

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÉONCE FOURÈS

## **Sur la théorie des surfaces de Riemann**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 68 (1951), p. 1-64

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1951\\_3\\_68\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

---

SUR LA THÉORIE DES SURFACES  
DE RIEMANN

PAR M. LÉONCE FOUËRES.

---

INTRODUCTION.

De nombreux travaux ont été consacrés aux surfaces de Riemann depuis H. Poincaré et P. Kœbe qui en 1907 énonçaient le théorème fondamental de l'uniformisation déjà énoncé par Riemann pour les surfaces algébriques. Poincaré et Kœbe utilisaient les fonctions de Green définies sur des surfaces de Riemann obtenues par prolongement analytique de Weierstrass. H. Weyl (1913) et T. Rado (1925) donnent des définitions axiomatiques des surfaces de Riemann, construites sur des espaces topologiques. R. Courant (1922) donne une démonstration du théorème de l'uniformisation utilisant encore les fonctions harmoniques : cette démonstration sera précisée dans l'édition de 1929 de sa *Funktionentheorie* et par G. Valiron dans son cours à la faculté des Sciences de Paris en 1949-1950 <sup>(1)</sup>. En 1927, Kœbe (*Acta Mathematica*, t. 50) avait donné la première démonstration de ce théorème sans utiliser les fonctions harmoniques, et Bieberbach publiait dans sa *Funktionentheorie*, une démonstration originale ne faisant intervenir que la définition du prolongement analytique de Weierstrass. Les deux premiers Chapitres du présent travail sont consacrés à une extension des travaux de Bieberbach : au Chapitre I, j'étudie une suite de fonctions univalentes définies dans des domaines de plus en plus grands : l'utilisation du *Verzerrungssatz* de

---

(1) A paraître dans *Cours d'Analyse*, t. III.

Bieberbach, et des familles normales de P. Montel, permet d'obtenir des résultats précis sur la fonction limite et son comportement à la frontière. La suite du chapitre est consacrée au raccordement de domaines plans, dont certains cas ont été étudiés par Bieberbach; d'autres types de raccordement sont ici étudiés, et trouveront une application au chapitre suivant et dans des travaux ultérieurs; une large part est consacrée à l'étude des frontières.

Au Chapitre II je rappelle la définition de Rado, des surfaces de Riemann, en utilisant les axiomes de topologie sous la forme que leur a donnée Bourbaki (dont je conserve aussi les notations) : j'en déduis la représentation paramétrique des surfaces de Riemann, et l'étude de l'intersection de deux éléments de définition souligne l'importance de la régularité de l'espace topologique sur lequel est définie la surface de Riemann. L'étude du raccordement des surfaces de Riemann, conduit alors aux théorèmes de l'uniformisation, étendus aux surfaces définies par H. Weyl. Le premier de ces théorèmes concerne les surfaces simplement connexes, le second les surfaces ouvertes quelconques.

Le deuxième théorème de l'uniformisation conduit à la considération des surfaces de recouvrement de la surface initiale. De la définition des recouvrements d'espaces topologiques, donnée par C. Chevalley, je déduis une définition axiomatique des recouvrements abstraits de surfaces de Riemann, et de la surface de recouvrement relativement non ramifiée. Tout ce qui suit ne concerne plus alors que des surfaces de Riemann définies par prolongement analytique de Weierstrass. L'arbre topologique défini par Speiser, et utilisé par Nevanlinna, Ulrich, Elfving, etc. permet-il de déterminer si la surface qu'il représente est, ou non, la surface de recouvrement d'une surface de Riemann? Ayant défini dans ce but les arbres topologiques régulièrement ramifiés, je caractérise parmi eux une classe d'arbres qui satisfont à la question posée. On peut pour chacun de ces arbres, déterminer une surface fermée dont la surface de recouvrement admet précisément pour arbre topologique l'arbre donné. Ces considérations font l'objet du Chapitre III.

Le Chapitre IV est consacré à la décomposition en feuillets des surfaces de Riemann simplement connexes, ou, ce qui revient au même, à la construction des domaines d'univalence pour la fonction inverse de l'uniformisante. Ce problème a été abordé en 1931 par F. Marty, dans le cas général, et par T. Schimizu dans le cas des surfaces de Riemann de type parabolique. G. Valiron (1940) a mis en évidence certaines singularités possibles pour les domaines d'univalence et leur disposition. J'indique une première méthode de résolution qui consiste à enfermer les singularités transcendentes dans des domaines de diamètres décroissants, quand cela est possible. On obtient ainsi une classification des points transcendents isolés, d'après l'allure des domaines d'univalence. Dans le cas des surfaces de Riemann de type parabolique la méthode des étoiles d'holomorphie permet de résoudre le problème : les

domaines d'univalence correspondants, pour la fonction inverse de l'uniformisante, ont tous leurs points frontières accessibles, mais leur répartition peut présenter le cas de division impropre.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma gratitude pour MM. Montel, Valiron et Cartan dont les cours à la faculté des Sciences et à l'École Normale Supérieure, ont décidé de l'orientation de mes recherches, et je suis heureux qu'ils aient bien voulu accepter de constituer le jury de ma thèse. Je remercie tout particulièrement M. G. Valiron pour l'intérêt bienveillant qu'il n'a cessé d'apporter à mon travail. Ses encouragements et ses conseils m'ont été extrêmement précieux.

## CHAPITRE I.

### THÉORIE DU RACCORDEMENT.

#### A. — Sur les suites de fonctions univalentes.

Soit une suite de fonctions  $z_{n+1} = f_n(z_n)$  vérifiant les conditions suivantes :

- a.  $f_n(z_n)$  est holomorphe univalente dans  $C_n$  ( $|z_n| \leq r_n$ ) avec  $f_n(0) = 0$ ,  $f'_n(0) = 1$ ;
- b. l'image de  $C_n$  par  $f_n$  est un domaine  $\Gamma_n \subset C_{n+1}$ .

1.  $r_{n+1} \geq \max |f_n(z_n)| \geq r_n$ . Soit  $R$  la limite finie ou infinie de la suite  $r_n$ .

2.  $f_{n+h}(z_{n+h})$  est une fonction  $\varphi_{n,h+1}(z_n)$  holomorphe univalente dans  $C_n$  et normalisée au centre. Les  $\varphi_{n,h}$  ( $n$  fixe,  $h > 0$ ) formant une famille bornée normale dans l'intérieur de  $C_n$ , soit  $\varphi_{n,h_i}$  une suite convergeant uniformément dans l'intérieur de  $C_n$  vers  $\Phi_n(z_n)$  holomorphe, univalente dans  $C_n$ , normalisée au centre.

Soit  $m > n$ , et  $\delta_n$  un ensemble fermé intérieur à  $C_n$ , d'image  $\delta_m$  dans  $C_m$ . La famille  $\varphi_{m,k_i}(z_m)$ , ( $m + k_i = n + h_i$ ,  $k_i > 0$ ) bornée dans l'intérieur de  $C_m$ , converge dans  $\delta_m$  donc uniformément dans l'intérieur de  $C_m$  vers  $\Phi_m(z_m)$ , holomorphe, univalente et normalisée au centre de  $C_m$ .  $\Phi_m \circ \varphi_{n,m-n} = \Phi_n$  dans  $C_n$  pour tout  $m > n$ .

3. Soit  $C$  le cercle  $|z| < R$ .

$\alpha$ . Si  $\zeta_n \in C_n$ ,  $\Phi_n(\zeta_n) \in C$  sinon il existerait  $h_i$  tel que  $|\varphi_{n,h_i}(\zeta_n)| > R \geq r_{n+h_i}$ , ce qui est contraire à la condition b.

$\beta$ . Tout cercle  $|z| \leq \rho < R$  est couvert par l'image par  $z = \Phi_n(z_n)$  d'un cercle  $C_n$  pour  $n$  assez grand.

Choisissons  $\rho_1$  et  $r_n$  vérifiant  $\rho < \rho_1 < r_n < R$ . Désignons par  $\varphi_{n,p}$  la suite  $\varphi_{n,h_i}$ ;

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } R \text{ est fini, } \left| \frac{\varphi_{n,p}}{z_n} \right| \leq \frac{R}{r_n}. \text{ Soit } A > 1. \text{ On peut choisir } n \text{ assez grand pour que } \frac{R}{r_n} < A. \\ \text{Si } R \text{ est infini, } \left| \frac{\varphi_{n,p}}{z_n} \right| \leq \frac{r_n^2}{(r_n - |z_n|)^2} < \frac{r_n^2}{(r_n - r')^2}. \text{ En se limitant au disque } |z_n| < r' < r_n \\ \text{avec } r' > \rho_1; \text{ une fois } r' \text{ fixé on peut choisir } n \text{ pour que } \frac{r_n^2}{(r_n - r')^2} < A. \end{array} \right.$$

Par un calcul fait par Bieberbach <sup>(1)</sup> on trouve :

$$|\varphi_{n,p} - z_n| < \sqrt{A^2 - 1} \cdot \rho_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{\rho_1}{r}\right)^2}} = H$$

valable pour  $|z_n| \leq \rho_1 < r$ , avec  $r < r_n$  si  $R$  est fini,  $r < r'$  si  $R$  est infini.

