.$$

Pour $K > 1$, les $\mathfrak{z}_K$ ainsi calculés ne seront pas toujours compris entre A et B. Quand $\mathfrak{z}_K$ varie de A à B, le premier membre de l'équation précédente décrit le segment

$$A + \frac{h}{2\delta_K}(\mathfrak{z}_{K-1} - A), \qquad B - \frac{h}{2\delta_K}(B - \mathfrak{z}_{K-1});$$

c'est-à-dire que, quel que soit $\mathfrak{z}_{K-1}$, il décrit le segment

$$A + \frac{h}{2\delta_K}(B - A), \qquad B - \frac{h}{2\delta_K}(B - A).$$

Posons $\frac{h}{2\delta}(B - A) = \rho$. Nous voyons que si l'on a

$$A + \rho < z_K < B - \rho,$$

les $\mathfrak{z}_K$ seront compris entre A à B, c'est-à-dire que $\mathfrak{z}(\alpha)$ fera partie du domaine D.

Inversement, quand les z_K varient de A à B, les $\mathfrak{z}_K$ varient entre $A - \rho_1$ et $B + \rho_1$, avec $\rho_1 = \frac{h}{2(\delta - h)}(B - A)$.

c. Comparaison entre $U(z)$ *et* $U(\mathfrak{z})$. — Si l'on a $A \leqq \mathfrak{z}(\alpha) \leqq B$, $U(\mathfrak{z})$ est définie. C'est une fonction continue $u(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q)$ définie pour $A \leqq \mathfrak{z}_K \leqq B$.

Si l'on n'a pas $A \leqq \mathfrak{z}(\alpha) \leqq B$, nous remplacerons par B les nombres $\mathfrak{z}_K$ plus grands que B, par A ceux plus petits que A; soient $\mathfrak{z}'_1, \ldots, \mathfrak{z}'_q$ les quantités obtenues. Nous poserons

$$U(\mathfrak{z}) = u(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q) = u(\mathfrak{z}'_1, \ldots, \mathfrak{z}'_q).$$

La fonction u est ainsi définie et continue quels que soient les $\mathfrak{z}_K$.

z et $\mathfrak{z}$ étant deux fonctions correspondantes, cherchons une limite supérieure de $|U(z) - U(\mathfrak{z})|$.

Si $\mathfrak{z}$ appartient à D, on a, d'après a,

$$|U(z) - U(\mathfrak{z})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Supposons que $\mathfrak{z}$ n'appartienne pas à D. $U(\mathfrak{z})$ est définie par $U(\mathfrak{z}) = U(\mathfrak{z}')$. Nous allons construire une fonction z' voisine de z et correspondant à $\mathfrak{z}'$.

Si dans l'intervalle I_K on a $A \leqq \mathfrak{z}_K \leqq B$, nous prendrons $z' = z$ dans I_K.

Supposons que dans un autre intervalle I_K on ait $\mathfrak{z}_K > B$. Nous retrancherons à z dans I_K une fonction continue nulle aux limites de I_K et dont l'intégrale soit $(\mathfrak{z}_K - B)\left(\delta_K - \frac{h}{2}\right)$. La fonction z' obtenue conduira bien à $\mathfrak{z}'_K = B$ dans I_K; mais il faut la déterminer de manière qu'elle soit comprise entre A et B.

Considérons l'ensemble E des valeurs de $z(\alpha)$, α étant dans I_K, qui sont $> \frac{B+A}{2}$. Il se compose d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intervalles; soit m leur somme. Cherchons-en une limite inférieure μ. L'intégrale de $z(\alpha)$ dans I_K étant au moins égale à $B(\delta_K - h) + \frac{B+A}{2}h$, nous avons

$$\mu B + (\delta_K - \mu)\frac{B+A}{2} = B(\delta_K - h) + \frac{B+A}{2}h,$$
$$\mu = \delta_K - h.$$

Jusqu'ici h est resté arbitraire, à part la condition $h < \delta$. Nous avons le droit de l'astreindre à la condition $h < \frac{\delta}{2}$, d'où $m > \mu > \frac{\delta_K}{2}$.

