

# BULLETIN DE LA S. M. F.

B. GAMBIER

## **Surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 49 (1921), p. 150-205

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1921\\_\\_49\\_\\_150\\_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__150_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1921, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

### CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES APPLICABLES SUR LE PARABOLOÏDE  
DE RÉVOLUTION; CAS SPÉCIAL OU CES SURFACES SONT RÉELLES.

1, Darboux indique au Tome 3 de la *Théorie des Surfaces* (p. 362 et suiv.) comment s'obtiennent *toutes* les surfaces applicables sur le paraboloidé de révolution et, en particulier, celles d'entre elles qui sont *réelles*. Cette recherche est équivalente à celle des courbes à torsion constante. La solution de l'un ou l'autre problème doit permettre de réaliser un progrès important dans la recherche des surfaces à courbure totale constante, car les lignes asymptotiques de ces surfaces ont leur torsion constante et sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui définit ces surfaces.

La théorie des surfaces minima se rattache de deux façons différentes à ce problème : M. Cosserat a montré que la recherche des surfaces minima circonscrites à une sphère équivaut à celle des courbes à torsion constante. D'autre part, Darboux termine l'étude déjà citée en montrant que, par dégénérescence de courbes à torsion constante ou de surfaces applicables sur le paraboloidé,

dérivent des courbes minima et des développées de surfaces minima.

J'ai moi-même, dans un Mémoire récompensé par l'Académie en 1916 et publié aux *Annales de l'École Normale supérieure* (1919 et 1920), étudié les courbes à torsion constante, et plus spécialement, celles qui sont réelles et algébriques. Je me servirai constamment des résultats de ce Mémoire. Le lecteur pourra consulter les travaux antérieurs sur les courbes à torsion constante; ils sont dus à MM. Kœnigs, Lyon, Fouché, Fabry et Cosserat; Darboux en a condensé l'essentiel au Tome IV de la *Théorie des Surfaces* (p. 429) et y donne les indications bibliographiques. En même temps que mon Mémoire, l'Académie a récompensé le travail de mon camarade M. Darmois <sup>(1)</sup>; le rapport sur nos travaux est inséré aux *Comptes rendus* de décembre 1916.

Quant au parabolôïde lui-même, la question a été envisagée, à un point de vue tout différent de celui que je développerai, par deux auteurs, MM. Thybaut et Servant. Dans sa thèse <sup>(2)</sup>, M. Thybaut a étudié la déformation du parabolôïde le plus général et montre le lien de ce problème, spécialement quand le parabolôïde est de révolution, avec la recherche de surfaces minima ou isothermiques particulières.

Les travaux de M. Servant forment l'objet de diverses Notes insérées aux *Comptes rendus* en 1902, 1903, 1904 et d'un Mémoire paru en 1911 au *Bulletin de la Société philomathique de Paris*.

Dans le travail que je présente, je retrouve d'abord tous les résultats de M. Darboux par une méthode légèrement différente, qui ne suppose chez le lecteur aucune étude préalable et qui a, de plus, l'avantage de mettre en évidence diverses particularités curieuses, au point de vue de la *réalité*, sur les couples de surfaces réelles applicables l'une sur l'autre. Je m'occupe ensuite plus spécialement des surfaces algébriques réelles, indiquant le moyen d'obtenir celles qui ont un centre, un plan ou un axe de symétrie, ou encore un axe de rotation. Je terminerai par l'étude détaillée des surfaces algébriques unicursales déduites de la cubique de

---

<sup>(1)</sup> La Thèse de M. Darmois sera insérée aux *Annales de Toulouse*, 1921.

<sup>(2)</sup> *Annales de l'École Normale*, années 1897 et 1900.

M. Lyon et des résultats de M. Thybaut : ce sera l'objet d'un Mémoire complémentaire.

2. Soit  $\mathcal{Q}$  le parabolôide de révolution d'équation  $x^2 + y^2 = 2pz$  en coordonnées rectangulaires ou  $r^2 = 2pz$  en coordonnées semi-polaires. Je désignerai souvent le paramètre  $p$  par  $2\tau$ . L'élément linéaire

$$(1) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2$$

devient

$$(2) \quad ds^2 = du^2 + \frac{H-1}{2} dv^2$$

en écrivant

$$(3) \quad \begin{cases} du = dr \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}}, & v = p\theta, \\ \frac{H-1}{2} = \frac{r^2}{p^2}, & du = \frac{p}{4} dH \sqrt{\frac{H+1}{H-1}}. \end{cases}$$

Le produit des rayons de courbure principaux est égal à

$$p^2 \left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \tau^2 (H+1)^2.$$

La carte de  $\mathcal{Q}$  sur un plan peut s'obtenir par les formules

$$(4) \quad \begin{cases} X = 0, & dY = \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}} \frac{dr}{r}, \\ ds^2 = r^2 (dX^2 + dY^2). \end{cases}$$

3. Sur la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , traçons une courbe  $(\mathfrak{A})$  arbitraire <sup>(1)</sup>, lieu du point  $m(c, c', c'')$ , puis une seconde courbe  $(\mathfrak{A}_1)$  lieu du point  $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$ ; désignons par  $\varepsilon$  l'un des trois nombres  $+1, -1$  ou  $0$ .

<sup>(1)</sup> Dans tout le cours de ce Mémoire, il sera sous-entendu que la courbe  $(\mathfrak{A})$  est une courbe analytique; autrement dit,  $c, c', c''$  sont des fonctions analytiques d'une variable complexe  $\alpha$ ; ces trois fonctions sont liées par l'identité  $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ .

Les formules

$$(5) \begin{cases} x = \frac{i\tau}{2} \int c'' dc' - c' dc'' - \frac{i\tau}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'' + \frac{\varepsilon\tau i}{2} (c' c_1'' - c'' c_1'), \\ y = \frac{i\tau}{2} \int c dc'' - c'' dc - \frac{i\tau}{2} \int c_1 dc_1'' - c_1'' dc_1 + \frac{\varepsilon\tau i}{2} (c' c_1 - c c_1''), \\ z = \frac{i\tau}{2} \int c' dc - c dc' - \frac{i\tau}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 dc_1' + \frac{\varepsilon\tau i}{2} (c c_1' - c' c_1) \end{cases}$$

définissent trois surfaces : S pour  $\varepsilon = +1$ , S' pour  $\varepsilon = -1$ ,  $\Sigma$  pour  $\varepsilon = 0$ .

Les deux premières sont applicables sur  $\mathcal{Q}$  et, *réciroquement, toute surface applicable sur  $\mathcal{Q}$  peut s'obtenir par ce procédé*. Pour l'instant, ne nous préoccupons pas encore de la réalité : on voit aussitôt que, si  $\varepsilon$  est pris égal à 1, S changera de forme si  $(\mathfrak{V})$  ou  $(\mathfrak{V}_1)$  sont remplacées par d'autres courbes sphériques; si  $(\mathfrak{V}')$  et  $(\mathfrak{V}_1')$  désignent les symétriques de  $(\mathfrak{V})$  et  $(\mathfrak{V}_1)$  par rapport à l'origine, il est bien clair que l'échange simultané de  $(\mathfrak{V})$  avec  $(\mathfrak{V}')$  et de  $(\mathfrak{V}_1)$  avec  $(\mathfrak{V}_1')$  ne change pas la surface S, tandis que S se trouve remplacée par S', si l'on ne fait que l'un de ces deux échanges. Cette simple remarque permet de déduire toutes les formules relatives à S' des formules correspondantes relatives à S en y remplaçant  $c_1, c_1', c_1''$  par  $-c_1, -c_1', -c_1''$ .

Pour cette même raison nous devons considérer le cône C, qui a son sommet à l'origine et pour directrice  $(\mathfrak{V})$  ou  $(\mathfrak{V}')$  indifféremment, et le cône analogue  $C_1$  relatif à  $(\mathfrak{V}_1)$ . Si l'intersection de chacun de ces deux cônes avec la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  se décompose en deux courbes analytiquement distinctes, symétriques par rapport à l'origine, les surfaces S et S' sont deux surfaces analytiquement distinctes; au contraire, si, pour l'un des deux cônes ou pour tous les deux, la directrice sphérique est indécomposable analytiquement,  $(\mathfrak{V})$  par exemple et  $(\mathfrak{V}')$  constituant les deux moitiés d'une même courbe analytique, S et S' sont les deux nappes d'une même surface analytique.

La surface  $\Sigma$  est une surface de translation;  $c, c', c''$  sont fonctions d'un paramètre  $\alpha$ ;  $c_1, c_1', c_1''$  fonctions d'un paramètre  $\beta$ . A un couple  $(\alpha, \beta)$  correspondent un point M de S, un point M' de S' et un point  $\mu$  de  $\Sigma$  milieu de MM'. La surface  $\Sigma$  est engendrée par la translation d'une courbe  $(\mathfrak{A})$  de rayon de torsion constant et égal à  $\frac{i\tau}{2}$  ou par la translation d'une courbe  $(\mathfrak{A}_1)$  de torsion

constante aussi, égale à celle de  $(\mathfrak{A})$  changée de signe. Ces deux courbes sont définies par les formules

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{cases} x = \frac{i\tau}{2} \int c'' dc' - c' dc'', \\ y = \frac{i\tau}{2} \int c dc'' - c'' dc, \\ z = \frac{i\tau}{2} \int c' dc - c dc'; \end{cases}$$

$$(\mathfrak{A}_1) \quad \begin{cases} x = \frac{-i\tau}{2} \int c_1'' dc_1' - c_1' dc_1'', \\ y = \frac{-i\tau}{2} \int c_1 dc_1'' - c_1'' dc_1, \\ z = \frac{-i\tau}{2} \int c_1' dc_1 - c_1 dc_1'. \end{cases}$$

Échanger  $(\mathfrak{A})$  avec  $(\mathfrak{A}_1)$  ne change pas  $(\mathfrak{A})$ , donc ne change pas non plus  $\Sigma$ .

La normale en M à S a pour paramètres directeurs  $c + c_1$ ,  $c' + c_1'$ ,  $c'' + c_1''$ ; la normale en M' à S' correspond à  $c - c_1$ ,  $c' - c_1'$ ,  $c'' - c_1''$ . La droite MM' touche S en M, S' en M' et reste normale à une surface W; elle est parallèle à l'intersection des plans osculateurs de  $(\mathfrak{A})$  et  $(\mathfrak{A}_1)$  aux points de paramètre  $\alpha$  et  $\beta$ : on a donc une construction géométrique intéressante de S et S': on construit d'abord la surface de translation  $\Sigma$  au moyen de deux courbes génératrices  $(\mathfrak{A})$  et  $(\mathfrak{A}_1)$  de rayon de torsion constant  $\frac{i}{2}$

pour l'une,  $\frac{-i}{2}$  pour l'autre. En chaque point  $\mu$  de  $\Sigma$  on prend l'intersection des plans osculateurs des deux génératrices qui s'y croisent, c'est la droite qui engendre la congruence dont S et S' sont les surfaces focales.

4. Tous ces résultats établis par Darboux se retrouvent aisément. J'ai le droit (§ 3) de me borner à S; la différentiation des formules (5) où l'on fait  $\varepsilon = +1$  donne

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{2}{i\tau} dx = (c' + c_1')(dc_1'' - dc'') - (c'' + c_1'')(dc_1' - dc'), \\ \frac{2}{i\tau} dy = (c'' + c_1'')(dc_1 - dc) - (c + c_1)(dc_1'' - dc''), \\ \frac{2}{i\tau} dz = (c + c_1)(dc_1' - dc') - (c' + c_1')(dc_1 - dc). \end{cases}$$

Ces formules donnent le résultat annoncé pour la normale en M à S et le contact de MM' avec S; les résultats de M. Lelievre montrent en plus que les lignes  $\alpha = \text{const.}$  et  $\beta = \text{const.}$  sont les asymptotiques.

Définissons les variables H et  $\nu$  par les formules

$$(7) \quad H = cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1,$$

$$(8) \quad d\nu = \frac{1}{H-1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 - dc \\ c' & c'_1 & dc'_1 - dc' \\ c'' & c''_1 & dc''_1 - dc'' \end{vmatrix}.$$

On voit d'abord que  $d\nu$  est bien une différentielle totale, car la condition pour qu'il en soit ainsi peut s'écrire

$$(9) \quad \begin{vmatrix} c & c_1 & \frac{dc}{dx} & \frac{dc_1}{d\beta} \\ c' & c'_1 & \frac{dc'}{dx} & \frac{dc'_1}{d\beta} \\ c'' & c''_1 & \frac{dc''}{dx} & \frac{dc''_1}{d\beta} \\ 1-H & H-1 & -\frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, dans ce déterminant (9), la dernière ligne est égale à la somme des trois premières multipliées respectivement par  $c - c_1$ ,  $c' - c'_1$ ,  $c'' - c''_1$ ; la vérification est donc faite.

On peut d'autre part écrire

$$(10) \quad \frac{1}{i^2} dx = \frac{dH}{H-1} (c'c''_1 - c''c'_1) - \frac{c-c_1}{H-1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 - dc \\ c' & c'_1 & dc'_1 - dc' \\ c'' & c''_1 & dc''_1 - dc'' \end{vmatrix}.$$

On a en effet

$$(c - c_1)^2 + (c' - c'_1)^2 + (c'' - c''_1)^2 = 2 - 2H,$$

$$(c - c_1)(dc - dc_1) + (c' - c'_1)(dc' - dc'_1) + (c'' - c''_1)(dc'' - dc''_1) = -dH.$$

En remplaçant, au second membre de (10),  $dH$  par cette valeur, puis ordonnant par rapport aux différences  $dc_1 - dc$ ,  $dc'_1 - dc'$ ,  $dc''_1 - dc''$ , nous obtenons sans effort la valeur de  $dx$  donnée par la formule (6). J'écris

$$(11) \quad du = \frac{1}{2} dH \sqrt{\frac{H+1}{H-1}};$$

la formule (10) devient

$$(12) \quad dx = \frac{i(c'c_1'' - c''c_1')}{\sqrt{H^2 - 1}} du + \frac{i(c_1 - c)}{\sqrt{2(H-1)}} \sqrt{\frac{H-1}{2}} dv;$$

le  $ds^2$  de la surface S est donc

$$(13) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + \frac{H-1}{2} dv^2.$$

La comparaison des formules (11) et (13) avec les formules (2) et (3) montre bien que S et  $\mathcal{Q}$  sont applicables l'une sur l'autre; le point  $(r, \theta)$  de  $\mathcal{Q}$  correspondant au point M de S s'obtient en écrivant ( $p = 2\tau$ )

$$(14) \quad \frac{r^2}{p^2} = \frac{H-1}{2}, \quad \theta = \frac{v}{p},$$

H et  $v$  étant les fonctions de  $\alpha$  et  $\beta$  que nous avons appris à former dans ce paragraphe.

Suivant une remarque antérieure, nous passerons de S à S' en remplaçant partout  $c_1, c_1', c_1''$ , par  $-c_1, -c_1', -c_1''$ , ce qui revient à écrire

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} H' = -cc_1 - c'c_1' - c''c_1'' = -H, \\ dv' = \frac{-\tau}{H+1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 + dc \\ c' & c_1' & dc_1' + dc' \\ c'' & c_1'' & dc_1'' + dc'' \end{vmatrix}, \\ du' = -\frac{\tau}{2} dH \sqrt{\frac{H-1}{H+1}}, \\ \frac{2}{i\tau} dx' = (c_1' - c')(dc'' + dc_1'') - (c_1'' - c'')(dc' + dc_1') \\ = \frac{-dH}{H+1} (c'c_1'' - c''c_1') + \frac{c+c_1}{H+1} \begin{vmatrix} c & c_1 & dc_1 + dc \\ c' & c_1' & dc_1' + dc' \\ c'' & c_1'' & dc_1'' + dc'' \end{vmatrix}, \\ ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = du'^2 + \frac{H'-1}{2} dv'^2. \end{array} \right.$$

L'application de  $\mathcal{Q}$  sur S' s'effectue par les formules

$$(16) \quad \frac{r^2}{p^2} = -\frac{H+1}{2}, \quad \theta = \frac{v'}{p} \quad (p = 2\tau).$$



§. Songeons maintenant aux conditions de réalité :  $\mathcal{Q}$  est réel, si  $\tau$  est une constante réelle. Si  $(\mathfrak{V})$  et  $(\mathfrak{V}_1)$  sont deux courbes sphériques conjuguées et si les intégrales

$$\int c'' dc' - c' dc'', \quad \int c dc'' - c'' dc', \quad \int c' dc - c dc'$$

sont prises d'un point  $m_0$  fixe de  $(\mathfrak{V})$  jusqu'à un point variable  $m$  en suivant toujours  $(\mathfrak{V})$ , tandis que les intégrales

$$\int c'_1 dc'_1 - c'_1 dc''_1, \dots$$

sont prises le long de l'arc conjugué sur  $(\mathfrak{V}_1)$ , les points  $M, M', \mu$  sont réels; en posant  $z = \lambda + \mu i$ , les coordonnées de  $M, M', \mu$  s'obtiennent immédiatement au moyen des paramètres réels  $\lambda, \mu$  par formules dégagées de toute imaginaire; les trois surfaces  $S, S', \Sigma$  sont donc réelles. Dorénavant je me bornerai à ce cas; il sera sous-entendu que  $(\mathfrak{V}_1)$  est la courbe conjuguée de  $(\mathfrak{V})$ ; je pourrai donc dire qu'à toute courbe sphérique  $(\mathfrak{V})$ , *réelle ou imaginaire*, correspond (sauf translation) un couple, et un seul, de deux surfaces réelles  $S, S'$  applicables sur le paraboloidé  $\mathcal{Q}$ . Les coordonnées  $(c, c', c'')$  d'un point de  $(\mathfrak{V})$  sont des fonctions analytiques de la variable complexe  $z$ : si l'on représente cette variable  $z$ , suivant l'usage, par un point réel d'un plan, le point figuratif de  $z$  donne une représentation plane commode de chacune des trois surfaces  $S, S', \Sigma$ .