Soit  $\varepsilon$  donné : choisissons alors  $\rho_1 > \rho + \varepsilon$ , puis  $r > \rho_1$  (et  $r' > r$  si  $R$  est infini). Ayant calculé  $A$  pour que  $H < \varepsilon$ , on peut déterminer  $n$  pour que  $r_n > r$  ( $r_n > r'$  si  $R$  est infini), et que les conditions (B) soient satisfaites.

Dans ces conditions  $|\Phi_n - z_n| \leq \varepsilon$ , et l'image par  $\Phi_n$  du cercle  $|z_n| \leq \rho_1$  est limitée par une courbe située dans la couronne  $(\rho_1 - \varepsilon, \rho_1 + \varepsilon)$ . L'image du cercle  $C_n$ , *a fortiori*, couvre le cercle  $|z| \leq \rho$ .

4. Supposons que les  $\varphi_{n,h}(z_n)$  ne convergent pas. On peut définir une fonction  $\Psi_n(z_n)$  possédant les mêmes propriétés que  $\Phi_n$ . Soit  $\zeta \in C$ , et  $\zeta_p \in C_p$  tel que  $\Phi_p(\zeta_p) = \zeta$  avec représentation conforme biunivoque des voisinages;  $\zeta_p$  est unique dans  $C_p$ . Soit  $\zeta' = \Psi_p(\zeta_p)$ ,  $\zeta_p$  est le seul point de  $C_p$  dont l'image par  $\Psi_p$  est  $\zeta'$ .  $\zeta'$  est indépendant de  $p$  :

$$\Phi_p(\zeta_p) = \Phi_q \circ \varphi_{p,q-p}(\zeta_p) = \zeta \quad \text{quel que soit } q > p$$

$\zeta_q = \varphi_{p,q-p}(\zeta_p)$  est le seul point de  $C_q$  dont l'image par  $\Phi_q$  est  $\zeta$

$$\Psi_q(\zeta_q) = \Psi_q \circ \varphi_{p,q-p}(\zeta_p) = \Psi_p(\zeta_p) = \zeta'.$$

On peut donc réaliser une correspondance  $\zeta \leftrightarrow \zeta'$  de  $C$  sur lui-même, avec représentation conforme biunivoque des voisinages, dans laquelle le centre de  $C$  est son propre homologue, la dérivée  $\gamma$  étant 1. C'est l'identité.

5. Si un arc de la circonférence  $C_n$  est représenté par tout  $\varphi_{n,h}$  suivant un arc de la circonférence  $C_{n+h}$ , la fonction  $\Phi_n$  représente l'intérieur de cet arc analytiquement sur un arc de la circonférence de  $C$  qui est de rayon fini.

Soit  $\gamma$  cet arc de la circonférence  $C_n$  et  $T$  un morceau simplement connexe de  $C_n$  et contigu à  $\gamma$ . Les fonctions  $\varphi_{n,h}(z_n)$  analytiques dans  $T$  et sur sa frontière (sauf peut-être aux extrémités de  $\gamma$ ), représentent  $T$  sur  $T_h \subset C_{n+h}$ , et sont aussi holomorphes univalentes dans  $\Theta = \mathring{T} \cup \mathring{T}' \cup \gamma$  (où  $\mathring{A}$  est l'intérieur de  $A$ , et  $T'$

<sup>(1)</sup> *Funktionentheorie*, 1931, p. 181 (édition Chelsea).

l'image de  $T$  par rapport à la circonférence  $C_n$ ). De la limitation de  $|\varphi_{n,h}|$  et  $|\varphi'_{n,h}|$  dans l'intérieur de  $T$  on déduit l'existence d'une borne pour  $|\varphi_{n,h}|$  dans l'intérieur de  $\Theta$  : il suffit pour cela d'introduire un nombre fini de cercles intérieurs à  $C \cup \Theta$ , recouvrant un domaine arbitraire intérieur à  $\Theta$ ; dans chacun d'eux les  $|\varphi_{n,h}|$  sont bornés, ce qu'on peut voir en opérant de proche en proche à partir de ceux de ces cercles qui ont leur centre dans  $\hat{C}_n$ . La suite  $\varphi_{n+h}$  converge donc uniformément dans tout domaine intérieur à  $\Theta$ , domaine que l'on peut supposer contenir n'importe quel arc  $\gamma' \subset \hat{\gamma}$ .

Posons  $z_n = r_n e^{i\theta}$ ;  $\gamma'$  correspond à  $\theta'_1 \leq \theta \leq \theta'_2$ . On a  $|\varphi_{n,h}(r_n e^{i\theta})| = r_{n+h}$ . On peut trouver  $h$  assez grand pour que  $|\Phi_n - \varphi_{n,h}| < \varepsilon$  dans tout un

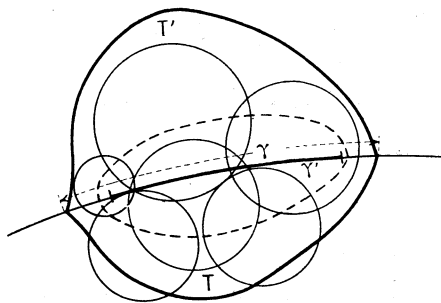


Fig. 1.

domaine contenant  $\gamma'$  à son intérieur. Si  $|\Phi_n| \neq \text{const.}$  sur  $\gamma'$  on aurait  $|\Phi_n(r_n e^{i\theta'})| - |\Phi_n(r_n e^{i\theta''})| = \alpha$ . Prenant  $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$  on aurait

$$|r_{n+h} - |\Phi_n(r_n e^{i\theta'})|| < \frac{\alpha}{3} \quad \text{et} \quad |r_{n+h} - |\Phi_n(r_n e^{i\theta''})|| < \frac{\alpha}{3},$$

ce qui est impossible, donc  $\alpha = 0$ .

$|\Phi_n| = \text{const.}$  sur  $\gamma'$  mais  $\Phi_n \neq \text{const.}$  sinon elle serait aussi constante dans  $C_n$ .  $|\Phi_n|$  est bornée dans  $\Theta$ , donc  $C$  est un cercle de rayon fini et la représentation de  $\gamma'$  sur un arc de la circonférence de  $C$  est analytique.

## B. — Raccordement de première espèce.

### 1. POSITION DU PROBLÈME.

**DÉFINITIONS.** — Soient dans les plans  $z$  et  $\zeta$  deux domaines  $A$  et  $B$  et deux parties  $A'$  et  $B'$  de  $A$  et  $B$  en correspondance conforme biunivoque par  $\zeta = \psi(z)$ .  $A'$  et  $B'$  sont supposés *maxima*, c'est-à-dire que  $\zeta = \psi(z)$  n'est pas prolongeable dans  $A - A'$ ,  $\psi(z)$  restant univalente à valeurs dans  $B$ .

**DÉFINITION.** — Raccorder les domaines  $A$  et  $B$  des plans  $z$  et  $\zeta$ , par  $\psi$ , ou suivant  $A'$ , c'est déterminer une fonction  $w = f(z)$  et une fonction  $w = \varphi(\zeta)$ ,

méromorphes et univalentes dans  $A$  et dans  $B$ , prenant les mêmes valeurs en deux points homologues de  $A'$  et  $B'$  [associés par  $\zeta = \psi(z)$ ] et des valeurs distinctes pour tout autre couple  $z \in A$  et  $\zeta \in B$ .

On écrira que  $w$  est méromorphe univalente dans  $A \sqcup B$  ou  $(A \sqcup B)$ .

Si le raccordement est possible l'ensemble  $\Delta$  des valeurs prises par  $w$  lorsque  $z$  parcourt  $A$  et  $\zeta$  parcourt  $B$  forme un domaine : soient  $A^*$  et  $B^*$  les domaines images de  $A$  et  $B$  par  $f$  et  $\varphi$ .  $z_0$  et  $\zeta_0$  étant choisis homologues dans  $A'$  et  $B'$ ,  $w_0 = f(z_0) = \varphi(\zeta_0)$  :  $w_A \in A^*$  et  $w_B \in B^*$  peuvent être joints à  $w_0$  par deux courbes respectivement intérieures à  $A^*$  et  $B^*$  donc à  $\Delta$ .  $\Delta$  connexe est bien un domaine. Nous écrirons  $\Delta = (A \sqcup B)$ .

Si  $P \in \mathring{A}$  (ou  $\mathring{B}$ ) son image par  $f(z)$  [ou  $\varphi(\zeta)$ ]  $\in \Delta$ , et inversement  $P^* \in \Delta$  est l'image d'un point  $\in \mathring{A}$  ou  $\in \mathring{B}$ .

Si  $\Delta$  est simplement connexe, soit  $\Delta^1$  une image conforme de  $\Delta$  :  $\Delta^1$  est un cercle dont le centre est l'image de  $z_0 \in \mathring{A}$ , avec  $\left(\frac{dw^1}{dz}\right)_{z_0} = 1$ , on écrira  $\Delta^1 = (A \sqcup B)_{z_0}$ .

