

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NICOLAS PASTIDÈS

Sur les points fixes des transformations cycliques des domaines plans

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 68 (1951), p. 169-184

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__169_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

POINTS FIXES DES TRANSFORMATIONS CYCLIQUES DES DOMAINES PLANS

PAR M. N. PASTIDÈS.

1. *Introduction.* — Soit D un domaine simplement connexe du plan de la variable complexe z , dont la frontière comprend plus d'un point, et soit

$$(1) \quad Z = f(z)$$

une transformation continue et biunivoque du domaine D en lui-même. Nous supposons de plus qu'il existe un nombre entier n tel que la $n^{\text{ième}}$ itérée de la transformation soit la transformation identique. En désignant les itérées successives de la transformation (1) par

$$Z_1 = Z = f(z), \quad Z_2 = f_2(z), \quad \dots, \quad Z_{n-1} = f_{n-1}(z), \quad Z_n = f_n(z),$$

on a donc

$$f_n(z) = z$$

pour tout point z de D . Nous appelons une pareille transformation, une transformation cyclique d'ordre n , et nous nous proposons dans ce travail de faire l'étude de l'ensemble de ses points fixes.

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction analytique de z , les résultats sont immédiats. En effet soit $u = F(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme du domaine D sur l'intérieur du cercle unité de centre l'origine. La transformation

$$U = \psi(u), \quad \text{où} \quad \psi(u) = F[f[F^{-1}(u)]]$$

fait la représentation conforme du cercle unité sur lui-même; de plus elle est cyclique d'ordre n . Donc $[U, u]$ est une substitution linéaire elliptique, et par

conséquent elle a un point fixe, et un seul, à l'intérieur du cercle $|u| < 1$. Il s'ensuit que la transformation

$$Z = f(z)$$

a un point fixe, et un seul, à l'intérieur de D.

Considérons encore le cas où, $F(z)$ ayant la même signification que plus haut, nous avons

$$f(z) = F_{-1}[\overline{F(z)}],$$

$\overline{F(z)}$ étant la conjuguée de $F(z)$. Alors la ligne décrite par

$$z = F_{-1}(u)$$

quand u décrit le segment de l'axe réel compris entre -1 et 1 , est le lieu des points fixes de la transformation $Z = f(z)$. Remarquons que dans ce cas on a $f_2(z) = z$ pour tout $z \in D$.

Ce sont ces propriétés que nous étendons au cas général, où $f(z)$ n'est ni analytique, ni de la forme spéciale considérée plus haut.

Nous distinguons deux cas, suivant que la transformation considérée conserve le sens de parcours ou non. Voici ce que nous entendons par là. Nous disons que la transformation $Z = f(z)$ *conserve le sens de parcours*, si, z parcourant dans le sens positif une courbe γ simple fermée de Jordan, située dans D, Z parcourt la transformée Γ de γ dans le sens positif aussi. Le sens positif pour γ par exemple, c'est celui qui, quand z décrit toute la courbe γ une fois, fait augmenter de 2π l'argument de $z - z_0$, où z_0 est un point intérieur du domaine intérieur à D et de frontière γ . Remarquons que d'après les propriétés classiques des transformations continues et biunivoques des domaines plans, si la propriété expliquée ci-dessus a lieu pour une courbe γ particulière, elle a lieu aussi pour toute autre courbe γ du même genre. Si, z parcourant γ dans le sens positif, Z parcourt Γ dans le sens négatif, alors nous disons que la transformation $Z = f(z)$ change le sens de parcours.

Les résultats auxquels nous sommes arrivé dans ce travail sont les suivants :

1° Si la transformation (1) conserve le sens de parcours, elle a un point fixe dans D et un seul.

2° Si la transformation (1) change le sens de parcours, on a $f_2(z) = z$ quel que soit $z \in D$. Les points fixes de la transformation forment alors un continu linéaire de Jordan.

Pour simplifier le langage nous appellerons *contour de Jordan* toute courbe de Jordan simple et fermée, et *domaine de Jordan* tout domaine borné dont la frontière est un contour de Jordan.

Nous ferons usage des notations suivantes :

$f(\Gamma)$ et $f(\Delta)$ pour désigner les transformés du contour de Jordan Γ et du domaine Δ par la transformation $Z = f(z)$.

2. THÉOREME I. — Soit D_1 et D_2 deux domaines de Jordan ayant des points communs, et soit z_0 un de ces points. Le plus grand domaine connexe contenu dans D_1 et dans D_2 , et contenant z_0 est aussi un domaine de Jordan.

Soit Δ le plus grand domaine connexe contenu dans D_1 et D_2 et contenant z_0 . Δ est simplement connexe car tout contour de Jordan dont tous les points appartiennent à Δ , a tout son intérieur qui appartient à Δ .

Soient C_1 , C_2 et Γ respectivement les frontières de D_1 , D_2 et Δ . On sait que Γ est un continu et nous voulons prouver que c'est un contour de Jordan. Nous procédons par étapes.

A. Soient a et b deux points communs à C_1 et C_2 . Ces points divisent C_1 en

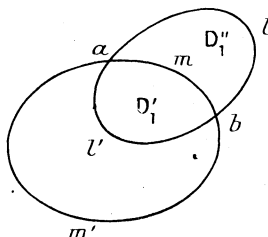


Fig. 1.

deux arcs distincts alb et $al'b$, et C_2 en deux arcs amb et $am'b$. Nous allons prouver que si tous les points de amb font partie de Γ , et que à part a et b aucun autre de ses points n'est sur C_1 , alors l'un au moins des arcs alb et $al'b$ n'a, à part ses extrémités, aucun autre point sur Γ .

