ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DANIEL DUGUÉ

Vers un théorème de Picard global

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 65-81
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__65_0>

VERS
UN THÉORÈME DE PICARD GLOBAL

PAR DANIEL DUGUÉ

Il ne sera jamais trop tard pour parler du théorème de Picard. Peu de résultats aussi simples ont eu de tels prolongements qu'on puisse dire presque qu'une bonne moitié de la théorie des fonctions n'est que l'ensemble des corollaires du théorème fondamental publié en 1879 dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*. Je voudrais, dans les quelques pages qui suivent, donner la démonstration de faits que j'ai résumés dans deux Notes aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (29 janvier et 15 octobre 1951).

Il s'agit de fonctions ayant plusieurs singularités essentielles. Mittag-Leffler, dans une Note du 3 avril 1882, que cite Henri Poincaré dans son Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, avait envisagé des fonctions ayant plus d'une singularité essentielle et même une infinité. Maillet, plus tard, avait utilisé des fonctions ayant un nombre fini de singularités essentielles et l'infini comme valeur exceptionnelle partout. Il les avait nommées fonctions quasi entières. Le théorème de Picard est valable localement au voisinage de chaque singularité. Chaque point singulier essentiel a au plus deux valeurs exceptionnelles. Il m'a semblé de quelque intérêt de chercher à voir ce qu'il devient globalement, « in the large ». *A priori*, la réponse est que, s'il y a n points singuliers, il peut y avoir $2n$ valeurs localement exceptionnelles. Le but de ce Mémoire est de montrer qu'il ne peut y en avoir que $n+1$ au plus. Cette borne est atteinte pour $n=2$ et 3. Il se peut qu'elle ne puisse pas être atteinte pour n quelconque. Après avoir signalé quelques conséquences et quelques extensions de ce fait, je termine cet article en proposant quelques problèmes soulevés par l'étude de cette question.

CHAPITRE I.

LE THÉORÈME CENTRAL.

Notations. — Dans la suite de l'exposé, les lettres minuscules du début de l'alphabet $a(z)$, $b(z)$, ... désigneront des fonctions entières (éventuellement des polynomes); les lettres majuscules du début de l'alphabet $A(z)$, $B(z)$, ..., des fonctions holomorphes au voisinage de l'infini; les lettres minuscules à partir de m, $m(z)$, $n(z)$, ..., des fonctions méromorphes dans tout le plan, sauf à l'infini; les lettres majuscules à partir de M, $M(z)$, $N(z)$, ..., des fonctions méromorphes au voisinage de l'infini.

Je vais d'abord établir le résultat suivant :

$\varphi(z)$ étant une fonction uniforme dans tout le plan, méromorphe au voisinage de l'origine et de l'infini, ayant ces deux points comme singularités essentielles et pouvant d'ailleurs avoir d'autres singularités, $\varphi(z)$ ne peut avoir quatre valeurs exceptionnelles de Picard à l'origine et à l'infini.

Remarquons d'abord que l'on a

$$\varphi(z) = e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)} M(z) N\left(\frac{1}{z}\right).$$

En effet, marquons les zéros et les pôles de $\varphi(z)$ au voisinage de zéro et de l'infini.

D'après le théorème de factorisation de Weierstrass, on peut trouver deux fonctions $m(z)$ et $n\left(\frac{1}{z}\right)$ ayant ces zéros et ces pôles. Donc $\psi(z) = \dfrac{\varphi(z)}{m(z)\,n\left(\frac{1}{z}\right)}$ n'aura ni zéros, ni pôles au voisinage de zéro et de l'infini, $\chi(z) = \log\psi(z)$ sera une fonction uniforme au voisinage de zéro et de l'infini (elle pourra ne pas être uniforme ailleurs) et holomorphe dans ces mêmes régions. $\chi(z)$ sera donc développable en série de Laurent convergente pour $|z| > R$. Donc

$$\chi(z) = a(z) + \mu\left(\frac{1}{z}\right).$$

$\mu\left(\frac{1}{z}\right)$ sera une fonction holomorphe au voisinage de l'infini et *à l'infini*, ainsi qu'au voisinage de l'origine (puisque χ l'est aussi), qu'elle admettra pour singularité essentielle $\Big[$à moins que ψ ne soit d'ordre fini en zéro, auquel cas $\mu\left(\frac{1}{z}\right)$ serait égale à un polynome en $\frac{1}{z}$ augmenté d'une fonction régulière en zéro$\Big]$ et ayant ailleurs éventuellement diverses singularités dont des points de ramification, mais qui disparaissent après exponentiation. $e^{\mu\left(\frac{1}{z}\right)}$ sera uniforme, puisque $\psi(z)$ est uniforme. En écrivant le développement de Laurent dans le cercle $|z| < r$, on aura

$$\mu\left(\frac{1}{z}\right) = b\left(\frac{1}{z}\right) + v(z),$$

$v(z)$ sera holomorphe au voisinage de zéro et de l'infini et *en ces points*. Il aura les mêmes ramifications que μ, ainsi que ses singularités autres que l'origine. Finalement,

$$\varphi = e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)} e^{v(z)} m(z) n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$e^{v(z)}$ étant uniforme, holomorphe au voisinage de zéro et de l'infini et *en ces points*. On a donc bien la forme donnée :

$$\varphi = e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)} \mathrm{M}(z) \mathrm{N}\left(\frac{1}{z}\right)$$

et M et N seront analytiques au moins dans les régions où φ l'est.