Qu'arrive-t-il, si, au lieu de partir d'une courbe  $(\mathfrak{V})$ , nous partons d'une courbe à torsion constante supposée connue par un procédé quelconque, *réelle ou imaginaire*? Si la torsion de cette courbe n'est pas une imaginaire pure, nous effectuons d'abord sur elle une homothétie convenable de façon que le rayon de torsion devienne imaginaire pure; soit  $\frac{i\tau}{2}$  la valeur du rayon de torsion de la courbe  $(\mathfrak{A})$  ainsi obtenue,  $(\mathfrak{A})$  est alors une courbe essentiellement imaginaire, que la courbe à torsion constante initiale soit réelle ou imaginaire; nous associons à  $(\mathfrak{A})$  la courbe imaginaire conjuguée  $(\mathfrak{A}_1)$ ; la surface  $\Sigma$  se trouve parfaitement définie, sans intégration. Les quantités  $(c, c', c'')$  s'obtiennent en chaque point de  $(\mathfrak{A})$  par différentiations, puisque ce sont les cosinus directeurs de la binormale; les quantités conjuguées  $c_1, c'_1, c''_1$  s'en déduisent et par suite  $S$  et  $S'$  elles-mêmes. Si donc  $\tau$  est donné, on

pourra encore dire qu'à toute courbe à torsion constante connue, correspond, sauf translation, un couple, et un seul, de deux surfaces  $S$  et  $S'$  applicables sur le parabolôide  $\mathcal{Q}$  de paramètre  $2\tau$ , obtenues sans intégration.

Dans les travaux antérieurs, il semble au contraire presque implicitement admis que seules les courbes à torsion constante imaginaires doivent être conservées; il importait de dissiper cette équivoque : nous verrons dans le Chapitre suivant que toute courbe sphérique ( $\mathfrak{S}$ ) réelle (toujours analytique, bien entendu) donne des surfaces  $S$  et  $S'$  à centre. Nous allons immédiatement reconnaître une circonstance tout à fait curieuse de l'application de  $\mathcal{Q}$  sur chacune des deux surfaces réelles  $S$  ou  $S'$ , circonstance qui avait échappé à l'attention des géomètres au même titre, et sans doute pour la même raison, que l'emploi de courbes à torsion constante réelles.

6. A chaque point réel de  $S$  correspond un point réel de  $\mathcal{Q}$ ; la surface  $S$  supposée réalisée au moyen d'un canevas de fil flexible, mais inextensible, peut être déformée de façon à recouvrir une certaine étendue de forme plus ou moins compliquée de  $\mathcal{Q}$ ; ce recouvrement se fait sans coupure ni couture.

Au contraire, tout point réel de  $S'$  admet sur  $\mathcal{Q}$  un homologue imaginaire, de sorte qu'au point de vue expérimental rien ne peut déceler que les surfaces  $S'$  et  $\mathcal{Q}$  soient applicables l'une sur l'autre.

Cette circonstance qui, au premier abord, m'avait paru tout à fait exceptionnelle, en réalité est très générale dans l'application de deux surfaces réelles : je renverrai le lecteur aux Notes que j'ai publiées aux *Comptes rendus* (17 mars 1919, 31 mars 1919, 15 mars 1920) et au Mémoire inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques* (1920).

La vérification de la propriété énoncée est facile; je sépare le réel et l'imaginaire en posant

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \gamma + i\gamma_1, \quad c' = \gamma' + i\gamma'_1, \quad c'' = \gamma'' + i\gamma''_1, \\ c_1 = \gamma - i\gamma_1, \quad c'_1 = \gamma' - i\gamma'_1, \quad c''_1 = \gamma'' - i\gamma''_1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 - \gamma_1^2 - \gamma_1'^2 - \gamma_1''^2 = 1, \\ \gamma\gamma_1 + \gamma'\gamma'_1 + \gamma''\gamma''_1 = 0, \\ H = cc_1 + c'c'_1 + c''c''_1 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 + \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 \\ \quad = 1 + 2(\gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2); \end{array} \right.$$

d'où résulte finalement

$$(18) \quad \frac{H-1}{2} = \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2.$$

La fonction  $H$  est donc, pour les points réels de  $S$  et  $S'$ , réelle, positive et même supérieure à 1. Elle ne peut devenir égale à 1 que si (15) admet un ou plusieurs points réels.

Cela posé, la fonction  $v$  est évidemment réelle pour les points réels de  $S$ , donc les formules (14) donnent un point réel de  $\mathcal{Q}$  correspondant à un point réel de  $S$ .

Au contraire, la fonction  $v'$  est évidemment imaginaire pure pour les points réels de  $S'$  : posons  $v' = i v_1$  de façon à pouvoir écrire les formules (16) sous la forme

$$(19) \quad \frac{r}{p} = i \sqrt{\frac{H+1}{2}}, \quad \theta = i \frac{v_1}{p},$$

le point de  $\mathcal{Q}$  correspondant à un point réel de  $S'$  est donc toujours imaginaire. Nous remarquerons qu'il peut y avoir avantage à écrire l'élément linéaire de  $S'$  sous la forme

$$(20) \quad ds'^2 = du'^2 + \frac{H+1}{2} dv_1^2, \quad dv' = \frac{-i}{2} dH \sqrt{\frac{H-1}{H+1}}.$$

7. Envisageons l'ensemble, non dénombrable, des courbes sphériques (15); il lui correspond un ensemble de même puissance de surfaces réelles  $S$  et un autre de surfaces  $S'$ ; deux surfaces prises l'une dans le premier, l'autre dans le second de ces deux ensembles ne sont applicables *physiquement* l'une sur l'autre par aucune région si petite qu'elle soit, mais elles restent *analytiquement* applicables l'une sur l'autre : il suffit pour le voir de prendre  $\mathcal{Q}$  comme intermédiaire. Je désigne par  $S$  et  $\bar{S}$  deux surfaces du premier ensemble,  $S'$  et  $\bar{S}'$  les surfaces associées du second,  $H, v, v_1$  et  $\bar{H}, \bar{v}, \bar{v}_1$  les fonctions déjà considérées. L'application de  $S$  sur  $\bar{S}$  s'effectue par les formules

$$(21) \quad H = \bar{H}, \quad v = \pm \bar{v} + \text{constante arbitraire};$$

celle de  $S'$  sur  $\bar{S}'$ , par les formules

$$(22) \quad H = \bar{H}, \quad v_1 = \pm \bar{v}_1 + \text{constante arbitraire}.$$

La présence de la constante arbitraire tient à cette circonstance évidente que  $\mathcal{Q}$  et par suite toutes les surfaces applicables sur  $\mathcal{Q}$  admettent une infinité d'applications sur elles-mêmes. Si en un point  $M$  de  $S$  et en un point  $\bar{M}$  de  $\bar{S}$  les deux fonctions  $H$  et  $\bar{H}$  sont égales, il existe donc *deux, et deux applications seulement*, de  $S$  sur  $\bar{S}$  où  $M$  vient s'appliquer sur  $\bar{M}$ ; de même pour  $S'$  et  $\bar{S}'$ .

Si nous posons maintenant le problème suivant : « Deux surfaces  $S$  et  $\bar{S}$  étant données, existe-t-il des applications *physiques* de  $S$  sur  $\bar{S}$ ? » La réponse sera aisée, il suffira d'étudier le champ de variation réelle de  $H$  et de  $\bar{H}$  : si ces deux champs ont une partie commune, il résulte de ce qui précède qu'on peut, et d'une infinité de façons, déformer  $S$  ou  $\bar{S}$  de façon que chacune d'elles recouvre la totalité ou une partie de l'autre;  $\bar{S}'$  et  $S'$  posséderont cette propriété en même temps que  $\bar{S}$  et  $S$ . Mais si les champs de variation réelle pour  $H$  et  $\bar{H}$  n'ont aucune partie commune, il n'y aura aucune portion réelle de  $S$  susceptible de recouvrir  $\bar{S}$  (et de même pour  $S'$  et  $\bar{S}'$ ).

Si par exemple les courbes sphériques  $(\mathfrak{u})$  et  $(\mathfrak{v})$  sont toutes deux algébriques, les surfaces  $S$  et  $\bar{S}$  correspondantes, qu'elles soient algébriques ou transcendentes, peuvent se recouvrir physiquement au moins sur certaines régions, car chacune des fonctions algébriques  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  a son module, sa partie réelle et sa partie imaginaire susceptibles d'augmenter au delà de toutes limites; donc  $H$  et  $\bar{H}$  sont tous deux susceptibles d'augmenter au delà de toutes limites; les surfaces  $S$  et  $\bar{S}$  peuvent se recouvrir sur les régions correspondant aux points à l'infini de  $\mathcal{Q}$ .

Je donne maintenant un cas bien différent. Supposons que je choisisse pour les fonctions  $c(\alpha)$  et  $c'(\alpha)$  deux de ces séries, qui ont été signalées par M. Freedholm, admettant leur cercle de convergence comme coupure, à savoir

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = A + \sum_1^{\infty} a^n x^{n^2}, \\ c' = A' + \sum_1^{\infty} b^n x^{n^2}, \end{array} \right.$$

où  $A$  et  $A'$  sont deux constantes quelconques et  $a$  et  $b$  deux quantités réelles comprises entre 0 et 1. Les deux fonctions  $c$  et  $c'$  ne sont définies que si  $|x| \leq 1$  et l'on a, dans tout le champ d'existence de  $c$  et  $c'$ ,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( |A| - \frac{a}{1-a} \right)^2 \leq \gamma^2 + \gamma_1^2 \leq \left( |A| + \frac{a}{1-a} \right)^2, \\ \left( |A'| - \frac{b}{1-b} \right)^2 \leq \gamma'^2 + \gamma_1'^2 \leq \left( |A'| + \frac{b}{1-b} \right)^2. \end{array} \right.$$

La fonction  $c'' = \sqrt{1 - c^2 - c'^2}$  a un module facile à limiter au moyen des modules de  $c$  et  $c'$ , donc

$$H = (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2) + (\gamma''^2 + \gamma_1''^2)$$

reste compris entre deux limites faciles à évaluer en fonction de  $A$ ,  $A'$ ,  $a$  et  $b$  (<sup>1</sup>). Une telle courbe sphérique ( $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ) définit ainsi une surface  $S$  et une surface  $S'$ , possédant chacune un bord constituant une ligne d'arrêt de la surface, d'étendue finie toutes deux et admettant une forme parfaitement régulière; une telle surface  $S$  ne recouvre qu'une étendue finie de  $\mathcal{Q}$ . Si maintenant, laissant ou non  $a$  et  $b$  fixes, je donne à  $A$  et  $A'$  d'autres valeurs numériques, je définis une autre surface  $S$  ou  $\bar{S}$  de même nature, et il est presque évident que je pourrai disposer de  $A$  et  $A'$  de façon que  $S$  et  $\bar{S}$  ne puissent se recouvrir physiquement, car si  $A$  et  $A'$  grandissent indéfiniment les deux limites, inférieure et supérieure, trouvées précédemment pour  $H$  augmentent elles-mêmes indéfiniment.

Je n'insiste pas davantage sur ces applications de la théorie des fonctions analytiques à l'étude des surfaces applicables sur le paraboloidé. Mais je fais remarquer l'importance exceptionnelle que présente, dans l'étude de la déformation d'une surface, le paraboloidé de révolution : cela tient à ce que *toutes* les surfaces applicables sur  $\mathcal{Q}$  peuvent s'obtenir par des quadratures; l'analyse déjà citée de Darboux établit ce point, j'y renvoie le lecteur;

(<sup>1</sup>) Les inégalités bien connues, relatives au module d'une somme, appliquées à l'égalité  $c''^2 = 1 - c^2 - c'^2$ , donnent par exemple

$$0 \leq \gamma''^2 + \gamma_1''^2 \leq 1 + (\gamma^2 + \gamma_1^2) + (\gamma'^2 + \gamma_1'^2).$$

dans ce qui précède, je n'ai vérifié que la réciproque de cette proposition de Darboux.

On sait que dans le cas général les surfaces applicables sur une surface donnée ou représentant un  $ds^2$  donné *a priori* dépendent d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Il y aurait lieu de chercher quelles sont, en dehors du paraboloïde de révolution, les surfaces pour lesquelles la déformation se ramène à des quadratures <sup>(1)</sup>.

8. Sur la surface S les courbes  $v = \text{const.}$  sont les transformées des méridiens de  $\mathcal{Q}$ , les courbes  $H = \text{const.}$  sont les transformées des parallèles, je les appellerai, pour abréger, *méridiens* et *parallèles* de S. Les formules (6), (12), (15) montrent alors que le tableau

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{i(c_1 - c)}{\sqrt{2(H-1)}}, & \frac{i(c'_1 - c')}{\sqrt{2(H-1)}}, & \frac{i(c''_1 - c'')}{2\sqrt{(H-1)}}, \\ \frac{i(c'c'_1 - c''c'_1)}{\sqrt{H^2-1}}, & \frac{i(c''c_1 - cc'_1)}{\sqrt{H^2-1}}, & \frac{i(cc'_1 - c'c_1)}{\sqrt{H^2-1}}, \\ \frac{c + c_1}{\sqrt{2(H+1)}}, & \frac{c' + c'_1}{\sqrt{2(H+1)}}, & \frac{c'' + c''_1}{\sqrt{2(H+1)}} \end{cases}$$

donne pour la surface S : en première ligne, les cosinus directeurs de la tangente au parallèle qui passe en M ; en seconde, ceux de la tangente au méridien, à savoir MM' ; en troisième, ceux de la normale en M à S. Considérons maintenant la surface S', ses parallèles ( $H = \text{const.}$ ), ses méridiens ( $v_1 = \text{const.}$ ) : ce même tableau donne encore les tangentes analogues, mais la normale correspond à la première ligne et le parallèle à la dernière.

La droite MM' engendre une congruence dont S et S' sont les surfaces focales, et cette congruence est bien une congruence de normales puisque les deux normales à S et S', en M et M' respectivement sont orthogonales.

Sur S, les courbes  $v = \text{const.}$ ,  $v_1 = \text{const.}$  forment deux familles

---

<sup>(1)</sup> Je montre en fin de Mémoire que les développées de surface minima donnent une solution encore plus précise; toutes les surfaces provenant de la déformation d'une quelconque de ces développées admettent aussi la même définition géométrique et l'on sait obtenir, explicitement, sans signe de quadrature, toutes ces surfaces.

conjuguées, de même sur  $S'$ . Les asymptotiques de  $S$  et  $S'$  sont les courbes  $\alpha = \text{const.}$ ,  $\beta = \text{const.}$ ; elles sont imaginaires. Or si nous posons  $\alpha = \lambda + \mu i$ , chaque point de  $S$  ou  $S'$  correspond à un point  $\lambda, \mu$  du plan de la variable complexe  $\alpha$ . Dans cette correspondance ponctuelle, les asymptotiques de  $S$  et  $S'$  ont pour transformées les droites isotropes du plan  $(\lambda, \mu)$ , donc tout système conjugué tracé sur  $S$  ou  $S'$  a pour homologue, dans le plan  $(\lambda, \mu)$ , un système orthogonal et réciproquement <sup>(1)</sup>.

Calculons maintenant le produit des rayons de courbure principaux en  $M$  : le calcul a été fait au paragraphe 2 pour  $\mathcal{Q}$ , donc il est inutile de le refaire pour  $S$ ; désignons ce produit par  $\rho$ , on a  $\rho = \tau^2 (H + 1)^2$ ; en tenant compte de la remarque du paragraphe 3, la quantité analogue  $\rho'$ , au point  $M'$ , est  $\rho' = \tau^2 (H - 1)^2$ ; il était évident que, les lignes asymptotiques de  $S$  et  $S'$  étant imaginaires, la courbure totale de  $S$  ou  $S'$  devait être positive.

Extrayons les racines carrées positives :

$$(26) \quad \begin{cases} \sqrt{\rho} = \tau(H + 1), & \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'} = 2\tau = p, \\ \sqrt{\rho'} = \tau(H - 1), & \rho - \rho' = 4\tau^2 H, \\ \sqrt{\rho} \cdot \sqrt{\rho'} = \tau^2 (H^2 - 1) = MM'^2. \end{cases}$$

La formule  $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'} = p$  exprime une propriété intéressante : en chaque point  $M$  de  $S$  l'expression  $\sqrt{\rho}$  est supérieure à la quantité analogue du point  $M'$  : la différence est constante et égale au paramètre de  $\mathcal{Q}$ .

La formule  $\sqrt{\rho} \sqrt{\rho'} = MM'^2$  n'est autre que la propriété bien connue relative aux développées d'une surface  $W$ ; elle montre ici que la différence  $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'}$  ne contient en réalité qu'un radical;

<sup>(1)</sup> La correspondance ponctuelle obtenue en associant au point  $M$  de  $S$  le point  $M'$  de  $S'$  conserve les réseaux conjugués. Soient  $\alpha$  le point de  $\mathcal{Q}$  correspondant à  $M$  dans l'application de  $S$  sur  $\mathcal{Q}$  et  $\alpha'$  le point analogue relatif à  $S'$ . Si  $\Theta$  et  $\Theta_1$  désignent les arcs de  $(\mathcal{W})$  et  $(\mathcal{W}_1)$ , l'équation  $\Theta \pm \Theta_1 = \text{const.}$  donne le réseau conjugué commun à  $S$  et  $\mathcal{Q}$  dans la correspondance  $(M, \alpha)$  et à  $S'$  et  $\mathcal{Q}$  dans la correspondance  $(M', \alpha')$ ; or  $M$  et  $M'$  correspondent aux mêmes valeurs de  $\Theta$  et  $\Theta_1$  : on a donc un réseau conjugué commun à  $S, S'$  et  $\mathcal{Q}$  dans l'une quelconque des correspondances ponctuelles  $(M, \alpha), (M', \alpha'), (M, M'), (M, \alpha'), (M', \alpha), (\alpha, \alpha')$ . Ces résultats découlent de propriétés signalées par M. Thybaut et que je reprendrai ultérieurement.

si nous élevons au carré cette formule  $\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'} = p$ , on aura

$$(27) \quad \begin{cases} \rho + \rho' - 2MM'^2 = p^2, \\ H = \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho' - 2MM'^2}. \end{cases}$$

9. Jusqu'ici nous avons montré comment la connaissance d'une courbe sphérique ( $\mathfrak{W}$ ) conduisait au couple des deux surfaces réelles  $S$  et  $S'$ .

Nous savons, d'après Darboux, que, réciproquement, toute surface applicable sur un parabolôide de révolution dérive par le procédé indiqué d'une certaine courbe ( $\mathfrak{W}$ ).

Imaginons donc qu'une surface réelle connue, obtenue par tel procédé que l'on pourra imaginer, soit applicable sur un parabolôide de révolution, de paramètre provisoirement inconnu; provisoirement nous ne savons pas encore si la surface est une surface  $S$  ou une surface  $S'$ . Nous allons reconnaître que, par de simples opérations algébriques, n'exigeant que des extractions de racines carrées, des différentiations et des éliminations, nous pouvons calculer  $p$ , choisir à bon escient le nom  $S$  ou  $S'$ , déterminer la courbe ( $\mathfrak{W}$ ) et la courbe ( $\mathfrak{W}_1$ ), déterminer la surface complémentaire de la proposée et la surface  $\Sigma$ , tracer sur  $\Sigma$  le réseau de translation ( $\mathfrak{A}$ ) et ( $\mathfrak{A}_1$ ), tracer sur  $S$  et  $S'$  les asymptotiques et les parallèles. Quant au tracé des méridiens, il exigera deux quadratures <sup>(1)</sup>.