UNICITÉ. — Soient  $\Delta^1 = (A \sqcup B)_{z_0}$  et  $\Delta^2 = (A \sqcup B)_{z_0}$ .  $P^*(w^1) \in \Delta^1$  est l'image de  $z \in \mathring{A}$  (ou de  $\zeta \in \mathring{B}$ ) qui a lui-même pour image dans  $\Delta^2$ ,  $Q^*$ . Cette image est unique même si  $z \in A'$ , et en vertu de l'univalence des fonctions  $f^1, \varphi^1, f^2, \varphi^2$ , la correspondance établie entre  $P^*$  et  $Q^*$  est localement conforme biunivoque, donc aussi globalement. La représentation de  $\Delta^1$  sur  $\Delta^2$  normalisée au centre est l'identité.

TYPES DE RACCORDEMENT. — Soient un cercle  $A$ ,  $A'$  une portion connexe de ce cercle limitée par des arcs de Jordan (sans points doubles) dont tous les points sont accessibles par l'intérieur (une exception sera envisagée : voir remarque 3, p. 13). Soit  $\mathcal{A} = \mathring{A} - A'$ .

1° *Disposition en croissant.* —  $A'$  simplement connexe, et  $\mathcal{A}$  admettent chacune au moins un arc de la circonférence de  $A$ , comme élément frontière. Cette circonférence est partagée en un nombre fini d'arcs frontières de  $A'$  et  $\mathcal{A}$ ;

2° *Disposition en pince.* —  $\mathcal{A}$  connexe;  $A'$  simplement connexe admet toute la circonférence de  $A$  comme frontière, un point de cette circonférence étant frontière de  $\mathcal{A}$ ;

3° *Disposition en anneau.* — Aucun point de la circonférence de  $A$  n'est frontière pour  $\mathcal{A}$ .  $A'$  est de connexion finie  $\geq 2$ .

Nous étudierons quatre types de raccordement :

Raccordement par croissants lorsque les décompositions de  $A$  et  $B$  se font en croissants. On se bornera au cas où  $\mathcal{B}$  est simplement connexe.

Raccordement par croissant et pince : décomposition de A en croissant, de B en pince.

Raccordement par pinces : décomposition de A et B en pinces;

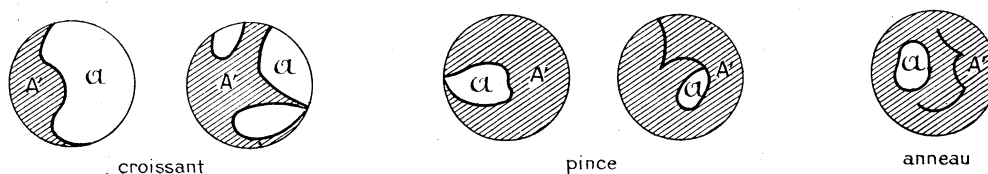


Fig. 2.

Raccordement par anneaux : décomposition de A et B en anneaux. On se bornera au cas où  $A'$  (donc aussi  $B'$ ) est doublement connexe.

CAS D'IMPOSSIBILITÉ. — Sur la frontière de  $A'$  nous distinguerons les arcs *externes* qui appartiennent à la circonférence de A et les arcs *internes* dont les intérieurs  $\subset A'$ . Les frontières de  $A'$  et  $B'$  se correspondent ponctuellement et continûment par  $\zeta = \psi(z)$ . On pourra donc distinguer sur la périphérie de  $A'$  les arcs homologues d'arcs internes de  $B'$  et les arcs homologues d'arcs externes de  $B'$ .

THÉORÈME. — Si sur la périphérie de  $A'$  les homologues des arcs externes de  $B'$  ne couvrent pas les arcs internes de  $A'$ , le raccordement  $A \underline{\sim} B$  ne peut être réalisé.

Remarque. — Si les homologues des arcs externes de  $B'$  couvrent les arcs internes de  $A'$ , c'est que tout point d'un arc interne de  $A'$  correspond à un point de la circonférence de B, donc un point d'un arc interne de  $B'$  ne peut correspondre qu'à un point de la circonférence de A; c'est dire que les homologues des arcs externes de  $A'$  couvrent les arcs internes de  $B'$ .

Soient sur la circonférence de A,  $l$  et  $l'$  les ensembles des arcs frontières de  $\mathcal{A}$  et  $A'$ ; soient  $l''$  la frontière interne de  $A'$ , et  $\mu'$  l'ensemble des homologues

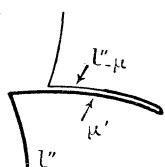


Fig. 3.

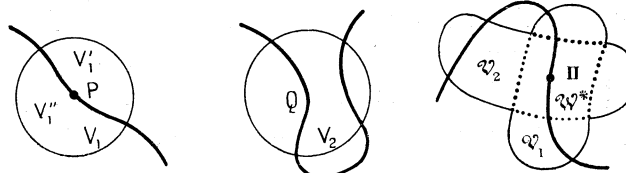


Fig. 4.

des arcs externes de  $B'$ . De la même façon,  $m$  désigne l'ensemble des arcs frontières de  $\mathcal{B}$ , situés sur la circonférence de B,  $m'$  la frontière externe de  $B'$ ,  $m''$  sa frontière interne.

Supposons  $l'' - \mu'$  non vide, il s'agit d'un arc  $l'' - \mu'$  au sens de l'accessibilité dans  $A'$  : il se pourrait pour un point de  $l''$  que pour certains chemins d'accès



il appartienne à  $\mu'$  et pour d'autres il appartienne à  $l'' - \mu'$  (fig. 3). Soit  $P_0 \in l'' - \mu'$  ( $P_0 \in \dot{A}$ ) et  $V_0$  un voisinage de  $P_0$ ,  $V_0 \subset \dot{A}$ . Comme  $l''$  est une courbe de Jordan on peut trouver dans  $\dot{V}_0$  un point  $P$  ( $P \in l'' - \mu'$ ) et  $V_1(P) \subset V_0$  partagé par  $l''$  en deux morceaux seulement  $V'_1$  et  $V''_1$  dont l'un au moins vérifie  $V'_1 \subset A'$ . Supposons le raccordement  $A \stackrel{A'}{=} B$  réalisable :  $w = f(z)$  holomorphe univalente dans  $V_1$  le représente sur  $\mathfrak{V}_1$ . D'autre part la correspondance  $A' \leftrightarrow B'$  continue sur les frontières associe à  $P$  au moins un point  $Q$  sur  $m''$  ( $Q \in \dot{B}$ ), unique si  $V''_1 \not\subset A'$ .  $w = \varphi(\zeta)$  représente sur  $\mathfrak{V}_2$  un voisinage  $V_2$  de  $Q$ . La considération de deux suites de points homologues dans  $\dot{V}'_1$  et  $\dot{V}_2$  tendant respectivement vers  $P$  et  $Q$  montre que  $P$  et  $Q$  ont même image  $\Pi$  dans le plan  $w$ .  $\Pi \in \dot{\mathfrak{V}}_1$ ,  $\Pi \in \dot{\mathfrak{V}}_2$  donc  $\mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}^* \neq \emptyset$  : soit  $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{V}^*$  un voisinage de  $\Pi$  partagé en deux morceaux seulement  $\mathfrak{V}'$  et  $\mathfrak{V}''$  par l'image de  $l''$ . Soient alors  $W_1, W'_1, W''_1$  les images dans le plan  $z$  par  $z = f^{-1}(w)$  de  $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \mathfrak{V}''$ ;  $W_2, W'_2, W''_2$  leurs images dans le plan  $\zeta$  par  $\zeta = \varphi^{-1}(w)$ .  $\zeta = \psi(z)$  définit une correspondance conforme biunivoque entre  $W'_1$  et  $W'_2$ ;  $\zeta = \varphi^{-1}(w)$  est holomorphe univalente dans  $\mathfrak{V}$  donc  $\zeta = \varphi^{-1} \circ f(z)$  est holomorphe univalente dans  $W_1$ , identique à  $\psi(z)$  dans  $W'_1$ ;  $\psi(z)$  est alors prolongeable dans  $A'' = A' \cup W_1$  ses valeurs restant dans  $B$  puisqu'elles sont dans  $W_2$ ; deux cas sont alors possibles :

a.  $\psi(z)$  ainsi prolongée est univalente dans un domaine  $A''' \supset A'$ ;  $A'$  ne serait pas maximum;

b.  $m''$  ne pénétrant pas dans  $W''_2$  et certains points de  $W''_2$  appartenant à  $B'$ , c'est que  $W''_2 \subset B'$ . Soit  $W''_1 = \psi^{-1}(W''_2)$ ;  $\mathfrak{V}'' = f(W''_1) = \varphi(W''_2) = f(W''_1)$ ; mais  $f$  est univalente donc  $W''_1 \equiv W''_1$ , et  $W''_1 \subset A'$ . La fonction  $\psi(z)$  donnée est identique dans  $W''_1$  au prolongement dans  $W_1$  entier de  $\psi(z)$  donnée dans  $W'_1$ . La correspondance  $A' \stackrel{\psi(z)}{\leftrightarrow} B'$  s'étend donc à la portion de  $l''$  (et  $m''$ ) intérieure à  $W_1$  (et  $W_2$ ) :  $A'$  ne serait pas maximum.