Supposons que les quatre valeurs exceptionnelles dont nous voulons montrer l'impossibilité soient 1 et λ en zéro, 0 et ∞ à l'infini ($\lambda \neq 0, 1, \infty$). On peut toujours s'arranger pour qu'il en soit ainsi par une transformation homographique, mais comme nous ne disposons que de trois coefficients, il pourrait *a priori* se faire que le théorème fut vrai pour certaines valeurs de λ et non pour toutes. Nous allons voir qu'il est vrai pour toutes.

Dans ces conditions,

$$\varphi = e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)} \mathrm{N}\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{ou} \qquad \varphi = e^{a(z)} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

en faisant entrer $e^{b\left(\frac{1}{z}\right)}$ dans le symbole P.

$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ va avoir zéro et l'infini comme valeurs exceptionnelles en zéro. Donc

$$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi} = e^{c\left(\frac{1}{z}\right)} \mathrm{M}(z).$$

Il faut donc montrer l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\frac{1 - e^{a(z)} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)}{\lambda - e^{a(z)} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)} = e^{c\left(\frac{1}{z}\right)} \mathrm{M}(z)$$

ou

$$1 - e^{a(z)} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right) - \lambda e^{c\left(\frac{1}{z}\right)} \mathrm{M}(z) + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} \mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{M}(z) = 0$$

ou

$$\frac{1}{P\left(\frac{1}{z}\right)M(z)} - \frac{e^{a(z)}}{M(z)} - \lambda\frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{P\left(\frac{1}{z}\right)} + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} = 0.$$

Posons

$$\frac{e^{a(z)}}{M(z)} = Q(z), \qquad \frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{P\left(\frac{1}{z}\right)} = R\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\frac{Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right)}{e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}} - Q(z) - \lambda R\left(\frac{1}{z}\right) + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} = 0.$$

D'où

$$(\mathcal{R}) \qquad \left[e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\right]^2 - \left[Q(z) + \lambda R\left(\frac{1}{z}\right)\right]e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} + Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

C'est la forme des coefficients de la relation quadratique $(\mathcal{R})$ à laquelle doit satisfaire $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$, soit $Q(z)+\lambda R\left(\frac{1}{z}\right)$ et $Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right)$ qui va conduire à l'impossibilité cherchée. Nous allons établir que si $(\mathcal{R})$ a lieu :

a. Si $Q(z)$ a des zéros, $R\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de pôles et si $R\left(\frac{1}{z}\right)$ a des pôles, $Q(z)$ n'a pas de zéros;

b. Si $Q(z)$ a des pôles, $R\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de zéros et si $R\left(\frac{1}{z}\right)$ a des zéros, $Q(z)$ n'a pas de pôles.

En effet, $(\mathcal{R})$ ayant lieu, $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$ est égale à l'une des deux fonctions

$$\frac{1}{2}\left\{Q(z)+\lambda R\left(\frac{1}{z}\right) \pm \sqrt{\left[Q(z)+\lambda R\left(\frac{1}{z}\right)\right]^2 - 4Q(z)R\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}.$$

L'une de ces deux fonctions est donc :

1° uniforme (cela entraîne que l'autre fonction le soit aussi);

2° holomorphe;

3° sans zéros.

Posons $\dfrac{R\left(\frac{1}{z}\right)}{Q(z)} = \theta(z)$, qui sera une fonction définie dans la région où φ l'est, méromorphe au voisinage de l'origine et de l'infini et admettant ces deux points comme singularité essentielle. $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$ sera l'une des deux fonctions

$$\frac{Q(z)}{2}\left[1+\lambda\theta(z) \pm \sqrt{\lambda^2\theta^2(z) + 2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right].$$

Précisons que le radical, qui est uniforme, sera pris équivalent à $\lambda\theta$ pour θ infiniment grand. Dans ces conditions, l'expression

$$1 + \lambda\theta(z) - \sqrt{\lambda^2\theta^2(z) + 2(\lambda - 2)\theta(z) - 1}$$

n'a pas de pôle.

En effet, les seuls pôles possibles seraient ceux de θ. Soit z_0 l'un d'eux et n son ordre de multiplicité

$$\lambda\theta - \sqrt{\lambda^2\theta^2 + 2(\lambda - 2)\theta + 1} = \lambda\theta\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2(\lambda - 2)\theta + 1}{\lambda^2\theta^2}}\right],$$

le radical étant égal à $+1$ pour $\frac{1}{\theta}$ nul. On aura

$$\frac{1}{\theta} = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe et non nul pour $z = z_0$,

$$\frac{1}{\theta^2} = (z - z_0)^{2n} \varphi^2(z),$$

$$1 + \frac{2(\lambda - 2)}{\lambda^2}\,\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\lambda^2\theta^2} = 1 + \frac{1}{\theta}\left[\frac{2(\lambda - 2)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2\theta}\right]$$

est donc holomorphe au voisinage de z_0 et égal à $1 + B_0(z - z_0)^n + \ldots$ (B_0 pouvant être nul). La mise en facteur de $\lambda\theta$ a été légitime, car λ est différent de zéro. Par conséquent, avec la convention adoptée sur la détermination du radical, $1 - \sqrt{1 + \frac{2(\lambda - 2)\theta + 1}{\lambda^2\theta^2}}$ sera au voisinage de z_0 égal à

$$-\frac{B_0}{2}(z - z_0)^n + \ldots$$

et, par conséquent,

$$1 + \lambda\theta(z) - \sqrt{\lambda^2\theta^2(z) + 2(\lambda - 2)\theta(z) + 1}$$

sera holomorphe au voisinage de z_0. Si donc

$$e^{a(z) + c\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{Q(z)}{2}\left[1 + \lambda\theta(z) - \sqrt{\lambda^2\theta^2(z) + 2(\lambda - z)\theta(z) + 1}\right],$$

cela implique que $Q(z)$ n'ait pas de zéros, puisqu'ils ne peuvent être détruits par les pôles inexistants de la parenthèse.