En effet, par un point *quelconque*  $\overline{M}$  de la surface donnée passe un parallèle et un seul, dont les équations s'obtiennent rationnellement : en effet, le long de cette courbe, la courbure totale de la surface conserve la valeur qu'elle a en  $\overline{M}$ ; les paramètres directeurs de la tangente au parallèle de  $\overline{M}$ , et par suite aussi de la tangente au méridien, s'obtiendront donc rationnellement au moyen des coefficients qui figurent dans l'équation de la surface et des coordonnées du point  $\overline{M}$ . Ce calcul donne donc la congruence des droites  $\overline{M}$ ,  $\overline{M}'$

---

<sup>(1)</sup> Il n'est peut-être pas superflu de faire remarquer que le parabolôide  $\mathcal{Q}$  étant d'une part une surface de révolution, d'autre part une surface de translation engendrée par deux courbes planes placées dans des plans rectangulaires, nous avons *a priori* deux classes particulières de surfaces applicables sur le parabolôide : surfaces de révolution ou hélicoïdales et surfaces de translation.



et sur chacune les coordonnées du second point focal  $\overline{M'}$  exprimées rationnellement au moyen de celles de  $\overline{M}$ ; autrement dit, la seconde surface focale elle-même est connue : la comparaison des valeurs de  $\rho$  et  $\rho'$  en  $\overline{M}$  et  $\overline{M'}$  permet donc d'attribuer les noms S et S', M et M' aux éléments qui le méritent. Le paramètre inconnu  $p$  est obtenu par la racine carrée

$$p = \sqrt{\rho + \rho' - 2 MM'^2}.$$

Si l'on songe que les deux équations  $x^2 + y^2 = \pm 2pz$  représentent des paraboloïdes égaux, on ne doit pas s'étonner que seul  $p^2$  soit donné rationnellement. La seconde formule (27) donne H rationnellement. Appelons  $u, v, w$  les paramètres directeurs de la tangente au parallèle de M ou de la normale en M' à S';  $u', v', w'$  les paramètres directeurs de la tangente au parallèle de M' ou de la normale en M à S. D'après le tableau (25), on aura,  $\eta$  et  $\eta'$  désignant  $+1$  ou  $-1$ ,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{i(c_1 - c)}{\sqrt{2(H-1)}} = \frac{\eta u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad \dots \\ \frac{c + c_1}{\sqrt{2(H+1)}} = \frac{\eta' u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}, \quad \dots \end{array} \right.$$

avec quatre nouvelles racines carrées

$$\sqrt{H-1}, \quad \sqrt{H+1}, \quad \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}$$

que nous prenons positivement.

Si l'on se rappelle que

$$\begin{aligned} x_M - x_{M'} &= i\tau(c'c_1'' - c''c_1') \\ &= \frac{\tau}{2} \begin{vmatrix} c_1' + c' & c_1'' + c'' \\ i(c_1' - c') & i(c_1'' - c'') \end{vmatrix} \\ &= \eta\eta' \frac{wv' - vw'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} \tau \sqrt{(H^2 - 1)}, \end{aligned}$$

on voit que l'on pourra prendre  $\eta$  arbitrairement égal à  $+1$  ou  $-1$  et la formule précédente fixera le signe de  $\eta'$ . Cette détermination faite, on déduit de (28) par additions et soustractions  $c, c', c'', c_1, c_1', c_1''$ ; l'ensemble de ces valeurs n'admet au total que deux systèmes de solutions égales et de signes contraires : on devait, en

effet, trouver deux courbes conjuguées  $(\mathfrak{W})$ ,  $(\mathfrak{W}_1)$  ou les deux courbes symétriques  $(\mathfrak{W}')$ ,  $(\mathfrak{W}_1')$ .

Si donc  $a$  et  $b$  sont les paramètres curvilignes dont dépendent sur  $S$  les coordonnées de  $M$ , on a obtenu algébriquement

$$c = f(a, b), \quad c' = \varphi(a, b), \quad c'' = \psi(a, b).$$

L'une ou l'autre des trois équations équivalentes  $f(a, b) = \text{const.}$  ou  $\varphi(a, b) = \text{const.}$  ou  $\psi(a, b) = \text{const.}$  détermine sur  $S$  et  $S'$  une famille d'asymptotiques, et sur  $\Sigma$  une famille de courbes à torsion constante  $(\mathfrak{A})$ ; les lignes imaginaires conjuguées donnent les secondes asymptotiques ou les courbes  $(\mathfrak{A}_1)$ . Conformément aux prévisions, tous les éléments géométriques ont été obtenus par différentiations, éliminations et calculs algébriques n'exigeant, au plus, que cinq radicaux carrés. Seule, la détermination des méridiens ou l'application effective des  $S$  sur  $\mathcal{Q}$  exige deux quadratures.

10. La construction géométrique rappelée au paragraphe 3 montre bien que si l'on imprime à la sphère, portant les deux courbes  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  *conjuguées*, le déplacement *réel* le plus général autour de l'origine,  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  ne cessent pas d'être conjuguées et les deux surfaces  $S$  et  $S'$  ne font que participer au déplacement général de la figure. Si sur la courbe  $(\mathfrak{W})$  on a posé

$$(29) \quad u = \frac{c + ic'}{1 - c''}, \quad v = -\frac{c + ic'}{1 + c''},$$

les quantités  $u$  et  $v$  sont fonctions du paramètre  $\alpha$  et le déplacement le plus général et *réel* correspond à effectuer sur  $u$  et  $v$  la même substitution homographique

$$(30) \quad u = \frac{mu' + n}{-n_0 u' + m_0}, \quad v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0},$$

où  $m$  et  $n$  sont deux constantes quelconques dont  $m_0$  et  $n_0$  sont les *conjuguées*.

Mais qu'arrive-t-il si nous imprimons à la sphère, autour de son centre, un déplacement arbitraire *non réel*? La courbe  $(\mathfrak{W})$  est remplacée par une courbe  $(\overline{\mathfrak{W}})$ ; nous associons à cette

courbe  $(\overline{15})$ , puisque nous nous bornons aux surfaces réelles, la courbe conjuguée  $(\overline{15}_1)$ , laquelle se déduit de  $(15_1)$ , non pas par le mouvement considéré, mais par le mouvement conjugué. Nous allons chercher quelle relation existe entre la surface primitive  $S$  (ou  $S'$ ) et la surface finale  $\overline{S}$  (ou  $\overline{S}'$ ). L'opération qui fait passer de  $(15)$  à  $(\overline{15})$  se traduit par une substitution

$$(31) \quad U = \frac{Au + B}{Cu + D}, \quad V = \frac{Av + B}{Cv + D},$$

où  $A, B, C, D$  sont des constantes arbitraires, réelles ou imaginaires; comme on peut réduire l'une d'elles à l'unité, cette substitution (31) met en jeu six paramètres réels. Il est facile de voir que cette substitution (31) équivaut à deux opérations successives :

$$(32) \quad \begin{cases} u = \frac{mu' + n}{-n_0 u' + m_0}, & v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0}, \\ U = \lambda u' + \mu + \nu i, & V = \lambda v' + \mu + \nu i, \end{cases}$$

dont la première est un déplacement réel; dans la seconde,  $\lambda, \mu, \nu$  sont trois constantes réelles.

En effet, si  $C$  est nul,  $D$  ne l'est pas, nous pouvons le supposer égal à 1, et la substitution (31) peut s'écrire, en appelant  $\alpha$  l'argument de  $A$ ,

$$U = (Ae^{-i\alpha})ue^{i\alpha} + B, \quad V = (Ae^{-i\alpha})ve^{i\alpha} + B,$$

ou encore

$$(33) \quad \begin{cases} u = u'e^{-i\alpha}, & v = v'e^{-i\alpha}, \\ U = (Ae^{-i\alpha})u' + B, & V = (Ae^{-i\alpha})v' + B; \end{cases}$$

la première opération est précisément une rotation réelle autour de  $Oz$  et le résultat est obtenu dans ce cas.

Si  $C$  n'est pas nul, nous écrivons, pour remplacer (31),

$$(33) \quad \begin{cases} u = \frac{mu' + n}{-n_0 u' + m_0}, & v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0}, \\ U = \frac{A(mu' + n) + B(-n_0 u' + m_0)}{C(mu' + n) + D(-n_0 u' + m_0)}, & V = \dots \end{cases}$$

Choisissons  $m$  et  $n$  de sorte que  $Cm - Dn_0$  soit nul, ce qui est possible d'une infinité de façons : d'après ce qui précède, nous

aurons donc le droit d'écrire, avec ces valeurs de  $m$  et  $n$ ,

$$(35) \quad \begin{cases} u = \frac{mu' + n}{-n_0 u' + m_0}, & v = \frac{mv' + n}{-n_0 v' + m_0}, \\ u' = u'' e^{i\alpha}, & v' = v'' e^{i\alpha}, \\ U = \lambda u'' + \mu + \nu i, & V = \lambda v'' + \mu + \nu i. \end{cases}$$

Or, remplacer  $(u, v)$  par  $(u', v')$  puis  $(u', v')$  par  $(u'', v'')$  revient à effectuer successivement deux déplacements réels autour de l'origine, de sorte que, définitivement, nous avons passé de  $(u, v)$  à  $(u'', v'')$  par un déplacement réel, puis de  $(u'', v'')$  à  $(U, V)$  par l'une de ces substitutions à trois paramètres réels, qui est du type de la seconde opération (32). Nous avons donc bien établi que la substitution (31) se ramène dans tous les cas aux opérations (32). Remarquons encore qu'on peut écrire (31) sous la forme

$$(31') \quad u = \frac{DU - B}{-CU + A}, \quad v = \frac{DV - B}{-CV + A},$$

qui, somme toute, ne diffère de (31) que par l'échange de  $u$  avec  $U$ ,  $v$  avec  $V$ , et par les valeurs numériques données aux coefficients; donc la substitution (31) ou (31') est encore équivalente aux deux opérations successives

$$(36) \quad \begin{cases} u = Lu' + M + Ni, & v = Lv' + M + Ni, \\ U = \frac{pu' + q}{-q_0 u' + p_0}, & V = \frac{pv' + q}{-q_0 v' + p_0}, \end{cases}$$

qui sont encore du même type que les opérations (32), mais dans l'ordre inverse, et avec des coefficients numériques différents.

Donc remplacer  $(u, v)$  par  $(U, V)$  revient d'abord, si l'on adopte la forme (36), à remplacer  $(u, v)$  par  $(u', v')$ ; la surface  $S$  est alors remplacée par une surface  $\bar{S}$  dépendant des constantes  $L, M, N$  qui sont des paramètres de *forme* et non plus des paramètres de *déplacement*; quand on remplace ensuite  $(u', v')$  par  $(U, V)$ , la surface  $\bar{S}$  ne subit plus qu'un déplacement, transformation banale.

Nous nous sommes donc débarrassés des trois paramètres de déplacement qui entrent en jeu dans (31) et il ne nous reste plus

que trois paramètres de forme. Cette réduction serait possible de bien d'autres façons : on aurait pu, par exemple, dire qu'un déplacement *imaginaire* tel que (31) revient à une première rotation *réelle* d'amplitude arbitraire autour d'un diamètre réel arbitraire de la sphère suivie d'une seconde *rotation d'amplitude imaginaire pure* autour d'un nouveau diamètre réel arbitraire de la sphère ; ces deux opérations peuvent, d'ailleurs, être remplacées par deux opérations de même espèce, mais prises en ordre inverse. L'opération que j'ai conservée

$$u = Lu' + M + Ni, \quad v = Lv' + M + Ni,$$

où  $L, M, N$  sont réelles, est peut-être plus appropriée au problème actuel <sup>(1)</sup>. En tous les cas, le résultat fondamental est établi : *Toute surface  $S$  applicable sur le paraboloïde  $\mathcal{Q}$  fait connaître immédiatement une nouvelle série de surfaces  $\bar{S}$  applicables sur  $\mathcal{Q}$ , non égales à la surface initiale, dépendant de trois paramètres de forme. De plus, la surface  $\bar{S}$  correspondant à des valeurs données de  $L, M, N$  s'obtient, quand  $S$  est connue, sans intégration, précisément par les opérations énoncées au paragraphe précédent ; les coordonnées de chaque point de  $\bar{S}$  s'obtiennent algébriquement au moyen des coordonnées du point correspondant de  $S$ . Si donc  $S$  est algébrique,  $\bar{S}$  l'est aussi et réciproquement.*

En effet,  $S$  étant connue, nous avons eu successivement  $p, c, c', c'', c_1, c'_1, c''_1$  et le réseau des courbes de translation tracées sur  $\Sigma$ . On a ensuite

$$u = \frac{c + ic'}{1 - c''}, \quad v = -\frac{c + ic'}{1 + c''}.$$

Les formules (A) données au paragraphe 3 donnent, pour une

<sup>(1)</sup> M. Goursat, aux *Acta mathematica*, t. XI, a précisément étudié cette même transformation appliquée aux surfaces minima. D'autre part,  $S$  fait connaître un couple des surfaces minima se correspondant comme focales d'une même congruence rectiligne, avec conservation des asymptotiques et des lignes de longueur nulle. Les surfaces  $\bar{S}$  fournissent alors les divers couples de surfaces minima qui se déduisent du premier par la transformation de M. Goursat.

courbe  $(\mathfrak{A})$  de  $\Sigma$ ,

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{1-uv}{u-v}, \quad c' = i \frac{1+uv}{u-v}, \quad c'' = \frac{u+v}{u-v}, \\ x+iy = -\tau \int \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u-v)^2}, \\ x-iy = \tau \int \frac{du + dv}{(u-v)^2}, \\ z = \tau \int \frac{u dv + v du}{(u-v)^2}. \end{array} \right.$$

Cheminons donc sur la surface  $\Sigma$  connue, le long d'une courbe  $(\mathfrak{A})$ .  
ce qui est possible, ces courbes étant connues, on a

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x+iy}{-\tau} = \int \frac{v^2 du + u^2 dv}{(u-v)^2}, & \frac{c+ic'}{2} = \int \frac{v^2 du - u^2 dv}{(u-v)^2}, \\ \frac{x-iy}{\tau} = \int \frac{du + dv}{(u-v)^2}, & \frac{c-ic'}{2} = \int \frac{dv - du}{(u-v)^2}, \\ \frac{z}{\tau} = \int \frac{u dv + v du}{(u-v)^2}, & c'' = \int \frac{u dv - v du}{(u-v)^2}. \end{array} \right.$$

On en conclut, par addition et soustraction, la valeur des six intégrales :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \int \frac{du}{(u-v)^2}, & \int \frac{v du}{(u-v)^2}, & \int \frac{v^2 du}{(u-v)^2}, \\ \int \frac{dv}{(u-v)^2}, & \int \frac{u dv}{(u-v)^2}, & \int \frac{u^2 dv}{(u-v)^2}. \end{array} \right.$$

Pour obtenir la surface  $\bar{S}$  il suffit de savoir calculer les coordonnées d'un point de la courbe  $(\bar{\mathfrak{A}})$ , c'est-à-dire les intégrales analogues à (39) où  $u$  et  $v$  sont remplacées par  $u'$  et  $v'$  : or, on constate immédiatement que chacune des six intégrales

$$\int \frac{du'}{(u'-v')^2}, \quad \int \frac{v' du'}{(u'-v')^2}, \quad \dots$$

est une expression linéaire à coefficients constants des intégrales (39); la proposition est donc établie.

## CHAPITRE II.

ÉTUDE SPÉCIALE DES SURFACES ALGÈBRIQUES. SYMÉTRIES. POINTS À L'INFINI.  
SURFACES TRANSCENDANTES DE RÉVOLUTION OU HÉLICOÏDALES.

1. Je me bornerai désormais aux surfaces  $S$  ou  $S'$  non seulement réelles, mais *algébriques*. Les résultats du paragraphe 9 du Chapitre précédent prouvent bien que  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$  sont ensemble algébriques ou transcendentes. La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois surfaces soient algébriques est que la courbe  $(\mathfrak{A})$  soit algébrique elle-même : autrement dit, la courbe  $(\mathfrak{B})$ , ou le cône  $C$ , non seulement sont algébriques, mais satisfont encore aux conditions que j'ai étudiées au Mémoire déjà cité sur les courbes à torsion constante <sup>(1)</sup>.

Les résultats obtenus confirment une fois de plus la nécessité de distinguer le cas où  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}')$  sont distinctes et celui où elles ne forment qu'une même courbe analytiquement indécomposable.

Soit d'abord le premier cas : à un point  $M$  de  $S$  s'associent les points  $m(c, c', c'')$  de  $(\mathfrak{B})$  et  $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$  de  $(\mathfrak{B}_1)$  ou bien les deux points diamétralement opposés  $m'$  et  $m'_1$  de  $(\mathfrak{B}')$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$ . Adoptons par exemple  $m, m_1$ ; décrivons sur  $S$  à partir de  $M$  un circuit fermé continu quelconque : les points  $m, m_1$  suivis par continuité restent sur  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$  sans pouvoir passer sur  $(\mathfrak{B}')$  ou  $(\mathfrak{B}'_1)$ ; donc, au retour en  $M$ , on retrouve le couple  $m, m_1$ ; portons sur la normale en  $M$  un vecteur  $MU$  de projections  $c + c_1, c' + c'_1, c'' + c''_1$  et par suite de longueur  $\sqrt{2(H+1)}$  : si le circuit fermé est *réel*, ce vecteur ne s'annule pas, et, suivi par continuité, se retrouve au retour porté sur la direction initiale et non sur la direction opposée. Il résulte de là, qu'au point de vue réel, la surface  $S$  a deux côtés bien distincts; au point de vue analytique pur, cela n'est pas nécessairement vrai, car le radical  $\sqrt{H+1}$  ne sera pas, en général, une expression rationnelle par rapport aux coordonnées de  $M$ .

---

<sup>(1)</sup> *Annales de l'École Normale supérieure*, 1919; voir en particulier le Chapitre II de ce Mémoire, p. 272 à 305.