*Remarque.* — Soit  $\tilde{A} = A - (l'' - \mu')$  que nous supposons simplement connexe. Un « raccordement » de  $A$  et  $B$  suivant  $A'$ , où l'on admettrait la possibilité pour les points de  $(l'' - \mu')$  d'avoir pour image, des points frontières du domaine image de ce « raccordement » n'est autre que le raccordement  $\tilde{A}^* \stackrel{B'}{=} B$ , où  $\tilde{A}^*$  est une image conforme circulaire de  $\tilde{A}$ . On est ainsi ramené au cas où  $\mu' \supset l''$ .

## 2. RACCORDEMENT PAR CROISSANTS.

Soient  $\beta_1$  et  $\beta_2$  les extrémités de  $m'$ ,  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$  celles de  $\mu'$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sur la circonférence de  $A$  les extrémités de l'arc de cette circonférence, frontière de  $A'$  et contenant  $\widehat{\beta'_1 \beta'_2}$  = frontière de  $A' - \mu'$ .  $\beta_1$  sera dit extrémité régulière de  $B'$  s'il est possible de construire à l'intérieur de  $B'$  une courbe aboutissant

en  $\beta_1$  en coupant la circonférence de B sous un angle  $\neq 0$  (à  $k\pi$  près); dans le cas contraire on dira que  $\beta_1$  est une extrémité irrégulière de B'. Remarquons que la frontière interne de B' reste à une distance finie de tout arc intérieur à  $m'$ .

CAS RÉGULIER. —  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont extrémités régulières de B'. On peut alors construire un arc de cercle  $C_1$  intérieur à B' coupant  $\Gamma_B$  (circonférence de B) en  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sous un angle  $\theta = \frac{\pi}{2^n}$  ( $n$  entier). A  $C_1$  correspond dans  $A'$  un arc  $\gamma_1$  joignant  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$ , séparant  $A'$  en deux parties dont l'une  $\alpha'_1$  est contiguë à  $\alpha$ . Posons  $\alpha_1 = \alpha \cup \alpha'_1 \cup l''$ .  $\xi$  étant un point choisi dans  $\alpha$ , il existe  $z_1 = f_1(z)$  représentant  $\alpha_1$  simplement connexe, sur un cercle  $A_1$ , la correspondance étant analytique entre les frontières (sauf en  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$ ), et avec  $f_1(\xi) = 0$ ,  $f'_1(\xi) = 1$ . Soit  $\Gamma_1$  l'image de  $\gamma_1$  : les autres éléments de  $A_1$  seront notés par

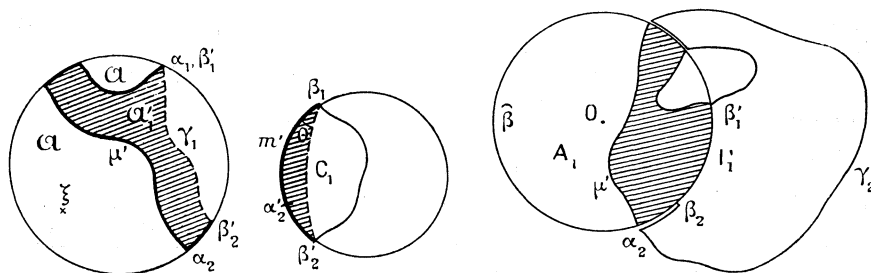


Fig. 5.

les mêmes lettres que leurs éléments homologues dans A; soit  $\beta$  l'arc de la circonférence de  $A_1$ , autre que  $\Gamma_1$ . Le domaine  $\langle m', C_1 \rangle$  limité par  $m'$  et  $C_1$  (plan  $\zeta$ ) est en correspondance conforme biunivoque avec  $\langle \mu', \Gamma_1 \rangle$  du plan  $z_1$ ; cette correspondance peut être prolongée par la méthode des images par rapport aux côtés homologues  $C_1$  et  $\Gamma_1$ . Soit  $C_2$  l'image de  $m'$  par rapport à  $C_1$ , et  $\gamma_2$  l'image de  $\mu'$  par rapport à  $\Gamma_1$ .  $\langle \beta, \gamma_2 \rangle$  simplement connexe, à frontière accessible, est représenté sur  $A_2$  par  $z_2 = f_2(z_1)$  normalisée à l'origine  $A_2 = (\alpha_1, \alpha'_1, \langle m', C_2 \rangle)_{\xi}$ . Soit  $\Gamma_2$  l'image de  $\gamma_2$ . De la même façon le prolongement de la correspondance existant entre  $\langle m', C_2 \rangle$  et  $\langle \mu', \Gamma_2 \rangle$  au delà de  $C_2$  et  $\Gamma_2$  fournit dans un plan  $z_3$ ,  $A_3 = (\alpha_1, \alpha'_1, \langle m', C_3 \rangle)_{\xi}$ . On poursuivra l'opération, et l'on obtiendra dans le plan  $z_{n+1}$ ,

$$A_{n+1} = (\alpha_1, \alpha'_1, \langle m', C_{n+1} \rangle)_{\xi} = (\alpha_1, \alpha'_1, B)_{\xi}$$

puisque  $B \equiv \langle m', C_{n+1} \rangle^{(1)}$ .

Soient  $z_{n+1} = f(z)$  et  $z_{n+1} = \varphi(\zeta)$  les fonctions ainsi déterminées dans  $\alpha_1$

(1) Cette construction, sous des hypothèses moins larges, est indiquée dans *Bieberbach* (ouv. cité p. 172), la validité du raccordement n'étant pas assurée dans A entier.

et B. Pour  $z \in \mathcal{A}'$ ,  $f(z) = \varphi \circ \psi(z)$ ; mais  $\varphi \circ \psi$  est défini dans tout  $A'$ , donc aussi  $f(z)$  qui satisfait à  $f(z_0) = \varphi(\zeta_0)$ , pour  $z_0$  et  $\zeta_0$  homologues quelconques dans  $A'$  et  $B'$ . Donc  $A_{n+1} = (\mathcal{A}' \sqcup B)_{\bar{z}} = (A \sqcup B)_{\bar{z}}$ . On peut enfin par une transformation homographique  $w = h(z_{n+1})$  de  $A_{n+1}$  sur un cercle  $\Delta$  obtenir  $\Delta = (A \sqcup B)_{\bar{z}}$  où  $Z$  est un point quelconque de  $A$  ou de  $B$ .

*Remarque.* —  $A$  et  $B$  n'ont pas joué initialement le même rôle : on a été conduit à supposer  $\mathcal{B}$  simplement connexe pour déterminer  $m'$  donc  $\mu'$ , ce qui ne pouvait se faire si aucun des deux domaines  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{B}$  n'était connexe.

On a construit  $C_1$  dans  $B'$ , mais on pourrait réaliser la construction de  $\Delta$  par le même processus fini à partir d'un arc de cercle  $C_1$  intérieur à  $A'$  et d'extrémité  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (pourvu qu'elles soient régulières).

**CAS IRRÉGULIER.** — Si le problème ne peut être résolu par l'examen précédent c'est que l'une au moins des extrémités  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , et l'une au moins des extrémités  $(\beta_1, \beta_2)$  sont irrégulières. Remarquons aussi que si  $\beta_2$  et  $\alpha'_2$  sont distincts, on peut prendre sur l'arc  $\widehat{\beta_2 \alpha'_2}$  un point quelconque  $\beta_3$  comme extrémité régulière de  $B'$  (ou  $\alpha_3$  sur l'arc correspondant  $\widehat{\alpha_2 \beta'_2}$ ). Le seul cas exceptionnel est donc le suivant : dans  $B$ ,  $\alpha'_i \equiv \beta_i$  extrémité irrégulière de  $B'$  pour au moins une valeur de  $i$  (1 ou 2); dans  $A$ ,  $\alpha_j \equiv \beta'_j$  extrémité irrégulière de  $A'$ , pour au moins une valeur de  $j$  (1 ou 2).