Supposons que pour obtenir z' nous retranchions à z dans l'ensemble E une constante C. Cette constante C serait donnée par

$$Cm = (\mathfrak{J}_K - B)\left(\delta_K - \frac{h}{2}\right),$$

d'où

$$C < \frac{(\mathfrak{J}_K - B)\left(\delta_K - \frac{h}{2}\right)}{\mu} < \frac{\frac{h}{2\delta_K}(B-A)\delta_K}{\frac{1}{2}\delta_K} < \frac{B-A}{2}.$$

La fonction z' obtenue serait comprise entre A et B et son écart avec z serait inférieur à $\frac{h}{\delta_K}(B-A)$.

Mais cette fonction ne serait pas continue. Au lieu de retrancher la constante C dans l'ensemble E, nous pouvons retrancher dans un nombre fini d'intervalles de E une fonction s'annulant aux extrémités de ces intervalles, ayant même intégrale que la constante C (soit Cm), et plus petite que $\frac{h}{\delta_K}(B-A)$. La fonction z' remplira les conditions demandées.

On opérera de même pour les intervalles dans lesquels $\mathfrak{J}_K < A$.

La fonctionnelle $U(z)$ étant uniformément continue dans D, nous pouvons déterminer un nombre ρ' tel que $|z - z'| < \rho'$ entraîne $|U(z) - U(z')| < \frac{\varepsilon}{4}$. Or cette condition sera satisfaite pour les fonctions z, z' précédentes si l'on a choisi h inférieur à $\frac{\delta\rho'}{B-A}$.

Comme

$$|U(z') - U(\mathfrak{z}')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad U(\mathfrak{z}') = U(\mathfrak{z}),$$

on a

$$|U(z) - U(\mathfrak{z})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour toute fonctionnelle de D.

d. Nous pouvons déterminer un polynome $p(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q)$ tel que l'on ait dans le domaine des variables

$$|u(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q) - p(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors

$$(3) \qquad |U(z) - p(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q)| < \frac{3\varepsilon'}{4}.$$

Les équations (2) nous donnent les $\mathfrak{z}_K$ qui sont des fonctions linéaires des z_K. Si nous remplaçons ensuite z_K par

$$\int_{l_{K-1}}^{l_K} z(\alpha)\, d\alpha,$$

le polynome $p(\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_q)$ devient une expression de la forme $V(z)$, mais dans laquelle les fonctions K_p ne seraient pas continues.

e. Pour éviter cet inconvénient, remarquons que nous pouvons déterminer η tel que, les $\mathfrak{z}_K$ appartenant au domaine $A - \rho_1, B + \rho_1$, et l'inégalité $|\mathfrak{z}_K - \mathfrak{z}'_K| < \eta$ étant vérifiée, on ait $|p(\mathfrak{z}_K) - p(\mathfrak{z}'_K)| < \frac{\varepsilon}{4}$. On peut déterminer η' tel que $|z_K - z'_K| < \eta'$ entraîne $|\mathfrak{z}_K - \mathfrak{z}'_K| < \eta$. Prenons alors

$$z'_K = \int_{l_{K-1}}^{l_K} a(\alpha) z(\alpha)\, d\alpha,$$

$a(\alpha)$ étant une fonction continue, nulle aux points l_K (ce qui rendra les fonctions K_p continues), égale à 1 dans les intervalles $(0, l_1 - h'), \ldots, (l_{K-1} + h', l_K - h'), \ldots, (l_{q-1} + h', 1)$, linéaire dans les intervalles restants. On a

$$|z_K - z'_K| < 2h'M.$$

Il suffit de prendre h' inférieur à $\frac{\eta'}{2M}$. Alors p devient une expression $V(z)$, et

$$|U(z) - V(z)| < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. *Remarques.* — I. L'expression (3) montre que $U(z)$ est limite d'un polynome à q variables (les valeurs des variables sont connues quand z est connu), la convergence étant uniforme dans D.