En effet d'après l'hypothèse, amb divise D_1 en deux domaines de Jordan D_1' et D_1'' (fig. 1) et Δ est tout entier dans l'un de ces domaines, soit dans D_1' . Nous désignons par $al'b$ l'arc de C_1 qui avec amb constitue la frontière de D_1' et par alb l'autre arc de C_1 . Comme Δ est tout entier dans D_1' et que alb n'a, à part a et b , aucun autre point sur la frontière de D_1' , il s'ensuit que alb n'a, à part a et b , aucun autre point sur Γ .

B. Nous allons prouver maintenant que l'ensemble des points de Γ qui n'appartiennent pas à C_1 , forme un ensemble dénombrable d'arcs ouverts de C_2 , les extrémités de chacun de ces arcs appartenant à C_1 .

Remarquons d'abord que tout point de Γ appartient à l'un au moins des contours C_1 et C_2 .

Soit m un point de Γ qui n'appartient pas à C_1 (fig. 1). Comme C_1 est fermé, m est intérieur à D_1 . En laissant de côté le cas banal où C_2 serait entièrement

contenu dans D_1 , soient a et b respectivement les premiers points de C_1 que l'on rencontre en partant de m et en parcourant C_2 d'abord dans le sens positif, ensuite dans le sens négatif. Montrons que l'arc amb de C_2 fait entièrement partie de Γ .

Soient en effet p et q deux points quelconques de l'arc ouvert amb situés de part et d'autre de m . On peut joindre p et q par un arc de Jordan pm_1q intérieur à D_2 , et assez voisin de l'arc pmq pour que le domaine Δ_1 intérieur au contour pm_1qmp soit complètement intérieur à D_1 . Comme dans ce domaine Δ_1 d'une part il y a des points de Δ étant donné que l'on a $m \in \Gamma$, et d'autre part il n'y a aucun point de Γ étant donné que tout point intérieur de Δ_1 est aussi point intérieur de D_1 et D_2 , il s'ensuit que $\Delta_1 \subset \Delta$. Alors p étant sur la frontière de Δ_1 est point limite de points de Δ_1 donc de Δ . D'autre part, p étant sur la frontière de D_2 est point limite de points extérieurs à D_2 , donc extérieurs à Δ . Ce qui prouve que p appartient à la frontière Γ de Δ . La même démonstration est valable pour q , ainsi que pour tout point de l'arc ouvert amb . Ceci nous prouve l'existence d'un ensemble d'arcs ouverts de C_2 , l'ensemble des points situés sur ses éléments étant identique à l'ensemble des points de Γ qui ne sont pas situés sur C_1 . Nous désignerons par J_2 ou $\{\beta_i\}$ cet ensemble d'arcs.

C. A tout arc β_i de l'ensemble J_2 correspond d'après la partie A un arc α_i de C_1 ayant les mêmes extrémités que β_i , et n'ayant à part ses extrémités aucun autre de ses points sur Γ . Soit J_1 l'ensemble $\{\alpha_i\}$ des arcs α_i . Considérons l'ensemble E des points que l'on obtient en enlevant de C_1 les arcs de l'ensemble J_1 , et en ajoutant les arcs de l'ensemble J_2 . Nous allons montrer dans cette partie, que *l'ensemble E forme un contour de Jordan*.

Soient

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

les coordonnées d'un point courant $m(t)$ de C_1 . Nous pouvons supposer que $m(t)$ décrit C_1 quand t varie de 0 à 1, et que $m(0) = m(1)$ est un point de Γ .

De même soient

$$x = u(\tau), \quad y = v(\tau)$$

les coordonnées d'un point courant $\mu(\tau)$ de C_2 . Nous supposons que $\mu(\tau)$ parcourt C_2 quand τ varie de 0 à 1.

Considérons le point variable $M(t)$ dont les coordonnées

$$x = F(t), \quad y = \Phi(t)$$

sont définies de la façon suivante pour $0 \leq t \leq 1$.

α . Pour toute valeur de t pour laquelle le point $m(t)$ n'appartient pas à un arc de l'ensemble J_1 , on prend $M(t) = m(t)$, soit

$$F(t) = f(t) \quad \text{et} \quad \Phi(t) = \varphi(t).$$

b. Soit t_i une valeur de t pour laquelle le point $l = m(t_i)$ est sur un arc alb de l'ensemble J_1 . A cet arc correspond un arc amb de l'ensemble J_2 d'après la définition même de l'ensemble J_1 . Soient t_a et t_b les valeurs de t pour lesquelles $m(t)$ coïncide respectivement avec a et b . t_i est compris entre t_a et t_b , car $m(o)$ n'est pas sur un arc de l'ensemble J_1 . Soient τ_a et τ_b les valeurs de τ pour lesquelles $\mu(\tau)$ se confond avec a et b respectivement. Ces valeurs existent car a et b sont communs à C_1 et C_2 .

Pour $t = t_i$ on prend

$$F(t) = u[\lambda(t)], \quad \Phi(t) = v[\lambda(t)],$$

avec

$$\lambda(t) = \frac{\tau_b - \tau_a}{t_b - t_a}(t - t_a) + \tau_a.$$

Ces expressions sont valables pour toutes les valeurs de t comprises entre t_a et t_b , et quand t parcourt cet intervalle, $M(t)$ parcourt l'arc ab de J_2 .