Supposons  $\alpha'_1 \equiv \beta_1$  extrémité irrégulière. Soit une exhaustion de  $m$ ,  $m'_1 \subset m'_2 \subset \dots \subset m'_n \subset \dots$ ;  $m'_n \subset m'$  ayant pour extrémités  $\beta_{1,n}$  et  $\beta_{2,n}$ . La suite des  $\beta_{1,n}$  converge vers  $\beta_1$ , et  $\beta_{2,n}$  pourra être choisi  $\equiv \beta_2$  si  $\beta_2$  est extrémité régulière de  $B'$ , ou à  $\beta_3$  si  $\beta_2 \neq \alpha'_2$ , sinon  $\beta_{2,n} \rightarrow \beta_2$ . Pour  $n > n_0$ ,  $\beta'_{1,n} \in \dot{A}$  (où  $\beta'_{1,n}$  correspond à  $\beta_{1,n}$ ),  $\beta'_{1,n} \rightarrow \alpha_1$ . Soit  $A_n$  le domaine obtenu en retirant de  $A$  l'arc  $\widehat{\alpha_1 \beta'_{1,n}}$  (arc interne de  $A'$ ) et éventuellement l'arc  $\widehat{\alpha_2 \beta'_{2,n}}$ . Soit dans le plan  $w_n$ ,  $\Delta_n = (A_n \sqcup B)_{\bar{z}_0}$ . Tout point  $P_n \in \dot{\Delta}_n$ , étant lui-même image d'un point  $P_0 \in \dot{A}_n$  ou  $\dot{B}$  avec représentation conforme biunivoque des voisinages, se représente de la même façon sur  $P_m \in \dot{\Delta}_m$  ( $m > n$ ) où  $P_m$  est unique. Inversement  $P_m \in \dot{\Delta}_m$  est image soit d'un point  $P_0 \in \dot{B}$ , soit de  $P_0 \in \dot{A}_m$ ;  $P_0$  est alors soit frontière soit intérieur à  $A_n$ , et dans ce dernier cas seulement  $P_m$  est l'image d'un point  $P_n \in \dot{\Delta}_n$  unique. En particulier si  $m = n + 1$  on définit une suite  $w_{n+1} = \varphi_{n+1}(w_n)$  satisfaisant aux conditions du paragraphe A. Soit  $\Delta$  le cercle limite des cercles  $\Delta_n$ .  $P \in \dot{\Delta}$  est image d'un  $P_n \in \dot{\Delta}_n$  ( $n$  assez grand) lui-même image de  $P_0 \in$  soit à  $\dot{B}$  soit à  $\dot{A}_n$  donc à  $\dot{A}$ . Inversement si  $P_0 \in \dot{B}$  ou  $\in \dot{A}$ , il existe  $n$  tel que  $P_0 \in \dot{B}$  ou  $\dot{A}_n$ , et  $P_0$  a une image unique  $P_n \in \dot{\Delta}_n$  donc une image  $P \in \dot{\Delta}$ . Comme toutes ces images s'accompagnent de représentation conforme biunivoque des voisinages et que deux points homologues par  $\zeta = \psi(z)$  ont même image dans tout  $\Delta_n$ , donc dans  $\Delta$  on a  $\Delta = (A \sqcup B)_{\bar{z}_0}$ .

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses du raccordement par croissants (p. 6), si l'homologue de l'arc externe (unique) de B' couvre l'ensemble des arcs internes de A', le raccordement  $A \sqcup B$  est réalisable,  $\Delta = (A \sqcup B)_{\infty}$  étant un cercle de rayon fini.*

LA FRONTIÈRE DE  $\Delta$ . — Soient sur la circonférence de A,  $(\alpha_1 \alpha_2)$  l'arc  $\widehat{\alpha_1 \alpha_2} \supset l$ , et  $(\alpha_1 \alpha_2)'$  son complémentaire. Soit  $(\alpha_1 \alpha_2)''$  le complémentaire de  $(\alpha_1 \alpha_2)'$  sur la frontière de A'.  $(\beta_1 \beta_2)$ ,  $(\beta_1 \beta_2)'$ ,  $(\beta_1 \beta_2)''$  représentent les éléments analogues dans B.

La construction de  $\Delta$  dans le cas régulier montre que les points  $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2$  ont pour images sur la circonférence de  $\Delta$ ,  $\Gamma_\Delta$ , des points  $\alpha_1^* \alpha_2^* \beta_1^* \beta_2^*$ , la correspondance entre  $(\alpha_1 \alpha_2)$  et  $(\alpha_1^* \alpha_2^*)$ ,  $(\beta_1 \beta_2)$  et  $(\beta_1^* \beta_2^*)$  étant analytique, et les arcs  $(\alpha_1 \alpha_2)''$  et  $(\beta_1 \beta_2)''$  ayant pour images des courbes de Jordan aboutissant en  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$  et  $\beta_1^*$ ,  $\beta_2^*$ .

Cas irrégulier. —  $\Delta$  est de rayon fini :  $(\alpha_1 \alpha_2)$  a une image suivant un arc de circonférence de chaque  $\Delta_n$ . En appliquant le résultat (§A, 5) on trouve que  $(\alpha_1 \alpha_2)$  se représente analytiquement sur un arc ouvert de  $F_\Delta$ . De même pour  $(\beta_1 \beta_2)$ .

Image des extrémités  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  : soit dans  $\mathcal{A}$  une courbe L aboutissant en  $\alpha_1$ . Supposons que son image  $L^*$  dans  $\Delta$  n'aboutisse pas en un point de  $F_\Delta$ ;  $L^*$  approche uniformément un arc K de  $F_\Delta$ .  $\bar{K}$  ne peut contenir deux points accessibles de la frontière de  $A^*$  (image de A dans  $\Delta$ ), sinon on pourrait trouver sur  $L^*$  deux suites de points convergeant respectivement vers chacun de ces points, et auxquelles devraient correspondre dans A deux suites convergeant vers des points distincts de  $\Gamma_A$ , ce qui est contraire au fait que L aboutit en  $\alpha_1$ . Soit donc  $K' \subset F_\Delta$ , le support inaccessible de la frontière de  $A^*$ ;  $K \subset K'$ . Soit  $\lambda_n = \widehat{\alpha_1 \beta_{1,n}} = \hat{A} - \hat{A}_n$ .  $\Delta_n$  a pour image dans  $\Delta$ ,  $\Delta_n^* = \Delta - \lambda_n^*$ , où  $\lambda_n^*$  est l'image de  $\lambda_n$ . Pour la même raison que précédemment  $\bar{K}$  ne peut contenir deux points accessibles de la frontière de  $\Delta_n^*$  : soit alors  $k \subset F_\Delta$ , l'arc limite de  $\lambda_n^*$ ;  $K \subset k$ . Ni  $K'$ , ni K, ni k ne peuvent couvrir  $F_\Delta$ , donc ils ont chacun deux extrémités :

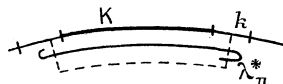


Fig. 6.

a. K et k ont au moins une extrémité commune; sinon  $\bar{K} \subset \bar{K}'$  et l'on pourrait construire un rectangle dont K serait un arc frontière et contenant  $L^*$  (à partir d'un certain point); mais ce même rectangle serait séparé en deux régions par

un arc de  $\lambda_n^*$ , et cela aussi près de  $K$  (uniformément) que l'on veut.  $L^*$  ne pourrait traverser cet arc donc s'approcher de  $K$  (fig. 6).

b.  $K' \equiv k$ .  $k$  ne peut contenir deux points accessibles de la frontière de  $A^*$  donc  $K' \supset k$ . Mais  $\beta_1 = \alpha_1'$  et pour  $B^*$  les rôles de  $K'$  et  $k$  sont permutés et  $(\beta_1 \beta_2)''$  possède au voisinage de  $\beta_1$  les mêmes propriétés que  $\lambda_n$  au voisinage de  $\alpha_1$ . Donc  $k \supset K'$  soit  $k \equiv K'$ .

c.  $K'$  est un bout premier de la frontière de  $A^*$  : soient une suite quelconque de points intérieurs ou frontières (accessibles) de  $A^*$ , ayant tous ses points limites sur  $K'$  et deux points accessibles quelconques de  $A^*$  qui sont soit sur l'image de  $(\alpha_1 \alpha_2)$ , extrémités comprises, soit sur celle de  $(\alpha_1 \alpha_2)'$ . Dans tous les cas à partir d'un certain rang les traces des points de la suite ne séparent pas les deux points : la suite initiale est une suite pure et les suites ainsi définies sont toutes équivalentes.

*Remarque 1.* — Supposons  $\beta_2$  extrémité régulière de  $(\beta_1 \beta_2)''$ . Soit sur  $\Gamma_\Delta$   $(\alpha_1 \beta_2')$  l'arc  $\widehat{\alpha_1 \beta_2'}$  contenant  $(\alpha_1 \alpha_2)$ . Sur la circonférence de  $\Delta_n$  il y a un arc  $\gamma_n$  formé des images de  $(\alpha_1 \beta_2')$  et  $(\beta_1 \beta_2)$  ayant une extrémité commune image continue de  $\beta_2'$  et  $\beta_2$ . Les résultats du paragraphe A, 5 s'appliquent à  $\gamma_n$ , donc  $(\alpha_1 \beta_2')$  et  $(\beta_1 \beta_2)$  ont pour image sur  $F_\Delta$  deux arcs ayant une extrémité commune image continue de  $\beta_2'$  et  $\beta_2$ .

