BULLETIN DE LA S. M. F.

R. GARNIER

Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 106-108
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__106_1>

CHAMPS VECTORIELS A DIRECTIONS ASYMPTOTIQUES INDÉTERMINÉES;

PAR M. RENÉ GARNIER.

Dans une Note des *Comptes rendus* (1), j'ai traité un problème posé par M. C. Guichard, et étudié par M. Axel Egnell (2); par suite d'une erreur de signe, le résultat qui termine cette Note se trouve incomplet (3). Mais, en fait, il est facile de résoudre complètement le problème par la méthode analytique que j'ai signalée.

Il s'agit de déterminer six fonctions inconnues X, Y, Z, u, v, w satisfaisant à l'équation

$$dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz = (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)(u\,dx + v\,dy + w\,dz);$$

or cette équation équivaut au système

$$(1)\qquad \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} & \dfrac{\partial Z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} & \dfrac{\partial Y}{\partial z} & \dfrac{\partial Z}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} uX & uY - \rho & uZ + \mu \\ vX + \rho & vY & vZ - \lambda \\ wX - \mu & wY + \lambda & wZ \end{Vmatrix},$$

(1) *Comptes rendus*, t. 169, 1919, p. 324.
(2) *Ibid.*, t. 168, 1919, p. 1263.
(3) *Cf.* E. GOURSAT, *Ibid.*, t. 169, 1919, p. 493.

dont les conditions d'intégrabilité s'écrivent

$$(2)\quad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x} - u\lambda & \frac{\partial\mu}{\partial x} - u\mu & \frac{\partial\rho}{\partial x} - u\rho \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} - v\lambda & \frac{\partial\mu}{\partial y} - v\mu & \frac{\partial\rho}{\partial y} - v\rho \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z} - w\lambda & \frac{\partial\mu}{\partial z} - w\mu & \frac{\partial\rho}{\partial z} - w\rho \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi X - S & \eta X & \zeta X \\ \xi Y & \eta Y - S & \zeta Y \\ \xi Z & \eta Z & \zeta Z - S \end{matrix} \right\|$$

en posant

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \xi, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \eta, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \zeta$$

et

$$2S = \xi X + \eta Y + \zeta Z).$$

Exprimons maintenant que (2) est complètement intégrable, et nous obtiendrons en tout les six équations [1]

$$A \equiv 3\xi\lambda + \frac{\partial\xi}{\partial z} Y - \frac{\partial\xi}{\partial y} Z = 0,$$

$$B \equiv 3\eta\mu + \frac{\partial\eta}{\partial x} Z - \frac{\partial\eta}{\partial z} X = 0,$$

$$C \equiv 3\zeta\rho + \frac{\partial\zeta}{\partial y} X - \frac{\partial\zeta}{\partial x} Y = 0;$$

$$2D \equiv 3(\eta\rho + \zeta\mu) + \frac{\partial\zeta}{\partial x} Z - \frac{\partial\zeta}{\partial z} X + \frac{\partial\eta}{\partial y} X - \frac{\partial\eta}{\partial x} Y = 0,$$

$$2E \equiv 3(\zeta\lambda + \xi\rho) + \frac{\partial\xi}{\partial y} X - \frac{\partial\xi}{\partial x} Y + \frac{\partial\zeta}{\partial z} Y - \frac{\partial\zeta}{\partial y} Z = 0,$$

$$2F \equiv 3(\xi\mu + \eta\lambda) + \frac{\partial\eta}{\partial z} Y - \frac{\partial\eta}{\partial y} Z + \frac{\partial\xi}{\partial x} Z - \frac{\partial\xi}{\partial z} X = 0;$$

d'où l'on déduit aussitôt la combinaison

$$\begin{aligned} 0 &= AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2DYZ + 2EZX + 2FXY \\ &\equiv 3(\xi X + \eta Y + \zeta Z)(\lambda X + \mu Y + \rho Z). \end{aligned}$$

On devra donc avoir

$$(3)\qquad S\sigma = 0,$$

---

[1] Les systèmes (1) et (2), ainsi que l'équation $E = 0$, figurent d'ailleurs dans la Note des *Comptes rendus*.

en posant

$$\sigma = \lambda X + \mu Y + \rho Z.$$

Supposons d'abord $\sigma \neq 0$; la condition (3) exigera $S = 0$; mais on tire de (1) et (2)

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial z}\right) = 2(u, v, w)\sigma + (X, Y, Z)S,$$

on aura donc

$$2u = \frac{\partial \log \sigma}{\partial x}, \qquad 2v = \frac{\partial \log \sigma}{\partial y}, \qquad 2w = \frac{\partial \log \sigma}{\partial z},$$

et en multipliant X, Y, Z par un facteur d'ensemble convenablement choisi, on peut prendre $\sigma = 1$, d'où

$$u = v = w = 0, \qquad \xi = \eta = \zeta = 0;$$

λ, μ, ρ sont des constantes et, en vertu de (1), *le vecteur* (X, Y, Z) *sera normal au plan polaire du point* (x, y, z) *par rapport à un complexe linéaire*. C'est la solution de la Note des *Comptes rendus*.

Mais on peut encore satisfaire à (3) en prenant $\sigma = 0$; pour interpréter ce résultat, posons

$$H = xX + yY + zZ;$$

en nous appuyant sur (1), nous trouverons

$$\frac{D\left(\frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)}{D(y, z)} = \frac{\lambda x}{H^3}\sigma,$$

$$\frac{D\left(\frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)}{D(z, x)} = \frac{\mu x - Z}{H^3}\sigma, \qquad \frac{D\left(\frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right)}{D(x, y)} = \frac{\rho x + Y}{H^3}\sigma, \qquad \ldots,$$

ce qui prouve que, pour $\sigma = 0$, $\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}$ sont, tous, fonctions l'un de l'autre; *le vecteur* (X, Y, Z) *est alors perpendiculaire à un plan, tangent à une développable et passant par le point* (x, y, z), et l'on vérifie aussitôt que cette seconde solution répond bien à la question.