Les fonctions

$$x = F(t), \quad y = \Phi(t)$$

sont ainsi définies pour tout t compris entre 0 et 1. L'ensemble des points $M(t)$ ainsi définis est identique à l'ensemble E . Pour prouver que l'ensemble E forme un contour de Jordan, il faut et il suffit de prouver que t_0 étant un nombre quelconque compris entre 0 et 1, quand t tend vers t_0 , $M(t)$ tend vers $M(t_0)$.

Soit $\{t_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) une suite infinie de valeurs de t qui converge vers t_0 . Il s'agit de prouver que la suite $M(t_i)$ des points correspondants de E , converge vers le point $M(t_0)$. Le seul cas qu'il soit nécessaire d'examiner est le cas où une infinité de points de la suite $\{M(t_i)\}$ n'appartient pas aux arcs de l'ensemble J_2 , alors qu'une autre infinité leur appartient. Soit $\{M(t_{\lambda_j})\}$ ($j = 1, 2, \dots$) la suite formée par les premiers, et $\{M(t_{\nu_j})\}$ ($j = 1, 2, \dots$) celle formée par les seconds.

Comme la suite $\{t_{\lambda_j}\}$ converge vers t_0 et que $M(t_{\lambda_j}) = m(t_{\lambda_j})$, il s'ensuit que la suite $\{M(t_{\lambda_j})\}$ converge vers $M(t_0) = m(t_0)$.

Examinons la suite $\{M(t_{\nu_j})\}$. Chaque point $M(t_{\nu_j})$ de cette suite est sur un arc β_{ij} de l'ensemble J_2 . Considérons d'abord le cas où *tous ces arcs sont distincts*. Soient a_j et b_j les extrémités de β_{ij} , et soient t_{a_j} , t_{b_j} , τ_{a_j} , τ_{b_j} les valeurs de t et de τ , telles que

$$m(t_{a_j}) = \mu(\tau_{a_j}) = a_j, \quad m(t_{b_j}) = \mu(\tau_{b_j}) = b_j.$$

On sait que t_{ν_j} est compris entre t_{a_j} et t_{b_j} , et que $|t_{a_j} - t_{b_j}|$ tend vers zéro quand $j \rightarrow \infty$. De même

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\tau_{a_j} - \tau_{b_j}| = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_{a_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} t_{b_j} = t_0,$$

donc

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = M(t_0).$$

Comme $M(t_{v_j})$ est sur l'arc β_{i_j} de C_2 , que ces arcs β_{i_j} ne sont pas empiétants et que leurs extrémités tendent vers $M(t_0)$, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} M(t_{v_j}) = M(t_0).$$

Le cas où le nombre de fois qu'un même arc β_{i_j} se répète dans la suite $\{\beta_{i_j}\}$, ne dépasse pas un nombre fixe, se ramène facilement au précédent.

Supposons maintenant qu'une infinité de points de la suite $\{M(t_{v_j})\}$ soient sur un même arc β de J_2 . Désignons cette infinité par la même notation $\{M(t_{v_j})\}$.

Soient a et b les extrémités de β , et t_a, t_b, τ_a, τ_b les valeurs de t et τ telles que

$$m(t_a) = \mu(\tau_a) = a, \quad m(t_b) = \mu(\tau_b) = b.$$

On sait que t_{v_j} est compris entre t_a et t_b . Alors comme $\lim_{j \rightarrow \infty} t_{v_j} = t_0$ et que $m(t_0)$ n'est point intérieur d'aucun arc de l'ensemble J_1 , il s'ensuit que t_0 est égal soit à t_a , soit à t_b ; supposons que $t_0 = t_a$.

A chaque point de $\{M(t_{v_j})\}$ correspond une valeur de τ donnée par

$$M(t_{v_j}) = \mu(\tau_{v_j}), \quad \text{soit} \quad \tau_{v_j} = \frac{\tau_b - \tau_a}{t_b - t_a} (t_{v_j} - t_a) + \tau_a.$$

Quand t_{v_j} tend vers $t_0 = t_a$ alors τ_{v_j} tend aussi vers τ_a et $M(t_{v_j})$ tend vers

$$\mu(\tau_a) = a = M(t_0).$$

Ce qui précède nous prouve aussi qu'il ne peut pas y avoir plus d'un arc β de J_2 , sur lequel se trouvent une infinité de points de la suite $\{M(t_{v_j})\}$. En effet s'il y avait deux pareils arcs, ils devraient avoir $M(t_0)$ comme extrémité commune, ce qui est en contradiction avec le fait que $M(t_0)$ est limite de points de E qui n'appartiennent pas à des arcs de l'ensemble J_2 .

Nous venons ainsi de prouver que l'ensemble E forme un contour de Jordan.

D. Nous allons finalement prouver que l'ensemble E est identique à Γ .

Tout point de Γ appartient à E . En effet si un point de Γ appartient à C_1 , il appartient à E car pour former E on a enlevé de C_1 des arcs formés de points qui ne font pas partie de Γ , si un point de Γ n'appartient pas à C_1 , alors il appartient à un arc de l'ensemble J_2 , et les points de ces arcs font partie de E .

Si Γ n'était pas identique à E , comme il est fermé, il serait obtenu en enlevant de E un ensemble d'arcs ouverts. Mais alors Γ ne serait pas un continu, ce qui est en contradiction avec le fait que Γ est la frontière d'un domaine simplement connexe.

Le théorème énoncé est ainsi prouvé.