II. $U(z)$ est bornée dans D, comme l'expression $V(z)$ que nous venons de définir.

III. Au n° 5, c, si nous n'avions pas utilisé l'hypothèse de la continuité uniforme, nous serions arrivés à ce résultat : *Pour que la convergence soit uniforme dans* $A+\rho \leqq z \leqq B-\rho$, *quel que soit* ρ, *il faut et il suffit que la condition* 2° *soit seule réalisée.*

TROISIÈME MÉMOIRE.

Représentation d'une fonctionnelle continue.

Nous ne donnerons que quelques extraits de ce Mémoire, daté de janvier 1914 et dont tous les résultats ont été exposés dans une Note présentée le 1[er] mars 1914 à la R. Accademia dei Lincei. Il a pour objet l'extension des théories exposées dans les deux premiers Mémoires au cas de fonctionnelles dépendant de fonctions $x(\alpha)$ définies, non seulement dans un intervalle fini, mais quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Comme il ne s'agit que d'une simple extension, et que toutes les circonstances nouvelles ont été indiquées nettement dans la Note du 1[er] mars 1914, nous avons pensé que la publication complète de ce Mémoire n'ajouterait pas grand'chose à ce qui est déjà publié, et, tenant compte en outre des difficultés actuelles d'impression, nous y avons renoncé. Rappelons que, la publication terminée, le Mémoire sera déposé à la Bibliothèque de l'Académie des Sciences.

Le point essentiel, sur lequel repose la généralisation, est de définir dans quel cas une suite de fonctions tend vers une limite. Nous reproduisons les considérations par lesquelles Gateaux justifie sa définition.

(Paul LÉVY.)

Définition de la limite d'une suite de fonctions. — Pour définir la continuité d'une fonctionnelle $U|[z]|$, il faut d'abord définir à quelles conditions une suite de fonctions $z_1, \ldots, z_n$ a pour limite une fonction z.

On peut songer d'abord à donner cette définition en considérant le maximum de $|z_n(\alpha) - z(\alpha)|$, qu'on peut appeler l'*écart* des deux fonctions z et z_n, et dire que z_n a pour limite z si cet écart tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, autrement dit si z_n tend uniformément vers z dans $(-\infty, +\infty)$.

Si nous adoptons cette définition, la méthode que nous avons employée pour former une représentation de U|[z]| dans le cas où $z(\alpha)$ est défini dans un intervalle fini, ne s'applique pas; ou du moins elle conduit à considérer des fonctions d'une infinité de variables.

Cette méthode repose en effet sur le fait suivant : de l'ensemble des fonctions $z(\alpha)$, on peut extraire les familles $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n, \ldots$, dont l'ensemble forme la famille $\mathcal{F}$; la famille $\mathcal{F}_n$ étant formée de fonctions dépendant de n paramètres, et la famille $\mathcal{F}$ est telle que toute fonction $z(\alpha)$ est limite d'une suite extraite de $\mathcal{F}$. (Les fonctions composant nos familles $\mathcal{F}_n$ étaient représentées par des lignes brisées, mais on aurait pu en choisir d'autres.)

Avec la définition de la limite proposée plus haut, nous serions conduits à considérer des familles $\mathcal{F}_n$ dépendant d'une infinité de paramètres. Il n'en sera pas ainsi si nous adoptons la définition suivante :

La suite de fonctions $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ sera dite avoir pour limite la fonction z si $z_n(\alpha)$ tend vers $z(\alpha)$, la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

La condition que U|[z]| soit continue est plus restrictive si l'on adopte la seconde définition de la limite que si l'on adopte la première; car elle oblige U|[z_1]| à tendre uniformément vers U|[z_2]|, non seulement quand z_1 tend uniformément vers z_2, mais encore quand z_1 tend vers z_2 uniformément dans tout intervalle fini.

Quatrième Mémoire.

Représentation d'une fonctionnelle continue satisfaisant à la condition du cycle fermé.

Nous mentionnons simplement sous ce titre quelques fragments, datés d'avril 1914, et se rattachant à une Note sur le même sujet présentée le 5 avril 1914 à la R. Accademia dei Lincei.