2. L'arc  $K'$  peut effectivement exister sans être réduit à un point. Soient dans un cercle  $\Delta$  deux courbes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  s'accumulant suivant le même arc  $K'$  de la circonférence de  $\Delta$ , et partageant  $\Delta$  en trois domaines  $\mathcal{A}^*$ ,  $A'^*$  (limité par  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$ ) et  $\mathcal{B}^*$ . Soit  $A^* = \mathcal{A}^* \cup A'^* \cup \mathcal{L}$  et  $B^* = A'^* \cup \mathcal{M} \cup \mathcal{B}^*$ . Dans la représentation de  $A^*$  sur un cercle  $A$ ,  $K'$  est un bout premier correspondant à un point  $\alpha_1$  de la circonférence de  $A$ , et  $\mathcal{L}$  a pour image  $l$  aboutissant en  $\alpha_1$ . Soit sur la circonférence de  $B$  (image de  $B^*$ ),  $\beta_1$  le point image du bout premier  $K'$  et  $m$

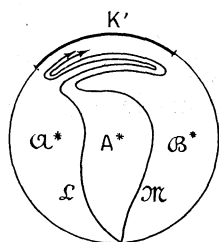


Fig. 7.

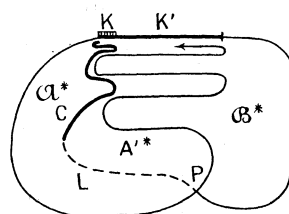


Fig. 8.

aboutissant en  $\beta_1$  l'image de  $\mathcal{M}$ .  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont nécessairement extrémités irrégulières de  $A'$  et  $B'$  (images de  $A'^*$  dans  $A$  et  $B$ ) sinon  $A \stackrel{A'}{\sim} B$  serait possible avec correspondance ponctuelle des frontières même en  $\alpha_1$  (fig. 7).

*Application.* — L'étude précédente fournit une solution simple à un problème de représentation conforme au voisinage de la frontière : soit  $D$  un domaine

simplement connexe, et  $K'$  un arc support inaccessible d'éléments frontières; soit  $C$  une courbe issue d'un point  $\in \bar{D}$  et s'accumulant suivant  $K \subset K'$ . Complétons  $C$  de façon à former une courbe  $L$  aboutissant en  $P$  accessible sur la frontière de  $D$ ;  $L$  sépare  $D$  en  $\mathcal{A}^*$  et  $\mathcal{A}'^*$ ; soit  $\mathcal{B}^*$  un domaine limité par la frontière de  $D$  et une courbe construite à l'extérieur de  $D$ , joignant  $P$  à l'extrémité de  $K'$  non accessible dans  $D$ . Dans la représentation de  $D$  sur un cercle  $A$ ,  $K'$  est un bout premier correspondant à  $\alpha_1$  qui est extrémité irrégulière de  $A'$  image de  $\mathcal{A}'^*$ . Cela résulte de ce que  $D \cup \mathcal{B}^*$  peut être considéré comme  $(A \sqcup B)$  ou  $B$  est l'image circulaire de  $\mathcal{A}'^* \cup \mathcal{B}^*$ . Si  $\alpha_1$  n'était pas irrégulière  $K$  serait réduit à un point (fig. 8).

THÉORÈME. —  $K$  bout premier d'un domaine  $D$  représenté sur un cercle  $A$ , a pour image un point  $\alpha$  de ce cercle. A une courbe aboutissant régulièrement en  $\alpha$  correspond dans  $D$  un arc aboutissant à l'extrémité accessible du bout premier  $K$ .

3. Si nous admettons la possibilité pour la frontière de  $A'$  de s'accumuler suivant un arc de la circonférence de  $A$ , on peut cependant réaliser  $A \sqcup B$  par

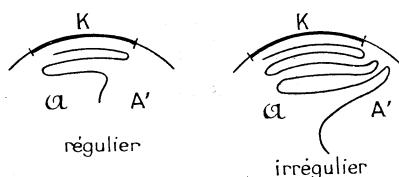


Fig. 8 bis.

la méthode indiquée dans l'étude du cas irrégulier. Chaque cas nécessitera une étude spéciale des frontières et l'on sera amené à distinguer les arcs inaccessibles extrémités régulières et irrégulières de  $A'$  suivant que de l'extrémité accessible du bout premier on peut ou non construire une courbe intérieure à  $A'$  faisant avec la circonférence de  $A'$  un angle  $\neq 0$  (fig. 8 bis).

### 3. — RÉDUCTION AU RACCORDEMENT PAR CROISSANTS.

A. RACCORDEMENT PAR PINCE ET CROISSANT. —  $\beta_1$  et  $\beta_2$  distincts sur la frontière de  $B'$  sont confondus en  $\beta$  sur la circonférence de  $B$ .

a.  $\alpha'_1 \neq \beta_1$ . 1°  $\beta_2$  extrémité non irrégulière de  $B$ . On prendra pour  $C_1$  un arc de cercle  $\widehat{\alpha'_1 \beta_2}$ ; 2°  $\beta_2 = \alpha'_2$  se reporter aux méthodes *b* ci-dessous.

b.  $\alpha'_1 = \beta_1$ ,  $\alpha'_2 = \beta_2$ . 1°  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont extrémités régulières de  $A'$ . On construit dans  $A'$  l'arc de cercle  $C_1$  et l'on construit  $(A \sqcup B)_\xi$  où  $\xi \in \mathcal{B}$  si  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ . Il est possible que  $\mathcal{B} = \emptyset$ , c'est donc  $\mathcal{B}$  est formé d'un ou plusieurs arcs de courbes issus de  $\beta$ . On prendra alors pour  $\xi$  une extrémité de  $\mathcal{B}$  et l'on devra après chaque opération représenter sur un cercle un domaine simplement connexe

constitué par le plan privé d'une courbe joignant à l'infini un point image de  $\beta$ . On peut encore construire  $(A \sqcup B)_{\xi}$  donc aussi  $(A \sqcup B)_{\xi}$  par un processus fini;

2° si  $\alpha_1$  (ou  $\alpha_2$ ) est irrégulière on entaillera A suivant  $\lambda_n = \widehat{\alpha_1 \beta'_{1,n}}$  ce qui conduira à la construction de  $\Delta$  comme limite de domaines  $\Delta_n$  (cf, cas irrégulier).

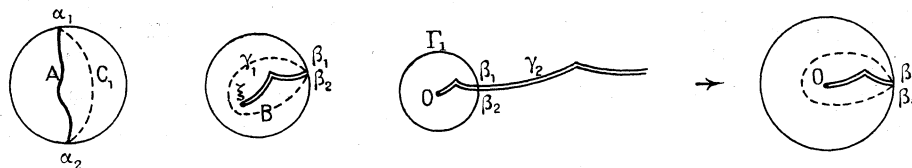


Fig. 9.

*Frontière de  $\Delta$ .* — Dans tous les cas  $\Delta$  est un cercle de rayon fini dont la circonférence contient un arc image analytique de  $(\alpha_1, \alpha_2)$ : dans le cas a 1°, la circonférence  $F_\Delta$  est image analytique de  $(\beta'_1, \beta'_2)$ , dans le cas b 1°, elle est image analytique de  $(\alpha_1, \alpha_2) \equiv (\beta'_1, \beta'_2)$ . Dans le cas a 2°, il peut apparaître sur  $F_\Delta$  un arc K bout premier correspondant à  $\alpha_2$ ; dans le cas b 2°, on peut avoir deux arcs  $K_1$  et  $K_2$  bout à bout ou se chevauchant, arcs d'accumulation de l'image de  $(\alpha_1, \alpha_2)''$ : ces singularités peuvent avoir lieu même si  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont extrémités régulières de  $B'$ . Les figures suivantes donnent des exemples de singularités.

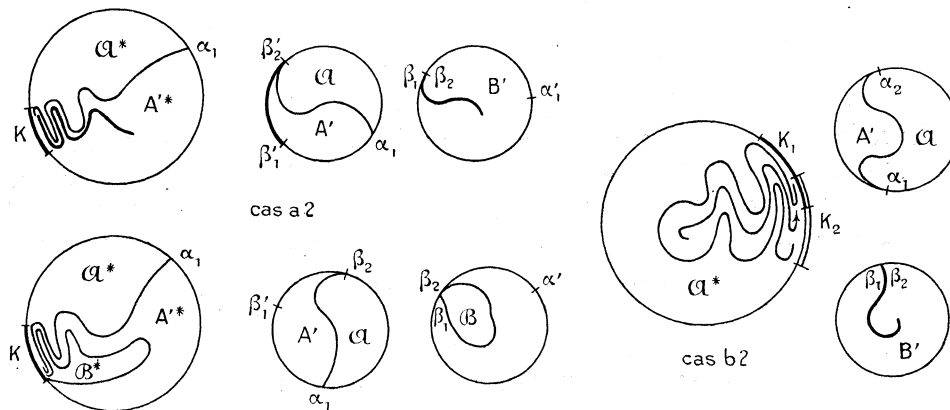


Fig. 10.

**B. RACCORDEMENT PAR PINCES.** — Sur  $\Gamma_A$ ,  $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha$  et sur  $\Gamma_B$ ,  $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \beta$ .

c.  $\alpha_1 \neq \beta$ . 1° On peut réaliser le raccordement par un processus fini comme dans a 1° sauf si : 2°  $\alpha_2 = \beta'_2$  avec  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  extrémités irrégulières de  $A'$  et  $B'$ .