Pour la surface  $S'$ , je considère de même le vecteur  $i(c_1 - c)$ ,  $i(c'_1 - c')$ ,  $i(c''_1 - c'')$ , soit  $M'U'$ , de longueur  $\sqrt{2(H-1)}$ ; pour les points réels de  $S$  et  $S'$ , nous savons que  $H$  est positif et supérieur à 1, sauf le cas où la courbe  $(\mathfrak{U})$  admet un ou plusieurs points réels, qui lui sont communs avec  $(\mathfrak{U}_1)$ . Si donc nous supposons que  $(\mathfrak{U})$  n'admet aucun point réel, la surface  $S'$  a, comme  $S$ , deux côtés distincts au point de vue réel, mais non au point de vue analytique. Si  $(\mathfrak{U})$ , sans être réelle au sens vulgaire, admet des points réels, chacun de ces points donne un point réel et *régulier* de  $S$ , un point réel et *singulier* de  $S'$ ; nous pourrions éviter de faire passer le circuit fermé de  $S$  ou  $S'$  par ces points, en nombre fini, et alors une telle circulation ne change pas le sens de demi-normale adopté pour  $S'$ . Si la courbe  $(\mathfrak{U})$  est réelle au sens vulgaire, chacune des surfaces  $S$  et  $S'$  admet un même point réel  $\omega$  pour centre de symétrie,  $\omega$  étant point conique de  $S$  et  $S'$ ; les deux côtés de  $S$  sont encore distincts au point de vue pratique. Quant à  $S'$ , exactement comme dans le cas où  $(\mathfrak{U})$  admet des points réels isolés, ce ne sera plus que par convention que les deux côtés de la surface seront distingués par le vecteur  $M'U'$ . Je reviendrai sur ce cas.

2. On obtient des résultats bien distincts si le cône  $C$ , et par suite, le cône conjugué  $C_1$  coupent la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  suivant une courbe indécomposable <sup>(1)</sup>. Nous avons d'abord remarqué que  $S$  et  $S'$  constituent les deux nappes d'une même surface analytique (supposée de plus, ici, algébrique). Ces deux nappes se distinguent pratiquement par ce fait que  $S$  peut recouvrir  $\mathfrak{Q}$ , tandis que  $S'$  ne le peut. Nous trouverons bientôt d'autres raisons plus intuitives, à simple aspect. Considérons maintenant un point  $M$  réel de  $S$ , qui correspond à un point  $m$  de  $(\mathfrak{U})$  et au point  $m_1$ , imaginaire conjugué de  $m$ , pris sur  $(\mathfrak{U}_1)$  ou encore au

---

<sup>(1)</sup> La surface  $S$  étant connue, en suivant la marche du paragraphe 9 du Chapitre précédent, on forme les expressions  $H$ ;  $u^2 + v^2 + w^2$ ;  $u'^2 + v'^2 + w'^2$  qui sont rationnelles par rapport aux coordonnées de  $M$ . Pour que  $(\mathfrak{U})$  et  $(\mathfrak{U}')$  soient analytiquement distinctes, il faut et il suffit que les deux expressions  $\frac{H-1}{u^2+v^2+w^2}$  et  $\frac{H+1}{u'^2+v'^2+w'^2}$  soient les carrés d'expressions rationnelles convenablement choisies.



couple des deux points diamétralement opposés  $m'$  et  $m'_1$ . Les coordonnées  $c, c', c''$  du point  $m$  étant fonctions du paramètre complexe  $\alpha$ , je joins, dans le plan de cette variable complexe  $\alpha$ , les points figuratifs de  $m$  et  $m'$  par une courbe arbitraire; nous supposons que  $m$  décrive l'arc sphérique correspondant,  $m_1$  restant le conjugué de  $m$ ; nous décrivons sur  $S$  un circuit réel partant de  $M$  et  $y$  revenant; au retour, nous obtenons pour  $c, c', c''$  suivies par continuité les déterminations opposées; le vecteur  $MU$  déjà considéré, porté sur la normale, de longueur  $\sqrt{2(H+1)}$  toujours non nulle, est retrouvé au retour, avec des projections égales et de signe contraire : donc ce circuit, continu et réel, tracé sur  $S$ , a changé le sens de la demi-normale suivie par continuité; la surface  $S$  n'a donc qu'un côté.

Pour  $S'$ , le résultat est le même, la démonstration est identique, si  $(\mathfrak{U})$  n'a qu'un nombre fini ou nul de points réels : on trace le circuit dans le plan  $(\alpha)$  de façon à éviter ces points, de sorte que  $\sqrt{H-1}$  ne s'annule pas. Si  $(\mathfrak{U})$  est une courbe réelle au sens vulgaire, comme précédemment  $S$  et  $S'$  admettent un centre commun et le résultat relatif à  $S'$  aura besoin d'être revu à part.

Les exemples les plus simples sont donnés dans mon *Mémoire de l'École Normale* : page 336, cône  $C$  réel du degré 6, coupant la sphère suivant deux courbes  $(\mathfrak{U})$  et  $(\mathfrak{U}')$  distinctes de degré 6; page 331, cône  $C$  réel de degré 5 coupant la sphère suivant une courbe unique de degré 10; page 308, en courbes sphériques imaginaires, cubique de M. Lyon, qui sera étudiée plus loin en détail,  $(\mathfrak{U})$  et  $(\mathfrak{U}')$  sont deux courbes distinctes du second degré; pages 332 à 335 divers exemples de cônes du degré 5 donnant une courbe  $(\mathfrak{U})$  indécomposable du degré 10 et imaginaire.

3. Revenons au premier cas :  $(\mathfrak{U})$  distincte de  $(\mathfrak{U}')$ ;  $S$  et  $S'$  sont analytiquement distinctes, chacune est connexe, ainsi que  $\Sigma$  (rappelons que nous supposons  $S$  et  $S'$  réelles et algébriques). En effet, à un point  $M$  quelconque de  $S$  correspond un point et un seul  $m$  de  $\mathfrak{U}$ , de même à un point  $N$  correspond un point  $n$ ;  $c, c', c''$  étant fonctions de la variable complexe  $\alpha$ , marquons dans le plan  $(\alpha)$  les points figuratifs de  $m$  et  $n$  : il existe manifestement une infinité de chemins finis et continus joignant  $m$  à  $n$  et par

suite une infinité de chemins réels finis reliant sur  $S$  les points réels  $M$  et  $N$  sans quitter  $S$ . Même remarque pour  $S'$  et  $\Sigma$ .

Si  $(\mathfrak{W})$  n'est pas analytiquement distincte de  $(\mathfrak{W}')$ ,  $S$  et  $S'$  ne sont pas analytiquement distinctes : soient  $M$  et  $M'$  deux points réels associés de  $S$  et  $S'$ ; à ce couple correspondent un premier couple de points imaginaires conjugués  $m$  et  $m_1$  sur  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$ , et le second couple  $m'$ ,  $m'_1$ . On peut dire (Chap. I, § 3) que  $M$  correspond à  $m$  et  $m_1$  ou bien à  $m'$  et  $m'_1$ ; mais on peut dire aussi que  $M'$  correspond (avec  $\varepsilon = +1$ ) à  $m$  et  $m'_1$  ou à  $m'$  et  $m_1$ . Mais alors, pour passer d'un chemin continu de  $M$  à  $M'$ , il faut disposer de  $\alpha$  et  $\beta$  de façon :

Soit à partir de  $m$  sur  $(\mathfrak{W})$  et  $m_1$  sur  $(\mathfrak{W}_1)$  pour aboutir respectivement à  $m$  et  $m'_1$ ;

Soit à partir de  $m$  et  $m_1$  pour aboutir à  $m'$  et  $m_1$ ;

Soit à décrire sur  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  les arcs diamétralement opposés à ceux que nous venons de considérer.

Dans aucun des cas, les arcs décrits sur  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  ne sont imaginaires conjugués l'un de l'autre; donc on a bien, sur la surface analytique  $(S, S')$ , circulé d'une façon continue de  $M$  en  $M'$  sans quitter cette surface, mais le chemin est nécessairement imaginaire sur une certaine étendue.  $S$  et  $S'$  sont donc bien deux nappes de surface distinctes, séparées l'une de l'autre; si elles sont réalisées matériellement, ce fait sautera aux yeux. Elles peuvent peut être se traverser soit le long d'une ligne double, soit en un point conique (dans le cas d'un centre de symétrie, par exemple), mais la variation continue du plan tangent permettra, si cet accident se produit, de discriminer  $S$  et  $S'$ . En tout cas la même démonstration que précédemment montre que l'on peut joindre d'un trait continu sur  $S$  deux points réels quelconques  $M$  et  $N$  de cette nappe  $S$ ; de même sur  $S'$ . Et il est clair qu'un point réel  $M$  de  $S$  et un point réel  $N'$  de  $S'$  ne peuvent être joints par un arc réel. Nous avons vu, plus haut, qu'il y avait lieu sur  $S$  de distinguer deux sortes de circuits fermés : ceux qui ne changent pas le sens de la demi-normale et ceux qui le changent.

4. Cherchons maintenant à quelles conditions  $S, S', \Sigma$  admettent un centre, un plan ou un axe de symétrie ou encore un axe de rotation.

Il suffit de songer à la congruence des droites  $MM'$  pour voir qu'une telle propriété ne peut appartenir à l'une des trois surfaces, sans appartenir aussi aux deux autres.

Je mettrai à contribution le beau Mémoire de M. Goursat (*Annales de l'École Normale*, 1887) sur les surfaces admettant les symétries d'un polyèdre régulier. Je généraliserai d'abord la notion de surfaces *simples* ou *doubles* de cet auteur : il réserve le nom de *surfaces simples* à celles, telles que la sphère, le tore, les surfaces minima simples, etc., dont on peut séparer analytiquement, en chaque point, les deux directions opposées portées par la normale. Sur les surfaces doubles, au contraire, une circulation convenablement choisie, à partir d'un point quelconque pour y revenir, échange ces deux directions : mais pour les unes, telles que les surfaces minima algébriques doubles, ou la surface réglée d'équation

$$y^2(1-z) = x^2(1+z),$$

cette circonstance peut se réaliser avec des circuits réels, tandis que pour les autres, tel l'ellipsoïde, elle ne se réalise qu'avec des circuits imaginaires. En me plaçant cette fois au point de vue du profane, je pourrai donc convenir de faire passer dans la catégorie des surfaces simples les surfaces doubles dont le sens de la normale reste inaltéré par les circulations réelles. C'est cette nouvelle définition que j'adopte maintenant.

Soit alors une surface simple, qui admet un centre (ou un plan, ou un axe) de symétrie. Considérons en chaque point la normale dirigée du côté adopté une fois pour toutes sur toute l'étendue de la surface; soient deux points  $M$ ,  $N$  qui se correspondent dans cette symétrie. Si les deux demi-normales en  $M$ ,  $N$  résultent effectivement l'une de l'autre par cette symétrie, je dirai que la symétrie est de *première espèce*; si au contraire la symétrique de la demi-normale en  $M$  est directement opposée à la demi-normale de  $N$ , je dirai que la symétrie est de *deuxième espèce*. Ceci est d'ailleurs la définition et le langage de M. Goursat transposés ici. On retrouve les mêmes conséquences : par exemple, si une surface simple  $S$  admet un plan de symétrie  $P$  et si l'un des morceaux de l'intersection de  $S$  et  $P$  est géodésique pour  $S$ ,  $P$  est plan de symétrie de *première espèce*; l'intersection d'une surface simple  $S$

avec un plan de symétrie de deuxième espèce est nécessairement ligne multiple, etc.

J'adopte aussi les conventions de M. Goursat pour l'emploi des mots : *fonction réelle, ligne* ou *surface réelle*. Une surface est dite *réelle*, si elle est identique à sa conjuguée : le cône isotrope  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  au point de vue de M. Goursat est réel. Quand ce sera nécessaire, j'adopterai l'écriture : réel ( $\nu$ ) ou réel ( $\mathcal{G}$ ) quand il s'agira de la réalité au sens du profane ou de la réalité au sens de M. Goursat.

§. Cela nous guidera dans l'étude de la symétrie par rapport à un point  $\omega$ .

Nous savons que le rayon de torsion d'une courbe est une quantité possédant un signe propre : une symétrie par rapport à un point ou un plan en change le signe, une symétrie par rapport à une droite le laisse inaltéré.

Soient donc les trois points associés  $M, M', \mu$  de  $S, S', \Sigma$  et les symétriques respectifs  $N, N', \nu$  par rapport au centre  $\omega$ . En  $\mu$  se croisent sur  $\Sigma$  deux courbes  $(\mathfrak{A}^\mu)$  et  $(\mathfrak{A}_1^\mu)$  de rayon de torsion  $\frac{i\tau}{2}$  et  $\frac{-i\tau}{2}$  respectivement; en  $\nu$  se croisent deux courbes à torsion constante symétriques, dans leur ensemble, des précédentes par rapport à  $\omega$ . La remarque précédente nous montre donc que  $(\mathfrak{A}^\mu)$  a pour symétrique  $(\mathfrak{A}_1^\nu)$ . La symétrie remplace la normale  $(c + c_1, c' + c'_1, c'' + c''_1)$  par une droite, parallèle de même sens ou non, on en conclut donc qu'elle produit l'un des deux échanges ci-dessous :

$$(1) \quad \begin{cases} c, & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1; \\ c_1, & c'_1, & c''_1; & c, & c', & c''. \end{cases}$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} c, & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1, \\ -c_1, & -c'_1, & -c''_1; & -c, & -c', & -c''. \end{cases}$$

La courbe  $(\mathfrak{B})$ , lieu du point  $(c, c', c'')$ , se trouve, dans le premier cas, lieu également du point  $(c_1, c'_1, c''_1)$  et coïncide donc avec  $(\mathfrak{B}_1)$ ; dans le second cas elle coïncide avec  $(\mathfrak{B}'_1)$ . De toutes façons,  $C$  et  $C_1$  coïncident,  $C$  est réel ( $\nu$ ) ou ( $\mathcal{G}$ ).

Quand le cône  $C$  est réel ( $\nu$ ), la courbe  $(\mathfrak{B})$  est réelle ( $\nu$ ), donc coïncide nécessairement avec  $(\mathfrak{B}_1)$ ; si  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}'_1)$  sont distinctes,

le fait que  $(\mathfrak{W})$  coïncide avec  $(\mathfrak{W}'_1)$  et non  $(\mathfrak{W}_1)$  entraîne que C soit réel  $(\mathfrak{G})$  seulement. Mais si le cône C est réel  $(\mathfrak{G})$ , il peut arriver, suivant le cas, que  $(\mathfrak{W})$  coïncide soit avec  $(\mathfrak{W}_1)$ , soit avec  $(\mathfrak{W}'_1)$ .

Réciproquement, supposons C et  $C_1$  coïncidant : les surfaces S,  $S'$ ,  $\Sigma$ , *pourvu qu'elles soient algébriques*, ont un centre commun de symétrie. Considérons la section  $\sigma$  de C par le plan  $z = 1$  et le point  $P(\xi, \eta, 1)$  où la droite Om perce le plan  $z = 1$ . J'écris pour S,  $S'$  ou  $\Sigma$

$$(3) \quad x = \frac{i\tau}{2} \int_Q^P \frac{d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1} - \frac{i\tau}{2} \int_{Q_1}^{P_1} \frac{d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1} + \frac{\varepsilon i\tau}{2} (c'c'_1 - c''c'_1),$$

où Q est un point fixe de  $\sigma$ ,  $Q_1$  le point conjugué, situé aussi sur  $\sigma$  en vertu de l'hypothèse; P et  $P_1$  sont les points  $(\frac{c}{c'}, \frac{c'}{c''}, 1)$  et  $(\frac{c_1}{c'_1}, \frac{c'_1}{c''_1}, 1)$  conjugués sur  $\sigma$ .

Échangeons P avec  $P_1$ , nous avons un nouveau point de la surface

$$(4) \quad x_1 = \frac{i\tau}{2} \int_Q^{P_1} \frac{d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1} - \frac{i\tau}{2} \int_{Q_1}^P \frac{d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1} - \frac{\varepsilon i\tau}{2} (c'c'_1 - c''c'_1).$$

En ajoutant

$$(5) \quad x + x_1 = \frac{i\tau}{2} \left\{ \int_Q^P + \int_P^{Q_1} + \int_{Q_1}^{P_1} + \int_{P_1}^{Q_1} \right\} = i\tau \int_Q^{Q_1}.$$

Ceci prouve que  $x + x_1$  est une constante, d'ailleurs réelle, car  $\int_Q^{Q_1}$  a pour conjuguée  $\int_{Q_1}^Q$ , de sorte que  $\int_Q^{Q_1}$  est une imaginaire pure. Le raisonnement est le même pour  $y + y_1$ ;  $z + z_1$ ; donc nous avons bien vérifié l'existence d'un centre commun aux trois surfaces. La démonstration suppose bien que les intégrales curvilignes n'aient qu'une détermination, les limites étant données; si les surfaces étaient transcendentes, notre raisonnement serait en défaut, au moins dans certains cas. Il existe des surfaces transcendentes à centre (surfaces de révolution); pour de telles surfaces il est toujours nécessaire, mais non suffisant, que C soit réel  $(\nu)$  ou  $(j)$ .

Revenons aux surfaces algébriques et supposons C réel  $(\nu)$ . Les

points  $m$  et  $m_1$  peuvent, sans cesser d'être conjugués, tendre vers un même point réel de la courbe  $(\mathfrak{U})$  : quand  $m$  et  $m_1$  sont confondus, les trois points  $M$ ,  $M'$ ,  $\mu$  se trouvent confondus tous avec  $\omega$ ; la normale en  $M$  à  $S$  est devenue la parallèle à la droite  $Om$ , binormale de  $(\mathfrak{A})$ . Donc le centre  $\omega$  est un point conique de  $S$ , le cône des tangentes en  $\omega$  étant constitué par les parallèles aux tangentes de la courbe  $(\mathfrak{A})$  (ou supplémentaire de  $C$ ); quant à la surface  $S'$ , la normale, étant toujours parallèle à la droite  $mm_1$ , devient à la limite parallèle à la tangente en  $m$  à  $(\mathfrak{U})$  : cette tangente est parallèle à la normale principale de  $(\mathfrak{A})$  : donc le point  $\omega$  est aussi conique pour  $S'$ , le cône des tangentes est supplémentaire du cône directeur des normales principales de  $(\mathfrak{A})$  [ou du cône directeur des tangentes de  $(\mathfrak{U})$ ]. Quant au plan tangent à  $\Sigma$ , tant que  $m$  et  $m_1$  sont distincts ou non diamétralement opposés, le plan tangent à  $\Sigma$  est parallèle aux tangentes en  $(\mathfrak{A})$  aux points correspondants à  $m$  et  $m_1$  : à la limite on trouve donc le plan osculateur, donc  $\omega$  est aussi conique pour  $\Sigma$  et le cône circonscrit à  $\Sigma$  au point  $\omega$  est celui déjà trouvé pour  $S$ .