Donc, si $Q(z)$ a des zéros, $e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}$ doit être égal à l'autre fonction, soit

$$\frac{Q(z)}{2}\left[1 + \lambda\theta(z) + \sqrt{\lambda^2\theta^2 + 2(\lambda - 2)\theta(z) + 1}\right],$$

le radical conservant toujours le même sens. Donc

$$\begin{aligned} e^{-\left[a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)\right]} &= \frac{2}{Q(z)}\,\frac{1}{\left[1+\lambda\theta(z)+\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right]}, \\ &= \frac{2}{Q(z)}\,\frac{1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}}{4\theta(z)}, \\ &= \frac{1}{2R\left(\frac{1}{z}\right)}\left[1+\lambda\theta(z)-\sqrt{\lambda^2\theta^2(z)+2(\lambda-2)\theta(z)+1}\right] \end{aligned}$$

et nous sommes amenés cette fois à conclure que $\dfrac{1}{R\left(\frac{1}{z}\right)}$ n'a pas de zéros. Donc $R\left(\frac{1}{z}\right)$ n'a pas de pôles. Si $R\left(\frac{1}{z}\right)$ avait des pôles, cela nous ramènerait obligatoirement à la première détermination et $Q(z)$ ne pourrait avoir de zéros. Donc : a est établi; b se démontre exactement de la même façon en posant

$$\frac{Q(z)}{R\left(\frac{1}{z}\right)} = \omega(z).$$

Donc, ou bien R n'a pas de pôle, ou bien Q n'a pas de zéro et, par suite, ou bien P n'a pas de zéro, ou bien M n'a pas de pôle. Si P n'a pas de zéro, zéro est exceptionnel partout, en particulier à l'origine (alors que 1 et $\lambda \neq 0$ le sont déjà). Si M n'a pas de pôle, l'infini est exceptionnel partout (en particulier à l'infini) pour $\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ et λ est exceptionnel partout, en particulier à l'infini (où 0 et $\infty \neq \lambda$ le sont déjà). De toute façon, nous aboutissons à la contradiction cherchée.

On en déduit immédiatement le théorème général énoncé dans l'Avant-Propos.

S'il y a n singularités essentielles, il ne peut y avoir au plus que $n+1$ valeurs exceptionnelles.

En effet, numérotons les points singuliers $M_1, \ldots, M_n$ et formons l'ensemble des valeurs exceptionnelles de la façon suivante. Passons successivement en revue tous les points et pour chacun d'eux inscrivons, si elle existe, la valeur exceptionnelle qui ne figure pas pour les points précédents. S'il y avait $n+2$ valeurs exceptionnelles, deux points M_l et M_m $(l<m)$ auraient sûrement fourni deux valeurs. M_m aurait donc deux valeurs exceptionnelles ne figurant pas parmi les valeurs précédentes, donc parmi celles de M_l et ces deux points auraient quatre valeurs exceptionnelles différentes.

CHAPITRE II.

Extensions possibles.

1. Le théorème reste vrai si l'expression « valeur exceptionnelle de Picard » est remplacée par « valeur exceptionnelle de Borel ». En effet, dans ce cas, la forme de φ sera un peu plus compliquée, mais on aboutira à une équation analogue à ($\mathcal{R}$). On aura

$$\varphi = e^{a(z)}\mathrm{T}(z)\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)$$

(T étant au voisinage de l'infini d'ordre inférieur à $e^{a(z)}$),

$$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi} = e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z)$$

(S étant au voisinage de l'origine d'ordre inférieur à $e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}$). On devrait donc avoir

$$0 = 1 - e^{a(z)}\mathrm{T}(z)\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right) - \lambda e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z) + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{T}(z)\mathrm{M}(z)$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{T}(z)\mathrm{M}(z)} - \frac{e^{a(z)}}{\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{M}(z)} - \lambda\frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{T}(z)} + e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} = 0;$$

en posant encore

$$\frac{e^{a(z)}}{\mathrm{M}(z)} = \mathrm{Q}(z), \qquad \frac{e^{c\left(\frac{1}{z}\right)}}{\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)} = \mathrm{R}\left(\frac{1}{z}\right),$$

on est conduit à l'équation

$$(\mathcal{R}') \qquad \left[e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)}\right]^2 - \left[\frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)} + \lambda\frac{\mathrm{R}\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathrm{T}(z)}\right]e^{a(z)+c\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{S}\left(\frac{1}{z}\right)}\,\frac{\mathrm{R}\left(\frac{1}{z}\right)}{\mathrm{T}(z)} = 0$$

et pour la même raison que tout à l'heure : à cause de la forme des coefficients, on est amené à conclure, si ($\mathcal{R}'$) est satisfait, que : ou bien $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}}$ n'a pas de pôle, ou bien $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}}$ n'a pas de zéro (le fait que les coefficients de l'équation aient ici deux singularités essentielles au lieu d'une ne change rien au raisonnement, car il n'était question que des zéros et des pôles des coefficients au voisinage de zéro et de l'infini).