On introduit alors les domaines  $A_n$ , en retirant de A des arcs  $\widehat{\alpha_2 \beta'_{2,n}}$  de  $(\alpha_1, \alpha_2)''$ .

d.  $\alpha_1 \equiv \beta'_1$ ,  $\alpha_2 \times \beta'_2$ . Nous ne distinguerons pas entre les cas d'extrémités régulières et irrégulières. On introduit les domaines  $A_n$  obtenus en retirant de A des arcs  $\widehat{\alpha_1 \beta'_{1,n}}$  et  $\widehat{\alpha_2 \beta'_{2,n}}$  de  $(\alpha_1, \alpha_2)''$  — dans le cas où une des extrémités

$\beta_i$  ou  $\alpha_j$  est régulière, on peut prendre  $\beta_{2,n} \equiv \beta_2$ . — La suite des cercles  $\Delta_n = (A_n \underline{A'} B)_{z_0}$  « converge » vers un cercle  $\Delta = (A \underline{A'} B)_{z_0}$  de rayon fini ou infini.

*Frontière de  $\Delta$ .* — Dans le cas *c*, l'arc  $(\alpha_1 \beta_1)'$  de  $\Gamma_A$  correspondant à  $(\alpha_1 \beta_1)'$  de  $\Gamma_B$  est en correspondance analytique avec un arc de  $F_\Delta$  qui peut être la circonférence de  $\Delta$  tout entière ou seulement un arc dont le complémentaire  $K$  est alors bout premier dans la représentation, de  $A^*$  sur  $A$  (et correspondant à  $\alpha$ ) et de  $B^*$  sur  $B$  (et correspondant à  $\beta$ ).

Dans le cas *d*,  $\Delta$  est de rayon fini ou infini, de frontière  $F_\Delta$ ; à toute suite de

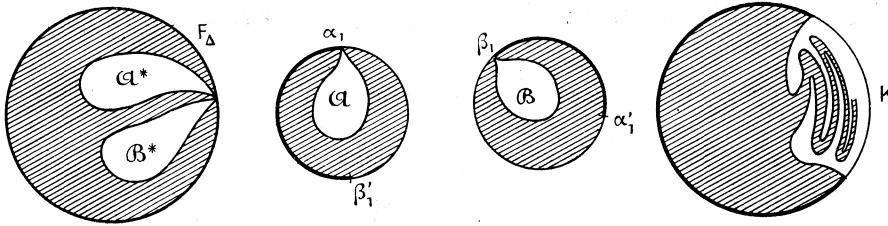


Fig. 11.

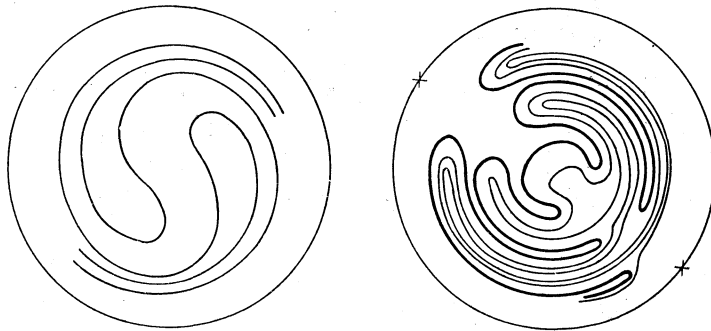


Fig. 12.

points convergeant dans  $\Delta$  vers  $F_\Delta$  correspond une suite de points dans  $A$  ou dans  $B$  (ou dans chacun des deux) dont le seul point limite est  $\alpha$  ou  $\beta$ . Supposons  $\Delta$  de rayon fini. Supposons que deux points de  $F_\Delta$  soient frontières accessibles de  $A^*$  : deux suites de points intérieurs à  $A^*$  et convergeant vers ces points, seraient les images de deux suites convergeant dans  $A$  vers deux points distincts de  $\Gamma_A$ , ce qui est impossible, ces suites ne pouvant converger que vers  $\alpha$ . Il y a au plus sur  $F_\Delta$  un point frontière accessible de  $A^*$  et un point frontière accessible de  $B^*$ . Tout point de  $F_\Delta$  est donc frontière à la fois pour  $A^*$  et pour  $B^*$ . D'autre part un point de  $F_\Delta$  frontière accessible de  $A^*$  serait frontière accessible de  $A^*$  et  $B^*$ ; il ne peut y avoir qu'un tel point au plus. La circonférence  $F_\Delta$  est un bout premier correspondant à  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) dans la représentation de  $A^*$  sur  $A$  (resp.  $B^*$  sur  $B$ ) : Toutefois s'il y a sur  $F_\Delta$  un point frontière accessible de  $A^*$ , il peut être exceptionnel pour certaines suites pures convergeant vers le bout premier  $F_\Delta$ .



## 4. — RACCORDEMENT PAR ANNEAUX.

Décomposition de  $A$  et  $B$  en anneau.  $A'$  et  $B'$  doublement connexes. Introduisons dans  $B'$  un cercle de même centre que  $B$  et d'image  $\gamma_1$  dans  $A'$ . Soit  $\mathcal{A}_1$  l'intérieur de  $\gamma_1$  et  $\mathcal{A}'_1 = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}$ . La méthode utilisée par Bieberbach<sup>(1)</sup> permet de construire  $(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}'_1 B)$ . Les deux fonctions obtenues  $w = f(z)$  et  $w = \varphi(\zeta)$  prennent la même valeur en deux points homologues de  $\mathcal{A}'_1$  et  $\psi(\mathcal{A}'_1)$ .  $f(z) = \varphi \circ \psi(z)$  pour  $z \in \mathcal{A}'_1$  mais  $\varphi \circ \psi$  est défini dans tout  $A'$ , donc on définit un prolongement de  $f$  dans  $A'$ .  $f$  ainsi définie dans  $A$  réalise avec  $\varphi(\zeta)$  le raccordement  $A \mathcal{A}' B$ . Le domaine image de ce raccordement est le plan entier.

## C. — Raccordement de deuxième espèce.

## 1. — REPRÉSENTATION CONFORME DES BANDES.

Soit  $C$  une courbe de Jordan fermée, analytique par morceaux, présentant un nombre fini de points doubles.  $C$  sépare le plan en un nombre fini de régions  $S_i$ . Soit  $M(t)$  un point sur  $C$ ,  $t$  étant le paramètre de  $C$ . Une bande étroite entourant  $C$  est un domaine  $B(C)$  satisfaisant à la condition :

- 1°  $P \in B(C)$  s'il existe  $M(t) \in C$  tel que  $MP \leq \varepsilon(t)$  où  $\varepsilon(t)$  est une fonction donnée caractérisant la bande  $0 < \varepsilon(t) < \varepsilon$  et satisfaisant à :
- 2° Toute région  $S_i$  contient au moins un point  $Q_i \notin B(C)$ .
- 3° L'ensemble des points  $Q \in S_i$  et  $\notin B(C)$  forme un seul domaine connexe  $\Sigma_i$ .

Les transformations de la forme  $w_1 = (z - \zeta)^{\frac{1}{\nu}}$ ,  $\nu > 0$  ou  $w_2 = \log(z - \zeta)$  où  $\zeta$  est l'affixe d'un point  $\in \Sigma_i$ , représentent une bande étroite conformément et biunivoquement sur une autre bande étroite pour  $\nu$  convenablement choisi, et  $\zeta$  dans une  $\Sigma_i$  convenable. Cela suppose qu'initialement on a considéré deux branches de  $B(C)$  dans le voisinage d'un point double de  $C$ . Après avoir effectué sur le plan de  $B(C)$  une transformation homographique, on considérera un élément de la fonction  $w_3 = e^{i \arccos z}$  : cet élément prolongé dans  $B(C)$  représente  $B(C)$  sur une autre bande étroite. La combinaison des transformations  $w_1, w_2, w_3$  permet de représenter conformément et biunivoquement  $B(C)$  sur une bande étroite  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  où  $\mathcal{C}$  est sans points doubles; on se ramène ensuite à une couronne circulaire par les procédés classiques de la représentation conforme.

## 2. — HYPOTHÈSES DU RACCORDEMENT.

Soit dans le plan  $z$  une partition du cercle  $D$  en trois morceaux simplement connexes  $A, A', \mathcal{A}$  ( $A$  et  $A'$  non contigus). Il existe entre points de  $A$  et  $A'$  une correspondance  $z' = \psi(z)$  holomorphe univalente.

---

(1) Ouvrage cité p. 174.

DÉFINITION. — Raccorder  $D$  par  $\psi$  (ou suivant  $A, A'$ ) c'est déterminer une fonction  $w = f(z)$  holomorphe dans  $D$ , univalente dans  $\mathfrak{A} \cup A$  et dans  $\mathfrak{A} \cup A'$  et prenant la même valeur en deux points homologues  $z$  et  $z'$  [ $z \in A, z' \in A', z' = \psi(z)$ ].

Le domaine couvert par  $w = f(z)$  sera  $\Delta = (D \triangle D)$ .