Dans l'hypothèse qui vient d'être examinée,  $C$  réel  $(r)$ , peu importe que  $(\mathfrak{U})$  soit ou non distincte de  $(\mathfrak{U}')$ ; le point  $\omega$  est point conique réel non isolé de  $S$ ,  $S'$ , et  $\Sigma$ . Si nous supposons maintenant  $(\mathfrak{U})$  réelle  $(g)$  seulement, distincte ou non de  $(\mathfrak{U}')$ ,  $C$  aussi est réel  $(g)$  seulement, le point  $\omega$ , toujours réel, est point conique isolé de  $S$ ,  $S'$ , et  $\Sigma$ , les cônes des tangentes étant toujours ceux que nous avons indiqués.

La dernière hypothèse, enfin, est que  $(\mathfrak{U})$  coïncide avec  $(\mathfrak{U}_1')$ , mais non avec  $(\mathfrak{U}_1)$ , ce qui entraîne que  $(\mathfrak{U})$  et  $(\mathfrak{U}')$  soient distinctes;  $C$  est encore réel  $(g)$ ; le point  $\omega$ , réel, est conique isolé encore pour  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$  : mais cette fois le cône supplémentaire de  $C$  ayant  $\omega$  pour sommet est circonscrit en  $\omega$  à  $S'$  et non à  $S$ , il reste circonscrit à  $\Sigma$  et le cône directeur des tangentes de  $(\mathfrak{U})$  est circonscrit à  $S$  et non  $S'$ .

6. Si nous supposons  $(\mathfrak{U})$  et  $(\mathfrak{U}')$  distinctes de sorte que  $S$  et  $S'$  soient surfaces simples, la considération des vecteurs  $MU$  et  $M'U'$  suivis par continuité jusqu'à la position  $NV$  ou  $N'V'$ , qu'ils prennent en  $N$  et  $N'$ , montre que la symétrie est de première espèce pour  $S'$  et de seconde pour  $S$  si  $(\mathfrak{U})$  coïncide avec  $(\mathfrak{U}_1)$ , qu'elle

soit réelle ( $\nu$ ) ou ( $G$ ). Si ( $\mathfrak{H}$ ) coïncide avec ( $\mathfrak{H}'_1$ ), c'est l'inverse qui a lieu : première espèce pour  $S$ , seconde pour  $S'$ .

Si nous supposons que ( $\mathfrak{H}$ ) est réelle au sens vulgaire, les cosinus  $c, c', c''$  sont fonctions d'une variable complexe  $z = \lambda + \mu i$  que nous pouvons supposer choisie de sorte que les points réels de ( $\mathfrak{H}$ ) correspondent aux valeurs réelles de  $z$ ; de la sorte un point réel  $M$  de  $S$  étant figuré, comme nous l'avons dit, par le point  $(\lambda, \mu)$  dans le plan ( $\alpha$ ), le point symétrique  $N$  est figuré par le point  $(\lambda, -\mu)$ . Si donc nous circulons sur  $S$  depuis  $M$  jusqu'en  $N$ , nous circulons dans le plan ( $\alpha$ ) depuis le point  $(\lambda, \mu)$  jusqu'au point  $(\lambda, -\mu)$ , donc nous rencontrons nécessairement l'axe réel du plan ( $\alpha$ ) et sur  $S$  nous passons en  $\omega$ ; de même sur  $S'$  on ne peut passer de  $M'$  à  $N'$  sans passer en  $\omega$ . Le centre  $\omega$  partage donc  $S$  (ou  $S'$ ) en deux régions symétriques l'une de l'autre, telles que deux points de chacune peuvent être joints par un chemin réel, fini, restant toujours sur cette région, tandis que pour aller d'un point de l'une à un point de l'autre, on doit nécessairement passer au point  $\omega$ .

Au paragraphe 2 de ce Chapitre j'ai signalé une certaine difficulté à définir un côté sur la surface  $S'$ , quand ( $\mathfrak{H}$ ) est réelle ( $\nu$ ), parce que le vecteur  $M'U'$  de projections  $i(c_1 - c), i(c'_1 - c'), i(c''_1 - c'')$  s'annule précisément en passant en  $\omega$  : en tout cas, chacune des deux régions définies sur  $S'$  et séparées par  $\omega$  a un côté bien défini au point de vue du profane, qui est celui à adopter ici : l'une de ces régions correspond sur le plan ( $\alpha$ ) au demi-plan  $\mu > 0$ , l'autre au demi-plan  $\mu < 0$ . Si j'introduis donc cette convention, peut-être un peu arbitraire, que le côté de la surface est défini en chaque point par ce vecteur  $M'U'$ , la définition ne cesse de valoir qu'en  $\omega$ ; dans ces conditions je peux continuer à définir l'espèce de la symétrie pour  $S'$  sans introduire de contradiction.

Remarquons qu'en un point voisin de  $\omega$  sur  $S$ , l'expression  $\sqrt{R'R''}$  ou  $\tau(H+1)$  tend vers  $2\tau$  ou  $p$  quand ce point tend vers  $\omega$ ; sur  $S'$ , la même expression  $\sqrt{R'R''}$  tend vers zéro et ceci peut expliquer pourquoi  $\omega$  est, si l'on peut dire, plus singulier sur  $S'$  que sur  $S$ .

7. Il importe maintenant de voir comment, en supposant ( $\mathfrak{H}$ )

unicursale, nous reconnâtrons si  $(\mathfrak{U})$  coïncide avec  $(\mathfrak{U}_1)$ . Rappelons que sur la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  les coordonnées d'un point  $(c, c', c'')$  peuvent s'exprimer au moyen de deux arbitraires  $(\alpha, \beta)$  ou  $(u, v)$  par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, & \beta = \frac{c - ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c + ic'}, \\ c + ic' = \frac{2\alpha}{1 + \alpha\beta}, & c - ic' = \frac{2\beta}{1 + \alpha\beta}, & c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta + 1}; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} u = \frac{c + ic'}{1 - c''} = \frac{1 + c''}{c - ic'}, & v = -\frac{c + ic'}{1 + c''} = -\frac{1 - c''}{c - ic'}, \\ c + ic' = \frac{-2uv}{u - v}, & c - ic' = \frac{2}{u - v}, & c'' = \frac{u + v}{u - v}. \end{cases}$$

On a évidemment  $\alpha = u$ ,  $\beta = \frac{-1}{v}$ ; suivant le cas il y a avantage à employer  $(\alpha, \beta)$  ou  $(u, v)$ .

Soient  $\alpha_0, \beta_0, u_0, v_0$  les conjuguées de  $\alpha, \beta, u, v$ . Quand on passe d'un point  $m(c, c', c'')$  au point conjugué  $m_1(c_1, c'_1, c''_1)$ , il faut remplacer  $(\alpha, \beta)$  par  $(\beta_0, \alpha_0)$  ou  $(u, v)$  par  $(\frac{-1}{v_0}, \frac{-1}{u_0})$ .

Dire que  $(\mathfrak{U})$  est unicursale, c'est dire que l'on peut regarder  $(\alpha, \beta)$  comme les coordonnées d'un point d'une certaine courbe plane unicursale; on aura

$$\alpha = f(q), \quad \beta = \varphi(q),$$

où  $f$  et  $\varphi$  sont des fractions rationnelles d'une variable  $q$ ; appelons  $q_0$  l'imaginaire conjuguée de  $q$ ,  $f_0$  et  $\varphi_0$  les fractions rationnelles obtenues en remplaçant dans  $f$  et  $\varphi$  les coefficients des diverses puissances de  $q$  par les coefficients conjugués; on a

$$\alpha_0 = f_0(q_0) \quad \text{et} \quad \beta_0 = \varphi_0(q_0).$$

Dire que  $(\mathfrak{U})$  coïncide avec  $(\mathfrak{U}_1)$ , c'est dire que la courbe plane  $(\alpha, \beta)$  et la courbe plane  $(\beta_0, \alpha_0)$  coïncident. Ceci entraîne

$$(8) \quad \varphi_0(q) \equiv f\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right), \quad f_0(q) \equiv \varphi\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right),$$

A, B, C, D étant des constantes numériques telles que

$$AD - BC \neq 0.$$



Si  $A_0, B_0, C_0, D_0$  sont les conjuguées de  $A, B, C, D$ , on a aussi

$$(9) \quad \varphi(q) \equiv f_0\left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0}\right), \quad f(q) \equiv \varphi_0\left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0}\right).$$

Enfin, dans (8), remplaçons  $q$  par  $\frac{B - Dq}{Cq - A}$ , ce qui revient à mettre les identités (8) sous la forme équivalente

$$(10) \quad \varphi_0\left(\frac{B - Dq}{Cq - A}\right) \equiv f(q), \quad f_0\left(\frac{B - Dq}{Cq - A}\right) \equiv \varphi(q).$$

La comparaison de (9) et (10) donne

$$(11) \quad \begin{cases} f(q) \equiv \varphi_0\left(\frac{B - Dq}{Cq - A}\right) \equiv \varphi_0\left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0}\right), \\ \varphi(q) \equiv f_0\left(\frac{B - Dq}{Cq - A}\right) \equiv f_0\left(\frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0}\right). \end{cases}$$

Comme la représentation paramétrique  $[f(q), \varphi(q)]$  est supposée normale, les identités (11), où  $q$  est quelconque, entraînent

$$\frac{B - Dq}{Cq - A} \equiv \frac{A_0 q + B_0}{C_0 q + D_0}.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que la courbe  $(\alpha, \beta)$  soit donnée par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha = f(q), \\ \beta = f_0\left(\frac{B - Dq}{Cq - A}\right), \end{cases}$$

où les constantes  $A, B, C, D$  satisfont aux relations

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{-A}{D_0} = \frac{-D}{A_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{C}{C_0}, \\ AD - BC \neq 0. \end{cases}$$

Le point  $(c, c', c'')$ , correspondant à  $q$  [ $\alpha = f(q), \beta = \varphi(q)$ ], a pour conjugué le point  $[\varphi_0(q_0), f_0(q_0)]$  qui, d'après notre point de départ (8), correspond à  $\frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$ ; pour que la courbe  $(c, c', c'')$ , qui est réelle, d'après les conditions (12) et (13) soit réelle ( $v$ ), il faut et il suffit que l'égalité

$$(14) \quad q = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}$$

admette une infinité de solutions  $(q, q_0)$ , où  $q$  et  $q_0$  sont conjuguées; sinon la courbe  $(\mathfrak{V})$  sera simplement réelle  $(\mathfrak{G})$ . Les conditions (13) sont faciles à résoudre, mais la remarque faite sur l'égalité (14) va nous permettre de trouver d'une façon intuitive les formes canoniques réduites des équations (12) et (13). Remarquons que  $AA_0 = DD_0$  prouve que  $A$  et  $D$  ont même module; chacun des rapports (13) a pour module l'unité; multiplions  $A, B, C, D$  par  $e^{i\alpha}$  où  $\alpha$  est un argument réel;  $A_0, B_0, C_0, D_0$  sont multipliées par  $e^{-i\alpha}$ , donc chacun des rapports (13) est multiplié par  $e^{2i\alpha}$  et l'on peut disposer de  $\alpha$  pour que la valeur commune des rapports (13) soit l'unité, d'où  $D = -A_0, B$  et  $C$  réels. L'égalité (14) devient donc  $Cqq_0 - A_0q - Aq_0 - B = 0$ . Si donc, dans le plan de la variable complexe  $q$ , on pose

$$q = x + iy, \quad q_0 = x - iy,$$

on peut écrire, au lieu de (14),

$$(15) \quad C(x^2 + y^2) - (A + A_0)x - i(A - A_0)y - B = 0,$$

équation à coefficients réels en  $x, y$ : si cette équation représente un cercle réel  $[(\nu)$  bien entendu], à chaque point  $(x, y)$  de ce cercle correspond une valeur de  $q, (x + iy)$ , donnant un point réel de la courbe  $(\mathfrak{V})$ ; si l'équation (15) représente un cercle imaginaire, la courbe  $(\mathfrak{V})$  est réelle  $(\mathfrak{G})$  simplement.

Or on peut toujours, sur le paramètre  $q$  adopté, faire une substitution homographique arbitraire  $q = \frac{\lambda Q + \mu}{\nu Q + \rho}$ , où  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  sont des constantes arbitraires, *réelles ou non*. Si l'on pose  $q = x + iy, Q = X + iY$ , cette transformation établit entre les deux plans  $(x, y), (X, Y)$  une correspondance ponctuelle *réelle* bien connue transformant un cercle en cercle; les droites de l'un ou l'autre plan se transforment également en cercles. Étant donnés deux plans, choisissant dans l'un trois points  $a, b, c$  arbitrairement, dans l'autre trois points  $A, B, C$  arbitrairement, on détermine d'une façon unique les coefficients de la substitution homographique  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  en écrivant que  $a$  et  $A$  se correspondent, ainsi que  $b$  et  $B$  ou  $c$  et  $C$ , et le cercle circonscrit au triangle  $abc$  a pour transformé le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

Si donc la courbe  $(\mathfrak{V})$  est réelle  $(\nu)$ , on fera correspondre le

cercle (15) à l'axe réel du plan (X, Y) ou, si l'on préfère, supposons purement et simplement ce cercle déjà réduit à l'axe réel : on a  $B = C = 0$ , A imaginaire pure et par suite, la forme réduite

$$(16) \quad \alpha = f(q), \quad \beta = f_0(q).$$

Si la courbe (15) est réelle (g), le cercle (15) est imaginaire (mais à coefficients réels) et on peut lui faire correspondre par la même transformation réelle le cercle  $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ ; on peut donc simplement supposer  $A = A_0 = 0$ ,  $B = -C$ , et l'on a la forme réduite

$$(17) \quad \alpha = f(q), \quad \beta = f_0\left(\frac{-1}{q}\right).$$

Avec les équations (16), si l'on a posé  $q = x + yi$ , les points M, M',  $\mu$  qui correspondent au système (x, y) ont pour symétriques les points N, N',  $\nu$  qui correspondent au système (x, -y). Avec les équations (17), deux points conjugués sur (15) correspondent aux valeurs  $q$  et  $\frac{-1}{q_0}$ ; si donc on considère encore l'ensemble M, M',  $\mu$  qui correspond au système (x, y), l'ensemble symétrique N, N',  $\nu$  correspond au système  $\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}$ .

On peut encore remarquer que, dans le cas où la courbe (15) est réelle (v), on peut être amené à supposer que le cercle (15) se réduit non à l'axe réel  $y = 0$ , mais au cercle  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , auquel cas on trouve une forme réduite équivalente à (16), soit

$$(16') \quad \alpha = f(q), \quad \beta = f_0\left(\frac{1}{q}\right).$$

En posant toujours  $q = x + iy$ , le système (x, y) correspond à M, M',  $\mu$  et le système  $\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}$  au système N, N',  $\nu$ .

Enfin, dans une étude, où interviendraient plusieurs séries de symétries, on pourrait être conduit à garder la forme générale (12), qui s'écrirait

$$(12') \quad \alpha = f(q), \quad \beta = f_0\left(\frac{B + A_0 q}{C q - A}\right),$$

où B et C sont réels, A et  $A_0$  imaginaires conjugués : si l'on a  $AA_0 + BC > 0$ , il s'agit d'une courbe (15) réelle (v); si l'on a

$AA_0 + BC < 0$ , il s'agit d'une courbe  $(\mathfrak{W})$  réelle  $(\mathfrak{G})$ . Cette quantité  $AA_0 + BC$  ne peut être nulle; les points  $q$  et  $\frac{Aq_0 + B}{Cq_0 - A_0}$  sont conjugués sur  $(\mathfrak{W})$ ; dans le plan de la variable  $q$ , les points symétriques sont figurés par deux points inverses par rapport au cercle (15).

Quant aux exemples de surfaces algébriques  $S, S', \Sigma$  à centre de ce type, je ne puis que renvoyer à mon *Mémoire de l'École Normale*: toutes les courbes à torsion constante réelle  $(v)$  qui y sont déterminées donnent autant de surfaces du type (16). J'ai de plus indiqué, page 326, un type

$$(18) \quad \alpha = q^p \frac{q^m + B_1 C_1}{B_1 q^m + C_1}; \quad \beta = \frac{-1}{q^p} \frac{1 + B_1 C_1 q^m}{B_1 + C_1 q^m},$$

où  $m$  est un entier pair,  $p$  un entier impair, rentrant dans le type canonique (17); page 346, il y a encore un autre exemple du même type, où le cône  $C$  est du degré 6.

8. Voyons maintenant le cas où  $(\mathfrak{W})$  coïncide avec  $(\mathfrak{W}'_1)$ , mais non  $(\mathfrak{W}_1)$ . Soit le tableau des coordonnées  $(\alpha, \beta)$  ou  $(u, v)$  des points  $m, m'; m_1, m'_1$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} m \dots & \alpha & \beta & u & v, & m_1 \dots & \beta_0 & \alpha_0 & \frac{-1}{v_0} & \frac{-1}{u_0}, \\ m' \dots & \frac{-1}{\beta} & \frac{-1}{\alpha} & v & u, & m'_1 \dots & \frac{-1}{\alpha_0} & \frac{-1}{\beta_0} & \frac{-1}{u_0} & \frac{-1}{v_0}. \end{array}$$

Les courbes planes unicursales  $(\alpha, \beta)$  et  $(\frac{-1}{\alpha_0}, \frac{-1}{\beta_0})$  doivent coïncider. Si l'on a posé  $\alpha = f(q)$ ,  $\beta = \varphi(q)$ , où  $f$  et  $\varphi$  sont des fractions rationnelles, nous obtenons comme plus haut une série d'identités

$$(19) \quad \frac{-1}{f_0(q)} \equiv f\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right), \quad \frac{-1}{\varphi_0(q)} \equiv \varphi\left(\frac{Aq + B}{Cq + D}\right),$$

puis

$$(20) \quad \begin{cases} f(q)f_0\left(\frac{Dq - B}{-Cq + A}\right) \equiv -1, & \varphi(q)\varphi_0\left(\frac{Dq - B}{-Cq + A}\right) \equiv -1, \\ f(q)f_0\left(\frac{A_0q + B_0}{C_0q + D_0}\right) \equiv -1, & \varphi(q)\varphi_0\left(\frac{A_0q + B_0}{C_0q + D_0}\right) \equiv -1. \end{cases}$$

La comparaison des identités (20) montre que  $\frac{Dq - B}{-Cq + A}$  et  $\frac{A_0q + B_0}{C_0q + D_0}$  coïncident, d'où il résulte comme plus haut que  $\frac{Aq + B}{Cq + D}$  peut être ramenée à la forme  $q$  ou  $\frac{-1}{q}$ . La forme  $q$  est inacceptable ici, parce que le produit  $f(q)f_0(q)$  est nécessairement positif pour  $q$  réel; il ne reste donc que la forme canonique correspondant aux deux identités

$$(21) \quad f(q)f_0\left(\frac{-1}{q}\right) \equiv -1, \quad \varphi(q)\varphi_0\left(\frac{-1}{q}\right) \equiv -1.$$

Dans le plan de la variable  $q$  ( $q = x + iy$ ), deux points symétriques sur une de nos surfaces correspondent à deux points  $x, y$  et  $\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}$  qui se correspondent dans une inversion de pôle origine et de puissance égale à  $-1$ .