Si $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{S}}$ n'a pas de pôle, $\frac{1}{\mathrm{MS}}$ n'a pas de pôle et MS pas de zéro; $\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ a zéro pour valeur exceptionnelle de Picard, aussi bien à l'origine qu'à l'infini; φ a un pour valeur exceptionnelle de Picard à l'infini (ou zéro et l'infini sont exceptionnels de Borel). Si $\frac{R}{T}$ n'a pas de zéro, $\frac{1}{PT}$ n'a pas de zéro, PT n'a pas de pôle et φ a l'infini comme valeur exceptionnelle de Picard, à l'infini comme à l'origine (ou 1 et $\lambda \neq \infty$ sont exceptionnels de Borel).

De toute façon, nous aboutissons à une contradiction.

2. Examinons maintenant le cas où φ est une fonction ayant deux lignes singulières disjointes L_1 et L_2. On aura à remplacer les valeurs exceptionnelles au voisinage d'un point par des valeurs exceptionnelles au voisinage d'une ligne. Dire que a est exceptionnel au voisinage de L signifie qu'il existe une courbe C n'ayant aucun point commun avec L et telle que $\varphi - a = 0$ n'ait aucune racine dans le domaine compris entre C et L. Si donc a n'est pas exceptionnel au voisinage de L, il y aura un point de L au moins limite des racines de $\varphi(z) - a = 0$. On a ainsi des ensembles exceptionnels au voisinage de L_1 et L_2. Si L_1 et L_2 sont disjoints, les mêmes raisonnements qu'au début montrent que φ sera de la forme $e^{\alpha_{L_1}(z)+\beta_{L_2}(z)}M_{L_1}(z)N_{L_2}(z)$, $M_{L_1}(z)$ et $N_{L_2}(z)$ étant des fonctions méromorphes admettant, l'une L_1 comme ligne singulière et non L_2, l'autre L_2 et non L_1; $\alpha_{L_1}(z)$ et $\beta_{L_2}(z)$ seront des fonctions holomorphes ayant les mêmes singularités. Cette extension est fondée sur l'extension donnée par E. Picard de la factorisation de Weierstrass au voisinage d'une ligne singulière et sur l'utilisation dans les mêmes conditions que dans la première partie du développement de Laurent. Si zéro et l'infini sont exceptionnels au voisinage de L_1 et 1 et λ au voisinage de L_2, on aboutira, après des changements de fonction analogues à la même relation $(\mathcal{R})$ (L_1 joue le rôle de l'infini tout à l'heure et L_2 celui de l'origine)

$$\left[e^{\alpha_{L_1}(z)+\gamma_{L_2}(z)}\right]^2 - \left[Q_{L_1}(z) + \lambda R_{L_2}(z)\right] e^{\alpha_{L_1}(z)+\gamma_{L_2}(z)} + Q_{L_1}(z) R_{L_2}(z) = 0$$

et comme plus haut on sera conduit à admettre que, ou bien $Q_{L_1}(z)$ n'a pas de zéro ou $R_{L_2}(z)$ n'a pas de pôle.

En revenant à la définition de φ, cela conduit à la conclusion que zéro ou l'infini sont exceptionnels au voisinage de L_2 ou que 1 ou λ sont exceptionnels au voisinage de L_1. Ici il n'y a pas d'impossibilité dans le cas où l'un des deux ensembles exceptionnels comprend plus de deux points.

Cela conduit au théorème que j'énonçais dans ma Note du 15 octobre 1951 :

Les ensembles exceptionnels au voisinage de L_1 *et au voisinage de* L_2 *ont au moins un point commun si chacun des ensembles a au moins deux valeurs exceptionnelles.*

Mais on peut aller plus loin. Soit E_1 l'ensemble exceptionnel au voisinage de L_1, E_2 l'ensemble exceptionnel au voisinage de L_2, C leur partie commune non vide d'après ce qui précède.

Il y a sûrement au moins un des deux ensembles $E_1 - C$ *et* $E_2 - C$ *qui ne comprend qu'un point au plus.*

En effet, on pourrait autrement choisir α, β dans $E_1 - C$ et γ, δ dans $E_2 - C$, les quatre valeurs étant différentes. Et les raisonnements précédents devraient nous conduire à, soit α ou β dans E_2, soit γ ou δ dans E_1, ce qui est impossible, aucune des quatre valeurs n'étant dans C.

Bien entendu, ces deux théorèmes restent vrais si la ligne L_2 est remplacée par un point.

Considérons en particulier une fonction $\Phi(z)$ ayant pour coupure le cercle unité $\mathcal{C}$, où la fonction a un nombre infini de zéros et de pôles. Supposons que Φ ait un ensemble exceptionnel qui peut être un ensemble dénombrable de points ou les points intérieurs à une ou plusieurs courbes fermées. Quelle que soit $a(z)$ entière, la fonction $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}\Phi(z)$ a zéro et l'infini comme seules valeurs exceptionnelles en zéro. Donc au voisinage de $\mathcal{C}$, comme l'ensemble exceptionnel de $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}\Phi(z)$ ne comprend ni zéro, ni l'infini, il ne pourra comprendre au plus qu'un point. Donc, sauf peut-être pour une seule valeur λ, $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}\Phi(z) = \lambda$ a un nombre infini de racines au voisinage de $\mathcal{C}$. Il y a *brassage* des valeurs de $\Phi(z)$ par $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)}$.

3. L'extension que nous venons de donner supposait les lignes L_1 et L_2 disjointes (pour que l'on puisse appliquer le développement de Laurent à une couronne d'épaisseur non nulle ayant L_1 à l'intérieur et L_2 à l'extérieur). On peut étendre le théorème au cas où l'on envisage deux portions d'une ligne singulière continue. Mais, dans ce cas, on doit utiliser le résultat donné par Henri Poincaré dans son Mémoire : *Sur les fonctions à espace lacunaire* (*American Journal of Mathematics*, t. XIX) et utilisé par M. Borel dans sa thèse.