3. Soit D un domaine de Jordan, et

$$Z = f(z)$$

une transformation continue et biunivoque du domaine fermé \bar{D} en lui-même. Nous supposons que cette transformation est cyclique d'ordre n , et qu'elle conserve le sens de parcours. Dans cette partie nous prouvons l'existence de certains domaines invariants pour la transformation, associés à ses points fixes.

3.1. Soit z_0 un point intérieur de D et fixe pour la transformation $Z = f(z)$, et D_0 un domaine quelconque de Jordan contenu dans \bar{D} et contenant z_0 . Considérons les domaines de Jordan D_1, D_2, \dots, D_{n-1} et D_n identique à D_0 , qui sont les transformés du domaine D_0 par les itérées de la transformation $Z = f(z)$. Soit Δ le plus grand domaine connexe renfermant z_0 et contenu dans tous les domaines D_0, D_1, \dots, D_{n-1} . D'après le théorème I, Δ est un domaine de Jordan. Prouvons qu'il est invariant par la transformation $Z = f(z)$.

En effet, $f(\Delta)$ contient z_0 et est contenu dans $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, D_n$ donc $f(\Delta) \subset \Delta$. Mais si $f(\Delta)$ était une partie propre de Δ , on aurait que $f_n(\Delta)$ serait aussi une partie propre de Δ , alors que l'on a $f_n(\Delta) = \Delta$.

Nous venons ainsi de donner un procédé, qui nous servira plus loin, qui nous permet d'associer à tout domaine de Jordan D_0 contenant un point fixe z_0 , un autre domaine de Jordan Δ contenant z_0 et invariant par la transformation $Z = f(z)$.

3.2. Soit \mathcal{O} un domaine simplement connexe, complètement intérieur à D , et invariant par la transformation $Z = f(z)$; soit C sa frontière. Nous allons montrer qu'étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, il existe un domaine de Jordan Δ qui contient \mathcal{O} , qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$, et tel que la distance de tout point de sa frontière à C soit inférieure à ε .

En effet, à cause de l'uniformité de la continuité de $f(z)$ dans \bar{D} , il suffit de partir d'un domaine de Jordan D_0 , contenant \mathcal{O} , et dont la frontière a chacun de ses points suffisamment voisin de C . En appliquant à D_0 le procédé expliqué au n° 3.1 le domaine Δ qui en résulte répond à la question.

3.3. Soit z_0 un point fixe de la transformation, situé sur la frontière de D . Prenons deux points a et b sur la frontière de D , et joignons-les par un arc simple de Jordan asb intérieur à D . D_0 étant le domaine de Jordan limité par le contour az_0bsa , considérons les transformés D_1, D_2, \dots, D_{n-1} de D_0 par les itérées de $f(z)$, et soit Δ le plus grand domaine connexe contenu dans D_0, D_1, \dots, D_{n-1} et ayant z_0 sur sa frontière. Δ est un domaine de Jordan, il est invariant par la transformation $Z = f(z)$, et sa frontière renferme tout un arc $a'z_0b'$ qui fait partie de la frontière de D , les autres points de la frontière de Δ étant intérieurs à D .

Remarquons que l'arc $a'z_0b'$ est invariant par la transformation $Z = f(z)$ et comme cette transformation conserve le sens de parcours sur la frontière de D , il s'ensuit que les points a' et b' sont des points fixes de la transformation. On en déduit que tout point z_0 , qui est situé sur la frontière de D , et qui est point fixe de la transformation, est limite de points fixes de la transformation situés sur la frontière de D aussi bien d'un côté de z_0 que de l'autre.

Cette remarque nous conduit au théorème suivant :

4. THÉORÈME II. — *Soit D un domaine de Jordan, et $Z = f(z)$ une transformation continue cyclique, qui conserve le sens de parcours, et qui transforme biunivoquement D en lui-même. Si la transformation a un point fixe sur la frontière de D , alors tout point de cette frontière est aussi point fixe de la transformation.*

En effet désignons par Φ' l'ensemble des points fixes situés sur la frontière L de D . L'ensemble Φ' est fermé et par conséquent s'il ne comprenait pas tous les points de L , il existerait un arc de L dont aucun point, à part ses extrémités, ne ferait partie de Φ' . Ceci est en contradiction avec la remarque qui précède ce théorème.

5. Soit $Z = f(z)$ la même transformation qu'au n° 3; z_0 et z_1 deux points fixes de cette transformation, et D_0 et D_1 deux domaines de Jordan invariants par la transformation $Z = f(z)$, dont D_0 contient z_0 , et D_1 contient z_1 sans contenir z_0 . Nous supposons en plus que les frontières C_0 et C_1 de ces domaines ont au moins un point commun. *Nous allons prouver que dans ces conditions tous les points de C_0 et de C_1 sont des points fixes.*

Il suffit de prouver, d'après le théorème II, qu'un des points communs à C_0 et C_1 est un point fixe.

Soit Δ le plus grand domaine connexe qui contient z_0 , qui est contenu dans D_0 , et qui est extérieur à D_1 . Ce domaine existe, et il est simplement connexe car tout domaine de Jordan dont le contour appartient à Δ a tout son intérieur qui appartient aussi à Δ ; de plus sa frontière Γ est un contour de Jordan d'après le théorème I.

La courbe Γ a nécessairement des points qui ne sont pas sur C_1 , et ces points forment un ensemble dénombrable d'arcs ouverts, les extrémités de chacun de ces arcs étant sur C_1 . Nous désignons cet ensemble par E .