La solution générale de l'identité (21) s'obtient en prenant pour  $f$  une fraction de la forme

$$(22) \quad f \equiv q^p \frac{Aq^m + A_1q^{m+1} + \dots + A_m}{A' - A'_1q + \dots + (-1)^m A'_m q^m},$$

où  $p$  et  $m$  sont deux entiers quelconques de parité différente et  $A_j, A'_j$  deux constantes conjuguées;  $\varphi$  est une fraction rationnelle du même type pour laquelle on prend les entiers  $p_1, m_1$  distincts ou non de  $p$  et  $m$ . Bien entendu, il reste à écrire que la courbe  $(\mathcal{A})$  est algébrique. Dans le *Mémoire de l'École Normale*, page 328, le lecteur trouvera un exemple de ce type. J'ai indiqué au Chapitre V (1) une courbe de cette espèce, de genre arbitrairement grand, possédant à cet égard des propriétés curieuses.

9. Soit maintenant à étudier la symétrie par rapport à un plan que nous prendrons pour plan  $zOx$ . Comme précédemment, on verra qu'en passant de  $M, M', \mu$  aux points symétriques  $N, N', \nu$ , on a l'un des deux échanges

$$(24) \quad \begin{cases} c, & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1; \\ c_1, & -c'_1, & c''_1; & c, & -c', & c'' \end{cases}$$

---

(1) Voir pages 136-138 du Tome de 1920 des *Annales de l'École Normale*.

ou

$$(25) \quad \begin{cases} c & c', & c''; & c_1, & c'_1, & c''_1; \\ -c_1, & c'_1, & -c''_1; & -c, & c', & -c''. \end{cases}$$

Les deux cônes  $C, C_1$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport au plan  $zOx$  et à l'axe  $Oy$ . Si  $(15)$  et  $(15')$  sont distinctes, la condition est plus précise et entraîne que  $(15)$  et  $(15_1)$  soient symétriques l'une de l'autre, soit par rapport à  $zOx$ , soit par rapport à  $Oy$ . La réciproque se démontre comme plus haut, en supposant  $S$  et  $S'$  algébriques. Quand  $(15)$  et  $(15')$  sont distinctes, on a pour l'espèce de la symétrie le résultat suivant :

$(15)$  et  $(15_1)$  symétriques par rapport à  $xOz$ ; ce plan est plan de symétrie de première espèce pour  $S$ , de deuxième pour  $S'$ .

$(15)$  et  $(15_1)$  symétriques par rapport à  $Oy$ ; les genres de symétrie pour  $S$  ou  $S'$  sont inversés.

Cherchons les conditions analytiques qui expriment que  $(15)$  et  $(15_1)$  sont symétriques l'une de l'autre par rapport à  $zOx$ ; le point  $m$  a pour coordonnées  $(\alpha, \beta)$ , le point  $n$  symétrique de  $m$  par rapport à  $xOz$  a pour coordonnées  $(\beta, \alpha)$ , le point  $m_1$  pour coordonnées  $(\beta_0, \alpha_0)$ . Ici le point  $n$  et le point  $m_1$  doivent décrire tous deux  $(15_1)$ ; autrement dit, la courbe plane  $(\alpha, \beta)$  coïncide avec la courbe plane  $(\alpha_0, \beta_0)$ . S'il s'agit de courbes unicursales, on aura  $\alpha = f(q)$ ,  $\beta = \varphi(q)$  et le raisonnement déjà employé montre que l'on peut se borner à deux types canoniques caractérisés par les identités

$$(26) \quad f(q) \equiv f_0(q), \quad \varphi(q) \equiv \varphi_0(q)$$

ou

$$(27) \quad f_0(q) \equiv f\left(\frac{-1}{q}\right), \quad \varphi_0(q) \equiv \varphi\left(\frac{-1}{q}\right).$$

Dans le premier cas, les fractions  $f$  et  $\varphi$  ont leurs coefficients réels et prennent des valeurs réelles pour les valeurs réelles de  $q$ ; pour ces valeurs réelles de  $q$ ,  $c$  et  $c''$  sont réelles,  $c'$  est une imaginaire pure; la courbe  $(15)$  a pour projection sur le plan  $xOz$  une courbe réelle  $(\nu)$  dont la totalité ou une partie est extérieure au cercle  $x^2 + z^2 = 1$ , et cette partie extérieure donne sur  $S$  une géodésique située dans le plan de symétrie  $xOz$  et sur  $S'$  une ligne de rebroussement tout entière dans ce plan. En posant

$q = x + iy$ , le couple  $(x, y)$  et le couple  $(x, -y)$  fournissent les points symétriques. Dans le second cas, la géodésique réelle et l'arête de rebroussement réelle disparaissent sur  $S$  ou  $S'$ ; leur intersection avec le plan de symétrie se compose uniquement de lignes multiples; en posant  $q = x + iy$ , les points symétriques correspondent à  $(x, y)$  et  $\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}$ .

Comme exemple du premier cas, je citerai la cubique de M. Lyon, dérivant de la courbe (15) définie en coordonnées  $(u, v)$  par les expressions paramétriques  $u = t + K, v = t + K$ , où  $K$  est une constante réelle. Dans un autre exemple, déjà cité ici,

$$(28) \quad x = \frac{q^3 + \sqrt[4]{5}q^2}{\sqrt[4]{5}q^3 - 1}, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt[4]{5}q^3}{\sqrt[4]{5}q^2 - q^5},$$

il se trouve que la fonction  $\varphi(q)$  satisfait, de plus, à l'identité

$$\varphi(q) \equiv f\left(\frac{1}{q}\right) \equiv f_0\left(\frac{1}{q}\right),$$

ce qui prouve symétrie par rapport à l'origine; la courbe  $(c, c', c'')$  est réelle; la courbe  $(c, c'')$  projection sur  $xOz$  donne une portion réelle obtenue pour  $q = e^{i\varphi}$  intérieure au cercle  $x^2 + z^2 = 1$  et une portion réelle obtenue pour  $q$  réel extérieure à ce cercle.

Comme exemple du second cas, je donnerai

$$(29) \quad u = A \frac{q^2 + \frac{1}{q^2}}{e^{i\alpha}q - \frac{e^{-i\alpha}}{q}}, \quad v = A \left( e^{-i\alpha}q - \frac{e^{i\alpha}}{q} \right),$$

où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes réelles quelconques; on évitera pour  $\alpha$  les valeurs  $k\pi$ , où  $k$  est un entier quelconque, car, pour une telle valeur, en posant  $q - \frac{1}{q} = t$ , on aurait seulement

$u = A \frac{t^2 + 2}{t}, v = At$  qui ne rentre plus dans le type canonique (27), mais (26); il n'y a pas contradiction, parce que nos raisonnements supposent essentiellement la représentation paramétrique propre.

On peut remarquer que, pour le premier type, caractérisé par ce fait que  $(\alpha, \beta)$  ou  $(u, v)$  sont des fonctions réelles du para-

mètre  $q$ , la substitution  $u = LU + M$ ,  $v = LV + M$ , où  $L$  et  $M$  sont réels, introduit deux paramètres de forme et laisse subsister la symétrie par rapport à  $xOz$ .

10. Supposons maintenant que  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  soient symétriques par rapport à  $Oy$ . Soit un point  $m$  de  $(\mathfrak{W})$ , qui a pour coordonnées sur la sphère  $(\alpha, \beta)$  ou  $(u, v)$ ; le symétrique de  $m$  par rapport à  $xOz$  a pour coordonnées  $(\beta, \alpha)$  ou  $(\frac{-1}{v}, \frac{-1}{u})$ , donc le symétrique de  $m$  par rapport à  $Oy$  a pour coordonnées  $(\frac{-1}{\alpha}, \frac{-1}{\beta})$  ou  $(\frac{-1}{u}, \frac{-1}{v})$ . Le point  $m_1$ , conjugué de  $m$ , a pour coordonnées  $(\beta_0, \alpha_0)$  ou  $(\frac{-1}{v_0}, \frac{-1}{u_0})$ . Nous voyons donc l'avantage des coordonnées  $(u, v)$  : tout revient à exprimer que la courbe plane  $(u, v)$  coïncide avec la courbe plane  $(v_0, u_0)$ . Or ce problème a été résolu précisément dans l'étude de la symétrie par rapport à un point, les coordonnées  $(\alpha, \beta)$  conduisant alors à ce même problème. Bornons-nous aux courbes unicursales; nous avons deux types canoniques réduits

$$(30) \quad u = f(q), \quad v = f_0(q),$$

$$(31) \quad u = f(q), \quad v = f_0\left(\frac{-1}{q}\right).$$

Comme plus haut, si l'on pose  $q = x + iy$ , deux points symétriques sur une même surface correspondent à  $(x, y)$  et  $(x, -y)$  dans le type (30) et à  $(x, y)$  et  $(\frac{-x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2})$  dans le type (31). Quand le type (30) est réalisé, on voit que les valeurs réelles de  $q$  donnent  $c'$  réelle,  $c$  et  $c''$  imaginaires pures, la courbe obtenue sur  $S$  dans le plan  $zOx$  est ligne de rebroussement; la ligne obtenue sur  $S'$  est, au contraire, géodésique. Dans le cas (31), ces lignes réelles, de rebroussement ou géodésiques, disparaissent.

Il est facile de donner des exemples : la cubique de M. Lyon donne cette disposition, par rapport à  $yOz$ , il est vrai; si nous écrivons

$$u = t + K, \quad v = t - K,$$



faisons tourner la courbe de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $Oz$ , ce qui revient à multiplier  $u$  et  $v$  par  $i$  et remplaçons en même temps  $it$  par  $q$ ; on a alors, dans la nouvelle position,

$$u = q + Ki, \quad v = q - Ki,$$

et comme on a supposé  $K$  réel, on a bien un exemple du type (30).

J'ai d'autre part signalé aux *Comptes rendus* (22 janvier 1917) et développé aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1919) comment on peut trouver explicitement la solution générale de l'identité de Bezout ( $AD - BC \equiv 1$ ) en polynômes entiers en  $x$ . A une solution  $(A, B, C, D)$  de cette identité correspondent une infinité de courbes imaginaires à torsion constante et de surfaces applicables sur le paraboloidé par les formules suivantes :

$$(32) \quad u = \frac{A}{B}, \quad v = \frac{C}{D};$$

$$(33) \quad u = \frac{A}{C}, \quad v = \frac{B}{D};$$

$$(34) \quad u = \frac{A + Bm}{C + Dm}, \quad v = \frac{A + Bm'}{C + Dm'};$$

$$(35) \quad u = \frac{A + Cm}{B + Dm}, \quad v = \frac{A + Cm'}{B + Dm'};$$

où  $m$  et  $m'$  sont deux constantes différentes; à chacune des courbes ainsi obtenues, on peut appliquer la transformation

$$U = Lu + M + iN, \quad V = Lv + M + iN,$$

déjà signalée; d'ailleurs, si  $m$  tend vers zéro, ainsi que  $\frac{1}{m'}$ , la courbe (34) se réduit à la courbe (33) et la courbe (35) à la courbe (32). Nous obtenons ainsi deux séries de surfaces dépendant de paramètres réels de forme. Supposons maintenant les polynômes  $A, B, C, D$  à coefficients réels; pour  $m$  et  $m'$  réels, les quatre courbes écrites de (32) à (35) conduisent à des surfaces admettant  $xOz$  comme plan de symétrie et rentrant dans le type canonique (26); il en sera encore de même en prenant ensuite  $N$  nul. Si  $A, B, C, D$  sont réels et si  $m$  et  $m'$  sont pris imaginaires conjuguées, la condition  $m' \neq m$  empêchera que la partie imaginaire de  $m$  ou  $m'$  soit nulle; alors les deux courbes (34) et (35) donneront des surfaces admettant  $xOz$  pour plan de symétrie,

mais du type (30), et cela subsistera encore ensuite si l'on prend  $N = 0$ .

Il me reste à donner un exemple précis du type (31). Quelques tâtonnements m'ont conduit à essayer une courbe

$$u = \frac{q^3}{Aq^4 + Bq^2 + C}, \quad v = \frac{-q}{A' + B'q^2 + Cq^4},$$

où  $A$  et  $A'$  sont deux constantes conjuguées, ainsi que  $B$  et  $B'$ ,  $C$  étant réel;  $q = 0$ ,  $q = \infty$  donne sur la courbe ( $\mathfrak{A}$ ) deux cycles isotropes d'indice 2 exactement, pour lesquels, d'après mes résultats sur les courbes à torsion constante, il n'y a plus aucune condition à écrire. En écrivant que les autres cycles isotropes sont obtenus uniquement pour  $q = +i$  ou  $-i$  et ont pour indice 6, toutes les conditions d'indice ou de résidu donnent aisément la courbe

$$(36) \quad \begin{cases} u = \frac{q^3}{C \left[ \left( 5 + 8i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) q^4 + \left( -2 + 8i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) q^2 + 1 \right]}, \\ v = \frac{-q}{C \left[ 5 - 8i\sqrt{\frac{2}{3}} - \left( 2 + 8i\sqrt{\frac{2}{3}} \right) q^2 + q^4 \right]}. \end{cases}$$

L'axe des  $z$  étant axe de symétrie pour ( $\mathfrak{A}$ ) et par suite pour  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$ , on en déduit que le plan  $\gamma Oz$  lui aussi est plan de symétrie de  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$ ; effectivement, en remplaçant  $u$ ,  $v$ ,  $q$  par  $iu$ ,  $iv$ ,  $iq$ , ce qui revient à faire tourner les axes de  $90^\circ$  autour de  $Oz$ , les nouvelles équations (36) sont de la forme  $u = f(q)$ ,  $v = f_0\left(\frac{1}{q}\right)$ , ce qui correspond au type canonique (30) sous une forme équivalente.

11. Il ne reste plus à étudier que le cas où  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$  admettent un axe de rotation, autour duquel une rotation d'amplitude  $\frac{2\pi}{m}$  les reproduit,  $m$  étant un entier supérieur ou égal à 2. Pour  $m = 2$ , on a un axe de symétrie. Cette fois une rotation ne changeant pas le signe de la torsion, si l'on considère les trois points associés  $M$ ,  $M'$ ,  $\mu$  et les points  $N$ ,  $N'$ ,  $\nu$  s'en déduisant par la rotation, la courbe ( $\mathfrak{A}^\mu$ ) vient coïncider avec la courbe ( $\mathfrak{A}^\nu$ ); donc, la courbe

(15) ou bien se reproduit par la rotation  $\frac{2\pi}{m}$  autour de l'axe, ou bien vient se superposer à (15'). Ces deux cas ne se distinguent que si (15) est distincte de (15'); dans le premier cas, avec notre terminologie, la rotation est de première espèce; seconde espèce dans le second cas. Or j'ai étudié en détail ces propriétés pour les courbes à torsion constante. Nous avons vu que la forme canonique pour la rotation de première espèce est, en supposant l'axe pris pour Oz,

$$(37) \quad u = q^p f(q^m), \quad v = q^p \varphi(q^m),$$

où  $p$  est un entier premier avec  $m$ ,  $f$  et  $\varphi$  deux fractions rationnelles, en se bornant aux courbes unicursales. Dans le cas de rotation de seconde espèce, la rotation répétée 1, 2, ... fois reproduit alternativement (15) et (15'); or  $m$  fois équivalent à une rotation d'amplitude  $2\pi$ , qui donne (15); donc (15) ne coïncidant pas avec (15'),  $m$  est un entier pair; soit  $m = 2m'$ , la forme canonique est alors

$$(38) \quad u = q^p f(q^{m'}), \quad v = q^p f(-q^{m'}),$$

où  $p$  est un nombre entier quelconque impair premier avec  $m'$ .

Le cas de  $m = 2$  dans le cas de la rotation de seconde espèce demande une étude spéciale, car le raisonnement conduisant à la forme canonique (38) suppose  $m' > 1$ ; pour le cas de première espèce, il n'y a rien à changer. Donc, dans le cas de la symétrie par rapport à l'axe des  $z$ , il y a deux cas à distinguer quand (15) est distincte de (15') suivant que (15) est à elle-même sa symétrique par rapport à Oz ou bien est symétrique de (15') par rapport à Oz, auquel cas elle est symétrique d'elle-même par rapport à  $xOy$ : j'ai étudié en détail la symétrie des courbes (15) par rapport à un plan dans le *Mémoire de l'École Normale*; je n'y reviens pas.

La cubique de M. Lyon, par exemple, admet le plan  $xOy$  pour plan de symétrie, donc, S et S' admettent Oz pour axe de symétrie de seconde espèce. L'identité de Bezout, déjà employée avec succès pour des symétries planes, donne encore des résultats intéressants. Pour la symétrie de première espèce par rapport à Oz, j'aurai des solutions particulières en écrivant

$$(39) \quad \begin{cases} u = \frac{A(Q)}{qB(Q)}, & v = \frac{qC(Q)}{D(Q)}, \\ AD - Q.BC \equiv 1, & Q = q^2, \end{cases}$$

A, B, C, D étant des polynomes en Q. La solution la plus simple correspond à

$$B \equiv C \equiv D \equiv 1, \quad A \equiv 1 + Q,$$

d'où

$$u = \frac{1+q^2}{q}, \quad v = q.$$

On aura une symétrie de seconde espèce en écrivant, avec ces mêmes polynomes,

$$(40) \quad u = \frac{\frac{1}{2}A(Q) + \frac{1}{2}qB(Q)}{D(Q) + qC(Q)}, \quad v = \frac{-\frac{1}{2}A(Q) + \frac{1}{2}qB(Q)}{D(Q) - qC(Q)},$$

car le changement de  $q$  en  $-q$  remplace  $(u, v)$  par  $(-v, -u)$ ; ce dernier point est diamétralement opposé au point  $(-u, -v)$ . Les mêmes polynomes  $A(Q)$ ,  $B(Q)$ ,  $C(Q)$ ,  $D(Q)$  donneront encore, en posant cette fois  $Q = q^m$ ,

$$(41) \quad u = \frac{A(Q)}{q^r B(Q)}, \quad v = q^{m-r} \frac{C(Q)}{D(Q)},$$

une rotation de première espèce d'amplitude  $\frac{2\pi}{m}$ , pourvu que  $r$  soit un entier premier avec  $m$ ; la solution précédemment indiquée donne

$$u = \frac{1+q^m}{q^r}, \quad v = q^{m-r}.$$

Comme exemple intéressant qui condense les résultats obtenus pour la symétrie relative à un point, un plan, un axe ou pour une rotation d'amplitude  $\frac{2\pi}{m}$ , je rappelle l'exemple, connu depuis M. Fabry, que j'ai repris et étudié en détail (*Annales de l'École*, 1919; p. 323 et suiv.) :

$$(42) \quad u = q^p \frac{q^m + \sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}}}{-\sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}} q^{m+1}}, \quad v = q^p \frac{-q^m + \sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}}}{\sqrt[m]{\frac{m+p}{m-p}} q^{m+1}},$$

où  $m$  et  $p$  sont deux entiers premiers entre eux; si  $m > p$ , la courbe (15) est réelle ( $v$ ); suivant les parités de  $p$  et  $m$ , on obtient diverses combinaisons intéressantes que je ne reproduirai pas ici :

on obtient en tout cas des exemples précis d'une rotation de première ou seconde espèce.