Une fonction à ligne singulière L (égale à la somme de deux arcs L_1 et L_2) peut être décomposée en une somme de deux fonctions, l'une ayant L_1 comme ligne singulière et non L_2, l'autre ayant L_2 comme ligne singulière et non L_1. Dans ces conditions, on retrouve le développement canonique de tout à l'heure pour φ : $e^{\alpha_{L_1}(z)+\beta_{L_2}(z)}M_{L_1}(z)N_{L_2}(z)$, L_1 et L_2 étant les deux portions d'arc et comme dans le paragraphe 2 de ce chapitre, on aboutira à la relation analogue à la relation $(\mathcal{R})$ avec les mêmes deux théorèmes qui servent de conclusion à la discussion. Il n'est donc pas indispensable de supposer L_1 et L_2 disjoints.

4. Tout ce qui précède est fondé sur la séparation des singularités (application du développement de Laurent ou des résultats de Poincaré). Si ce principe

est général, on pourrait déduire de la discussion de la relation ($\mathcal{R}$) des résultats sur les valeurs exceptionnelles de Julia. J'ai désigné sous ce nom des valeurs qui sont exceptionnelles au voisinage des droites de Julia sans pour cela être exceptionnelles de Picard. Par exemple, $\frac{e^{e^z}-1}{e^{e^{-z}}-1}$ n'a aucune valeur exceptionnelle de Picard (ce serait contraire au résultat de M. Borel sur l'impossibilité de la constance d'une somme d'exponentielles). Toutes les demi-droites sont demi-droites J. Les demi-droites du demi-plan positif ont l'infini comme valeur exceptionnelle J; les demi-droites du demi-plan négatif ont zéro comme valeur exceptionnelle J. Dans ma Note d'octobre 1951 j'ai un peu hâtivement affirmé que le raisonnement de M. Valiron montrant que l'infini est valeur asymptotique pour une fonction entière s'appliquait encore aux valeurs exceptionnelles J. En fait, le problème paraît plus compliqué. Si la droite J est telle que dans le domaine angulaire la comprenant où l'infini est exceptionnel J, il existe deux droites dont l'angle comprend la droite J sur lesquelles $|f(z)|$ est borné, le raisonnement de M. Valiron s'applique mot pour mot. Autrement non. Dans ce cas, toute droite de ce domaine angulaire a un domaine d'indétermination comprenant le point à l'infini. Il se peut d'ailleurs que, même dans ce cas, la valeur exceptionnelle J soit asymptotique. Pour revenir à l'objet du présent article, il y aurait lieu de chercher le problème suivant :

$\varphi(z)$ étant méromorphe au voisinage de l'infini ayant deux droites de Julia isolées J_1 et J_2, peut-on la décomposer en un produit de fonctions φ_1 et φ_2, l'une ayant J_1 pour droite de Julia et non J_2, l'autre J_2 et non J_1 ?

Il me semble à peu près certain que la chose est possible à cause des théorèmes généraux dont on dispose sur la séparation des singularités, aussi bien ponctuelles que linéaires et de l'analogie signalée par A. Bloch entre ces singularités et les droites de Julia. Toutefois, je ne peux en donner la preuve. Admettons cette possibilité et que la décomposition se fasse comme pour les points et lignes singulières, *les valeurs exceptionnelles se conservant dans les facteurs*, c'est-à-dire que si j_1 est droite de Julia isolée de φ, ayant o et ∞ comme valeurs exceptionnelles J autour de j_1, on ait

$$\varphi(z)=\varphi_{j_1}(z)M_1(z),$$

$\varphi_{j_1}(z)$ n'ayant que j_1 pour droite de Julia avec o et ∞ exceptionnels J autour de j_1. Si 1 et λ sont exceptionnels J autour de j_2, on a de même

$$\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}=\varphi_{j_2}(z)M_2(z),$$

$\varphi_{j_2}(z)$ n'ayant que j_2 pour droite de Julia avec o et ∞ comme valeurs exceptionnelles J. Cela entraîne encore

$$[\varphi_{j_1}(z)\varphi_{j_2}(z)]^2-[R(z)+\lambda S(z)]\varphi_{j_1}(z)\varphi_{j_2}(z)+R(z)S(z)=0$$

en posant

$$\frac{\varphi_{j_1}}{M_2} = R(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi_{j_2}}{M_1} = S(z),$$

$\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}$ va donc être l'une des deux fonctions :

$$\frac{R(z) + \lambda S(z) \pm \sqrt{[R(z) + \lambda S(z)]^2 - 4R(z)S(z)}}{2}.$$

En écrivant ces deux fonctions sous la forme

$$R(z)\left[\frac{1 + \lambda\frac{S(z)}{R(z)} \pm \sqrt{\lambda^2\left(\frac{S(z)}{R(z)}\right)^2 + 2(\lambda - 2)\frac{S(z)}{R(z)} + 1}}{2}\right],$$

on voit que la parenthèse représente dans un cas une fonction holomorphe. Si $\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}$ est égale à cette détermination, on en déduit que $\frac{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}{R}$ est holomorphe partout. Or

$$\frac{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}{R} = \varphi_{j_2}M_2.$$

Donc $\frac{1-\varphi}{\lambda-\varphi}$ est partout holomorphe et φ a λ comme valeur exceptionnelle partout, en particulier au voisinage de j_1, où zéro et l'infini différents de λ sont déjà exceptionnels J. Ce cas est donc à rejeter. Si $\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}$ est égale à l'autre détermination, on en déduit comme plus haut que $\frac{1}{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}$ est égal au produit de $\frac{1}{S}$ par une fonction holomorphe. Donc $\frac{S}{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}$ est holomorphe partout. Or

$$\frac{S}{\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}} = \frac{\varphi_{j_2}}{M_1\varphi_{j_1}\varphi_{j_2}}.$$

Donc $M_1\varphi_{j_1}$ ne s'annule nulle part et φ a zéro comme valeur exceptionnelle partout, donc au voisinage de j_2 où 1 et λ sont exceptionnels J. Ce cas ne peut donc pas non plus avoir lieu.