Deux d'entre eux se rattachent à un théorème annoncé au n° 9 de cette Note; ce sont deux rédactions, l'une très concise, l'autre plus développée, de sa démonstration. Nous ne les publierons pas, pour des raisons identiques à celles indiquées à propos du troisième Mémoire. Un troisième fragment, donnant la démonstration d'un théorème énoncé au n° 3 de la même Note, ne diffère que par la forme de la démonstration de M. Volterra.

CINQUIÈME MÉMOIRE.

Fonctionnelles d'ordre entier d'approximation.

Ce Mémoire est daté de février 1914; un résumé en a été présenté le 15 mars 1914 à la R. Accademia dei Lincei. Nous ne publierons que le début de ce Mémoire, le résumé du reste étant suffisamment complet pour nous dispenser d'une nouvelle publication.

Préliminaires. — Désignons par Ω l'ensemble des fonctions réelles $z(\alpha)$ de la variable réelle α, définies et continues dans l'intervalle fermé $(0, 1)$ et telles que $0 \leqq z(\alpha) \leqq 1$.

Soit $U|[z]|$ une fonctionnelle réelle bornée, $U|[z]| < M$, définie dans cet ensemble. Nous nous proposons de déterminer une fonctionnelle d'ordre n d'approximation de $U|[z]|$, c'est-à-dire une fonctionnelle $V|[z]|$ d'ordre n telle que, si V' est une autre fonctionnelle d'ordre n, on ait

$$\max. |U|[z]| - V|[z]|| \leqq \max. |U|[z]| - V'|[z]||.$$

On voit immédiatement qu'on peut se borner aux fonctionnelles d'ordre n réelles; c'est ce que nous ferons.

LEMME. — *Tout ensemble de fonctionnelles d'ordre n bornées dans leur ensemble dans Ω est compact, c'est-à-dire que de toute infinité d'entre elles on peut tirer une suite tendant vers une limite* (uniformément ou non).

Nous allons démontrer que ces fonctionnelles sont également continues. Comme elles sont bornées dans leur ensemble, il en résultera qu'elles forment un ensemble compact (FRÉCHET, *Thèse* n° 19).

Soit $V|[z]|$ une fonctionnelle de l'ensemble; $V|[z]| < P$ dans Ω. Je cherche d'abord une limite supérieure de V quand $-1 \leqq z \leqq 2$:

$$V|[\lambda z]| = V_0 + \lambda V_1|[z]| + \ldots + \lambda^n V_n|[z]|.$$

Quand $0 \leqq z \leqq 1$, on a $|V_p| < Q$, Q ne dépendant que de P et n (*voir* E. BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 84). Donc

$$|V|[\lambda z]|| < Q[1 + |\lambda| + \ldots + |\lambda^n|],$$

et, quand $|\lambda| < 2$, le premier membre est inférieur *a fortiori* à

$$Q(2^{n+1}-1) = Q_1(P, n).$$

Donc, pour $-2 \leqq z \leqq 2$,

$$|V|[z]|| < Q_1(P, n)$$

Ceci posé, je me donne ε, et je me propose de déterminer η ne dépendant que de ε, P, n et tel que, si $|t| < \eta$, et si z appartient à Ω, on ait

$$\Delta = |V|[z+t]| - V|[z]|| < \varepsilon.$$

Je puis poser $t(\alpha) = \mu\theta(\alpha)$, $|\theta(\alpha)|$ ayant exactement 1 comme borne supérieure, et μ étant compris dans l'intervalle $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} V|[z+t]| &= V|[z+\mu\theta]| \\ &= V|[z]| + \mu A_1|[z, \theta]| + \ldots + \mu^n A_n|[z, \theta]|. \end{aligned}$$

Or $|z+t| \leqq 2$, donc

$$V|[z+t]| < Q_1(P, n).$$

Donc, de même que précédemment,

$$|A_p|[z, t]|| < R(P, n)$$

et

$$\Delta < R[\mu + \ldots + \mu^n] < R\frac{\mu}{1-\mu}.$$

Nous pouvons trouver $\eta(\varepsilon, P, n)$ tel que $\mu < \eta$ entraîne

$$R\frac{\mu}{1-\mu} < \varepsilon.$$

Alors $|t| < \eta$ entraîne $\mu < \eta$ et par suite $\Delta < \varepsilon$. C. Q. F. D.