Soit abc un des arcs de l'ensemble E (fig. 2). Les points a et c divisent C_1 en deux arcs. Soit $ab'c$ l'un de ces arcs, choisi arbitrairement. Nous appelons le domaine de Jordan intérieur au contour $ab'cba$, domaine associé à l'arc abc . Les domaines associés aux éléments de E forment un ensemble dénombrable de domaines que nous désignons par $\{U_i\}$. Nous allons montrer qu'au moins un de ces domaines renferme z_0 . Soit en effet $def'e'd$ (fig. 2) un domaine de l'ensemble $\{U_i\}$ ne renfermant pas z_0 . Ce domaine est alors extérieur à Δ , et si

nous considérons le domaine formé de Δ augmenté d'une part des points de l'arc ouvert def et d'autre part du domaine $def'e'd$, la frontière de ce nouveau domaine s'obtient de la frontière de Δ à laquelle on supprime l'arc fed et l'on ajoute l'arc $de'f$. Si donc, aucun des domaines de l'ensemble $\{U_i\}$ ne renfermait z_0 , on aurait pu procéder pour chacun de ces domaines comme on vient de faire pour $def'e'd$. Le domaine finalement obtenu renfermerait Δ , donc z_0 , et tous ses points frontières seraient des points de C_1 , ce qui est impossible.

Soit $U_1 = abcb'a$ un domaine de l'ensemble $\{U_i\}$, qui renferme z_0 . Le transformé $f(U_1)$ de U_1 par $f(z)$, renferme z_0 et sa frontière est formée de l'arc $f(abc)$ de C_0 et de l'arc $f(ab'c)$ de C_1 . Comme $f(abc)$ ne peut pas traverser abc , il s'ensuit que l'on a

$$\text{ou bien } f(U_1) \subset U_1 \quad \text{ou bien } f(U_1) \supset U_1,$$

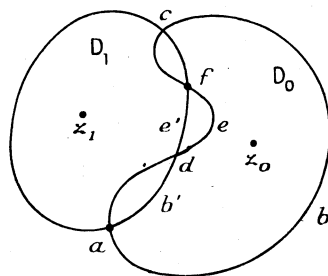


Fig. 2.

mais à moins d'avoir $f(U_1) = U_1$, ces relations sont incompatibles avec la condition $f_n(z) = z$.

On a donc

$$f(U_1) = U_1$$

et dans ces conditions, on a aussi

$$f(abc) = abc, \quad f(ab'c) = ab'c,$$

ce qui entraîne que a et b sont des points fixes de la transformation $Z = f(z)$.

6. THÉOREME III. — Si l'ensemble Φ des points fixes de la transformation $Z = f(z)$, définie comme pour le théorème II, renferme un continu C ⁽¹⁾, alors cette transformation devient la transformation identique.

Considérons l'ensemble Φ , de points défini de la façon suivante : on considère un élément déterminé z_0 de C ; un point z de D est un élément de Φ , si, et seulement si, z est un élément de Φ et Φ est bien enchaîné entre z_0 et z . On a

(1) Nous appelons continu un ensemble parfait, formé de plus d'un point, et bien enchaîné entre deux quelconques de ses points.

$C \subset \Phi_1 \subset \Phi$, et il est facile de montrer que Φ_1 est fermé. Nous allons prouver que Φ_1 est identique à \bar{D} .

Supposons le contraire et soit α un point de D qui ne soit pas élément de Φ_1 . Comme Φ_1 est fermé, il renferme un point z_1 dont la distance r à α est en même temps la distance de α à Φ_1 . Dans le cercle de centre α et de rayon r il n'y a alors aucun point de Φ_1 . Soit z_2 un autre point de Φ_1 . Nous distinguons deux cas :

Premier cas. — Le point z_1 n'est pas sur la frontière de D . Alors d'après le n° 3.1, on peut trouver un domaine de Jordan Δ contenant z_1 sans contenir z_2 ni α et qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$. Si nous montrons que sur la frontière Γ du domaine Δ se trouve un point de Φ_1 , nous saurons, d'après le théorème II, que tout Γ appartient à Φ ; et comme un point de Γ appartient à Φ_1 , tout Γ doit appartenir à Φ_1 , ce qui est en contradiction avec le fait qu'un arc de Γ est à l'intérieur du cercle de centre α passant par z_1 .

Prouvons que sur Γ se trouve un point de Φ_1 . L'ensemble Φ est bien enchaîné entre z_1 et z_2 . Donc étant donné un nombre positif ε_m on peut trouver une ligne polygonale dont les sommets sont des points de Φ , qui joint z_1 à z_2 , et dont les côtés sont inférieurs à ε_m . En parcourant cette ligne de z_1 à z_2 , nous désignons par α_m le dernier de ses sommets qui soit dans Δ . Considérons alors une suite de nombres positifs $\{\varepsilon_m\}$ qui converge vers zéro. A cette suite correspond comme il vient d'être dit, une suite de points $\{\alpha_m\}$, ces points appartenant à Φ et la distance de α_m à Γ tendant vers zéro quand $m \rightarrow \infty$. La suite $\{\alpha_m\}$ a donc au moins un point limite α' sur Γ , et ce point est un point de Φ_1 . En effet, c'est un point de Φ car Φ est fermé; ensuite Φ est bien enchaîné d'une part entre z_1 et α' , d'autre part entre z_0 et z_1 puisque $z_1 \in \Phi_1$, donc Φ est bien enchaîné entre z_0 et α' . Donc $\alpha' \in \Phi_1$. C'est ce que nous voulions démontrer.

Deuxième cas : Le point z_1 est sur la frontière de D . — La frontière de D fait alors entièrement partie de Φ_1 , par conséquent le cercle de centre α et de rayon r est intérieur à D . On procède comme dans le premier cas, en se servant du n° 3.3 au lieu du n° 3.1. Le point z_1 se trouve alors sur la frontière Γ du domaine Δ , ce qui signifie la démonstration.

7. THÉORÈME IV. — Soit le cercle C , $|z| < 1$, une transformation cyclique d'ordre n , $Z = f(z)$, qui transforme biunivoquement le cercle en lui-même et ε un nombre positif arbitrairement petit. Il existe un domaine fermé de Jordan $\bar{\Delta}$ ⁽¹⁾ ayant les propriétés suivantes :

1° $\bar{\Delta}$ est complètement intérieur à C .

(1) Nous désignons par $\bar{\Delta}$ le domaine Δ augmenté de sa frontière.

2° La distance de tout point de la frontière de $\bar{\Delta}$ à la frontière de C est inférieure à ε .

3° $Z = f(z)$ transforme biunivoquement $\bar{\Delta}$ en lui-même.

Soit p un point intérieur à C et $p' = f(p)$ son transformé. Considérons le cercle A , $|z| \leq 1 - \varepsilon'$, avec $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et ε' assez petit pour que p et p' soient intérieurs à A . Soient $A_{-1}, A_{-2}, \dots, A_{-n+1}$ et $A_{-n} = A$ les transformés de A par les itérées de la fonction $z = f^{-1}(Z)$, inverse de $Z = f(z)$. Ces domaines sont des domaines de Jordan complètement intérieurs à C . On peut donc trouver un cercle B , $|z| \leq 1 - \varepsilon''$, qui comprenne tous ces domaines en son intérieur. Alors les domaines B_1, B_2, \dots, B_{n-1} et $B_n = B$, transformés de B par $Z = f(z)$, renferment tous le cercle A . Si Δ est le plus grand domaine connexe contenu dans B , B_1, \dots, B_{n-1} et contenant A , comme Δ contient p et $f(p)$, on a $f(\bar{\Delta}) = \bar{\Delta}$ et ce domaine $\bar{\Delta}$ répond à l'énoncé.

8. THÉORÈME V. — Si D est un domaine simplement connexe dont la frontière comprend plus d'un point, et $Z = f(z)$ une transformation cyclique d'ordre $n \neq 1$ qui transforme biunivoquement D en lui-même, et qui conserve le sens de parcours, alors cette transformation a un point fixe intérieur à D et un seul.

A. Montrons que le cas général se ramène au cas particulier où D est le cercle $|z| < 1$.

En effet, soit $u = F(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme de D sur le cercle $|u| < 1$.

Considérons la transformation

$$(1) \quad U = \psi(u), \quad \text{où} \quad \psi(u) = F[f[F_{-1}(u)]],$$

$z = F_{-1}(u)$ étant la fonction inverse de $u = F(z)$.

La transformation (1) est définie et continue dans le cercle $|u| < 1$ et le transforme biunivoquement en lui-même. De plus, elle est cyclique d'ordre n , car d'une part on a

$$\psi_n(u) = F[f_n[F_{-1}(u)]] = F[F_{-1}(u)] = u,$$

et d'autre part pour $q < n$ on ne peut pas avoir $\psi_q(u) = u$, quel que soit u avec $|u| < 1$, car ceci entraînerait $f_q(u) = u$.

Aussi, si z_0 est un point fixe de la transformation $Z = f(z)$, $u_0 = F(z_0)$ est un point fixe de la transformation $U = \psi(u)$; réciproquement si u_0 est un point fixe de la transformation $U = \psi(u)$, $z_0 = F_{-1}(u_0)$ est un point fixe de la transformation $Z = f(z)$. Ce que nous nous sommes proposé de prouver dans cette partie se trouve ainsi prouvé.

B. Prouvons le théorème énoncé en supposant que D est le cercle $|z| < 1$.

D'après le théorème IV, il existe un domaine fermé $\bar{\Delta}$, complètement intérieur à D , qui est transformé biunivoquement en lui-même par $Z = f(z)$. Donc d'après le théorème de Brouwer cette transformation a au moins un point fixe dans $\bar{\Delta}$, donc dans D .

Il reste à prouver que ce point fixe est unique. Nous procédons par l'absurde en prouvant que si la transformation $Z = f(z)$ a deux points fixes dans D , elle devient la transformation identique.

Nous supposons donc que la transformation $Z = f(z)$ a deux points fixes z_0 et z_1 dans le cercle $|z| < 1$, et sans diminuer la généralité de la démonstration nous pouvons supposer que $z_0 = 0$.

Désignons par $\{S_r\}$ la famille de tous les cercles de centre l'origine et de rayon plus petit que 1, et par S_r celui de ces cercles qui a pour rayon r . A chaque cercle S_r faisons correspondre par le procédé du n° 3.1, un domaine de Jordan Δ_r de frontière Γ_r , qui soit invariant par la transformation $Z = f(z)$. Nous obtenons ainsi une famille de domaines $\{\Delta_r\}$ en correspondance biunivoque avec les nombres r de l'intervalle $\{0, 1\}$. Les domaines de cette famille ont les propriétés suivantes :

a. $r_1 < r_2$ entraîne $\Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2}$.

b. Soit ρ une valeur fixe de r . Si r tend vers $\rho - 0$, Δ_r tend vers Δ_ρ ; si r tend vers $\rho + 0$, Δ_r tend vers un ensemble de points qui contient le domaine Δ_ρ .

Considérons aussi un domaine de Jordan Δ_{z_1} , qui contient z_1 sans contenir l'origine et qui est invariant par la transformation $Z = f(z)$. Ce domaine existe d'après le n° 3.1. Désignons par Γ_{z_1} sa frontière.

Nous distinguons deux cas :

Premier cas : Un des contours Γ_r rencontre le contour Γ_{z_1} . — Alors en appliquant ce qui a été établi au n° 5, ainsi que les théorèmes II et III, on conclut que la transformation $Z = f(z)$ doit se réduire à la transformation identique.

Deuxième cas : Aucun des contours Γ_r ne rencontre le contour Γ_{z_1} . — Dans ce cas les domaines de la famille $\{\Delta_r\}$ se divisent en deux classes :

1° La classe A formée des domaines Δ_r qui ne contiennent pas Δ_{z_1} .

2° La classe B formée des domaines Δ_r qui contiennent Δ_{z_1} .

Aucune des deux classes n'est vide, l'existence d'éléments de la classe B étant une conséquence du théorème IV. Remarquons aussi que tout élément de la classe B contient tous les éléments de la classe A. Il s'ensuit qu'il existe un nombre ρ tel que

$$r < \rho \quad \text{entraîne} \quad \Delta_r \in A \quad \text{et} \quad r > \rho \quad \text{entraîne} \quad \Delta_r \in B,$$

Comme le domaine Δ_ρ est la limite de toute suite de domaines Δ_{r_n} où $\{r_n\}$ est une suite qui tend vers $\rho - 0$, on conclut que $\Delta_\rho \in A$.

Considérons la limite de Δ_r quand $r \rightarrow \rho + 0$. Cette limite existe car $r_1 < r_2$ entraîne $\Delta_{r_1} \subset \Delta_{r_2}$, et elle est un ensemble de points qui contient d'une part le domaine Δ_ρ et d'autre part le domaine Δ_{ε_1} . Soit \mathcal{O} le plus grand domaine connexe contenu dans $\lim_{r \rightarrow \rho + 0} \Delta_r$ et contenant Δ_{ε_1} ; \mathcal{O} est simplement connexe car tout contour de Jordan dont tous les points appartiennent à \mathcal{O} a tout son intérieur qui appartient aussi à \mathcal{O} . Remarquons aussi que si α est un point quelconque de sa frontière de \mathcal{O} , la distance de α à Γ_r tend vers zéro quand r tend vers $\rho + 0$. De plus \mathcal{O} est invariant par la transformation $Z = f(z)$ car chacun des domaines Δ_r ainsi que le domaine Δ_{ε_1} le sont.

D'après le n° 3.2 il existe un domaine de Jordan Δ invariant par la transformation $Z = f(z)$, contenant le domaine \mathcal{O} , et tel que la distance de tout point de sa frontière à la frontière de \mathcal{O} soit inférieure à un nombre positif donné ε arbitrairement petit. On choisit ε de façon que l'origine soit extérieure à Δ . Dans ces conditions pour r supérieur et assez voisin de ρ , la frontière Γ_r de Δ_r aura des points communs avec la frontière Γ de Δ . Par conséquent, en appliquant d'abord le n° 5 et ensuite les théorèmes II et III, on conclut que la transformation $Z = f(z)$ doit se réduire à la transformation identique.

Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré dans tous les cas.

9. Nous nous sommes occupé dans le théorème V de transformations cycliques qui conservent le sens de parcours. Nous allons maintenant considérer des transformations cycliques qui changent le sens de parcours, cette phrase ayant la signification que nous lui avons attribuée dans l'Introduction ⁽¹⁾.

THÉOREME VI. — *Si D est un domaine simplement connexe dont la frontière comprend plus d'un point, et $Z = f(z)$ une transformation cyclique d'ordre n qui transforme le domaine D en lui-même, et qui change le sens de parcours, alors n est nécessairement égal à 2.*

On peut comme pour le théorème V supposer que D est le cercle $|z| < 1$.

D'après le théorème IV, il existe un domaine fermé de Jordan $\bar{\Delta}$ intérieur à D et qui est transformé biunivoquement en lui-même par $Z = f(z)$. Quand z parcourt la frontière de Δ dans un sens, Z parcourt la même frontière dans le sens opposé, ce qui nous prouve l'existence de deux points fixes z_1 et z_2 sur cette frontière. Or ces points sont aussi points fixes pour la transformation $Z_2 = \varphi(z)$, avec $\varphi(z) = f_2(z)$. Mais cette dernière transformation est cyclique,

⁽¹⁾ Remarquons que les procédés expliqués aux n°s 3.1, 3.2 et au début du n° 3.3 s'appliquent aussi dans le cas où $Z = f(z)$, change le sens de parcours.

conserve le sens de parcours, et transforme biunivoquement D en lui-même; de plus elle a deux points fixes z_1 et z_2 dans D . Elle se réduit donc d'après le théorème V à la transformation identique, ce qui nous prouve le théorème énoncé.

THÉORÈME VII. — *Dans les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, l'ensemble des points fixes de la transformation forme une ligne de Jordan.*

Le théorème sera vrai dans le cas général pourvu qu'il le soit dans le cas où D est un domaine de Jordan et $f(z)$ définie et a les propriétés de l'énoncé dans le domaine fermé \bar{D} . En effet nous pouvons d'abord supposer que D est le cercle ouvert $|z| < 1$. Ensuite d'après le théorème IV il existe une suite de domaines fermés de Jordan $\{\bar{\Delta}_j\}$, tels que

$$\bar{\Delta}_j \subset \bar{\Delta}_{j+1}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_j = D.$$

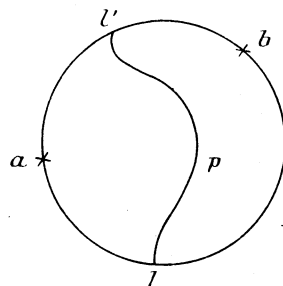


Fig. 3.

Le théorème énoncé sera évidemment vrai pourvu qu'il le soit pour chacun des domaines $\bar{\Delta}_j$. Il suffit donc de le démontrer pour un pareil domaine que nous représentons encore par \bar{D} .

La transformation $Z = f(z)$ a sur le contour de \bar{D} deux points fixes et deux seulement ⁽¹⁾, z_0 et z_1 , qui divisent ce contour en deux arcs alb et $al'b$; ces arcs se permutent par la transformation (fig. 3).

A. Sur tout arc de Jordan $lp'l'$, qui joint un point l de alb à un point l' de $al'b$, se trouve au moins un point fixe. En effet soit Δ^1 le domaine intérieur au contour $alp'l'a$ et Δ le domaine, invariant par la transformation $Z = f(z)$, qui lui correspond par le procédé du n° 3.3. Sur la frontière de Δ , qui est un contour de Jordan, se trouvent deux points fixes ⁽¹⁾ dont l'un est le point a et l'autre est un point qui, étant fixe, se trouve nécessairement sur l'arc $lp'l'$ aussi.

⁽¹⁾ Parce que la transformation change le sens de parcours.

B. Considérons l'ensemble E formé des points de D qui jouissent des propriétés suivantes :

- 1° Aucun point de E n'est fixe pour la transformation $Z = f(z)$.
- 2° Tout point de E peut être joint à un point au moins de l'arc ouvert alb par un arc de Jordan intérieur à D et sur lequel ne se trouve aucun point fixe.

Considérons aussi l'ensemble E_1 de points de D défini d'une façon analogue à l'ensemble E , mais relativement à l'arc $al'b$.

D'après la partie A aucun point ne peut faire partie en même temps de E et de E_1 .

D'après leur définition les deux ensembles E et E_1 sont connexes; nous allons montrer qu'ils sont simplement connexes. En effet soit C un contour de Jordan dont tous les points font partie de E ; montrons que tout l'intérieur de C fait partie de E . D'abord si à l'intérieur de C il y avait un point fixe z_0 , le plus grand domaine connexe contenant z_0 et contenu dans les domaines intérieurs à C et à $f(C)$, serait invariant par la transformation $Z = f(z)$, et sa frontière serait une courbe de Jordan sur laquelle se trouveraient deux points fixes. Ces points fixes appartiendraient alors à C , donc aussi à E , ce qui est contraire à la définition de cet ensemble. Comme l'intérieur de C ne comprend aucun point fixe, il s'ensuit qu'il appartient à l'ensemble E . Donc E est simplement connexe et la même démonstration s'applique aussi à l'ensemble E_1 .

Soit F la frontière de E . Cette frontière est formée de l'arc alb et d'un continu linéaire L comprenant a et b , et dont tous les autres points sont intérieurs au cercle D . D'après la définition de E il s'ensuit que L est formé de points fixes. Alors comme on a évidemment

$$f(E) = E_1, \quad f(alb) = f(al'b)$$

on conclut que la frontière de E_1 est formée de l'arc $al'b$ plus le continu L . Le continu L forme donc l'ensemble des points fixes de la transformation $Z = f(z)$. Il nous reste à prouver que ce continu est une ligne de Jordan. Il suffit, d'après un théorème de Schoenflies ⁽¹⁾ de prouver que tout point de L est accessible de l'intérieur de E et de l'intérieur de E_1 .

Soit α un point de L . Considérons une suite $\{C_n\}$ de cercles de centre α et dont les rayons forment une suite décroissante qui tend vers zéro. A chaque cercle C_n de cette suite, nous faisons correspondre par le procédé du n° 3. 1, un domaine de Jordan Δ_n de frontière Γ_n , qui reste invariant par la transformation $Z = f(z)$. Sur Γ_n se trouvent alors deux points fixes a_n et b_n ; ces points appartiennent à L , et divisent Γ_n en deux arcs, l'arc $a_n l_n b_n$ situé dans E et l'arc $a_n l'_n b_n$ situé dans E_1 . Les points l_n et l'_n étant choisis arbitrairement sur ces arcs, on

(1) SHOENFLIES, *Die Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, § 11 et 12, Chap. V.

peut joindre l_n à l_{n+1} par un arc de Jordan $l_n l_{n+1}$, situé dans la partie de E qui est intérieure à Δ_n et extérieure à Δ_{n+1} . On obtient ainsi une suite d'arcs de Jordan

$$l_1 l_2, \quad l_2 l_3, \quad \dots, \quad l_n l_{n+1}, \quad \dots$$

qui forment une ligne de Jordan intérieure à E , et ayant α comme seul point limite situé sur la frontière de E . Donc α est accessible de l'intérieur de E , et en opérant d'une manière analogue avec les points l_n , on obtient que α est aussi accessible de l'intérieur de E_1 .