Par conséquent, si la décomposition indiquée est possible, si une fonction a deux droites de Julia isolées avec α et β exceptionnels J au voisinage de la première et γ et δ exceptionnels J au voisinage de la seconde, l'une au moins des deux valeurs α, β est égale à l'une des valeurs γ, δ.

CHAPITRE III.

Quelques cas possibles.

1. Après avoir signalé quelques impossibilités, je vais maintenant indiquer des cas possibles. Quand on examine ce qui se passe au voisinage de deux singularités essentielles (zéro et l'infini), on constate que, en dehors du cas où il y aurait quatre valeurs localement exceptionnelles, tout est possible.

1° *Aucune valeur exceptionnelle, ni à l'origine, ni à l'infini.* — $\mathfrak{A}(z)$ étant holomorphe au voisinage de l'origine et de l'infini et en ces points [$\mathfrak{A}(0)$ et $\mathfrak{A}(\infty)$ non nuls] et α étant tel que $p(z)$ soit analytique en α [$p(\alpha)$ non nul], il est facile de voir que

$$\Phi(z) = p(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathfrak{A}(z)$$

est un exemple de ce cas. Il suffira de reprendre le raisonnement classique sur les zéros des fonctions elliptiques pour voir que si l'on se place assez près de l'infini, $\Phi(z) - a = 0$ a autant de racines que de pôles à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes de $p(z)$, donc deux. En effet,

$$\frac{\Phi'}{\Phi - a} = \frac{p'(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathfrak{A}(z) - p(z+\alpha)\frac{1}{z^2}p'\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathfrak{A}(z) + p(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathfrak{A}'(z)}{p(z+\alpha)p\left(\frac{1}{z}+\alpha\right)\mathfrak{A}(z) - a}$$

et ce quotient pour z assez grand s'écarte arbitrairement peu de

$$\frac{p'(z+\alpha) + p(z+\alpha)\dfrac{\mathfrak{A}'(\infty)}{\mathfrak{A}(\infty)}}{p(z+\alpha) - \dfrac{a}{p(\alpha)\mathfrak{A}(\infty)}}.$$

Son intégrale le long d'un contour de parallélogramme de périodes est donc nulle.

Il en est de même au voisinage de l'origine.

2° *Aucune valeur exceptionnelle à l'origine; une à l'infini.* — On prendra $p\left(\frac{1}{z}\right)e(z)\mathfrak{A}(z)$; e étant une fonction entière d'ordre fini non entier (pour qu'elle n'ait pas d'autre valeur exceptionnelle que l'infini).

3° *Aucune valeur exceptionnelle à l'origine; deux à l'infini.* — $p\left(\frac{1}{z}\right)e^{e(z)}\mathfrak{A}(z)$ sera dans ce cas.

4° *Une valeur exceptionnelle à l'origine; la même exceptionnelle à l'infini.* — $e_1\left(\frac{1}{z}\right)e_2(z)\mathfrak{A}(z)$ e_1 et e_2 entières d'ordre fini non entier; l'infini sera exceptionnel aux deux points).

5° *Une valeur exceptionnelle à l'origine; une autre à l'infini.* — $\dfrac{e_2(z)}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathfrak{A}(z)$ (l'infini est exceptionnel à l'infini et zéro à l'origine).

6° *Une valeur exceptionnelle à l'origine (zéro); deux à l'infini (zéro comme à l'origine et l'infini).* — $\dfrac{e^{e(z)}}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathfrak{A}(z)$.

7° *Une valeur exceptionnelle à l'origine (zéro); deux autres à l'infini (un et* *l'infini*). — Zéro étant exceptionnel à l'origine et l'infini à l'infini, on sera dans un cas particulier du cas du 5°, soit $\frac{e_2(z)}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$, e_1 et e_2 étant telles que seul zéro soit exceptionnel en zéro (il suffit de prendre e_1 d'ordre fini non entier) et que, de plus, 1 soit exceptionnel à l'infini. La fonction $e_1\left(\frac{1}{z}\right)-e_2(z)\mathcal{A}(z)$ n'aura donc pas de zéros à l'infini et l'infini sera exceptionnel pour elle à l'origine comme à l'infini. On sera dans le cas du 6°. Donc $e_1\left(\frac{1}{z}\right)-e_2(z)\mathcal{A}(z)$ devra pouvoir être identifié à $b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\mathcal{B}(z)$, $\mathcal{B}(z)$ comme $\mathcal{A}(z)$ étant une fonction holomorphe autour de l'origine et de l'infini et *en ces points*. $b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\mathcal{B}(z)$ devra avoir des zéros autour de l'origine (il suffira comme dans les cas précédents de prendre $b\left(\frac{1}{z}\right)$ d'ordre fini non entier).