Notes diverses.

En dehors des Mémoires presque complètement rédigés dont nous venons de publier les parties essentielles, il y a dans les papiers de R. Gateaux de nombreuses Notes à peine rédigées, ou des calculs sans explication, prouvant que leur auteur avait réfléchi à d'autres questions sans avoir pu rédiger les résultats obtenus par lui. Ces Notes portent notamment sur les fonctionnelles linéaires, sur la justification de la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel, sur l'intégration dans le domaine fonctionnel complexe, sur les fonctionnelles méromorphes.

Les deux premières Notes contenaient quelques passages assez complètement rédigés pour être facilement compréhensibles. Nous terminons la publication des papiers de Gateaux par un résumé de la première Note et des extraits de la seconde.

Sur les fonctionnelles linéaires.

Le but de cette Note est de démontrer que, *si l'on a*

$$U|[z]| = \lim_{n=\infty} \int_0^1 K_n(\alpha) z(\alpha)\, d\alpha,$$

$K_n(\alpha)$ *étant continue, et la convergence étant uniforme dans le domaine* $A \leqq z \leqq B$, *on a*

$$U|[z]| = \int_0^1 K(\alpha) z(\alpha)\, d\alpha,$$

$K(\alpha)$ *étant une fonction sommable, l'intégrale étant prise au sens de M. Lebesgue.*

On démontre d'abord que les expressions

$$\int_0^1 | K_n(\alpha) |\, d\alpha$$

sont bornées dans leur ensemble, et que, ε étant donné, on a, pour n assez grand,

$$\int_0^1 | K_n - K_{n+p} |\, d\alpha < \varepsilon.$$

Prenant ensuite pour $z(\beta)$ une fonction égale à $\alpha - \beta$ pour $\beta < \alpha$ et à o pour $\beta > \alpha$, l'intégrale

$$f_n(\alpha) = \int_0^\alpha (\alpha - \beta) K_n(\beta)\, d\beta$$

tend uniformément, par hypothèse, vers une limite $f(\alpha)$. On démontre que $f(\alpha)$ est une intégrale indéfinie, sa dérivée étant la limite de

$$f'_n(\alpha) = \int_0^\alpha K_n(\beta)\, d\beta.$$

La méthode consiste à montrer que $f(\alpha)$ est à variation bornée, puisque si l'on considère sa variation dans un ensemble constitué par une somme d'intervalles, cette variation tend vers zéro avec la mesure de cet ensemble.

Il semble que des considérations analogues soient ensuite appliquées à $f'(\alpha)$, et $K(\alpha)$ est introduit comme étant, sauf dans un ensemble de mesure nulle, la dérivée de $f'(\alpha)$.

Cette Note est suivie de considérations sur l'approximation d'une fonctionnelle par une fonctionnelle linéaire. Ce problème est un cas particulier de celui traité dans le Mémoire sur les fonctionnelles d'ordre n d'approximation.

Intégration d'une fonctionnelle.

1. Soit $u|[z]|$ une fonctionnelle définie et bornée dans l'ensemble Ω de toutes les fonctions $z(\alpha)$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$. Peut-être y aura-t-il lieu de restreindre Ω.

Étant donnée une fonction $f(\alpha)$, si certaines de ses valeurs sont extérieures à l'intervalle $(0, 1)$, nous les remplacerons par les valeurs de $(0, 1)$ congrues module 1, la valeur 1 étant prise en cas de doute entre les valeurs 0 et 1.

Soient une fonction $z(\alpha)$, h une variable,

$$I_1 = \int_0^1 u|[z+h]|\,dh.$$

Soient m_1 et M_1 les bornes inférieure et supérieure de I_1 quand z varie, m_0 et M_0 celles de $u|[z]|$. On a l'ordre $m_0 \leqq m_1 \leqq M_1 \leqq M_0$.

Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en deux parties, le point de division appartenant à l'intervalle de droite; la fonction z est formée de deux fonctions z_1 et z_2. J'écris $u|[z]| = u|[z_1, z_2]|$. Je considère

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 u|[z_1+h_1,\ z_2+h_2]|\,dh_1\,dh_2.$$

Elle est comprise entre les bornes de

$$\int_0^1 u|[z_1+h,\ z_2+h]|\,dh$$

qui sont celles de I_1. Si donc m_2, M_2 sont les bornes de I_2, on a l'ordre

$$m_0 \leqq m_1 \leqq m_2 \leqq M_2 \leqq M_1 \leqq M_0,$$

et ainsi de suite, les divisions étant d'ailleurs effectuées en un nombre quelconque de parties.

Supposons que l'on divise toujours les intervalles en deux parties égales, et soient m, M les limites de m_i, M_i.

2. Problème. — *Quand on suit un autre mode de division, les intervalles tendant vers zéro, les nouvelles bornes* m', M' *sont-elles égales à* m, M?

Nous ne reproduirons pas les calculs qui suivent, dont la conclusion est :

Il paraît probable que, dans le cas général, une suite ne conduit pas toujours à m, M, mais que certains points de division sont nécessaires ([1]). Car les hypothèses paraissent insuffisantes pour démontrer le résultat; m est la limite supérieure de tous les m_i, M la limite inférieure des M_i. Il conviendrait de dire que la fonctionnelle est *intégrable* si $m = M$ (dire la condition nécessaire et suffisante), et de rechercher quels doivent être les points de

---

([1]) Mes recherches personnelles m'ont aussi convaincu de l'importance des points de division. Ainsi, soit à chercher la valeur moyenne de

$$U = \int_0^1 f(\alpha) z^2(\alpha)\, dt$$

dans le domaine défini par

$$\int_0^1 z^2(\alpha)\, dt \leqq 1,$$

par une définition analogue à la première définition du texte, je trouve

$$\int_0^1 f(\alpha)\, d\alpha.$$

Mais si l'on considère l'intervalle (o, 1) comme portant des masses positives dont la somme est 1, la densité n étant nulle dans aucune partie de l'intervalle [soit $\varphi(\alpha)$ la somme des masses dans l'intervalle (o, α) (y compris les extrémités)], et si l'on adopte un mode de division divisant chaque intervalle en deux autres portant des masses égales, chaque fois qu'on passe d'une division à la suivante, on trouve que la moyenne de U est

$$\int_0^1 f(\alpha)\, d\varphi(\alpha)$$

et dépend donc de la détermination de $\varphi(\alpha)$. On voit qu'on peut, par le mode de division, donner plus ou moins de *poids* aux différentes parties de l'intervalle (o, 1). (P. L.)

division; puis de chercher à quelles conditions ceux-ci peuvent être quelconques; ensuite chercher à intégrer d'une façon analogue à M. Lebesgue.

3. *Exemple de fonctionnelle continue non intégrable.* — Soit $f(x)$ une fonction de $|x|$, nulle pour $|x| \leqq \varepsilon$, variant linéairement de o à 1 dans l'intervalle de ε à $\varepsilon(1+\alpha)$, égale à 1 de $\varepsilon(1+x)$ à 1. Soit $z(x)$ une fonction continue. Posons

$$U|[z]| = a_0 f[z(0)-z(1)] + a_1\left\{f\left[z(0)-z\left(\frac{1}{2}\right)\right]+f\left[z\left(\frac{1}{2}\right)-z(1)\right]\right\}$$
$$+ a_2\left\{f\left[z(0)-z\left(\frac{1}{4}\right)\right]+\ldots+f\left[z\left(\frac{3}{4}\right)-z(1)\right]\right\}+\ldots.$$

A partir d'un certain moment les différents arguments de la fonction f sont $< \varepsilon$, et la somme se réduit à un nombre fini de termes.

La suite comprend une discussion des notions introduites ci-dessus ce sont des Notes, non rédigées, suivant le développement de la pensée de l'auteur dans ses recherches pour répondre aux questions posées. Il me semble difficile d'en tirer d'autres passages assez au point pour être publiés. Mais il m'a paru utile de publier le début de ces Notes, de manière à montrer de quelle manière Gateaux cherchait à préciser la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel.