P. J. MYRBERG

# Sur les fonctions automorphes

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 68 (1951), p. 383-424
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__383_0>

# SUR LES FONCTIONS AUTOMORPHES

PAR M. P. J. MYRBERG.

## I. — Introduction.

1. La base de la théorie des fonctions automorphes est constituée par un groupe de transformations biuniformes. Le problème principal réside dans la recherche des fonctions analytiques, invariables par rapport à de telles transformations. Dans le cas d'une seule variable, les transformations en question se réduisent aux substitutions linéaires

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{S}$$

Dans la théorie des fonctions automorphes, nous intéressent seulement les groupes discontinus dans un certain sens.

Soit $\Gamma$ un groupe des substitutions linéaires que nous écrirons dans la forme unimodulaire

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

La première condition indispensable est que le groupe ne contienne pas de substitutions infinitésimales, c'est-à-dire des suites infinies de substitutions pour lesquelles le schéma de coefficients converge vers le schéma unitaire $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement, le groupe en question contiendrait des substitutions représentant des déplacements infinitésimaux dans le plan complexe, de quoi il résulte que les fonctions invariantes se réduisent nécessairement à des constantes. Mais la condition que nous venons de poser n'est pas suffisante. C'est ainsi que, par exemple, le groupe de Picard, formé par l'ensemble des substitutions linéaires dont les coefficients sont des nombres entiers de Gauss, remplit notre condition, n'ayant cependant pas d'intérêt du point de vue de la théorie des fonctions. Comme une condition complémentaire suffisante, il faut poser l'exigence de discontinuité propre, pour laquelle on donne la définition suivante :

Soit $\Gamma$ un groupe de transformations linéaires (S). On dit que le groupe $\Gamma$ est *proprement discontinu* dans un point $z$, si ce point peut être couvert par un domaine dont les transformés sont situés en dehors de ce domaine, à l'exception peut-être d'un nombre fini. Les points où le groupe est proprement discontinu forment un domaine $D_0$ composé d'une ou de plusieurs parties que nous appellerons le *domaine de discontinuité*. Les points intérieurs de ce domaine sont des *points réguliers* et les points de la frontière sont les *points singuliers* du groupe. Les points singuliers qui sont des point-limites pour les points équivalents du groupe sont constitués, ou bien par un ensemble discret des points, ou bien d'un nombre de continus.

2. La définition que nous venons de donner de la discontinuité peut être mise en liaison avec la définition donnée par M. Montel pour les familles normales des fonctions analytiques. On peut en effet démontrer que le domaine $D_0$ est identique au domaine D où les substitutions du groupe forment une famille normale de fonctions. Il est en effet possible d'extraire, de chaque suite infinie de substitutions de $\Gamma$, une suite partielle infinie dont les fonctions linéaires correspondantes convergent, dans chaque domaine intérieur de $D_0$, uniformément vers une fonction-limite qui se réduit à une constante. Ainsi, le domaine de discontinuité $D_0$ est, dans ce cas, identique au *domaine normal* D du groupe.

Remarquons cependant que c'est le cas seulement quand il s'agit d'une seule variable. Dans le cas de deux ou de plusieurs variables, par contre, le domaine normal D ne constitue généralement qu'une partie du domaine de discontinuité $D_0$. Dans mes recherches sur les fonctions automorphes de plusieurs variables, j'ai démontré l'importance capitale du domaine normal en tant que domaine d'existence de fonctions automorphes, ce qui rend possible d'expliquer quelques phénomènes remarqués par Picard, qui auparavant avaient compliqué la théorie des fonctions en question [14].

3. Dans la théorie des fonctions automorphes, le concept de *domaine fondamental* a une importance primordiale. On entend par là chaque domaine qui contient un et un seul point équivalent à un point donné du domaine de discontinuité ou à celui d'une partie connexe de ce domaine. Comme les substitutions linéaires ont ceci de particulier qu'ils conservent l'ensemble de cercles, les droites y comprises, on peut toujours choisir pour domaine fondamental un polygone dont les côtés constituent des arcs de cercles. Ces côtés sont conjugués deux par deux, de sorte qu'à chaque couple appartient une substitution transformant le côté correspondant sur son conjugué. En combinant, de toute manière possible, ces subtitutions fondamentales, on obtiendra l'ensemble de substitutions du groupe donné, et les polygones correspondants remplissent simplement le domaine $D_0$ ou une partie connexe de ce domaine.

Examinons maintenant d'une manière un peu plus détaillée les groupes de substitutions ayant un *cercle invariable principal* C. Les substitutions en question qui dépendent de trois paramètres réels peuvent être interprétées comme des mouvements du plan hyperbolique consistant en l'intérieur du cercle principal, où l'on a introduit la métrique de la géométrie de Lobatsheffsky.

Soit Γ un groupe de telles substitutions. Dès que le groupe ne contient pas de substitutions infinitésimales, il est proprement discontinu dans l'intérieur (et aussi dans l'extérieur) de C. Ce résultat, bien connu, est d'ailleurs une conséquence immédiate d'un théorème général concernant les groupes de certaines transformations biuniformes d'un nombre quelconque de variables ayant un domaine invariant fini, comme j'ai démontré dans un travail publié dans les *Acta mathematica* [14].

Les groupes ayant un cercle principal peuvent, d'un certain point de vue, être répartis en deux catégories différentes. Ou bien tous les points de la circonférence C sont des points singuliers, ou bien les points singuliers forment un ensemble discret des points sur C. Dans le premier cas, renfermant les groupes de Schwarz et, en particulier, le groupe modulaire, le polygone fondamental est situé complètement à l'intérieur du cercle principal; dans le deuxième cas, auquel conduisent, par exemple, les groupes de Schottky, le polygone fondamental comprend aussi quelques parties de la circonférence C.

En adoptant un autre point de vue, on arrive à une classification différente. Nous appellerons notre groupe un *groupe fuchsien,* si le nombre des substitutions fondamentales est fini, et un *groupe fuchsoïde,* si le nombre en question est infini.

Dans le premier cas, le nombre de côtés du polygone fondamental B est fini, dans le deuxième cas infini. Comme côtés de B on peut, pour les groupes de la première catégorie, toujours choisir des arcs de cercles coupant orthogonalement C. Quant aux *sommets ordinaires* du polygone B, ils peuvent être situés, ou bien à l'intérieur de C — ce sont les sommets elliptiques ou adventifs — ou bien sur C — les sommets paraboliques. Outre les sommets mentionnés, on aura, dans le cas d'un groupe fuchsoïde, encore des *sommets singuliers,* en nombre fini ou infini, qui sont des points-limites des sommets ordinaires.

Pour les groupes de la deuxième catégorie, la frontière du polygone fondamental comprend encore quelques parties de la circonférence C, en nombre fini ou infini.

En joignant les côtés conjugués du polygone fondamental d'un groupe fuchsien par les points correspondants, on obtient une surface fermée B′ (pointée ou non), dont le genre $p$ est zéro, ou un nombre positif fini. En partant d'un groupe fuchsoïde, on arrivera de la même manière à une surface ouverte, le genre pouvant maintenant aussi être infini. Dans les deux cas, le nombre $p$ donne par définition *le genre* du groupe en question.

Dans le cas d'un groupe de la deuxième catégorie, on doit cependant remplacer le polygone fondamental par la somme du polygone B et de son image par rapport au cercle principal.

4. Passons maintenant à l'étude des *fonctions automorphes* de nos groupes, c'est-à-dire des fonctions analytiques qui restent invariables par rapport aux substitutions du groupe donné. Avant d'en démontrer l'existence, remarquons que chaque point singulier étant un point-limite des points équivalents, est nécessairement un point singulier essentiel pour l'ensemble des fonctions automorphes non constantes. Notre définition est cependant trop générale pour qu'on puisse trouver quelques propriétés communes caractéristiques des fonctions ainsi définies. C'est le cas déjà des fonctions simplement périodiques. Il est bien connu comment on arrive, dans ce cas-ci, à une catégorie bien naturelle de fonctions, exprimées rationnellement par une fonction exponentielle, en supposant que les fonctions en question doivent, au plus, avoir un accroissement exponentiel dans le domaine fondamental, composé d'une bande limitée par deux droites parallèles. Dans d'autres cas, comme par exemple dans le cas des fonctions doublement périodiques, on n'a pas besoin de telles restrictions, parce que le polygone fondamental est un domaine fini, dont la frontière ne contient pas de points singuliers du groupe en question.

Revenons maintenant aux groupes fuchsiens, où l'on est en présence de circonstances analogues. A propos de la définition des fonctions automorphes correspondantes, appelées *fonctions fuchsiennes*, on peut distinguer entre deux cas, selon qu'il existe des substitutions paraboliques ou non. Dans le premier cas, on doit compléter la définition des fonctions automorphes en exigeant qu'elles puissent être développées, aux environs d'un sommet parabolique, suivant une fonction exponentielle, dont le point singulier coïncide avec le sommet en question. Dans le deuxième cas, on n'a pas besoin de telles conditions complémentaires.

Quant aux groupes fuchsoïdes, la définition des fonctions automorphes, des *fonctions fuchsoïdes*, exigera des conditions nouvelles relatives au comportement des fonctions au voisinage des sommets singuliers — question dont l'explication a jusqu'ici pu être abordée seulement dans quelques cas particuliers.

5. Nous nous proposons maintenant de traiter brièvement de la question concernant l'existence des fonctions automorphes. On a à cet effet employé deux méthodes différentes. Dans ses recherches sur les fonctions automorphes, Poincaré s'est servi des séries infinies, nommées ensuite séries de Poincaré, qui non seulement prouvent l'existence des dites fonctions, mais aussi donnent un moyen de les représenter analytiquement. La méthode de Klein, entièrement différente de celle de Poincaré et qui repose sur l'utilisation des idées de Riemann, a le caractère d'une démonstration d'existence.

Nous répéterons brièvement l'exposé de Poincaré.

Soit $H(z)$ une fonction rationnelle restant finie dans les points singuliers du groupe donné $\Gamma$. Formons ensuite la série infinie

$$\Theta(z) = \sum H(S)\left(\frac{dS}{dz}\right)^m, \tag{1}$$

où S parcourt l'ensemble des substitutions de $\Gamma$ et où $m$ est un nombre entier au moins égal à 2. Il est aisé de voir que la série converge absolument et uniformément dans chaque domaine situé à l'intérieur du domaine de discontinuité, si l'on supprime, au besoin, un nombre fini de termes devenant infinis dans le domaine. La somme de (1) définit alors une fonction analytique, méromorphe à l'intérieur du cercle principal qui, par rapport aux substitutions S de $\Gamma$, se transforme d'une manière multiplicative selon la formule

$$\Theta(S) = \Theta(z)\left(\frac{dS}{dz}\right)^{-m}. \tag{2}$$

Il s'ensuit que le rapport de deux fonétions (1) est une fonction automorphe du groupe donné.

C'est un fait capital de la théorie de Poincaré que, dans le cas d'un groupe fuchsien, toute fonction automorphe peut s'exprimer par les quotients de deux fonctions $\Theta$ convenablement choisies. Quant aux groupes fuchsoïdes, il en est autrement. En effet, comme le noyau rationnel H ne comprend qu'un nombre fini de paramètres, on ne peut, avec les séries de Poincaré, représenter que des fonctions automorphes d'une nature particulière.

6. Il est cependant possible, dans certains cas, de représenter des fonctions automorphes d'une manière entièrement différente, comme l'ont montré Schottky et Burnside.

Supposons, à cet effet, que notre groupe soit de la deuxième catégorie, c'est-à-dire qu'il soit proprement discontinu même sur quelques parties de la circonférence C. On peut alors, par une considération géométrique simple, démontrer la convergence absolue de la série (1) déjà pour $m = 1$. Dans ce cas, les équations fonctionnelles (2) se réduisent aux équations

$$\Theta(S)\,dS = \Theta(z)\,dz, \tag{2'}$$

exprimant que $\Theta(z)dz$ est une différentielle automorphe de $\Gamma$. La fonction intégrale

$$\varphi(z) = \int \Theta(z)\,dz$$

est donc une fonction additive de $\Gamma$ satisfaisant aux équations

$$\varphi(S) = \varphi(z) + \omega_S.$$

L'importance de cette nouvelle méthode consiste dans le fait que les expressions en question conduisent d'une manière directe aux fonctions automorphes, dont les zéros et pôles ou les pôles avec les résidus sont donnés, toutes ces fonctions pouvant être obtenues par une combinaison linéaire des intégrales, tandis que la méthode de Poincaré nous donne la solution sous une forme implicite et difficile à exécuter.

Malheureusement, la convergence absolue des séries en question n'a pas lieu dans les cas les plus importants, dans ceux des groupes fuchsiens de la première catégorie. Il est cependant, au moins dans les cas très étendus, possible de démontrer la convergence *non absolue* des séries en question et ainsi obtenir pour les fonctions automorphes une représentation nouvelle simple essentiellement différente de celle de Poincaré.

Mais avant de traiter de cette question, nous nous rappellerons quelques propriétés connues des fonctions automorphes, utiles pour nos développements prochains.

7. Soit $\Gamma$ un groupe fuchsien de genre $p$. Si $p=0$, toutes les fonctions automorphes peuvent s'exprimer comme fonctions rationnelles d'une fonction spéciale entre elles

$$x = x(z), \tag{3}$$

qui n'obtient dans le domaine fondamental aucune valeur plus d'une fois. Cette fonction, définie à une transformation linéaire près, sera appelée une *fonction fondamentale* de $\Gamma$.

Dans le cas $p>0$, il existe un couple de fonctions automorphes

$$x = x(z), \qquad y = y(z), \tag{4}$$

liées entre elles par une relation algébrique

$$\mathrm{P}(x, y) = 0 \tag{5}$$

et tel que toute fonction automorphe peut s'exprimer comme une fonction rationnelle $\mathrm{R}(x, y)$ de (4). Les fonctions (4), définies à une transformation birationnelle près, forment par définition un *système fondamental* pour le groupe $\Gamma$.

Quant à la fonction uniformisante polymorphe $z$, elle peut être représentée comme quotient de deux intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + p(x, y)\frac{dv}{dx} + q(x, y)v = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles sur la surface riemannienne F du genre $p$, définie par l'équation (5) (dans le cas spécial $p=0$, les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x$).

L'importance capitale des fonctions automorphes consiste dans le fait qu'étant inversement donnée une surface algébrique quelconque (5), il sera toujours possible d'exprimer les variables $x$ et $y$ comme fonctions automorphes (fuchsiennes) d'une variable auxiliaire et de trouver ainsi une solution complète au problème d'uniformisation des surfaces algébriques d'un genre quelconque, problème dont la solution pour les surfaces de genre zéro a été fourni par les fonctions rationnelles et pour les surfaces de genre un par les fonctions elliptiques.

8. Parmi les fonctions polymorphes, se distingue la fonction conduisant à un groupe fuchsien de la première catégorie et n'ayant aucun point de ramification par rapport à la surface F.

On peut en prouver l'existence en partant d'un système canonique de coupures composé de $p$ rétrosections

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p$$

et de $p$ sections conjuguées

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_p$$

et en représentant la surface de recouvrement correspondante d'une manière conforme sur l'intérieur du cercle unité. Par la fonction $z$ ainsi obtenue, toutes les fonctions non ramifiées par rapport à F peuvent s'exprimer comme fonctions uniformes, parmi elles les fonctions rationnelles de F et les intégrales abéliennes de première et deuxième espèce de F.

Parmi les fonctions uniformisantes polymorphes conduisant aux groupes sans cercle principal, on peut mentionner les fonctions appartenant à un groupe de Schottky, dont le domaine fondamental est limité par un nombre de courbes fermées, situées en dehors l'une de l'autre.

9. Nous avons parlé, dans ce qui précède, seulement de l'uniformisation des surfaces riemanniennes *fermées*. On peut cependant traiter d'une manière semblable des surfaces riemanniennes *ouvertes* les plus générales. En effet, étant donnée une fonction analytique multiforme quelconque $y(x)$, on peut représenter les variables $x$ et $y$ par exemple comme des fonctions automorphes (4) appartenant à un groupe fuchsoïde $\Gamma$ et cela d'une infinité de manières.

Partons inversement d'un groupe fuchsoïde donné $\Gamma$. Soit d'abord le genre de $\Gamma$ égal à zéro. Il existe alors une fonction automorphe $x = x(z)$ n'obtenant aucune valeur plus d'une fois dans le polygone fondamental B et représentant, par conséquent, le polygone B sur un domaine simple T du plan $x$, *domaine principal* de $x(z)$. Comme fonction de $x$, chaque fonction automorphe de $\Gamma$ sera uniforme dans le domaine T. La fonction fondamentale $x(z)$ est déterminée à une transformation biunivoque arbitraire près, définie par une représentation conforme de T sur un autre domaine simple quelconque.

Soit maintenant le genre $p$ plus grand que zéro. Il est alors, et même d'une infinité de manières, possible de former deux fonctions automorphes $x(z)$, $y(z)$ qui n'obtiennent dans le polygone fondamental aucun couple de valeurs plus d'une fois. Il s'ensuit que chaque fonction automorphe du groupe sera une fonction uniforme sur la surface riemannienne représentée par les fonctions $x$ et $y$.

Dans le cas d'une fonction algébrique, les fonctions en question peuvent s'exprimer, comme on le sait, sous forme de fonctions rationnelles des variables $x$ et $y$. Ce résultat peut, d'après M. Henri Cartan [6], se transmettre aux cas où l'équation algébrique (5) est remplacée par une relation transcendante de la forme

$$G(x, y) = 0,$$

où G est une fonction entière de deux variables, chaque fonction méromorphe sur la surface en question pouvant s'exprimer comme une fonction méromorphe $F(x, y)$ des variables $x$ et $y$. Quant au cas général, ce résultat ne subsiste plus, comme nous montre l'exemple de la surface riemannienne définie par $y = x^{\mu}$, où $\mu$ est une quantité réelle irrationnelle. En effet, la fonction $t = \log x$ est ici une fonction méromorphe pour laquelle il est évidemment impossible de trouver une représentation de la forme

$$t = \varphi(x, y)$$

par une fonction $\varphi$ qui était partout uniforme dans son domaine d'existence dans l'espace $(x, y)$.

## II. — Sur la représentation analytique des fonctions fuchsiennes.

**10.** Soit $\Gamma$ un groupe fuchsien de la première catégorie et $f(z)$ une fonction automorphe correspondante (fonction fuchsienne) ayant dans le polygone fondamental les zéros resp. pôles

$$a_\nu, \quad b_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Étant méromorphe à l'intérieur du cercle principal C

$$|z| = 1,$$

la fonction $f(z)$ peut s'exprimer, et même d'une infinité de manières, comme quotient

$$f(z) = \frac{g(z)}{g_0(z)} \tag{6}$$

de deux fonctions *entières*, c'est-à-dire régulières dans le domaine $|z|<1$, ayant ses zéros dans les points

$$S(a_\nu) \text{ resp. } S(b_\nu), \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n),$$

où S parcourt l'ensemble de substitutions de Γ. Les fonctions

$$g(z), \quad g_0(z), \tag{7}$$

définies à un facteur commun près ayant la forme $e^{h(z)}$, où $h(z)$ est une fonction entière arbitraire, satisferont pour chaque substitution de Γ à une équation de la forme

$$g(S)=e^{u_s(z)}g(z), \tag{8}$$

où les exposants $u_S(z)$ sont des fonctions entières dépendant de S et du choix des fonctions (7).

Il s'agit maintenant de choisir les fonctions (7) d'une manière à donner aux équations (8) la forme la plus simple possible.

On peut, dans des cas particuliers, poser $u_S(z)\equiv 0$, à savoir dans les cas où il existe des fonctions automorphes partout régulières, et c'est le cas par exemple pour le groupe modulaire. En laissant de côté ces cas, on peut, en général, essayer de satisfaire aux équations (8) par des fonctions dont les exposants forment un ensemble linéaire

$$u_S(z)=\alpha_S u(z)+\beta_S, \tag{9}$$

où $u(z)$ désigne une fonction entière. Les fonctions en question, satisfaisant pour chaque substitution S de Γ à une équation de la forme

$$g(S)=e^{\alpha_s u(z)+\beta_s}g(z), \tag{10}$$

pourraient, si elles existaient, être regardées comme une généralisation des fonctions elliptiques aux multiplicateurs exponentiels.

11. Pour étudier la nature de nos fonctions hypothétiques, nous remarquons, ce qu'il est facile de vérifier, que la fonction $u(z)$ doit pour chaque S de Γ satisfaire à une équation de la forme

$$u(S)=a_S u(z)+b_S. \tag{11}$$

Comme fonction sur la surface algébrique riemannienne F, correspondante à notre groupe Γ et définie par le couple fondamental (4), la fonction $u$ est une fonction multiforme $u(x)$, dont les branches dépendent l'une de l'autre par la relation

$$u(x')=a_S u(x)+b_S. \tag{11'}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{u''(x)}{u'(x)}=r(x, y)$$

est une fonction uniforme et méromorphe sur F, donc une fonction rationnelle de $x$ et $y$. On aura ainsi pour la fonction $u$ l'expression

$$u = \int e^{\int r(x,y)dx} dx. \tag{12}$$

Quant aux fonctions $g$ correspondant à $u$, on trouve qu'elles peuvent s'exprimer sous la forme

$$g(x) = e^{\int \varphi(x)du} \tag{13}$$

par la fonction

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{D}\log g(x)}{\mathrm{D}\,u(x)} \tag{14}$$

satisfaisant aux équations

$$\varphi(x') = \frac{1}{a}\varphi(x) + \frac{\alpha}{a} \tag{15}$$

et ayant donc une expression de la forme

$$\varphi(x) = \int e^{\int \mathrm{R}(x,y)\,dx} dx, \tag{16}$$

où $\mathrm{R}(x,y)$ est une fonction rationnelle. On peut aussi, par un calcul élémentaire, vérifier que les fonctions $\log g(x)$ et $u(x)$ sont des intégrales de l'équation différentielle linéaire

$$v''' - (\mathrm{R} + 2r)v'' + (r^2 + r\mathrm{R} - r')v' = 0. \tag{17}$$

Les fonctions (12) appartiennent à la catégorie des intégrales des fonctions à multiplicateurs constantes étudiées par Appell et Prym.

Dans le cas le plus simple, où toutes les constantes $a_s$ sont égales à l'unité, la fonction $u(x)$ se réduit à une intégrale abélienne de la première espèce de F. Les fonctions (12) ainsi obtenues conduisent à la représentation connue des fonctions automorphes comme quotients des fonctions entières composées par la fonction $\Theta$ de Riemann définie par la série multiple

$$\mathfrak{I}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\sum\limits_{\mu,\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2\sum\limits_{\nu=1}^{p} m_\nu u_\nu}$$

et des intégrales abéliennes normales de la première espèce

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

sous la forme

$$g(z) = \mathfrak{I}[u_1(z) - \mathrm{C}_1, \ldots, u_p(z) - \mathrm{C}_p], \tag{18}$$

où $C_\nu$ sont des constantes. Les fonctions (18) satisfont alors aux équations

$$g(S) = e^{\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu^{(s)} u_\nu(z) + \tau^{(s)}} g(z)$$

un peu plus générales que (10).

12. On arrive à une autre catégorie de fonctions plus remarquables au point de vue application, en supposant les constantes $a_s$ égales à $\pm 1$. Nous traiterons de ce problème d'abord le cas spécial où (5) se réduit à la surface hyperelliptique

$$y^2 = \prod_{\nu=1}^{2p+2} (x - e_\nu). \tag{19}$$

Soit alors $u(x)$ une intégrale elliptique de la première espèce ayant comme

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{\prod_{\nu=1}^{4} (x - e_\nu)}} \tag{20}$$

quatre quelconques entre les points

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_{2p+2}$$

pour points de ramification. Comme fonction sur la surface F, la fonction $u(x)$ est égale à l'intégrale d'une fonction à multiplicateurs constantes (12) vérifiant les équations

$$u(x') = \pm u(x) + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2,$$

où $m_1$ et $m_2$ sont des nombres entiers. Quant aux fonctions correspondantes (13), elles peuvent maintenant s'exprimer par la formule

$$g = e^{\int du \int E(u) du}, \tag{21}$$

où $E(u)$ désigne une fonction doublement périodique ayant les périodes primitives $\omega_1$ et $\omega_2$ de l'intégrale elliptique (20) comme périodes.

Dans le cas actuel, le groupe $\Gamma$ sera un sous-groupe invariant d'un groupe fuchsien $\Gamma_0$ de genre zéro et d'indice deux ayant la fonction $x(z)$ comme fonction fondamentale. En exigeant que les équations (10) subsistent même pour les substitutions de $\Gamma_0$, la fonction (14) se réduira à une fonction rationnelle de $x$. La plus simple de telles fonctions est la fonction

$$E(u) = -[p(u+a) + p(u-a)],$$

ayant des pôles doubles dans les points $\pm a$. La fonction correspondante $g$ devient alors, en la multipliant par une fonction exponentielle de la forme $e^{Au^2+B}$, la fonction

$$\mathrm{H}[u(z)] \tag{22}$$

formée par la fonction H ($u$) de Jacobi.

Comme fonction de $u$, notre fonction (22) satisfera, après un changement de variable, aux équations

$$\mathrm{H}(u+\omega_1) = -\mathrm{H}(u), \qquad \mathrm{H}(u+\omega_2) = e^{-\left(u+\frac{\tau}{2}\right)}\mathrm{H}(u).$$

Par la fonction (22), la fonction automorphe $x(z)$ s'exprime sous la forme

$$x(z) - x(z_0) = \mathrm{C}\frac{\varphi(z, z_0)}{\varphi(z, 0)}, \tag{23}$$

où

$$\varphi(z, z_0) = \mathrm{H}[u(z) + u(z_0)]\,\mathrm{H}[u(z) - u(z_0)]$$

est une fonction entière de $z$, satisfaisant pour chaque S de $\Gamma_0$ à une équation de la forme (10).

13. Pour obtenir une expression semblable pour la fonction $y(z)$, on peut introduire un nombre fini $q$ des intégrales elliptiques de la forme (20) et l'on obtient ainsi pour les radicales $\sqrt{x - e_i}$ des expressions comme quotients de fonctions $\Theta$ dont les arguments sont des intégrales elliptiques mentionnées. On arrive de cette manière à la représentation

$$y(z) = \mathrm{C}'\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} \tag{24}$$

de la fonction $y(z)$ comme quotient de deux fonctions entières composées de fonctions $\Theta$ elliptiques et de certaines fonctions entières analogues à la fonction $u(z)$. Et comme enfin chaque fonction automorphe de $\Gamma$ peut s'exprimer rationnellement par $x$ et $y$, on aura finalement pour chacune des telles fonctions une représentation sous forme d'un quotient de deux fonctions entières $\psi(z)$ satisfaisant pour chaque S de $\Gamma$ à une équation

$$\psi(\mathrm{S}) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{q} \mathrm{A}_\nu^{(s)} u_\nu(z) + \mathrm{B}^{(s)}}\,\psi(z), \tag{25}$$

où

$$u_1(z), \quad u_2(z), \quad \ldots, \quad u_q(z) \tag{26}$$

sont des intégrales elliptiques. On peut toujours, par une transformation simple, attendre que toutes les constantes $\mathrm{A}_\nu^{(\mathrm{S})}$ s'évanouissent pour $\nu > 1$ et que, par conséquent, les équations (25) se réduisent à la forme simple (10) [18].

Nous avons ainsi démontré la possibilité de composer nos fonctions automorphes de certaines fonctions elliptiques et des fonctions entières (26).

14. Il reste à étudier de plus près ces dernières fonctions. Nous pouvons nous borner à la fonction $u(z)$. On peut facilement montrer que cette fonction entière est une fonction automorphe fondamentale d'un groupe fuchsoïde $\Gamma'$ du genre zéro, sous-groupe invariant de $\Gamma_0$, dont on peut trouver un polygone fondamental de la manière suivante :

Regardons le réseau des parallélogrammes des périodes de l'intégrale elliptique $u$ et coupons le plan suivant les côtés $\lambda_\nu$ correspondant aux côtés $C_\nu$ du polygone fondamental $B_0$ de $\Gamma_0$. En joignant une infinité de tels réseaux suivant des coupures $\lambda_\nu$, nous obtiendrons une surface $F'$ de recouvrement pour la fonction polymorphe $z(u)$ regardée comme fonction de $u$. Par la représentation conforme de la surface $F'$ sur l'intérieur du cercle C, le réseau découpé sera transformé en un polygone $B'$ ayant un nombre infini de côtés, lequel polygone $B'$ est un polygone fondamental du groupe $\Gamma'$ cherché.

Soit maintenant $\Pi_n$ le parallélogramme constitué d'un nombre fini de parallélogrammes dans le plan $u$. A ce parallélogramme correspond un polygone $B'_n$ à un nombre fini de côtés, qui s'obtient en traçant dans le polygone fondamental $B'$ les lignes correspondant aux diverses parties des côtés de $\Pi_n$. Outre ces côtés, que j'appellerai les côtés de première espèce, la frontière $L_n$ de $B'_n$ renferme un nombre fini de côtés de seconde espèce, provenant des parties des coupures $\lambda_\nu$ situées à l'intérieur de $\Pi_n$.

Cela posé, formons pour le parallélogramme $\Pi_n$ une surface de recouvrement en joignant un nombre fini $q_n$ de ces parallélogrammes suivant les coupures $\lambda_\nu$. A la surface ainsi obtenue correspond un polygone $A_n$ composé d'un nombre fini de transformés de $B'_n$. Soit $L'_n$ resp. $L''_n$ l'ensemble des côtés de première resp. de seconde espèce appartenant à la frontière

$$L_n = L'_n + L''_n \tag{27}$$

de $A_n$. On peut alors, par des considérations relativement compliquées, mais tout à fait élémentaires, que nous laisserons ici de côté, déduire pour la longueur de $L''_n$ une inégalité de la forme

$$L''_n < \varepsilon_n, \tag{28}$$

où $\varepsilon_n$ désigne une quantité tendant vers zéro pour $n \to \infty$. Il s'ensuit, d'autre part, de la définition de $L'_n$ que

$$|u(z)| \geqq kn \quad \text{sur } L'_n, \tag{29}$$

où $k$ est une quantité positive.

15. Formons maintenant la fonction

$$f(z) = \frac{u'(a)}{u(z) - u(a)}, \tag{30}$$

qui est, ainsi que $u(z)$, une fonction automorphe fondamentale de notre groupe fuchsoïde $\Gamma'$. On peut, en vertu de la formule de Cauchy, écrire

$$(31) \qquad f(z) = \sum_{A_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L'_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{L''_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Pour les intégrales, on a les évaluations

$$(32) \qquad \left|\int_{L'_n}\right| < \frac{k'}{n}, \qquad \left|\int_{L''_n}\right| < k''\varepsilon_n,$$

si $f(z)$ reste bornée aux côtés de $L_n$, ce qu'on peut d'ailleurs supposer sans restriction. Pour $n \to \infty$, on obtient ainsi l'expression

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{A_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)},$$

que nous écrirons simplement

$$(33) \qquad f(z) = \sum_{\Gamma'} \frac{S'(a)}{z - S(a)},$$

en faisant toutefois observer qu'il s'agit ici d'une série dont la convergence est uniforme, mais pas absolue. Il faut donc prendre les termes de (33) dans un ordre bien déterminé et les réunir d'une manière convenable. La loi qu'il faut suivre est cependant aisée à exprimer et indépendante du choix de la fonction automorphe $f(z)$ en question [18].

Comme fonction du paramètre $a$, notre série (33) est identique à une série de Poincaré de la dimension $m = 1$. Par l'intégration de (33) par rapport au paramètre, on obtient pour la fonction $u(z)$ l'expression

$$(34) \qquad \frac{u(z) - u(a)}{u(z) - u(b)} : \frac{u(z_0) - u(a)}{u(z_0) - u(b)} = \prod_{\Gamma'} \left[\frac{S(z) - a}{S(z) - b} : \frac{S(z_0) - a}{S(z_0) - b}\right].$$

Ce produit, dont la convergence est uniforme, mais pas absolue, est en réalité identique à un produit de Schottky.

En combinant les expressions ci-dessus avec des expressions connues des fonctions elliptiques on peut obtenir, pour les fonctions automorphes $x(z)$ et $y(z)$, des produits infinis ayant la forme la plus simple possible. On peut aussi, à l'aide de la formule de Cauchy, trouver pour toutes les fonctions automorphes et même pour les intégrales abéliennes, une représentation analytique par des séries infinies, ayant des propriétés remarquables, analogues à celles des développements des fonctions elliptiques : l'invariance formelle par rapport au groupe donné, ainsi que la dépendance la plus simple possible des éléments de la fonction en question [18].

16. Nos développements s'étendent aussi aux surfaces algébriques les plus générales. Regardons d'abord le cas le plus simple $p = 0$. Soit donc $\Gamma_0$ un groupe

fuchsien quelconque de genre zéro et $x(z)$ une fonction automorphe fondamentale, définie à une transformation linéaire près. Soient $(e_i)$ les points de ramification de la fonction polymorphe $z(x)$ et $(\nu_i)$ les ordres de ces points. Ces entiers satisfont, comme on le sait, à l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\nu_i} < q - 2.$$

Il est toujours possible, comme nous l'avons démontré dans un travail publié dans les *Annali di Matematica* [20], de construire une surface algébrique F de genre un, dont les points de ramification sont situés sur les points $(e_i)$, l'ordre de ces points de ramification étant alors $\nu_i$. Soit alors $u$ une intégrale elliptique de première espèce de la surface F. La fonction $u(z)$, uniforme et régulière pour $|z| < 1$ est une fonction automorphe fondamentale d'un groupe fuchsoïde du genre zéro, sous-groupe de notre groupe fuchsien $\Gamma_0$. Pour cette fonction, les développements précédemment donnés sont valables.

Comme, d'autre part, $x$ est une fonction elliptique de $u$, on aura ainsi finalement, par combinaison, des expressions pour la fonction $x(z)$ et ensuite pour toutes les fonctions automorphes du groupe $\Gamma_0$ donné.

17. Quant au cas général, où le genre du groupe $\Gamma$ est un entier quelconque, nous sommes obligés de nous borner aux remarques suivantes :

Soit F une surface riemannienne algébrique quelconque et $(e_i)$ les projections des points de ramification de F sur le plan $x$. Soit alors $z = z(x)$ une fonction polymorphe de $x$, ayant les points $(e_i)$ comme points de ramification et telle que l'ordre de chacun de ces points soit un multiple d'ordre du point correspondant de F. On peut alors regarder la fonction $z(x)$ comme une fonction polymorphe de la surface F avec une ramification relative. Il s'ensuit que les fonctions rationnelles sur F seront des fonctions automorphes d'un groupe fuchsien, sous-groupe d'un groupe de genre zéro. Pour les fonctions en question tous nos développements précédents sont donc valables.

Choisissons en particulier $\nu_1 = \nu_2 = \infty$. La fonction

$$u = \log \frac{x - e_1}{x - e_2},$$

qui est une fonction automorphe d'un groupe fuchsoïde $\Gamma'$, joue alors dans le cas qui nous occupe le même rôle que l'intégrale elliptique $u$ dans le cas hyperelliptique. On arrivera ainsi à une nouvelle représentation analytique des fonctions automorphes, dont nous avons traité en détail dans un travail publié dans les *Acta mathematica* [15].

Il est donc possible, pour chaque surface algébrique d'un genre quelconque, de trouver une fonction polymorphe, par laquelle la représentation analytique des fonctions automorphes est possible, en se servant des expressions canoniques les plus simples.

18. Pour terminer, nous faisons encore la remarque suivante : on peut regarder la méthode précédente comme une généralisation de la représentation des fonctions périodiques par les séries de Fourier.

En effet, chaque fonction elliptique ayant les périodes $\omega_1$, $\omega_2$ devient, par l'introduction de la variable

$$t = e^{\frac{2\pi i}{\omega} z},$$

une fonction uniforme de $t$, automorphe par rapport aux substitutions

$$t' = e^{\frac{2\pi i \omega'}{\omega}} t.$$

Mais la fonction $t(z)$ est une fonction automorphe fondamentale pour le groupe des substitutions

$$z' = z + m\omega,$$

sous-groupe invariant du groupe formé par l'ensemble des substitutions

$$z' = z + m\omega + m'\omega'.$$

On voit ainsi que dans nos développements précédents les fonctions fuchsoïdes $u(z)$ jouent le même rôle que la fonction exponentielle $t(z)$ dans le cas présent. C'est dans ce sens qu'on peut regarder nos développements comme une généralisation des séries de Fourier.

## III. — Remarques sur la théorie des fonctions fuchsoïdes.

19. Dans le chapitre précédent, j'ai traité des groupes fuchsiens, auxquels amène l'uniformisation des fonctions algébriques, c'est-à-dire des surfaces riemanniennes fermées. Passant maintenant aux groupes fuchsoïdes, nous aurons affaire à un problème général de la théorie des fonctions, dont nous ne pouvons obtenir que des résultats très incomplets. En effet, comme toute surface riemannienne et toute fonction analytique peut être uniformisée par ces nouvelles fonctions, leur théorie est équivalente à la théorie générale des fonctions analytiques sur une surface riemannienne la plus générale.

On rencontre des difficultés nouvelles déjà à propos de la définition d'une fonction automorphe. En effet, si nous exigeons seulement que nos fonctions restent invariables par rapport aux substitutions du groupe donné et méromorphes à l'intérieur du cercle principal, nous aurons affaire à une classe de fonctions qui est trop étendue pour qu'on puisse en trouver les propriétés spéciales. Afin d'éclaircir notre assertion nous traiterons de l'exemple suivant :

Soit

$$(e) \qquad e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad \ldots$$

un nombre infini dénombrable des points du plan complexe $x$ ayant le point à l'infini comme seul point d'accumulation. Soit $z(x)$ la fonction polymorphe, inverse d'une fonction fuchsoïde, ayant les points $(e)$ comme points de ramification logarithmique. En traçant par les points $(e)$ une courbe convenable, on obtiendra pour le groupe fuchsoïde correspondant un domaine fondamental formé par un polygone avec un nombre infini de côtés et des angles tous égaux à zéro. Pour notre groupe $\Gamma$, la fonction $x(z)$ est une fonction automorphe fondamentale, ayant comme domaine principal le plan $x$ pointé à l'infini. Mais avec la fonction $x(z)$, toute fonction méromorphe de $x$ sera une fonction de $z$, méromorphe à l'intérieur du cercle principal et invariante par rapport au groupe $\Gamma$. Rien que cet exemple nous montre qu'il sera indispensable de préciser d'une façon plus détaillée la définition des fonctions automorphes.

20. Les groupes fuchsoïdes peuvent, comme les groupes fuchsiens, être répartis entre deux catégories suivant que le groupe sera discontinu seulement à l'intérieur (et à l'extérieur) du cercle principal, ou encore sur quelques parties de la circonférence C. On définira, de même, le genre d'un groupe fuchsoïde, ce nombre pouvant maintenant aussi être infini. Mais, outre ces propriétés déjà connues, on rencontre ici des circonstances entièrement nouvelles, qui conduisent à une nouvelle classification importante des groupes fuchsoïdes. Nous en traiterons d'abord dans le cas le plus simple, à propos des groupes du genre zéro.

Il existe dans ce cas, par définition, une fonction automorphe $x(z)$ n'obtenant aucune valeur plus d'une fois dans le domaine fondamental B du groupe. Cette fonction fondamentale, qui donne une représentation conforme de B sur un domaine simple T, est encore très arbitraire. Si, en effet, $x' = f(x)$ désigne une fonction analytique quelconque représentant le domaine T d'une manière conforme sur un tel autre domaine T′, la fonction composée $f[x(z)]$ sera également une fonction fondamentale du groupe $\Gamma$ ayant le domaine T′ comme domaine principal.

21. Notre classification nouvelle des groupes fuchsoïdes se fonde sur la notion de la *capacité* de la frontière du domaine T, en réunissant dans la première classe $A_0$ tous les groupes pour lesquels la capacité est nulle, dans la seconde classe $A_1$ tous les autres groupes. Il est peut-être utile de rappeler ici la définition de la capacité et quelques faits relatifs.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n$ points de l'ensemble donné $\mu$ fini et fermé. Formons l'expression

$$(35) \qquad \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<k} |x_i - x_k|},$$

donnant la moyenne géométrique des distances de ces points pris deux à deux. Quand les points $x_\nu$ parcourent, indépendamment l'un de l'autre, les points de l'ensemble donné $\mu$, la fonction (35) aura un maximum fini $d_n$, le $n^{\text{ième}}$ diamètre de l'ensemble $\mu$. On peut démontrer facilement que les nombres ainsi définis $d_1, d_2, d_3, \ldots$ forment une suite décroissante, d'où il s'ensuit qu'il existe la valeur limite

$$\lim_{n \to \infty} d_n = d.$$

Cette quantité non négative, le *diamètre transfini*, est par définition la capacité de l'ensemble donné.

On peut arriver à cette notion aussi par un autre chemin. Soit, en effet, T le domaine infini limité par $\mu$. Approximons ce domaine par les domaines $T_1, T_2, T_3, \ldots$ limités par courbes fermées entourant les points de $\mu$ et choisies de telle manière que $T_n$ soit une partie de $T_{n+1}$ et que chaque point de T soit contenu dans $T_n$, $n$ étant suffisamment grand. Soit maintenant $g_m(x)$ la fonction de Green pour le domaine $T_m$ ayant son pôle à l'infini, c'est-à-dire la fonction harmonique dans $T_m$ qui est égale à zéro sur la frontière de $T_m$ et qui, à l'infini, a un développement de la forme

$$g_m(x) = \log|x| + \gamma_m + \left(\frac{1}{x}\right), \tag{36}$$

où $\left(\frac{1}{x}\right)$ devient zéro pour $x$ infini. Les constantes $\gamma_m$ forment, comme on le voit aisément, une suite croissante ayant donc une valeur limite

$$\lim_{m \to \infty} \gamma_m = \gamma,$$

finie ou infinie. Entre la *constante de Robin* $\gamma$ ainsi définie et la capacité C a toujours lieu la relation

$$C = e^{-\gamma}.$$

On peut distinguer entre deux cas essentiellement différents, selon que la capacité est positive ou zéro. Dans le premier cas, il existe pour le domaine T une fonction de Green $g$ qui peut être déduite de $g_m$ en passant aux limites [17]. Il en est autrement dans le second cas, où les fonctions (36) tendront vers l'infini pour $m \to \infty$. Les domaines de la première espèce ont une frontière positive, ceux de la seconde espèce sont des domaines ayant une frontière nulle [26]. Les ensembles de la capacité nulle sont d'ailleurs aussi identiques aux ensembles des points qui sont des points réguliers pour chaque fonction harmonique, bornée dans un certain entourage de l'ensemble en question [17].

22. Pour expliquer la dépendance de la capacité des mesures ordinaires de l'ensemble, nous remarquons, ce qui est aisé à voir, que chaque ensemble contenant un nombre fini ou un nombre infini dénombrable de points a une capacité nulle, et que chaque ensemble contenant un continu a, au contraire, une capacité positive. Soit, plus généralement, $h(t)$ une fonction réelle

croissante de $t$. Nous dirons que ladite fonction est de la première espèce, si l'intégrale

$$\int_0^t \frac{h(t)}{t}\,dt \tag{37}$$

est divergente, de la seconde espèce, si l'intégrale est convergente.

Soient maintenant $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, ... les rayons des cercles qui recouvrent les points de l'ensemble. Formons l'expression

$$\sum_\nu h(\rho_\nu).$$

La limite inférieure

$$\underline{\lim} \sum_\nu h(\rho_\nu)$$

de ces sommes sera par définition la $h$-mesure de notre ensemble $\mu$. Pour $h(t) = t$, on obtiendra la mesure linéaire, tandis que pour $h = \frac{1}{|\log t|}$, on obtiendra la mesure logarithmique. On doit à Erdős et Gillis le théorème suivant :

*Si la mesure logarithmique est finie, la capacité est nulle.*

D'autre part, j'ai démontré que la capacité est sûrement positive, si la mesure appartenant à une fonction de la seconde espèce $h$ est positive [17]. Il suffit, par exemple, de prendre pour $\varepsilon > 0$

$$h(t) = \frac{1}{|\log t \log_2 t \ldots \log_n t (\log_{n+1} t)^{1+\varepsilon}|}.$$

23. Revenons maintenant à nos groupes et fonctions fuchsoïdes. Soit $\Gamma$ un tel groupe de genre nul et $x = f(z)$ une fonction automorphe fondamentale. Nous pouvons distinguer entre deux types de groupes selon la nature du domaine principal T de $x$. Pour les groupes du premier type le produit infini

$$\Pi |S_\nu(z)|, \tag{38}$$

est divergent; pour ceux du second type, il est convergent. Dans le deuxième cas, l'expression

$$-\log \Pi = \Sigma \log \frac{1}{|S_\nu(z)|}, \tag{39}$$

définit une fonction harmonique qui est automorphe et qui, comme fonction de $x$, est identique à la fonction de Green $g$ du domaine T. Quant à la série (39), elle converge simultanément avec des séries de Poincaré de la dimension $m = 1$.

En vertu de ce qui précède, la détermination du type d'un groupe fuchsoïde est un problème équivalant à la recherche de la convergence absolue des séries de Poincaré mentionnées. Le dernier problème est cependant très difficile à résoudre, et même dans le cas le plus simple, c'est-à-dire pour les domaines simplement connexes, on n'a pu jusqu'ici expliquer que des cas très particuliers [26].

Parmi les résultats un peu plus généraux, citons le suivant, dont la vérité est facile à constater : Si la mesure linéaire de l'ensemble fermé $m$ des points du domaine fondamental appartenant à la circonférence principale C est positive, le groupe sera du deuxième type.

24. On pourra se demander s'il n'est pas possible d'intervertir ce résultat ou, plus précisément : est-il possible pour chaque domaine dont la frontière a la capacité positive de définir un groupe fuchsoïde dont le domaine principal est T, de sorte que la mesure linéaire de l'ensemble correspondant $m$ soit positive.

Envisageons à cet effet le domaine T constitué par l'intérieur du cercle unité E du plan $x$, excepté un nombre infini des points

$$(a) \qquad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots$$

convergents vers la périphérie E′ de E, chaque point de E′ étant un point limite de l'ensemble $(a)$ (cas hyperbolique). En joignant les points $(a)$ par des lignes droites aux points les plus rapprochés de E′, on aura un système de coupures formant la frontière d'un domaine simplement connexe T′. Soit maintenant $z$ la fonction polymorphe ayant les points $(a)$ comme points singuliers logarithmiques et représentant la surface de recouvrement de T′ sur le cercle unité. En effectuant, au besoin, une déformation des parties intérieures des coupures, on aura pour le domaine fondamental du groupe $\Gamma$ de $z$ un polygone, limité par un système infini de demi-cercles, les côtés conjugués ayant un sommet commun situé sur C. On peut procéder d'une manière analogue dans le cas où T est identique au plan infini, pointé sur un ensemble de points convergeant vers l'infini (cas parabolique).

On peut maintenant distinguer entre deux cas différents, selon que la mesure linéaire de l'ensemble $m$ est nulle ou positive. Dans le cas parabolique, on a toujours affaire au premier cas, d'après le théorème mentionné ci-dessus. Quant au cas hyperbolique, la mesure de $m$ peut être nulle ou positive, selon la densité de l'ensemble $(a)$.

Pour éclaircir cela, nous supposerons que les points $(a)$ soient situés d'une manière régulière exprimée par la formule

$$a_n^{(k)} = \left(1 - \frac{1}{q_n}\right) e^{\frac{2\pi i k}{p_n}} \qquad (0 \leqq k < p_n),$$

où $q_1, q_2, q_3, \ldots$ est une suite croissante de nombres positifs et $p_n$ des entiers devenant infinis avec $n$. On aura alors le théorème :

*Si*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = \infty,$$

*la mesure de m est nulle ; si, au contraire,*

$$\sum \frac{p_n}{q_n} < \infty,$$

*la mesure est positive* [21].

En prenant, par exemple, $q_n = 2^n$, on aura le premier cas pour $p_n = 2^{n(1+\varepsilon)}$ et le second cas pour $p_n = 2^{n(1-\varepsilon)}$, où $\varepsilon > 0$. Dans les deux cas, la fonction automorphe $x(z)$ nous fournit l'exemple d'une fonction bornée, dont les valeurs limites de Fatou sont toutes absolument égales à l'unité. C'est un fait remarquable que dans le premier cas la dite fonction obtient ces valeurs limites déjà pour un ensemble de points de mesure nulle.

25. De ce qui précède, il suit qu'il existe des groupes fuchsoïdes ayant la même structure et dont les polygones fondamentaux se ressemblent parfaitement, l'un des groupes conduisant au cas hyperbolique et l'autre au cas parabolique. Pour distinguer entre les deux cas tout à fait différents, on doit donc tenir compte non seulement de la mesure de l'ensemble $m$, mais aussi de l'ensemble des côtés du polygone fondamental.

On pourrait songer qu'il serait, dans le cas hyperbolique, toujours possible, par un choix convenable de coupures, d'arriver à un groupe fuchsoïde dont le polygone fondamental ait un ensemble $m$ de la mesure positive. Il n'en est aucunement ainsi, comme nous l'apprend l'exemple suivant [21]. En partant de l'exemple hyperboliqne précédent, nous choisirons les points $a_n$ d'après les conditions

$$q_n = n, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log p_n}{n} = \infty.$$

On peut alors démontrer que la mesure de l'ensemble $m$ est nulle et cela pour tous les systèmes des coupures.

Notre condition est remplie, par exemple, si $p_n = n^n$.

26. Nous traiterons dans ce qui suit d'une catégorie de groupes pour lesquels on peut d'une manière simple résoudre la question. J'entends par là les groupes fuchsoïdes de genre zéro qui sont contenus comme sous-groupe invariant dans un groupe fuchsien. On aura, en effet, pour les groupes en question, le théorème suivant :

*Tout groupe fuchsoïde* $\Gamma_0$ *du genre zéro qui est contenu comme sous-groupe* *invariant dans un groupe fuchsien est parabolique, si le groupe factoriel* $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ *n'est pas isomorphe à un groupe de transformations linéaires*

$$x' = ax + b, \tag{40}$$

*autrement hyperbolique* [22].

Soit, en effet, $x = x(z)$ une fonction fondamentale de $\Gamma_0$, définie à une transformation biuniforme près, et soit T le domaine principal correspondant. S étant une substitution quelconque du groupe fuchsien $\Gamma$, la fonction $x(S) = f(x)$ est en même temps une fonction fondamentale de $\Gamma_0$, dont le domaine principal coïncide avec T. Il s'ensuit que les substitutions

$$x' = f(x) \tag{41}$$

forment un groupe G isomorphe au groupe factoriel $\frac{\Gamma}{\Gamma_0}$ et ayant T comme domaine invariant.

Dans le cas où le groupe G est isomorphe avec un groupe des substitutions (40), la frontière de T contient évidemment tout au plus deux points, et l'on aura affaire au cas parabolique. Dans tous les autres cas, la frontière de T contient une infinité de points. D'après un théorème que j'ai démontré, la capacité de la frontière de T est alors positive, c'est-à-dire le groupe en question est hyperbolique [21].

On obtient un exemple remarquable des groupes mentionnés en choisissant pour le groupe $\Gamma$ le groupe de la fonction polymorphe $z(x)$ non ramifiée d'une surface riemannienne algébrique F et pour $\Gamma_0$ le groupe d'une fonction polymorphe appartenant à un groupe de Schottky. Dans ce cas, la frontière du domaine T se compose d'un ensemble infini fermé de points discrets, sauf le cas $p = 1$, où l'ensemble en question renferme au plus deux points. Dans le cas général $p > 1$, il s'agit donc d'un groupe hyperbolique; dans le cas particulier $p = 1$, d'un groupe parabolique.

27. La classification établie ci-dessus n'est pas la seule qu'on puisse imaginer. Nous traiterons dans le suivant de quelques autres classes de groupes, importantes au point de vue de la théorie des fonctions [25].

Nous partons pour cela de la classe $A_1$ des domaines T dont la frontière se compose d'un ensemble $\mu$ dont la capacité est positive. Les domaines en question sont, comme nous l'avons déjà dit, identiques aux domaines où il existe des fonctions harmoniques bornées non constantes. La classe $A_1$ contient la classe $A_2$ de domaines où il existe des fonctions analytiques absolument bornées non constantes. Dans le cas spécial où les points limites de T sont situés sur une droite, le domaine T appartient à la classe $A_2$ toujours et seulement quand la mesure linéaire de la frontière est positive.

Nous introduisons finalement la classe $A_3$ des domaines où il existe des fonctions analytiques $f(x)$ pour lesquelles l'intégrale de Dirichlet

$$\iint_T |f'(x)|^2 d\xi\, d\eta, \qquad x = \xi + i\eta,$$

a une valeur finie. C'est une sous-classe de $A_2$, comme il s'ensuit des travaux récents de Schiffer.

La classification précédente implique immédiatement la classification des groupes fuchsoïdes correspondants.

Comme application, nous démontrons le théorème suivant :

*Pour chaque domaine de la classe* $A_3$ *il existe une transformation non linéaire* (41) *par laquelle* T *sera représenté sur un domaine simple. Pour tous les autres domaines, la transformation* (41) *est toujours linéaire.*

Soit, en effet, $u(x)$ une fonction non linéaire transformant le domaine T en un domaine simple renfermant le point à l'infini et ayant à l'infini le développement

$$u(x) = ax + b + \left(\frac{1}{x}\right).$$

La différence $u(x) - (ax + b)$ est alors évidemment une fonction non constante, régulière dans T et ayant l'intégrale de Dirichlet finie.

Soit inversement T un domaine quelconque de la classe $A_3$. D'après un théorème de Schiffer, il existe alors dans T une fonction régulière transformant T en un domaine simple, dont la frontière a la mesure extérieure positive. La transformation en question est alors certainement non linéaire, si la mesure de la frontière $\mu$ de T est nulle. Dans le cas ou la mesure $\mu$ est positive, on obtient une transformation non linéaire en représentant le domaine T sur un domaine limité par un système de fentes parallèles à l'axe réel (théorème de Koebe). Notre théorème est ainsi complètement démontré.

28. L'importance de notre classification ressortira aussi de ce qui suit, où nous nous proposons de représenter analytiquement les fonctions automorphes de nos groupes fuchsoïdes.

Commençons par le cas parabolique et traitons d'abord du cas le plus simple où le domaine T est identique au plan $u$ entier pointé à l'infini. Les points de ramification

$$(e) \qquad\qquad e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad \ldots$$

de la fonction polymorphe $z(u)$ auront alors comme seul point d'accumulation le point à l'infini.

Nous supposons pour simplifier que les points $(e)$ sont des points singuliers logarithmiques pour $z(u)$. En découpant alors le domaine T par une courbe simple convenable K traversant les points $(e)$, on obtient pour domaine fondamental B du groupe fuchsoïde $\Gamma$ de $z$ un polygone ayant un nombre infini des angles égal à zéro, les côtés conjugués

$$\text{(C)} \qquad C_\nu, \quad C'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

correspondant aux parties $(e_\nu, e_{\nu+1})$ de K. Les sommets de B auront alors comme seul point d'accumulation le point $\pi$, où la fonction automorphe $u(z)$, inverse de $z(u)$, a la valeur limite infinie.

Sur les côtés (C) de B il y a lieu l'inégalité

$$|u(z)| > M_n, \tag{42}$$

dès que $\nu$ surpasse un nombre $\nu_0$ devenant infini avec $M_n$.

Nous adjoignons maintenant à B l'ensemble des polygones adjacents par des côtés équivalents aux côtés (C), où $\nu \leqq \nu_0$ et nous continuerons ainsi de suite. Après un nombre fini $q_n$ de telles opérations, on arrivera à un polygone $B_n$ dont la frontière $L_n$ se compose d'un nombre fini de côtés de deux catégories différentes, les uns étant équivalents à un des côtés (C) où $\nu > \nu_0$, les autres à un des côtés (C) où $\nu \leqq \nu_0$. Soit $L'_n$ la somme des côtés de la première catégorie, $L''_n$ la somme des autres. On aura alors l'inégalité (42) sur chaque côté appartenant à $L'_n$.

On peut démontrer, et c'est un point capital de notre théorie, que

$$\lim_{n \to \infty} L''_n = 0,$$

si les nombres $q_n$ croissent d'une manière suffisamment rapide avec $n$. Nous renvoyons à notre travail [19].

29. Formons maintenant l'expression

$$f(z) = \frac{u'(a)}{u(z) - u(a)}, \tag{43}$$

qui définit une fonction fondamentale du groupe $\Gamma$. En vertu de la formule de Cauchy, on aura

$$f(z) = \sum_{B_n} \frac{S'(a)}{z - S(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{44}$$

la somme étant étendue sur l'ensemble des pôles $S(a)$ de $f(z)$ situés dans le domaine $B_n$ limité par $L_n$. Quant à l'intégrale dans la formule (44), on aura d'abord

$$\int_{L_n} = \int_{L'_n} + \int_{L''_n}.$$

A cause de (42), on aura sur $L'_n$

$$|f(z)| < \frac{|u'(a)|}{M_n - |u(a)|},$$

donc

$$\left|\int_{L'_n}\right| < \frac{k}{M_n},$$

$k$ étant une constante, indépendante de $n$, d'où il suit

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L'_n} = 0.$$

On aura également pour la seconde intégrale

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L''_n} = 0,$$

parce que la longueur de $L''_n$ tend vers zéro pour $n \to \infty$, si aucun pôle de $f(z)$ n'est situé sur $L''_n$, ce qu'on peut supposer sans restriction. On aura ainsi pour $f(z)$ l'expression

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{B_n}\frac{S'(a)}{z - S(a)}, \tag{45}$$

que nous écrirons brièvement

$$f(z) = \sum_{\Gamma}\frac{S'(a)}{z - S(a)}. \tag{46}$$

Il s'agit ici d'une série dont la convergence est uniforme, mais pas absolue.

En intégrant par rapport au paramètre $a$ et en passant à la fonction exponentielle, on en déduit l'expression

$$\frac{u(z)-u(a)}{u(z)-u(b)} : \frac{u(z_0)-u(a)}{u(z_0)-u(b)} = \prod_{\Gamma}\left[\frac{S(z)-a}{S(z)-b} : \frac{S(z_0)-a}{S(z_0)-b}\right], \tag{47}$$

sous la forme d'un produit infini. La convergence n'étant pas absolue, on doit prendre les termes du produit dans un ordre bien déterminé, défini par le groupe $\Gamma$, mais indépendant de la fonction considérée. Notre expression que nous avons déjà rencontrée à propos de la représentation analytique des fonctions fuchsiennes, met en évidence les propriétés fondamentales de la fonction en question, à savoir les pôles et les zéros de la fonction, et ultérieurement l'invariance formelle de l'expression pour les substitutions du groupe correspondant. Malheureusement on ne peut, en général, donner aucune règle simple pour l'ordre des termes de (47). On devra pour cela connaître la croissance des entiers $q_n$, problème que l'on peut résoudre, à l'aide de théorèmes de Ahlfors, au moins dans des cas particuliers [19].

30. Comme second exemple, nous traiterons du cas hyperbolique, où T est constitué par l'intérieur du cercle unité E, pointé dans un nombre infini dénombrable de points logarithmiques

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots \tag{$a$}$$

ayant ses points d'accumulation sur la frontière de E. La fonction inverse $x(z)$ de la fonction polymorphe correspondante est alors une fonction fondamentale bornée

$$|x(z)| < 1,$$

ayant toutes les valeurs limites de Fatou, en valeur absolue, égales à l'unité, abstraction faite d'un ensemble dénombrable de valeurs, correspondant aux points de ramification.

D'après un théorème bien connu de Blaschke, on aura pour la fonction $x(z)$ l'expression

$$x(z) = \prod \frac{|a_\nu| - z e^{-i\alpha_\nu}}{1 - \bar{a}_\nu z},$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\frac{x(z)}{x(z_0)} = \prod_{\Gamma} \left[ \frac{S(z) - a}{S(z) - b} : \frac{S(z_0) - a}{S(z_0) - b} \right]. \tag{47'}$$

Cette dernière expression, identique à notre produit (47), est maintenant absolument convergente.

31. Après ces remarques préliminaires, nous pouvons aborder le cas général. Commençons par le cas parabolique.

Nous pouvons supposer que la frontière du domaine T renferme au moins trois points différents, les autres cas pouvant être réduits au cas précédemment traité. On peut encore, par une transformation linéaire, obtenir que trois points de la frontière coïncident respectivement avec 0, 1 et $\infty$.

Soit $\zeta(x)$ la fonction polymorphe, inverse à la fonction modulaire de Legendre. La fonction composée $\zeta[x(z)]$ est alors uniforme et identique à une fonction fondamentale d'nn groupe fuchsoïde $\Gamma'$ hyperbolique du genre zéro, sous-groupe invariant de $\Gamma_0$. Cette fonction ayant comme domaine principal l'intérieur du cercle unité, peut être représenté, d'après ce qui précède, par un produit absolument convergent (47). En le joignant à l'expression de la fonction modulaire, nous obtenons finalement une expression pour notre fonction fuchsoïde $x(z)$. L'expression ainsi obtenue est encore une fois de la forme (47), la convergence de ce produit n'étant pas absolue.

Il ne reste plus que le cas hyperbolique, pour lequel on peut immédiatement donner la solution. On peut, en effet, d'après un théorème connu [26], représenter la dite fonction comme quotient de deux fonctions bornées sous la forme

$$f(z) = \frac{\pi_1(z)}{\pi_2(z)} e^{g(z)},$$

où $\pi_1(z)$ et $\pi_2(z)$ sont des produits de Blaschke et $g(z)$ une fonction régulière representée par

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\psi(\vartheta) + i\lambda,$$

où

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \to 1}\int_0^{\vartheta} \log|x(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

est défini par les valeurs limites de la fonction bornée $f(z)$.

Nous avons donc, dans tous les cas, trouvé pour notre fonction fondamentale une expression sous la forme d'un produit infini, dont la convergence est absolue ou non, selon que le groupe fuchsoïde en question est hyperbolique ou parabolique.

32. La plupart des résultats ci-dessus s'étendent immédiatement aux groupes fuchsoïdes dont le genre $p$ est un nombre fini positif quelconque. Il existe dans ce cas un couple de fonctions automorphes

$$(48) \qquad x = x(z), \qquad y = y(z),$$

liées par une équation algébrique

$$(49) \qquad P(x, y) = 0,$$

par lesquelles toute fonction automorphe peut s'exprimer comme fonction uniforme de deux variables $x$ et $y$. Le couple (48), déterminé à une transformation birationnelle près

$$x' = R_1(x, y), \qquad y' = R_2(x, y),$$

constitue un système fondamental de $\Gamma$.

Comme dans le cas $p = 0$, deux cas essentiellement différents peuvent se présenter ici, selon que le produit infini

$$\prod_{\Gamma} |S_\nu(z)|$$

est convergent ou non. Dans le premier cas, c'est-à-dire le cas hyperbolique, la surface riemannienne correspondante F aura une fonction de Green, représentée par le logarithme de $\frac{1}{\Pi}$, dans le second cas, le cas parabolique, une pareille fonction n'existe pas. Les surfaces de la première catégorie sont, d'après la terminologie de M. Nevanlinna, les surfaces ayant une frontière réelle ou idéale positive, les autres surfaces ayant une frontière zéro [26].

Dans le dernier cas, que l'on obtient, en particulier, en partant d'une surface fermée en supprimant un ensemble de points de la capacité nulle, l'ensemble de fonctions automorphes n'obtenant une valeur donnée qu'un nombre fini de fois dans le polygone fondamental peut s'exprimer rationnellement par un système fondamental $(x, y)$ et l'on peut les représenter, comme dans le cas $p = 0$, par des séries et produits dont la convergence n'ést pas absolue.

Soit, dans le cas hyperbolique, $g(z, a)$ la fonction de Green ayant son pôle dans $z = a$. Soit alors $f(z)$ une fonction automorphe n'obtenant dans le polygone fondamental B aucune valeur plus d'un nombre $n$ de fois. En désignant par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les pôles en nombre fini de $f$ situés dans B, nous formons la fonction

$$\psi_0(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \psi(z, z_\nu),$$

où

$$\psi(z, z_\nu) = e^{-g(z,z_\nu) - ih(z,z_\nu)},$$

$h$ étant la fonction harmonique conjuguée de $g$. Le produit

$$f(z)\,\psi_0(z) = \psi(z)$$

est alors évidemment, tout comme la fonction $\psi_0(z)$, une fonction bornée qui, par rapport aux substitutions de $\Gamma$, se transforme d'après l'équation

$$\psi(S) = e^{i\lambda_S}\,\psi(z).$$

Il est donc possible de représenter, dans ce cas, chaque fonction automorphe de cette espèce comme quotient de deux fonctions bornées multiplicatives

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\psi_0(z)}.$$

On arrive au cas hyperbolique, par exemple en partant d'une surface fermée, dépourvue d'un ensemble des points ayant la capacité positive. Si, particulièrement, cet ensemble contient un continu, le groupe correspondant aura des fonctions automorphes bornées.

## IV. — Les fonctions analytiques définies sur une surface riemannienne donnée.

33. Dans ce qui précède, nous avons traité seulement des groupes de genre fini. Quant au cas général, où le genre est infini, on y rencontre des phénomènes essentiellement nouveaux. Il s'agit d'un champ de recherches très vaste et peu exploré, c'est-à-dire de recherche des fonctions analytiques définies sur une surface riemannienne transcendante. Nous nous proposons de traiter dans ce qui suit de quelques problèmes de ce domaine.

Il est naturel ici d'aborder en premier lieu les surfaces dont la frontière a la mesure harmonique zéro, parce qu'elles peuvent être regardées comme une généralisation plus naturelle des surfaces algébriques.

La première question se rattache à l'existence des fonctions additives généralisant les intégrales abéliennes. Tandis que la théorie de ces dernières intégrales a été exposée depuis longtemps, on n'a étudié que dans ces tout derniers temps les fonctions définies sur les surfaces transcendantes. Dans leurs travaux récents, quelques mathématiciens finlandais se sont efforcés de démontrer l'existence d'intégrales, analogues aux intégrales abéliennes et ils ont obtenu des résultats d'une portée remarquable [1], [23], [27], [33].

Dans ces recherches, on peut distinguer entre deux tendances différentes : ou bien il s'agit de prouver l'existence des fonctions analogues aux intégrales abéliennes sous les conditions les plus générales possibles, ou bien de pousser leur étude dans des cas particuliers aussi loin que possible.

Dans tous les cas, on a d'abord le problème fondamental suivant : est-il possible de construire une intégrale dont les singularités et périodes sont données en avance ? Il est aisé de voir que si ce problème a une solution, il en possède une infinité. C'est une conséquence immédiate d'un résultat récemment obtenu par Behnke et Stein, d'après lequel il existe, sur chaque surface riemannienne ouverte, des fonctions analytiques uniformes partout régulières. Pour trouver une solution unique de notre problème, il faut donc imposer aux intégrales des conditions complémentaires.

34. Dans ses travaux récents, M. Nevanlinna a introduit comme condition complémentaire pour les intégrales de la première espèce, l'exigence que l'intégrale de Dirichlet

$$\iint |f'(x)|^2 \, d\xi \, d\eta, \qquad x = \xi + i\eta$$

doit avoir une valeur finie. Sous cette condition, il a pu démontrer l'existence d'une classe remarquable d'intégrales possédant les propriétés connues des intégrales abéliennes de la première espèce [27]. Il est facile d'étendre les résultats en question aux intégrales de la seconde et de la troisième espèce en supposant que le nombre des points singuliers est fini. Par contre, dans le cas général où le nombre en question est infini, on aura des difficultés nouvelles, dont l'explication n'a pas encore réussi.

Afin de pouvoir pousser plus loin le développement de la théorie, je me suis borné dans mes propres travaux à un cas spécial de surfaces, c'est-à-dire celui des surfaces symétriques. Un exemple remarquable de cette catégorie de surfaces nous fournit la surface à deux feuilles généralisant les surfaces hyperelliptiques et représentée par l'équation

$$y^2 = G(x), \tag{50}$$

où G est une fonction entière (régulière dans tout le plan $x$ fini) ayant les zéros en nombre infini réels [23].

Pour les surfaces symétriques, on peut former des intégrales, analogues aux intégrales abéliennes de trois espèces, qui sont parfaitement déterminées par les singularités et les périodes en introduisant comme condition complémentaire que la partie imaginaire doit rester bornée sur la surface riemannienne découpée par un système canonique de coupures.

On peut aussi introduire des intégrales ayant une infinité de points singuliers et même construire à l'aide de telles intégrales des fonctions uniformes sur la surface donnée. Les zéros et les pôles d'une telle fonction satisfont alors à une infinité d'équations correspondant aux relations abéliennes. Les fonctions ainsi obtenues peuvent, dans un certain sens, être regardées comme une généralisation des fonctions rationnelles définies sur une surface algébrique.

Quant à la formation des intégrales en question, on peut, ou bien les obtenir comme fonctions limites des intégrales abéliennes relatives aux surfaces algébriques convergentes à la limite vers la surface transcendante donnée, ou bien en effectuant l'uniformisation de la surface donnée.

Les résultats cités ci-dessus sont cependant d'une nature très spéciale et l'on ne connaît pour le moment aucune méthode pour les appliquer au cas général des surfaces non symétriques.

35. Nous donnerons, pour terminer, l'exemple d'un phénomène qui d'une manière remarquable montre la différence profonde existant entre les surfaces de genre fini et infini.

Regardons de nouveau la surface hyperelliptique (50), où $G(x)$ désigne une fonction entière ayant un nombre infini de zéros simples réels ou complexes. En enlevant d'une des feuilles, par exemple de la feuille supérieure l'intérieur d'une courbe fermée C, il restera un domaine D comprenant la feuille inférieure tout entière. Il existe, comme on le sait, dans le cas algébrique dans D une fonction uniforme bornée non constante, qu'on peut facilement construire à l'aide des intégrales abéliennes. Je dis qu'il n'en est pas ainsi dans le présent, où la surface (50) est transcendante.

Soit, en effet, $f(x, y)$ une telle fonction. On peut évidemment l'écrire

$$f(x, y) = A(x) + B(x)\, y(x),$$

où

$$A(x) = \frac{f+\bar{f}}{2}, \qquad B(x) = \frac{f-\bar{f}}{2y},$$

$\bar{f} = A(x) - B(x)y$ étant la fonction conjuguée de $f$. A et $B^2y^2$ sont alors des fonctions de $x$, régulières et bornées en dehors de la courbe $C_0$, projection de C sur le plan $x$. Mais en vertu de $B^2 G = \frac{1}{4}(f-\bar{f})^2$, la fonction $B^2 G$ doit être une fonction régulière et bornée de $x$ en dehors de $C_0$ et donc aussi à l'infini.

Comme, d'autre part, ce point est un point limite des zéros de la fonction $f$, cette fonction doit se réduire à zéro. On aura donc $B(x) \equiv 0$.

Mais, en vertu de notre supposition, la fonction $f$ est régulière aussi à l'intérieur et sur $C_0$. D'après le théorème de Liouville, la fonction $f$ doit donc se réduire à une constante.

## V. — Sur les fonctions automorphes de plusieurs variables.

36. Nous avons, dans les chapitres précédents, traité de diverses questions qui se rattachent aux fonctions automorphes dépendant d'une seule variable. Dans ce dernier chapitre, je me propose d'envisager, dans les grandes lignes, quelques problèmes de la théorie des groupes discontinus et des fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables.

On entend par cette dénomination, dans le sens le plus général du mot, les fonctions analytiques qui restent invariables par rapport aux substitutions analytiques biuniformes

$$x'_\nu = T_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{51}$$

d'un groupe discontinu donné.

Un cas important de telles fonctions nous est fourni par l'exemple classique des fonctions abéliennes, c'est-à-dire des fonctions méromorphes dans tout l'espace $(x)$ ayant $2p$ systèmes de périodes. Dans ce cas-ci, les substitutions ont l'expression

$$x'_\nu = x_\nu + \omega_{\nu\mu},$$

et elles forment un groupe commutatif discontinu pour chaque point fini.

Les premiers exemples de groupes et de fonctions automorphes généraux ont été donnés par Émile Picard qui, en profitant des idées de Poincaré, a construit des fonctions de plusieurs variables analogues aux fonctions fuchsiennes (fonctions hyperfuchsiennes) [28]. Les groupes en question sont formés par substitutions linéaires

$$y'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n+1} \alpha_{\mu\nu} y_\nu, \qquad y_\mu : y_{n+1} = x_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{52}$$

conservant une variété quadratique, dont on obtient l'équation sous une forme homogène en posant une forme hermitienne quadratique égale à zéro. Une autre généralisation des groupes fuchsiens nous est fournie par les groupes *hyperabéliens* de Picard [29]. Parmi les travaux antérieurs se rattachant aux fonctions automorphes, on peut distinguer entre deux tendances différentes : tandis que quelques-unes de ces recherches ont trait aux questions relatives à l'existence et aux propriétés des fonctions des groupes les plus généraux, les autres s'occupent d'une manière plus approfondie des propriétés des fonctions automorphes ayant un intérêt spécial du point de vue de l'application, en premier lieu à la théorie des nombres. Parmi les auteurs du premier groupe, on peut mentionner Hurwitz, Fubini et Giraud, parmi les autres Hecke, Blumenthal et tout récemment Siegel.

37. Dans une série de travaux, dont les premiers datent d'une trentaine d'années, j'ai abordé quelques questions de la théorie des fonctions automorphes qui se rattachent d'une part à la recherche géométrique des groupes discontinus généraux, d'autre part aux rapports entre les singularités essentielles des fonctions automorphes et la structure du groupe discontinu correspondant [14]. Le problème en question, dont la solution dans le cas d'une seule variable se trouve immédiatement, amène des difficultés considérables dès que l'on passe aux fonctions de plusieurs variables où l'on a trouvé des phénomènes essentiellement nouveaux, indiqués déjà par Picard. Nous verrons qu'il sera possible de conserver l'analogie avec la théorie des fonctions d'une variable par une définition nouvelle de la discontinuité.

Quoique la plupart de nos résultats puissent être étendus aux groupes des transformations plus générales, nous nous bornerons, dans ce qui suit, en premier lieu aux groupes des transformations linéaires (52). Soit $\Gamma$ un tel groupe sans substitutions infinitésimales. Le groupe sera dit *normal* dans un point P de l'espace $(x)$, s'il existe un domaine renfermant P où l'ensemble des fonctions (52) forme une famille normale dans le sens de M. Montel. L'ensemble des points où le groupe est normal constitue un domaine non nécessairement connexe, que nous appellerons le *domaine normal* du groupe en question.

La formation du domaine normal pour un groupe $\Gamma$ donné se ramène à l'étude de suites infinies des substitutions de $\Gamma$. Soit

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{S}_1, \quad \mathrm{S}_2, \quad \mathrm{S}_3, \quad \ldots$$

une telle suite. Il est alors possible d'extraire de (S) une suite infinie partielle

$$(\sigma) \qquad \mathrm{S}_{\nu_1}, \quad \mathrm{S}_{\nu_2}, \quad \mathrm{S}_{\nu_3}, \quad \ldots$$

convergente vers une substitution limite

$$(53) \qquad y'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n+1} \beta_{\mu\nu} y_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n+1).$$

En supposant que $\Gamma$ ne contient pas de substitutions infinitésimales, la substitution limite (53) doit évidemment être dégénérée, ayant donc le déterminant égal à zéro.

Soit $\rho$ le rang de la matrice

$$(54) \qquad \| \beta_{\mu\nu} \|,$$

que nous appellerons aussi le rang de la suite normal $(\sigma)$. On peut alors démontrer, par des considérations tout à fait élémentaires, que pour $(\sigma)$ les points de l'espace $(x)$ situés en dehors d'une certaine variété linéaire $\overline{M}_{n-\rho}$ de la dimension $2(n-\rho)$ convergent vers des points situés sur une certaine variété linéaire $M_{\rho-1}$ de la dimension $2(\rho-1)$, la convergence étant uniforme dans chaque domaine fermé ne renfermant pas de points de $\overline{M}_{n-\rho}$. Les fonctions (52) correspondant à la suite $\sigma$ forment donc une suite normale de fonctions en dehors de $\overline{M}_{n-\rho}$.

La variété $M_{\rho-1}$ sera appelée l'*élément primaire*, la variété $\overline{M}_{n-\rho}$ l'*élément secondaire* de $\sigma$. En remplaçant au besoin $\sigma$ par une suite partielle, nous pouvons supposer qu'aussi la suite $\sigma'$ de substitutions inverses de $\sigma$ est normale. Entre les éléments

$$M_{\rho-1}, \quad \overline{M}_{n-\rho} \text{ resp. } M'_{\rho'-1}, \quad \overline{M}'_{n-\rho'}$$

de $\sigma$ et de $\sigma'$, il existe alors une relation simple, la variété $M_{\rho-1}$ étant toujours contenue dans $\overline{M}'_{n-\rho'}$ et $M'_{\rho'-1}$ dans $M_{n-\rho}$.

Regardons maintenant l'ensemble $(\overline{M})$ fermé des éléments secondaires, correspondant aux diverses suites normales du groupe $\Gamma$.

L'ensemble de points de l'espace $(x)$ situés en dehors de $(\overline{M})$ constitue, s'il existe, un domaine D non nécessairement connexe, identique au domaine normal du groupe en question. Ce domaine est donc le domaine le plus étendu, où les fonctions linéaires (52) correspondant aux diverses substitutions de $\Gamma$ forment une famille normale de fonctions. Le groupe discontinu $\Gamma$ sera alors dit *normal dans* D.

Dans le cas d'une seule variable, la notion de la discontinuité normale est toujours identique à la notion de la discontinuité propre. Il en est autrement en général pour les groupes de substitutions de deux ou plusieurs variables. Dans tous les cas, le domaine normal est toujours contenu dans le domaine de la discontinuité propre.

38. En vertu de ce qui précède, il est permis de démontrer la discontinuité normale (et donc aussi la discontinuité propre) pour la plupart des groupes linéaires connus [14]. Il résulte, en effet, de nos définitions et des propriétés connues des familles normales des fonctions analytiques qu'étant donné un domaine fini $D_0$ restant invariable pour certaines substitutions linéaires, tout groupe formé par telles substitutions est normal dans $D_0$ dès qu'il ne renferme pas de substitutions infinitésimales.

Au lieu de supposer que $D_0$ est fini, il suffit de supposer qu'il existe un système d'hyperplans sans points communs et ne contenant aucun point intérieur de $D_0$ (condition A).

En choisissant pour le domaine $D_0$ l'intérieur de l'hypersphère

$$(55) \qquad |y_1|^2+|y_2|^2+\ldots+|y_n|^2<|y_{n+1}|^2,$$

on constate ainsi la discontinuité normale des groupes hyperfuchsiens dans le domaine (55).

On arrivera à une catégorie remarquable plus générale de groupes linéaires en considérant des substitutions qui conservent une variété quadratique représentée par l'équation

$$(56) \qquad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})=0,$$

où $\varphi$ est une forme quadratique ordinaire ou hermitienne. On peut alors, par des considérations tout à fait élémentaires, démontrer que pour chaque groupe normal formé par de telles substitutions les éléments secondaires $\overline{M}$ sont contenus dans certaines variétés linéaires, hyperplans tangents à la variété (56). On en déduit immédiatement les théorèmes suivants [14] :

*Tout groupe de substitutions linéaires réelles conservant une variété ordinaire* $\varphi$ *est normal dans le domaine* $D(\varphi)$ *limité par les hyperplans tangents réels de la variété dès qu'il n'existe pas de substitutions infinitésimales.*

*Tout groupe de substitutions linéaires complexes conservant une variété ordinaire ou hermitienne est normal dans le domaine* $D(\varphi)$ *limité par les hyperplans tangents de la variété dès qu'il n'existe pas de substitutions infinitésimales.*

Le domaine $D(\varphi)$, défini par $\varphi$, sera appelé le *domaine normal de la variété* en question.

Comme application, nous regardons les variétés quadratiques, Soit d'abord $\varphi$ une forme réelle quadratique, donnée par l'expression canonique

$$(57) \qquad \varphi=\sum_{\mu=1}^{p} y_\mu^2-\sum_{\nu=p+1}^{p+q} y_\nu^2, \qquad (q\leqq p, p+q=n+1).$$

On peut alors, d'une manière élémentaire, démontrer le théorème :

*Pour* $q=1$, *le domaine normal est défini par l'inégalité*

$$(D_1) \qquad \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu \overline{y}_\mu - y_{n+1}\overline{y}_{n+1} < \left|\sum_{\mu=1}^{n} y_\mu^2 - y_{n+1}^2\right|,$$

*pour* $q=2$ *par l'inégalité*

$$(D_2) \qquad \sum_{\mu=1}^{n-1} y_\mu \overline{y}_\mu - y_n\overline{y}_n - y_{n+1}\overline{y}_{n+1} < -\left|\sum_{\mu=1}^{n-1} y_\mu^2 - y_n^2 - y_{n+1}^2\right|.$$

*Si* $q>2$, *il n'existe pas de domaine normal.*

Quant au domaine $D_1$, il est connexe si $n > 2$, mais composé de trois parties connexes si $n = 2$.

Le domaine $D_2$ est connexe si $n > 3$, mais composé de trois parties connexes si $n = 3$.

Quant aux formes quadratiques hermitiennes

$$\varphi = \sum_{\mu=1}^{p} y_\mu \bar{y}_\mu - \sum_{\nu=p+1}^{p+q} y_\nu \bar{y}_\nu, \tag{58}$$

elles ont un domaine normal seulement pour $q = 1$, ce domaine étant alors défini par $\varphi < 0$. C'est le cas des groupes hyperfuchsiens, introduits par Picard.

On peut, d'une manière analogue, traiter des groupes de substitutions linéaires ayant une variété algébrique quelconque.

39. Les résultats précédents auront une portée remarquable par l'application d'un principe général, dû à Hesse et Klein.

Partons pour cela d'une forme ordinaire

$$g = \sum z_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \tag{59}$$

dont les coefficients $z_\lambda$ sont des paramètres arbitraires. En effectuant la substitution

$$y'_i = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{ik} y_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \tag{60}$$

la forme $g$ sera transformée en une forme nouvelle $g'$ de la même espèce ayant les coefficients

$$z'_\mu = \sum_\nu c_{\mu\nu} z_\nu, \tag{61}$$

où $c_{\mu\nu}$ sont des fonctions rationnelles entières des quantités $\alpha_{ik}$ ayant comme coefficients des nombres entiers. Nous aurons ainsi pour notre groupe $\Gamma$ une représentation dans l'espace $(z)$ dont la dimension est en général supérieure à celle de l'espace $(y)$.

On constate facilement que les substitutions transformées (61) laissent invariable la variété rationnelle définie par les équations

$$z_\lambda = (\lambda) u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_{n+1}^{\lambda_{n+1}}, \tag{V}$$

ou $(\lambda)$ sont des coefficients polynomiaux. La variété

$$g = 0, \tag{62}$$

linéaire par rapport aux variables $z$, représente alors un hyperplan osculateur de V.

Regardons maintenant l'ensemble $(\overline{\mathrm{M}})$ des variétés (62) appartenant aux points réels de V. En supposant que les points de l'ensemble $(\overline{\mathrm{M}})$ ne remplissent pas tout l'espace $(z)$, il existe un domaine $\mathrm{D}(g)$ non nécessairement connexe formé par l'ensemble des points situés en dehors de $(\overline{\mathrm{M}})$ et invariant par rapport aux substitutions (61). L'importance capitale du domaine $\mathrm{D}(g)$ apparaît du théorème suivant :

*Tout groupe de substitutions* (61) *obtenu d'un groupe* $\Gamma$ *de substitutions réelles* (60) *est normal dans le domaine* $\mathrm{D}(g)$ *dès que le groupe* $\Gamma$ *ne contient pas de substitutions infinitésimales.*

On peut traiter de la même manière des groupes de substitutions complexes (60) en remplaçant la forme ordinaire $g$ par une forme hermitienne.

Notre théorème peut être regardé comme une généralisation du théorème connu, d'après lequel tout groupe de substitutions binaires

$$y'_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \qquad y'_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$$

sans substitutions infinitésimales, sera proprement discontinu dans l'espace hyperbolique.

Dans notre travail [14] cité plus haut, nous avons donné plusieurs exemples de groupes normaux pouvant être obtenus par l'application du principe mentionné.

On y trouve aussi les premiers exemples concernant les groupes sans variétés invariantes qui peuvent, dans un certain sens, être regardés comme une généralisation des groupes kleinéens.

Comme nous l'avons déjà dit, les définitions et résultats précédents peuvent être appliqués aussi aux groupes de substitutions birationnelles non linéaires, contenus comme sous-groupe dans un groupe crémonien continu fini. En effet, tout groupe de cette nature peut, par changement des variables, être représenté par un groupe de substitutions linéaires appartenant à un espace supérieur et possédant une variété invariante algébrique $\psi$ dont les points correspondent aux points de l'espace donné. Il s'ensuit que les éléments des suites normales du groupe transformé coïncident avec des intersections de la variété $\psi$ par certains hyperplans. On peut de cette manière appliquer directement nos résultats à plusieurs groupes importants, parmi lesquels nous relevons les groupes hyperabéliens de Picard et certains groupes étudiés par Giraud et qui se rattachent aux modules des fonctions algébriques.

40. Passons maintenant à la recherche des *fonctions automorphes* appartenant aux groupes précédents. Formons à cet effet pour notre groupe la série

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\Gamma} \mathcal{H}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\left(\frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)^p \tag{63}$$

dont le noyau $\mathcal{H}$ est une fonction rationnelle et $p$ un domaine entier positif. En supposant la convergence absolue et uniforme de (63) au moins en supprimant un nombre fini de termes dans un domaine T de l'espace $(x)$, la somme de la série définit une fonction analytique des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, méromorphe dans le domaine T et satisfaisant pour chaque S de $\Gamma$ à l'équation fonctionnelle

$$\Theta(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\left(\frac{\partial(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)^{-p}. \tag{64}$$

Il s'ensuit que le rapport de deux fonctions $\Theta$ est une fonction automorphe de $\Gamma$, méromorphe dans T.

Quant à la convergence de (63), on peut la démontrer sous la condition suivante, un peu plus restrictive que la condition antérieure A.

Nous dirons que le groupe $\Gamma$ satisfait à la condition A', s'il existe un domaine D', dont les transformés par $\Gamma$ sont tous situés dans l'espace fini, exception faite peut-être d'un nombre fini d'entre eux.

Notre condition est certainement remplie s'il existe un domaine borné invariable par rapport au groupe donné.

Cela posé, regardons notre série en choisissant $p = 2$. Il est possible, en vertu de notre condition A', de choisir la fonction rationnelle $\mathcal{H}$ de telle manière que les singularités algébriques de divers termes de la série (63) seront situés, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, en dehors du domaine D'. Les singularités $\pi$ en question sont ici des variétés algébriques provenant des variétés singulières polaires de $\mathcal{H}$ et de la variété à l'infini par les substitutions de $\Gamma$.