On prendra donc $b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\ \mathcal{B}(z)$ quelconque et son développement de Laurent autour de l'origine donnera

$$b\left(\frac{1}{z}\right)e^{d(z)}\mathcal{B}(z)\equiv f\left(\frac{1}{z}\right)+\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans un cercle de centre O et ayant l'infini comme singularité essentielle, on pourra poser

$$\varphi(z)=h(z)\mathcal{C}(z),$$

$\mathcal{C}(z)$ étant holomorphe autour de l'origine et de l'infini et *en ces points*. Il suffira de prendre

$$e_1\equiv f,\qquad e_2\equiv h,\qquad \mathcal{A}\equiv-\mathcal{C}.$$

8° *Deux valeurs exceptionnelles à l'origine; les mêmes exceptionnelles à l'infini.* — Ce sera le cas de $e^{a(z)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$.

9° *Deux valeurs exceptionnelles à l'origine (zéro et un); deux exceptionnelles à l'infini (un et l'infini).* — On sera dans le cas de la forme 5° $\frac{e_2(z)}{e_1\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{A}(z)$ et la fonction $e_1\left(\frac{1}{z}\right)-e_2(z)\mathcal{A}(z)$ devra être sans zéro, aussi bien à l'origine qu'à l'infini. On devra donc identifier cette fonction qui est holomorphe à l'origine et l'infini à $e^{a\left(\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{B}(z)$. Son développement de Laurent autour de l'origine donnera

$$e^{a\left(\frac{1}{z}\right)+b\left(\frac{1}{z}\right)}\mathcal{B}(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)+\psi(z)$$

et $\psi(z)$ holomorphe en zéro et singulier essentiel à l'infini sera égal à $j(z)\mathcal{C}(z)$. On prendra encore

$$e_1 \equiv g, \qquad e_2 \equiv j \qquad \text{et} \qquad a \equiv -\mathcal{C}.$$

2. Je vais maintenant étudier le cas de trois singularités essentielles en me bornant au cas où o, 1, ∞ sont les trois seules singularités de la fonction φ (en dehors des pôles).

Montrons qu'on peut avoir zéro exceptionnel en zéro, un en un, l'infini à l'infini et λ partout. On doit avoir

$$\varphi = \frac{a(z)\,c\left(\frac{1}{z-1}\right)}{b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)}.$$

λ doit être exceptionnel partout, donc

$$a(z)\,c\left(\frac{1}{z-1}\right) - \lambda\, b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

doit être holomorphe (sauf en o, 1, ∞) et sans zéro, donc

$$a(z)\,c\left(\frac{1}{z-1}\right) - \lambda\, b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right) = e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)},$$

un est exceptionnel en un. Donc

$$a(z)\,c\left(\frac{1}{z-1}\right) - b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

doit être holomorphe (sauf en o, 1, ∞) et n'avoir pas de zéro au voisinage de un. Donc

$$a(z)\,c\left(\frac{1}{z-1}\right) - b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right) = e^{h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}\,d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right).$$

Donc

$$a(z)\,c\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{z-1}{1}\right)} - \lambda\, e^{h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}\,d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)}{1-\lambda}$$

n'a pas de singularités essentielles (ni pôles) en $z = 0$, ce qui implique que

$$\psi_1 = e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)-h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)} - \lambda\, d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)$$

n'en ait pas non plus. Son développement de Laurent sera donc

$$g(z) + k\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

De même

$$b\left(\frac{1}{z}\right)c_1\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)}-e^{h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)}{1-\lambda}$$

n'a pas de singularités essentielles (ni de pôles) en $z=\infty$, ce qui implique que

$$\psi_2=e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)-h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}-d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)$$

n'en ait pas non plus.

Son développement de Laurent sera donc $f\left(\frac{1}{z}\right)+j\left(\frac{1}{z-1}\right)\cdot$ Mais

$$\psi_1-\psi_2=(1-\lambda)\,d(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right)=g(z)-f\left(\frac{1}{z}\right)+k\left(\frac{1}{z-1}\right)-j\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

n'a pas de singularités essentielles (ni pôles) en $z=1$, ce qui entraîne $k\equiv j$.

De plus,

$$\psi_1-\lambda\psi_2=(1-\lambda)\,e^{h_1(z)+h_2\left(\frac{1}{z}\right)+h_3\left(\frac{1}{z-1}\right)-h_4\left(\frac{1}{z-1}\right)}=g(z)-\lambda f\left(\frac{1}{z}\right)+(1-\lambda)k\left(\frac{1}{z-1}\right)\cdot$$

On pourra donc prendre arbitrairement h_1, h_2, h_3 et h_4. On en déduira g, f et k; g et f donneront d et e. On a

$$e^{h_1+h_2+h_3}=ac-\lambda\,bc_1 \qquad \text{et} \qquad e^{h_4}\,de=ac-bc_1.$$

De ces deux équations, on tirera ac et bc_1 et la fonction φ sera déterminée.