Dans ce qui précède, nous avons eu des exemples possédant diverses symétries et, par suite, aussi celles qui en résultent par leur composition. Représentons par exemple par  $(O)$  la symétrie par rapport au point  $O$ , par  $(Ox)$  la symétrie par rapport à  $Ox$ , par  $(yOz)$  la symétrie par rapport au plan  $yOz$ . Si la surface étudiée possède à la fois deux symétries, écrivons l'égalité symbolique qui résulte de leur composition; par exemple

$$(O)(xOz) = (Oy) \quad \text{ou} \quad (xOz)(O) = (Oy).$$

Si maintenant nous remplaçons chaque parenthèse de symétrie par le nombre  $+1$  ou  $-1$  suivant qu'il s'agit d'une symétrie de première espèce ou de seconde espèce, on voit immédiatement que l'égalité symbolique subsiste; cette règle servira à donner l'espèce d'une symétrie obtenue par composition de deux autres d'espèce connue.

12. Disons quelques mots des singularités des surfaces  $S$  et  $S'$ . Il y a lieu de considérer les singularités des courbes  $(\mathfrak{A})$  ou  $(\mathfrak{B})$ . Ceci rentre dans l'étude spéciale des courbes à torsion constante.

D'autre part,  $S$  ou  $S'$  peuvent présenter des lignes multiples; nous l'avons déjà reconnu en étudiant les symétries planes, qui mettent en évidence des lignes multiples sur l'une au moins des deux surfaces  $S$  et  $S'$ .

Un autre exemple intéressant est fourni par un point commun aux deux courbes  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$ ; le cas où ces deux courbes coïncident a été étudié, on a eu un centre, point conique, je n'y reviens pas. Nous supposons  $(\mathfrak{B})$  et  $(\mathfrak{B}_1)$  distinctes; elles ont par hypothèse un point  $m$  commun où nous supposons de plus les tangentes distinctes; soient un point  $n$  de  $(\mathfrak{B})$  qui tend vers  $m$ ,  $n_1$  un point de  $(\mathfrak{B}_1)$  qui tend vers  $m$ ; soient  $N$  et  $N'$  les points de  $S$  et  $S'$  obtenus en associant  $n$  et  $n_1$ ; quand  $n$  et  $n_1$  tendent tous deux vers  $m$ ,  $N$  et  $N'$  tendent vers des positions limites  $M$  et  $M'$ : la normale en  $M$  à  $S$  est parallèle à la droite  $Om$ , la normale en  $N'$  à  $S'$ , qui était parallèle à  $nn_1$ , est susceptible d'avoir une position limite parallèle à telle direction que l'on voudra du plan tangent à la sphère en  $m$ ; le point  $M$  est régulier sur  $S$ , mais singulier sur

$S' \text{ (}^1\text{)}$ . Ce raisonnement est indépendant de la réalité de  $S$ ,  $S'$  ou de  $M$ ,  $M'$ . Il s'applique donc aussi aux points communs à  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}'_1)$ , en échangeant les rôles de  $S$  et  $S'$ . Si l'on se borne aux surfaces réelles,  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  sont conjuguées; les points communs à  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}'_1)$  donnent des points singuliers de  $S$  nécessairement imaginaires; un point commun à  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  donnera un point singulier réel sur  $S'$ , s'il est à lui-même son conjugué, autrement dit s'il est réel. C'est ce qui arrive en particulier pour la cubique de  $M$ . Lyon :

$$(\mathfrak{W}) \quad c = \frac{1 + K^2 - t^2}{2K}, \quad c' = i \frac{1 - K^2 + t^2}{2K}, \quad c'' = \frac{t}{K};$$

$$(\mathfrak{W}_1) \quad c_1 = \frac{1 + K^2 - t_1^2}{2K}, \quad c'_1 = i \frac{1 - K^2 + t_1^2}{2K}, \quad c''_1 = \frac{t_1}{K},$$

où  $K$  est réel; si  $K > 1$ , les deux valeurs  $t = \pm \sqrt{K^2 - 1}$  donnent deux points réels communs à  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$  donnant deux points singuliers réels de  $S'$ .

13. Il reste maintenant à étudier les points à l'infini des surfaces  $S$ ,  $S'$ ,  $\Sigma$ . La discussion complète est très longue, mais le résultat obtenu est fort simple : marquons sur le cercle de l'infini les traces des génératrices isotropes de  $C$  ou  $C_1$ ; les tangentes à ce cercle aux points correspondants donnent l'intersection complète de  $S$  et  $S_1$  par le plan de l'infini. Pour la surface  $\Sigma$ , nous avons l'intersection complète en joignant de toutes les façons possibles une trace de la première série à une trace de la seconde; si donc  $C$  et  $C_1$  ont une génératrice isotrope commune, la tangente au cercle de l'infini au point correspondant figure parmi les droites relatives à  $\Sigma$ .

Pour la surface  $\Sigma$ , il suffit de répéter mot à mot le raisonnement de Darboux pour les surfaces minima  $(^2)$ .  $\Sigma$  est en effet le lien des milieux des cordes s'appuyant sur deux courbes à torsion constante et les points à l'infini de ces deux courbes sont, à l'exclusion de tout autre, tous les points communs au cercle de l'infini et à  $(\mathfrak{W})$  et  $(\mathfrak{W}_1)$ .

(<sup>1</sup>) Comparons au tore, en supposant l'axe de révolution tangent à la circonférence méridienne. Le point de contact est alors une singularité analogue à celle signalée dans le texte pour  $S'$ .

(<sup>2</sup>) *Théorie des Surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édition, p. 434.

Rappelons qu'en posant  $\xi = \frac{c}{c'}$ ,  $\eta = \frac{c'}{c}$ ,  $\lambda = \xi + i\eta$ ,  $\mu = \xi - i\eta$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{c'_1}$ , ..., il y a avantage à employer les intégrales

$$(43) \quad \begin{cases} I_1 = \int \frac{d\lambda}{1 + \lambda\mu}, & I_2 = \int \frac{d\mu}{1 + \lambda\mu}, & I_3 = \int \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{1 + \lambda\mu}; \\ I'_1 = \int \frac{d\lambda_1}{1 + \lambda_1\mu_1}, & I'_2 = \int \frac{d\mu_1}{1 + \lambda_1\mu_1}, & I'_3 = \int \frac{\lambda_1 d\mu_1 - \mu_1 d\lambda_1}{1 + \lambda_1\mu_1}, \end{cases}$$

et l'on pourra écrire pour définir S et S'

$$(44) \quad \begin{cases} x + iy = \frac{\tau}{2}(I_1 - I'_1) + \frac{\varepsilon\tau}{2}[(c + ic')c'_1 - c'(c_1 + ic'_1)], \\ x - iy = \frac{-\tau}{2}(I_2 - I'_2) + \frac{\varepsilon\tau}{2}[(c_1 - ic'_1)c'' - c'_1(c - ic')], \\ z = \frac{\tau}{4}(I_3 - I'_3) + \frac{\varepsilon\tau}{4}[(c - ic')(c_1 + ic'_1) - (c + ic')(c_1 - ic'_1)]. \end{cases}$$

Les points à l'infini de S, S' proviennent exclusivement des génératrices isotropes de C et C<sub>1</sub>; soit G une génératrice isotrope de C ou du moins un des cycles isotropes portés par G, si G est le support de plusieurs cycles isotropes. J'étudie les points, aussi bien imaginaires que réels, de S et S'; d'ailleurs la discussion est la même que l'on suppose S réelle ou imaginaire. Donc nous distinguons plusieurs cas :

1° Le point variable *m* qui décrit (15), ou, si l'on préfère, le point variable P qui décrit la courbe plane ( $\xi, \eta, 1$ ) est venu se placer sur un cycle isotrope G, tandis que *m*<sub>1</sub> vient sur une génératrice non isotrope de C<sub>1</sub>. La discussion de ce cas s'étendra évidemment à celui qui s'obtient en renversant les rôles de C et C<sub>1</sub>.

2° *m* est venu sur un cycle isotrope G, et *m*<sub>1</sub> est venu sur un cycle isotrope G<sub>1</sub>, G et G<sub>1</sub> étant supposés conjugués.

3° *m* et *m*<sub>1</sub> viennent sur deux cycles isotropes non conjugués.

La méthode à suivre est la même dans tous les cas; je me contente, pour abrégé, d'indiquer les résultats dans le cas où la vérification est facile à effectuer. Dans les deux premières hypothèses je prends pour plan *xOy* le plan déterminé par G et la droite conjuguée. La droite G a pour équations  $z = 0$ ,  $x + iy = 0$ . La

section du cône  $C$  par le plan  $z = 1$  est représentée (il ne s'agit, je le répète, que de surfaces algébriques) par un développement qui a la forme

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = B t^{p+s} + B_1 t^{p+s+1} + \dots, \\ \mu = \frac{A}{t^p} + \frac{A_1}{t^{p-1}} + \dots, \\ 1 + \lambda \mu = 1 + AB t^s + \dots \end{array} \right.$$

ou

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = B t^p + B_1 t^{p+1} + \dots \\ \mu = \frac{A}{t^p} + \frac{A_1}{t^{p-1}} + \dots \quad (AB = -1), \\ 1 + \lambda \mu = K t^r + K_1 t^{p+1} + \dots \end{array} \right.$$

$p, s, r$  sont des entiers positifs non nuls dont j'ai montré l'importance dans le *Mémoire de l'École Normale* (Chap. II). Si la surface  $S$  est réelle, la section de  $C$ , par le plan  $z = 1$  sera représentée par les développements analogues au moyen de  $t_1$ , variable conjuguée de  $t$ ;  $\lambda_1$  est la fonction conjuguée de  $\mu$  et  $\mu_1$  celle de  $\lambda$ . L'équation du plan tangent en un point  $M$  de  $S$  pourra, par analogie avec les expressions ponctuelles (44), se mettre sous la forme

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} [c - ic' + c_1 - ic'_1][X + iY] + [c + ic' + c_1 + ic'_1][X - iY] + 2(c'' + c''_1)Z, \\ = [c - ic' + c_1 - ic'_1][x + iy] + [c + ic' + c_1 + ic'_1][x - iy] + 2(c'' + c''_1)z. \end{array} \right.$$

14. Cela posé, soit le premier cas. Le point  $m$  s'éloigne à l'infini ( $t = 0$ ), et  $m_1$  reste à distance finie. Les termes  $I_1, I_2, I_3, c, c', c''$  présentent seuls une singularité polaire. Si le cycle  $t = 0$  est du type (45) (degré  $p$  et classe  $p + s$ ), on obtient sur  $S$  et  $S'$  les divers points à l'infini de la droite suivant laquelle le plan  $x + iy = 0$  tangent le long de  $G$  au cône  $C$  coupe le plan de l'infini; ce plan  $x + iy = 0$  est isotrope. Le plan tangent à  $S$  ou  $S'$  se déplace parallèlement au plan  $x + iy = 0$  quand le point de contact varie sur cette droite. Si le cycle  $t = 0$  est du type (46) (degré et classe égaux à  $p$ , indice égal à  $2p + r$ ), on n'obtient sur  $S$  ou  $S'$  que le point à l'infini de la génératrice  $G$ , le plan tangent en ce point étant le plan de l'infini.

Soit maintenant le second cas; nous avons associé sur les deux cônes les cycles  $G$  et  $G_1$  conjugués; je me borne au cas où  $S$  et  $S'$  sont réelles, de sorte que  $C$  et  $C_1$  sont conjugués. Les deux cycles



sont donc du même type : si c'est le type (45), nous obtenons simplement le point à l'infini dans la direction  $x = 0, y = 0$  perpendiculaire au plan  $G G_1$ , le plan tangent étant le plan de l'infini ; remarquons que ce point réel à l'infini est à l'intersection des deux droites obtenues dans le plan de l'infini, pour les cycles de cette espèce, par la considération de  $m$  ou  $m_1$  isolément. Si les deux cycles sont du type (46), nous obtenons les deux tangentes au cercle de l'infini à l'extrémité de  $G$  et  $G_1$ , le plan tangent étant le plan de l'infini. Je donne la démonstration dans ce dernier cas, en me bornant même à supposer  $r > 2p$ , car il faudrait pour être complet envisager successivement  $r > 2p, r = 2p, r < 2p$ . Les conjuguées de  $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots, K$  étant  $A', A'_1, \dots, K'$ , on a (Mémoire de l'École Normale, p. 279 et suiv.)

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{ll} I_1 = \frac{Bp}{(p-r)K} \frac{1}{t^{r-p}} + \dots, & I'_1 = \frac{B'p}{(p-r)K'} \frac{1}{t_1^{r-p}} + \dots; \\ I_2 = \frac{Ap}{(p+r)K} \frac{1}{t^{p+r}} + \dots, & I'_1 = \frac{A'p}{(p+r)K'} \frac{1}{t_1^{p+r}} + \dots; \\ I_3 = \frac{-2p}{rK} \frac{1}{t^r} + \dots, & I'_3 = \frac{2p}{rK'} \frac{1}{t_1^r} + \dots; \\ c + ic'' = \frac{B}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}-p}} + \dots, & c_1 - ic'_1 = \frac{B'}{\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}-p}} + \dots; \\ c - ic' = \frac{A}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}+p}} + \dots, & c_1 + ic'_1 = \frac{A'}{\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}+p}} + \dots; \\ c'' = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{1}{t^{\frac{r}{2}}} + \dots, & c''_1 = \frac{1}{\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}}} + \dots \end{array} \right.$$

Rappelons en passant que la détermination de  $\sqrt{K}$  peut être prise arbitrairement ; si l'on prend pour  $\sqrt{K'}$  le nombre conjugué de celui qui est adopté pour  $\sqrt{K}$ ,  $c_1, c'_1, c''_1$  se rapportent bien à la courbe  $(\mathfrak{W}_1)$  et les formules (44) où  $\epsilon = +1$  donnent  $S$  ; mais si l'on prend pour  $\sqrt{K'}$  la détermination égale et de signe contraire à celle précédemment choisie,  $c_1, c'_1, c''_1$  se rapportent à  $(\mathfrak{W}'_1)$  et les formules (44), où  $\epsilon$  désigne toujours  $+1$ , se rapportent à  $S'$  et non à  $S$  ; de la sorte, bornons-nous à spécifier que  $K$  et  $K'$  sont conjuguées, mais ne précisons pas les déterminations adoptées pour  $\sqrt{K}$  et  $\sqrt{K'}$  : nous étudierons du même coup  $S$  et  $S'$ . Cela posé, la

réunion des formules (44) et (48) donne

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\tau}(x + iy) &= \frac{Bp}{(p-r)K} t^{r-p} - \frac{A'p}{(p-r)K'} t_1^{p+r} \\ &+ \frac{B}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t^{\frac{r}{2}-p}} - \frac{A'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t_1^{p+\frac{r}{2}}} + \dots, \\ \frac{2}{\tau}(x - iy) &= \frac{B'p}{(p-r)K'} t_1^{r-p} - \frac{Ap}{(p+r)K} t^{p+r} \\ &+ \frac{B'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t_1^{\frac{r}{2}-p}} - \frac{A}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}} t^{p+\frac{r}{2}}} + \dots, \\ \frac{4}{\tau}z &= \frac{-2p}{Krt^r} - \frac{2p}{K'r t_1^r} \\ &+ \frac{AA'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t^{p+\frac{r}{2}} t_1^{p+\frac{r}{2}}} - \frac{BB'}{\sqrt{K}\sqrt{K'}} \frac{1}{t_1^{\frac{r}{2}-p} t^{\frac{r}{2}-p}} + \dots \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, on a mis en évidence au second membre que le terme de plus haut degré polaire parmi ceux qui contiennent soit  $t$  seul, soit  $t_1$  seul, soit  $t$  et  $t_1$  simultanément.