Soit maintenant T un domaine quelconque ne renfermant qu'un nombre fini de singularités algébriques en question. On peut alors démontrer, par des considérations tout à fait élémentaires, dans le cas présent, la validité d'un théorème analogue au théorème connu de Kœbe (Verzerrungssatz) [14]. Il s'ensuit que la convergence de la série (63) se ramène à la convergence de la somme des hypersphères qu'on obtient d'une hypersphère convenablement choisie par les substitutions diverses du groupe donné. Notre série converge donc uniformément et absolument, en laissant de côté peut-être un nombre fini de termes, sur chaque domaine fermé qui ne renferme pas d'ensembles limites des variétés polaires $\pi$.

41. Il reste encore à établir la relation entre le domaine de la convergence de (63) et le domaine normal du groupe. On peut distinguer ici entre deux cas essentiellement différents.

Supposons d'abord que les éléments secondaires du groupe sont tous des variétés de la dimension maximum $2(n-1)$, donc des hypersurfaces algébriques

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{65}$$

On peut alors démontrer que les ensembles limites en question se confondent avec les variétés (65). Pour chaque fonction automorphe de Γ, le domaine d'existence coïncide donc avec le domaine normal D du groupe (plus précisément avec une partie connexe du domaine D). On aura ici affaire à des fonctions automorphes ayant des singularités essentielles fixes, c'est-à-dire indépendantes du choix de la fonction.

Il en est autrement dans les cas où les éléments secondaires n'ont pas tous la dimension maximum $2(n-1)$. Dans ce cas, on peut démontrer seulement que le domaine d'existence des fonctions automorphes est toujours une partie du domaine normal du groupe et que, par conséquent, les singularités peuvent partiellement pénétrer dans l'intérieur de D, ces parties dépendant du choix de la fonction. Parmi les fonctions de la première catégorie, on peut mentionner les fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes, ensuite les fonctions automorphes appartenant à nos groupes hyperkleinéens.

Nous remarquons en plus qu'il est possible de construire des fonctions automorphes pour une classe étendue de groupes par des expressions qui peuvent être regardées comme une généralisation des séries de Dirichlet. Partons pour cela de la forme générale (59) d'ordre $p$ des variables $y_1$, $y_2$, ..., $y_{n+1}$. Formons ensuite la série multiple

$$\varphi(z) = \sum_{y=-\infty} \frac{1}{\left[\sum_{\lambda} z_\lambda y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_{n+1}^{\lambda_{n+1}}\right]^\rho}. \tag{66}$$

La somme de cette série, supposée absolument convergente, définit un invariant arithmétique de la forme $g$, c'est-à-dire une fonction analytique des variables $z_\lambda$ qui reste invariable quand on remplace la forme $g$ par une forme arithmétiquement équivalente. Quant à la série (66), on peut démontrer qu'elle converge pour $\rho > \frac{n+1}{p}$ uniformément et absolument dans chaque domaine situé dans l'intérieur du domaine normal de la forme $g$. Les fonctions ainsi obtenues sont donc des fonctions automorphes des groupes modulaires généralisés, et leur domaine d'existence coïncide avec une partie connexe du domaine normal $D(g)$ de la forme $g$.

Citons encore le théorème suivant, auquel conduisent nos développements précédents.

*Étant donné un groupe quelconque de substitutions crémoniennes d'un degré borné, qui transforment un domaine fini en lui-même, il existe toujours des fonctions automorphes qui sont méromorphes dans le domaine en question.*

42. Les résultats précédents reposent essentiellement sur l'emploi des séries par lesquelles nous avons défini et représenté des fonctions automorphes. On peut se demander s'il ne serait pas possible de démontrer, d'une manière

indépendante de la définition des fonctions automorphes, la dépendance entre leur domaine d'existence et le domaine normal du groupe correspondant. C'est en vérité un probléme difficile qu'on a jusqu'ici pu résoudre d'une manière satisfaisante seulement pour les groupes de substitutions linéaires de deux variables [7]. Au moins dans ce cas, le domaine d'existence des fonctions automorphes coïncide en général avec une partie connexe du domaine normal du groupe correspondant. Mais il y a certainement des exceptions.

En effet, déjà l'exemple des fonctions abéliennes nous apprend qu'il existe des groupes discontinus normaux même dans tout l'espace fini et n'ayant pas de fonctions automorphes. Pour qu'il existe des fonctions périodiques, méromorphes dans tout l'espace fini, il faut et il suffit que les périodes satisfassent à une condition arithmétique, exprimée par des relations bilinéaires de Riemann. Dans quelques autres cas, il existe des fonctions périodiques ayant des singularités essentielles situées dans l'espace fini, mais en général les groupes en question ne possèdent pas de fonctions automorphes [16].

43. Les développements précédents se rapportent à une catégorie très vaste et importante de groupes discontinus, c'est-à-dire des groupes contenus dans un groupe crémonien continu fini comme sous-groupe. Nos substitutions sont donc d'un degré borné, ce qui signifie une restriction. En abandonnant cette condition, on est en présence de phénomènes essentiellement nouveaux qui, déjà dans le cas le plns simple, celui des groupes cycliques, conduisent aux difficultés considérables, connus par les travaux de Fatou, de Lattès et de Julia, sur l'itération des fonctions rationnelles.

Pour illustrer brièvemcnt ces phénomènes, je me bornerai aux deux exemples suivants :

Considérons d'abord la substitution

$$\text{(C)} \qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad y' = \frac{a(x)y + b(x)}{c(x)y + d(x)},$$

où les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des constantes et les quantités

$$\text{(67)} \qquad a(x), \quad b(x), \quad c(x), \quad d(x)$$

sont des fonctions analytiques de $x$ dont la déterminante $\Delta$ ne s'évanouit pas identiquement. C'est une transformation de l'espace $(x, y)$ partout uniforme, exception faite de certaines variétés où la substitution homographique de $y$ devient singulière. En supposant que les coefficients (67) sont polynomes, on obtiendra une substitution crémonienne qui devient singulière pour les zéros de la déterminante $\Delta$.

Dans le cas général, la substitution C aura quatre points fixes, un de ces points étant attractif et un autre répulsif par rapport à l'itération de la substitution. On peut alors, sous quelques conditions complémentaires, démontrer l'existence de deux courbes analytiques transcendantes invariantes

$$y = \psi_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2),$$

et d'une infinité de droites

$$x = \lambda_\mu,$$

telles que le groupe cyclique en question sera normal en dehors des lignes mentionnés. De même, lorsqu'on emploie des séries analogues aux séries de Poincaré, il est possible de construire des fonctions automorphes, dont le domaine d'existence coïncide avec le domaine normal du groupe considéré [24].

44. L'exemple précédent a été, dans un cas particulier, traité déjà par Poincaré. Voici un autre exemple, généralisant un exemple de Picard [29].

Envisageons la substitution

$$x' = x^\alpha y^\beta, \qquad y' = x^\gamma y^\delta, \tag{68}$$

où les exposants $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des nombres entiers dont la déterminante est égale à l'unité. Faisons correspondre à notre substitution, qui est une substitution crémonienne, la substitution modulaire

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \tag{69}$$

On arrivera ainsi à une isomorphie entre les groupes modulaires et les groupes G crémoniens formés par (68).

Les substitutions elliptiques (69) conduisant aux groupes cycliques finis, nous supposerons que (69) soit hyperbolique ou parabolique. Soient dans le premier cas $\zeta_1$, $\zeta_2$ les points fixes de (69). On peut alors démontrer que le groupe cyclique engendré par (68) est normal en dehors des variétés à trois dimensions

$$|xy^{-\zeta_1}| = 1, \qquad |xy^{-\zeta_2}| = 1 \tag{70}$$

divisant l'espace entier en quatre parties distinctes. Quant au cas parabolique, où les variétés (70) coïncident, le domaine normal se compose de deux parties.

Cela posé, repartons d'un groupe quelconque $\Gamma$ de substitutions (69), sous-groupe du groupe modulaire. On peut alors distinguer entre deux cas essentiellement différents selon que le groupe $\Gamma$ sera partout singulier sur l'axe réel ou non. Dans le premier cas, les variétés singulières (70) relatives aux substitutions diverses du groupe crémonien G remplissent l'espace $(x, y)$ tout entier et le groupe G n'est nulle part normal. Dans le second cas, le groupe G est normal en dehors d'un ensemble infini des variétés

$$|xy^{-\zeta}| = 1,$$

où $\zeta$ parcourt les points singuliers du groupe modulaire correspondant. Dans le premier cas, il n'existe pas de fonctions automorphes. Dans le dernier cas, on peut démontrer l'existence de telles fonctions par des séries infinies, chacune d'elles définissant simultanément une infinité de fonctions automorphes ayant pour domaine d'existence une partie connexe du domaine normal.

Dans le cas spécial d'un groupe cyclique, les fonctions se réduisent, par un changement de variables, à certaines fonctions étudiées par Hecke.

Les questions traitées dans ce qui précède se rattachent seulement à une partie élémentaire de la théorie des fonctions automorphes. Il reste encore dans ce domaine une foule de problèmes qui attendent leur solution. Il est probable que les résultats importants obtenus ces derniers temps dans la théorie générale des fonctions analytiques de plusieurs variables pourront conduire à des progrès nouveaux dans l'étude des fonctions automorphes.

## Bibliographie.


[1] AHLFORS, L. V., *Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math. Phys.*, t. 35, 1947).

[2] APPELL, P., *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*, Mémoire couronné (*Acta mathematica*, n° **13**, 1889).

[3] BEHNKE, H. et STEIN, K., *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen* (*Math. Ann.*, t. **120**, 1948).

[4] BLUMENTHAL, O., *Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. **56**, 1903; t. **58**, 1904).

[5] BURNSIDE, W., *On a class of automorphic functions* (*Proc. of the London Math. Soc.*, t. **23**, 1892).

[6] CARTAN, H., *Sur les variétés définies par une relation entière* (*Bull. Sc. math.*, t. **55**, 1931).

[7] CARTAN, H., *Sur un cas de prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables complexes* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. **61**, 1949).

[8] ERDÖS, P. et GILLIS, J., *Note on the transfinite diameter* (*Proc. of the London math. Soc.*, t. **12**, 1937).

[9] FUBINI, G., *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*, Pisa, 1908.

[10] GIRAUD, G., *Leçons sur les fonctions automorphes*, Paris, 1920.

[11] HECKE, E., *Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (*Math. Ann.*, t. **71**, 1911).

[12] HURWITZ, A., *Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variabeln* (*Math. Ann.*, t. **61**, 1905).

[13] MYRBERG, P. J., *Zur Theorie der Konvergenz der Poincaréschen Reihen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, A. **9**, 1916; A. **11**, 1917).

[14] Myrberg, P. J., *Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variablen* (*Acta mathematica*, n° **46**$_1$ 1925).

[15] Myrberg, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen durch bedingt konvergente Reihen und Produkte* (*Acta mathematica*, n° **69**, 1932).

[16] Myrberg, P. J., *Über die Existenz von vierfachperiodischen Funktionen, deren Perioden den Riemannschen Bedingungen nicht genügen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, A. **36**, 1932).

[17] Myrberg, P. J., *Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche* (*Acta mathematica*, n° **61**, 1933).

[18] Myrberg, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei hyperelliptischen Riemannschen Flächen* (*Acta mathematica*, n° **65**, 1935).

[19] Myrberg, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei gewissen fuchsoiden Gruppen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **48**, 1936).

[20] Myrberg, P. J., *Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei fuchsschen Gruppen vom Geschlecht Null* (*Ann. di Mathematica*, t. XVII, 1938).

[21] Myrberg, P. J., *Über den Fundamentalbereich der automorphen Funktionen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math. Phys.*, t. **2**, 1941).

[22] Myrberg, P. J., *Die Kapazität der singulären Menge der linearen Gruppen* (*Ibid.*, t. **10**, 1941).

[23] Myrberg, P. J., *Über analytische Funktionen auf transzendenten zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten* (*Acta mathematica*, n° **76**, 1944).

[24] Myrberg, P. J., *Über gewisse Cremonagruppen und ihre automorphen Funktionen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. **53**, 1948).

[25] Myrberg, P. J., *Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen* (*Ibid.*, t. **58**, 1949).

[26] Nevanlinna, R., *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin. 1936.

[27] Nevanlinna, R., *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. **1**, 1941).

[28] Picard, E., *Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, n° **2**, 1883).

[29] Picard, E., *Sur les fonctions hyperabéliennes* (*J. de Math.* [**4**], t. **1**, 1885).

[30] Poincaré, H., *Œuvres complètes*, t. II, Paris 1916.

[31] Schottky, F., *Über eine specielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Arguments ungeändert bleibt* (*J. für Math.*, t. **101**, 1897).

[32] Siegel, C., *Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n : ten Grades* (*Math. Ann.*, t. **116** 1939).

[33] Virtanen, K., *Über Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichem Geschlecht* (*Ann. Acad. Sc. Fenn. A. I. Math.-Phys.*, t. **56**, 1949).