On voit comme le problème se complique dès que plus de deux singularités essentielles entrent en jeu. Même avec trois singularités seulement, je n'ai pu arriver à voir si tous les cas étaient possibles à l'intérieur des restrictions données par le chapitre I. En particulier, peut-on avoir un et l'infini exceptionnels à l'origine, zéro et un exceptionnels à l'infini, zéro et l'infini exceptionnels en un ? L'infini étant exceptionnel à l'origine et zéro à l'infini, la fonction devra être de la forme $\dfrac{a\left(\frac{1}{z}\right)}{b(z)}\,m\left(\frac{1}{z-1}\right)\cdot$ Comme zéro et l'infini seront exceptionnels en $z=1$, $m\left(\frac{1}{z-1}\right)$ sera de la forme $e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}$. Il reste à imposer à $\dfrac{a\left(\frac{1}{z}\right)}{b(z)}e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}$ le fait d'avoir un comme valeur exceptionnelle à l'origine et l'infini. Donc $b(z)-a\left(\frac{1}{z}\right)e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}$ holomorphe partout (sauf 0, 1, ∞), devra avoir zéro comme valeur exceptionnelle en zéro et l'infini. Ce qui fait que l'on devra avoir

$$b(z)-a\left(\frac{1}{z}\right)e^{c\left(\frac{1}{z-1}\right)}=e^{d(z)+f\left(\frac{1}{z}\right)}\,k\left(\frac{1}{z-1}\right)\cdot$$

Il faudrait donc que l'on puisse trouver d, f et k telles que si l'on prend le développement de Laurent autour de l'infini de $e^{d(z)+f\left(\frac{1}{z}\right)} k\left(\frac{1}{z-1}\right)$ et si l'on retranche de cette fonction $b(z)$ (c'est-à-dire la partie du développement contenant les puissances positives de z), il reste le produit d'une fonction entière en $\frac{1}{z}$ par une fonction entière en $\frac{1}{z-1}$ et *ayant zéro comme valeur exceptionnelle autour de un*. Il reste à prouver que la chose est possible.

CHAPITRE IV.

Quelques problèmes.

1. Dans le chapitre précédent, j'ai déjà indiqué quelques questions. Il y a me semble-t-il à déterminer tout d'abord quels sont les cas possibles, d'une manière générale, pour n singularités essentielles. Qu'arrive-t-il pour les fonctions que Mittag-Leffler appelait du deuxième genre (celles qui ont une infinité de singularités essentielles)? Peuvent-elles avoir une infinité de valeurs exceptionnelles ?

2. En revenant au cas de deux singularités, toute une série d'interrogations se présentent. On sait que l'on peut remplacer une valeur exceptionnelle dans le théorème de Picard par deux valeurs régulières par rapport à 2, selon l'expression de M. Montel [a est régulier par rapport à 2 si $\varphi(z)-a$ a toutes ses racines doubles]. Soit donc $\varphi(z)$ ayant zéro et l'infini comme singularités essentielles; en zéro, a est exceptionnel, b et c sont réguliers par rapport à 2; à l'infini, d est exceptionnel, e et f sont réguliers par rapport à 2.

Relation entre a, b, c, d, e, f ? Ou bien a, b, c, d réguliers par rapport à 2 en zéro; e, f, g, h réguliers par rapport à 2 à l'infini. Relation entre les huit valeurs ? Ce problème est lié aux formules d'addition, dans le premier cas des fonctions circulaires, dans le second des fonctions elliptiques.

De même, M. Montel a établi qu'il était impossible au voisinage d'une singularité essentielle qu'il y ait une cubique exceptionnelle, mais qu'il pouvait y avoir une conique. $\varphi(z)$ ayant une conique exceptionnelle en zéro et une à l'infini, quelles sont les relations entre les deux coniques ? (l'énoncé de ce problème m'a été donné par M. Montel).

Les valeurs exceptionnelles de Nevanlinna en zéro et à l'infini ne sont probablement pas non plus indépendantes. Ici la fonction de Green pour une couronne construite par M. Villat, devra être utilisée.

3. Enfin, il y a la question des valeurs exceptionnelles le long d'une ligne. On doit pouvoir aller plus loin que ce que j'en ai dit au chapitre II.

La voie à suivre me paraît la suivante : soit L_1 ligne singulière de φ, où a, b, ..., k sont exceptionnels et L_2 ligne singulière où l, ..., r sont exceptionnels.

Supposons les deux lignes L_1 et L_2 fermées et disjointes, L_1 étant intérieur à L_2, de sorte que le domaine de définition de φ soit une couronne. Appelons F_1 une fonction fuchsienne définie dans le cercle unité ayant a, b, ..., k comme valeurs exceptionnelles et F_1^- la fonction inverse; F_2 une fonction fuchsienne ayant l, ..., r comme valeurs exceptionnelles F_2^- la fonction inverse.

$F_1^-(\varphi)$ va être une fonction holomorphe et uniforme au voisinage de L_1, multiforme ailleurs. En utilisant toujours le développement de Laurent, on aura $F_1^-(\varphi) = \alpha_{L_1}(z) + \psi(z)$, $\alpha_{L_1}(z)$ étant une fonction uniforme ayant L_1 comme seule ligne singulière et ψ une fonction multiforme, mais n'ayant pas L_1 comme ligne singulière.

$$F_1[\alpha_{L_1}(z) + \psi(z)] = \varphi$$

sera uniforme. On aura de même

$$F_2[\beta_{L_2}(z) + \chi(z)] = \varphi.$$

La relation

$$F_1[\alpha_{L_1}(z) + \psi(z)] = F_2[\beta_{L_2}(z) + \chi(z)]$$

remplacera la relation ($\mathcal{R}$) du chapitre I. Dans ce cas, les exponentielles sont remplacées par des fonctions fuchsiennes. La discussion de la possibilité de cette relation sera liée aux théorèmes d'addition des fonctions fuchsiennes. H. Poincaré fait allusion à ces théorèmes dans une Note du 29 mars 1886 (*Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéterminées*).

Je crois avoir posé plus de questions que je n'en ai résolu. Il semble qu'il y ait dans ce domaine un champ de recherches assez vaste qui doit lier l'analyse à l'algèbre dans le cas du dernier problème que j'indique.