On voit alors que si  $t$  et  $t_1$  tendent vers zéro en restant du même ordre infinitésimal,  $x + iy$  et  $x - iy$  sont par rapport à l'infiniment petit  $t$  d'ordre polaire  $p + r$ , et  $z$  d'ordre  $2p + r$ ; on obtient donc le point à l'infini sur l'axe des  $z$ ; d'ailleurs, si l'on se borne aux points réels de  $S$  et  $S'$ ,  $t$  et  $t_1$  devant rester conjugués sont du même ordre infinitésimal. Supposons maintenant  $t$  et  $t_1$  infiniment petits d'ordre différent; nous supposons  $t$  et  $t_1$  fonctions d'une même variable auxiliaire;  $t$  sera donc infiniment petit d'ordre  $a$  et  $t_1$  d'ordre  $a_1$ ; supposons  $a > a_1$ . J'inscris en regard de  $x + iy$ ,  $x - iy$  et  $z$  les degrés des termes polaires mis en évidence :

$$\begin{array}{lll} x + iy; & (r-p)a; & (r+p)a_1; \quad \left(\frac{r}{2}-p\right)a + \frac{r}{2}a_1; \quad \left(\frac{r}{2}+p\right)a_1 + \frac{r}{2}a; \\ x - iy; & (r-p)a_1; & (r+p)a; \quad \left(\frac{r}{2}-p\right)a_1 + \frac{r}{2}a; \quad \left(\frac{r}{2}+p\right)a + \frac{r}{2}a_1; \\ z & ra; & ra_1; \quad \left(p + \frac{r}{2}\right)a + \left(p + \frac{r}{2}\right)a_1. \end{array}$$

On voit immédiatement qu'en vertu de  $a > a_1$ , le terme

$(r+p)a$  est le plus grand des nombres de la première et seconde ligne; il suffira donc de comparer  $(r+p)a$  avec

$$\left(p + \frac{r}{2}\right)a + \left(p + \frac{r}{2}\right)a_1$$

pour obtenir le résultat suivant :  $a > \left(\frac{2p}{r} + 1\right)a_1$ , on obtient le point à l'infini de OG,  $(x + iy = 0, z = 0)$ ;  $a = \left(\frac{2p}{r} + 1\right)a_1$ , on obtient la droite à l'infini du plan

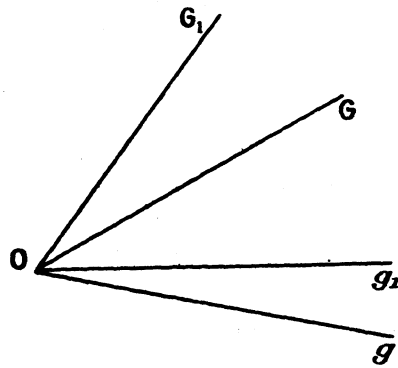
$$x + iy = 0; \quad \left(\frac{2p}{r} + 1\right)a_1 > a > a_1$$

on obtient le point à l'infini de Oz. Finalement,  $a \geq a_1$  donne tous les points à l'infini du plan  $x + iy = 0$  et  $a_1 \geq a$  donne tous les points à l'infini du plan  $x - iy = 0$ . Quant au plan tangent, dont les coordonnées tangentielles sont mises en évidence par l'équation (47), le même procédé prouve que c'est le plan de l'infini.

15. J'arrive au troisième cas qui, nous le savons, ne peut donner que des points imaginaires. C'est de beaucoup le plus pénible et le plus long à discuter. Je suppose que le point  $m$  de  $(\mathfrak{U})$  tend vers un point à l'infini relatif à un cycle isotrope  $Og$  de  $C$ , tandis que le point  $m_1$  pris sur  $(\mathfrak{U}_1)$  tend vers une position relative à un cycle isotrope  $OG_1$  de  $C_1$ , le cycle  $OG_1$  étant distinct du cycle  $Og_1$  conjugué de  $Og$ ; je considère en même temps le cycle  $OG$  de  $C$  conjugué de  $OG_1$ . La droite  $OG_1$  est distincte de  $Og_1$ , si la droite  $Og$  ne porte qu'un cycle; bornons-nous au cas où les droites  $OG_1$  et  $Og_1$  sont distinctes. La droite  $OG_1$  pourrait coïncider avec  $Og$  et par suite  $OG$  avec  $Og_1$ , si le cône  $C$  admettait des couples de génératrices isotropes conjuguées; en particulier, ceci arrivera fatalement si  $C$  est réel  $(\nu)$  ou  $(G)$ . Supposons encore  $OG_1$  distincte de  $Og$ . Les quatre génératrices isotropes  $Og$ ,  $Og_1$ ,  $OG$ ,  $OG_1$  sont donc quatre droites distinctes (*fig. a*). Je considère la droite  $Oz$  perpendiculaire au plan  $Ogg_1$  de sorte que  $zOg$ ,  $zOg_1$  soient les deux plans isotropes tangents respectivement à  $C$  le long de  $Og$  et  $C_1$  le long de  $Og_1$ ; je considère de même

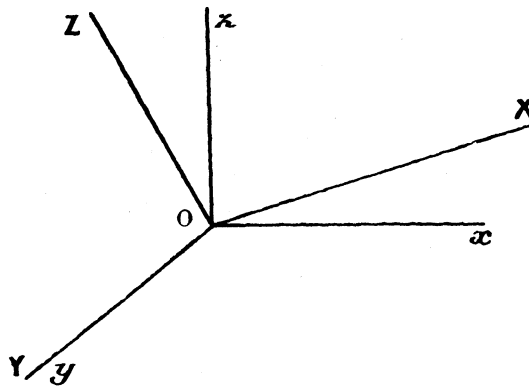
les plans analogues  $OZG$ ,  $OZG_1$ . Les plans  $Ogg_1$  et  $OGG$ , sont réels, leur intersection sera la droite  $Oy$ ;  $Oz$  est une droite

Fig. a.



réelle, je définis ainsi un trièdre de coordonnées réel (fig. b)  $Oxyz$ , dans lequel  $Og$  a pour équations  $z = 0$ ,  $x + iy = 0$ .

Fig. b.



Je prends maintenant  $OY$  coïncidant avec la direction  $Oy$ ; puis la droite indéfinie  $OZ$  déjà citée et la droite indéfinie  $OX$  perpendiculaire au plan  $ZOY$ ; les sens positifs seront définis sans ambiguïté sur  $OX$  et  $OZ$  par cette condition que  $OG_1$ , dans le système  $OXYZ$ , ait pour équations  $X + iY = 0$ ,  $Z = 0$  et que les deux trièdres  $OXYZ$  et  $Oxyz$  aient même disposition. On aura,  $\theta$  étant

l'angle  $(Oz, OZ)$  :

$$(50) \quad \begin{cases} x = X \cos \theta - Z \sin \theta, & X = \cos \theta + z \sin \theta, \\ y = Y, & Y = y, \\ z = X \sin \theta + Z \cos \theta, & Z = -x \sin \theta + z \cos \theta; \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par exemple,

$$(51) \quad \begin{cases} x + iy = (X + iY) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (X - iY) \sin^2 \frac{\theta}{2} - Z \sin \theta, \\ x - iy = (X - iY) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (X + iY) \sin^2 \frac{\theta}{2} - Z \sin \theta, \\ z = \frac{(X + iY) \sin \theta}{2} + \frac{(X - iY) \sin \theta}{2} + Z \cos \theta. \end{cases}$$

Or les coordonnées d'un point d'une surface  $S$  ou  $S'$  résultent de la composition de trois vecteurs  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  :

$$\begin{aligned} (A) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\tau i}{2} \int c' dc' - c' dc'', \\ & \frac{\tau i}{2} \int c dc'' - c'' dc, \\ & \frac{\tau i}{2} \int c' dc - c dc'; \end{aligned} \right. \\ (B) \quad & \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\tau i}{2} \int c'_1 dc'_1 - c'_1 dc''_1, \\ & -\frac{\tau i}{2} \int c_1 dc''_1 - c''_1 dc_1, \\ & -\frac{\tau i}{2} \int c'_1 dc_1 - c_1 dc'_1; \end{aligned} \right. \\ (C) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\tau i}{2} (c' c''_1 - c'' c'_1), \\ & \frac{\tau i}{2} (c'' c_1 - c c''_1), \\ & \frac{\tau i}{2} (c c'_1 - c' c_1). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

J'introduis alors les coordonnées  $c, c', c''$  d'un point  $m$  de (15) et les projections de  $(A)$  dans le système  $Oxyz$  par les formules déjà données (43) première ligne :

$$(A) \quad x + iy = \frac{\tau}{2} I_1, \quad x - iy = -\frac{\tau}{2} I_2, \quad z = \frac{\tau}{4} I_3,$$

$\lambda, \mu$  étant données par (45) ou (46); le paramètre  $t$  est celui qui tend vers zéro quand  $m$  s'éloigne à l'infini sur  $Og$ .

Je définis de même les coordonnées  $C, C', C''$  d'un point  $m_1$  de  $(\mathfrak{W}_1)$  et les projections de  $(B)$  dans le système  $OXYZ$ ; il suffit de désigner par  $L, M$  les quantités analogues à  $\lambda, \mu$

$$\left( L = \frac{C + iC'}{C''}, \quad M = \frac{C - iC'}{C''} \right),$$

par  $I'_1, I'_2, I'_3$  les intégrales

$$I'_1 = \int \frac{dL}{1 + LM}, \quad I'_2 = \int \frac{dM}{1 + LM}, \quad I'_3 = \int \frac{L dM - M dL}{1 + LM},$$

de la sorte  $(B)$  est défini dans le système  $OXYZ$  par les formules

$$(B) \quad X + iY = \frac{\tau}{2} I'_1, \quad X - iY = \frac{\tau}{2} I'_2, \quad Z = \frac{\tau}{4} I'_3.$$

Les quantités  $L, M$  sont définies par des développements du type (45) ou (46) en fonction d'un paramètre  $t_1$  qui tend vers zéro quand  $m_1$  s'éloigne à l'infini;  $t_1$  n'est plus une variable conjuguée de  $t$ . Les formules (51) permettent ensuite d'avoir les projections de  $(B)$  dans le système  $Oxyz$ . Quant au vecteur  $C$ , j'appelle  $c_1, c'_1, c''_1$  les coordonnées dans  $Oxyz$  du point  $m_1$ : les formules (51) donnent  $c_1, c'_1, c''_1$  en fonction de  $C, C', C''$ . Par suite, nous avons tous les éléments géométriques; pour le plan tangent on emploie la formule (47). Les développements en série sont donnés dans le *Mémoire de l'École Normale* (p. 278-284). Le reste n'est plus qu'une question de patience et se traite par la méthode que j'ai donnée un peu plus haut. Il faut encore distinguer plusieurs cas suivant que le cycle  $Og$  et le cycle  $OG_1$  sont tous deux du type (45), ou du type (46), ou l'un d'un type, l'autre de l'autre.

Si l'on suppose les deux cycles du type (45) (classe supérieure au degré), on n'obtient sur  $S$  ou  $S'$  que le point à l'infini sur la droite d'intersection des deux plans isotropes  $zOg$  et  $ZOG_1$ ; le plan tangent est le plan de l'infini.

Si l'on suppose les deux cycles du type (46) (classe et degré égaux), on obtient tous les points à l'infini des deux plans  $zOg$  et  $ZOG_1$ , le plan tangent est le plan de l'infini.

Si l'on suppose que le cycle  $Og$  soit du type (45), tandis que  $OG_1$

est du type (46), on obtient tous les points à l'infini du plan isotrope  $zOg$ .

Nous pouvons remarquer que l'on a avantage ici à introduire un troisième trièdre de référence, imaginaire cette fois, dont les trois faces sont : le plan  $OgG_1$ , le plan isotrope  $zOg$ , le plan isotrope  $ZOG_1$  : un seul changement de coordonnées appliqué aux trois vecteurs  $A, B, C$  donne les projections de ces vecteurs dans le trièdre en question.

Que  $OG_1$  coïncide avec  $Og_1$ , cela au fond importe peu, ce qui précède s'applique; d'ailleurs, dans ce cas, on peut se dispenser de tout changement d'axes.

Mais que  $OG_1$  coïncide avec  $Og$ , tout ce qui précède ne subsiste plus; dans ce cas, on n'a pas besoin de changements d'axes; on reconnaît aisément qu'on obtient le point à l'infini de la droite  $Og$ .

La discussion a donc fourni le résultat suivant : *les surfaces S et S' étant supposées algébriques*, les cônes  $C$  et  $C_1$  ont des génératrices isotropes; suivant chacune d'elles ils sont tangents au cône isotrope de même sommet; ces plans tangents isotropes communs coupent le plan de l'infini suivant des droites qui constituent, par leur ensemble, le total de la section de  $S$  et  $S'$  par le plan de l'infini. Le plan tangent à l'un de ces points à l'infini est toujours le plan de l'infini, sauf pour les droites provenant d'un cycle isotrope dont la classe surpasse le degré.

Les seuls points réels à l'infini des surfaces  $S$  et  $S_1$  sont sur les axes des plans réels obtenus en associant une génératrice isotrope de  $C$  à la génératrice conjuguée de  $C_1$ ; en un tel point, le plan tangent est rejeté à l'infini.

16. Parmi les surfaces applicables sur le parabolôïde, il y en a une qui joue un rôle un peu exceptionnel, c'est précisément le parabolôïde lui-même. Les points à l'infini offrent la configuration trouvée précédemment. En prenant pour  $(15)$  la droite isotrope  $x - iy = 0, z = 1$  et pour courbe  $(15_1)$  la droite conjuguée  $x + iy = 0, z = 1$ , on obtient le parabolôïde  $\mathcal{Q}$ . La surface  $S'$  se réduit à l'axe des  $z$ , la surface  $\Sigma$  au plan  $z = 0$ . Les courbes  $(16)$  et  $(16_1)$  sont les droites isotropes  $x - iy = \text{const.}$  ou  $x + iy = \text{const.}$  du plan  $z = 0$ . On peut remarquer que le cône  $C$  se réduisant à un plan et la section  $\sigma$  à une droite, on peut parler du degré d'un cycle

porté par cette droite, mais non de la classe de ce cycle; c'est la raison pour laquelle le paraboloid joue ce rôle exceptionnel. Le fait que  $(\mathfrak{V})$  et  $(\mathfrak{V}_1)$  sont symétriques l'une de l'autre par rapport à tous les plans contenant  $Oz$  ou encore que chacune d'elles reste invariante dans une rotation autour de  $Oz$  entraîne bien la conséquence que  $\mathcal{Q}$  admette tous ces plans pour plans de symétrie de première espèce et  $Oz$  pour axe de rotation.

Ceci conduit à parler rapidement des surfaces de révolution et des hélicoïdes applicables sur  $\mathcal{Q}$ ; les surfaces de révolution ou hélicoïdales applicables sur une surface de révolution donnée s'obtiennent, comme on sait, par des quadratures, ici, elles sont immédiates, et il est même assez curieux qu'aucun géomètre n'ait remarqué que l'on obtient, suivant le cas, des surfaces applicables effectivement sur  $\mathcal{Q}$ , ou des surfaces dont l'élément linéaire se présente bien sous la même forme d'écriture, si l'on peut dire, bien que ces surfaces ne puissent recouvrir aucune région du paraboloid. Dans le cas actuel, les propriétés de ces surfaces particulières, en réalité très voisines des surfaces algébriques, se rattachent étroitement aux propriétés étudiées dans tout ce Chapitre. L'existence d'un mouvement de révolution ou d'un mouvement hélicoïdal laissant la surface invariante entraîne que  $(\mathfrak{V})$  soit de révolution autour de l'axe du mouvement, donc que  $(\mathfrak{V})$  soit un cercle réel  $[(\nu)$  ou  $(G)]$  ou imaginaire de la sphère; si la surface  $S$  est réelle, l'axe est nécessairement réel, nous le prenons pour axe  $Oz$  et nous épuisons tous les cas possibles en prenant  $(a$  et  $b$  désignant deux constantes réelles)

$$(52) \quad \begin{cases} c = \sin(a + bi) \cos(u + i\nu), \\ c' = \sin(a + bi) \sin(u + i\nu). \\ c'' = \cos(a + bi). \end{cases}$$

Nous avons aisément :

$$\begin{aligned} (S) \quad \begin{cases} x = -2\tau \cos a \operatorname{ch} b [\sin a \operatorname{ch} b \cos u \operatorname{sh} \nu + \cos a \operatorname{sh} b \sin u \operatorname{ch} \nu], \\ y = 2\tau \cos a \operatorname{ch} b [-\sin a \operatorname{ch} b \sin u \operatorname{sh} \nu + \cos a \operatorname{sh} b \cos u \operatorname{ch} \nu], \\ z = \frac{\tau}{2} [\nu(1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b) + u \sin 2a \operatorname{sh} 2b + (\sin^2 a + \operatorname{sh}^2 b) \operatorname{sh} 2\nu]; \end{cases} \\ (S') \quad \begin{cases} x = 2\tau \sin a \operatorname{sh} b [\sin a \operatorname{ch} b \sin u \operatorname{ch} \nu - \cos a \operatorname{sh} b \cos u \operatorname{sh} \nu], \\ y = -2\tau \sin a \operatorname{sh} b [\sin a \operatorname{ch} b \cos u \operatorname{ch} \nu + \cos a \operatorname{sh} b \sin u \operatorname{sh} \nu], \\ z = \frac{\tau}{2} [\nu(1 - \cos 2a \operatorname{ch} 2b) + u \sin 2a \operatorname{sh} 2b - (\sin^2 a + \operatorname{sh}^2 b) \operatorname{sh} 2\nu]. \end{cases} \end{aligned}$$



Les courbes  $\nu = \text{const.}$  sont des hélices circulaires d'axe  $Oz$  et de pas égal à  $\tau\pi \sin 2a \operatorname{sh} 2b$ ; les surfaces sont donc de révolution si  $\sin 2a \operatorname{sh} 2b = 0$ , ce qui entraîne trois cas :

1°  $b = 0$ ;  $c'' = \cos a$ ; la courbe  $(\mathfrak{V})$  est un cercle réel ( $\nu$ ) de la sphère;  $S$  est de révolution,  $S'$  se réduit à  $Oz$ . L'origine est centre de  $S$  et en même temps point conique de  $S$ ;  $(\mathfrak{V})$  coïncide avec  $(\mathfrak{V}_1)$ , la symétrie par rapport à l'origine est de seconde espèce; le plan  $xOy$  est plan de symétrie de seconde espèce pour  $S$  et ne la coupe pas.

2°  $a = 0$ ;  $c'' = \operatorname{ch} b$ ; la courbe  $(\mathfrak{V})$  est un cercle imaginaire, mais réel ( $\mathfrak{G}$ );  $S'$  est encore réduite à  $Oz$ ,  $S$  étant encore applicable physiquement sur  $\mathfrak{G}$ , admettant l'origine pour centre et point conique isolé (symétrie de seconde espèce); le plan  $xOy$  est encore plan de symétrie de seconde espèce pour  $S$  et la touche suivant un parallèle de rebroussement.

3°  $a = \frac{\pi}{2}$ ;  $c'' = -i \operatorname{sh} b$ ; la courbe  $(\mathfrak{V})$  est l'un des deux cercles d'intersection de la sphère avec un cylindre de révolution réel ( $\nu$ ) d'axe  $Oz$  et de rayon  $\operatorname{ch} b$  supérieur à 1;  $(\mathfrak{V})$  et  $(\mathfrak{V}_1)$  sont symétriques l'une de l'autre, soit par rapport à l'origine, soit par rapport au plan  $xOy$ . La surface  $S$  se réduit cette fois à l'axe des  $z$ ;  $S'$  est de révolution, mais ne recouvre pas  $\mathfrak{G}$  physiquement. L'origine est centre de symétrie de seconde espèce pour  $S'$ ; le plan équatorial  $xOy$  est plan de symétrie de seconde espèce pour  $S'$  et la coupe suivant un parallèle de rebroussement.

Dans un Mémoire complémentaire, qui paraîtra prochainement dans ce même Recueil, j'étudierai les surfaces déduites de la cubique de Lyon et montrerai les conséquences curieuses que l'on peut déduire du travail de M. Thybaut.

---