Supposons que dans chacun des domaines  $A, A', \mathfrak{A}$  les frontières soient accessibles : soient  $m, m'$ , les arcs externes,  $l$  et  $l'$  les arcs internes respectivement de  $A$  et  $A'$  ; soient  $\alpha, \beta$  les extrémités de  $l, \gamma'$  et  $\delta'$  celles de  $l'$ . La correspondance continue existant par  $\psi$  entre les contours de  $A$  et  $A'$  associe les éléments suivants :  $\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta', \gamma \leftrightarrow \gamma', \delta \leftrightarrow \delta', l \leftrightarrow l', \lambda \leftrightarrow l'$ . Comme pour le raccordement de première espèce,  $D \triangle D$  n'est possible que si  $m \supset \lambda$  (alors  $m' \supset \lambda'$ ).

Supposons qu'il existe une fonction  $\mathfrak{F}(z)$  holomorphe et univalente sur  $A$ , prolongeable analytiquement, suivant une courbe  $\mathcal{C}$  sans points doubles, intérieure à  $D$ , jusque dans  $A'$ , sur lequel  $\mathfrak{F}(z)$  prolongée est univalente et prend en tout point de  $A'$  la même valeur qu'au point homologue de  $A$ .

Raccorder  $D$  par  $\psi$  c'est déduire de l'existence de  $\mathfrak{F}(z)$  l'existence d'une fonction  $f(z)$  vérifiant la condition précédente, et prolongeable dans  $D$  entier, univalente dans  $A \cup \mathfrak{A}$ .

De l'hypothèse précédente et de la théorie de la représentation conforme des bandes on déduit qu'il existe une bande  $B \subset \mathfrak{A}$ , reliant  $A$  et  $A'$ , et une fonction  $w_1 = \Phi_1(z)$  réalisant  $U \triangle U$  où  $U = A \cup B \cup A'$ , le domaine couvert par  $w_1$  étant une couronne  $((\Gamma_1, \Gamma'_1))$ .

### 3. — CONSTRUCTION DE $(D \triangle D)$ .

Soient  $\mathfrak{A}_1$  et  $\mathfrak{A}_2$  les deux composantes simplement connexes de  $D - U$ . Soit dans un plan  $z_1$  un cercle  $C_1$  image du domaine  $A \cup \mathfrak{A}_1 \cup B$ ,  $C'_1$  étant l'image de  $B \cup A$ . La décomposition de  $C_1$  en  $C'_1$  et  $C_1 - C'_1$ . Soit  $\Gamma_1$  dans le plan  $w_1$  la circonférence extérieure de  $((\Gamma_1, \Gamma'_1))$ . Soient  $\Delta_1$  le cercle limité par  $\Gamma_1, \Delta'_1$  l'image simplement connexe de  $A \cup B$ . On peut construire  $\Delta_2 = (\Delta_1 \xrightarrow{\Delta'_1} C_1)$ ; la correspondance entre  $\Delta'_1$  et  $C'_1$  étant définie par l'intermédiaire de  $A \cup B$ . La courbe  $\Gamma'_1$  a pour image une courbe fermée  $\Gamma'_2$  intérieure à  $\Delta_2$ . Représentons  $A' \cup \mathfrak{A}_1 \cup B$  sur un cercle  $\mathfrak{C}_1$  et soit  $\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}_1 -$  image de  $k' \gamma'$ . Comme  $\Delta_2$  contient une image de  $((\Gamma_1, \Gamma'_1))$ , on peut considérer l'image de  $A$  dans  $\Delta_2$  comme une image de  $A'$ , et noter  $\Delta'_2$  l'image de  $\mathfrak{C}'_1$  dans  $\Delta_2$ . Soit  $\Delta_3 = (\Delta_2 \xrightarrow{\Delta'_2} \mathfrak{C}_1)$  à l'intérieur duquel  $\Gamma'_3$  est l'image de  $\Gamma'_2$ ;  $\Gamma_3$  étant la circonférence de  $\Delta_3$ , la couronne  $((\Gamma_3, \Gamma'_3))$  peut être représenté conformément et biunivoquement sur une couronne circulaire  $((\Gamma'_4, \Gamma_4))$ , la circonférence extérieure  $\Gamma'_4$  correspondant à  $\Gamma'_3$ . Nous appellerons  $\Delta_4$  le cercle intérieur à  $\Gamma'_4$ . Soient  $C_2$  un cercle image conforme de  $D - A'$ , et  $\Delta'_4$  l'image dans  $\Delta_4$  de  $A \cup B \cup \mathfrak{A}$ , représenté dans  $C_2$

sur  $C'_2$ . Construisons  $\Delta_5 = (\Delta_4 \stackrel{\Delta'_4}{\cup} C_2)$ . Soit  $\mathfrak{C}_2$  un cercle image conforme de  $D - A$ , et  $\mathfrak{C}'_2 = \mathfrak{C}_2 - \text{image de } j'\delta'$ .  $\mathfrak{C}'_2$  a pour image dans  $\Delta_5$  un domaine  $\Delta'_5$  et l'on peut construire  $\Delta_6 = (\Delta_5 \stackrel{\Delta'_5}{\cup} \mathfrak{C}'_2)$ . Soit  $\Gamma_6$  l'image dans  $\Delta_6$  de la courbe fermée  $\Gamma_4$ .

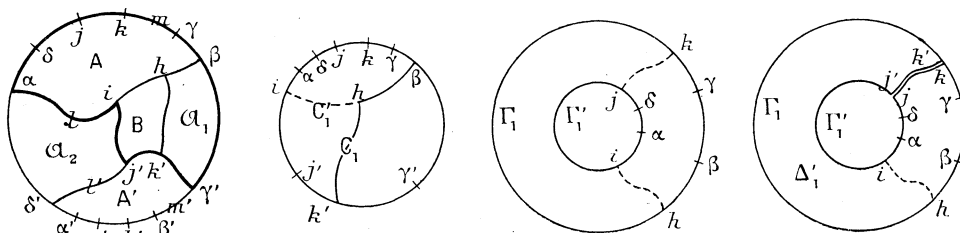


Fig. 13.

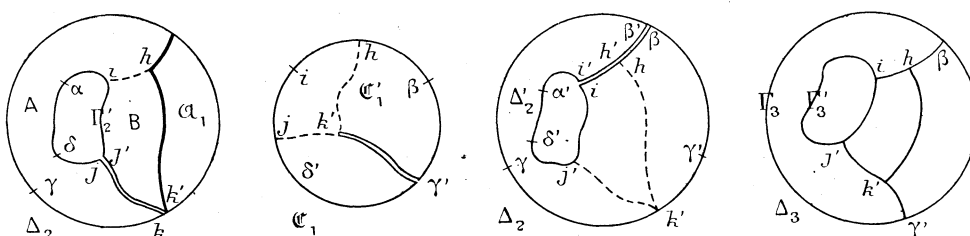


Fig. 14.

représentée en  $\Gamma_5$  dans  $\Delta_5$ . Le domaine doublement connexe compris entre les courbes  $\Gamma_6$  et  $\Gamma'_6$  (contour extérieur de  $\Delta_6$ ) est représentable conformément et biunivoquement sur une couronne circulaire  $\mathfrak{D}$ .  $\mathfrak{D} = (D \triangle D)$

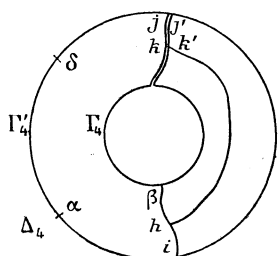


Fig. 15.

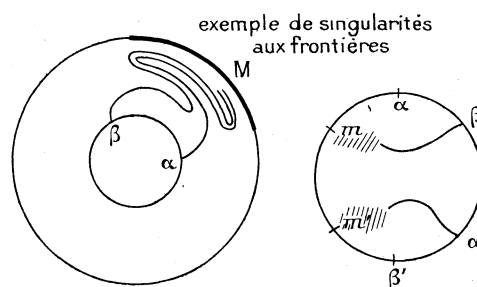


Fig. 16.

*Remarque.* — Supposons qu'il existe initialement (voir hypothèse § 2) une fonction  $\mathcal{F}^*(z)$  holomorphe et univalente dans  $A$ , prolongeable analytiquement suivant une courbe  $\mathcal{C}$  sans points doubles, non nécessairement intérieure à  $D$ , jusque dans  $A'$ , sur lequel ..., etc. On peut alors construire un domaine  $H$  simplement connexe contenant  $A$ ,  $A'$  et  $\mathcal{C}$  et une partie de  $D$  simplement connexe dans laquelle on peut construire une bande  $B$  reliant  $A$  et  $A'$ .  $H$  est

représentable sur un cercle  $H^*$  d'un plan  $z^*$ ; le domaine  $A \cup A' \cup B$  se représente suivant un anneau, sans point multiple, d'où l'existence d'une fonction  $\mathcal{F}(z)$  satisfaisant à l'hypothèse du paragraphe 2.

## CHAPITRE II.

### UNIFORMISATION DES SURFACES DE RIEMANN.

#### A. — Définition des surfaces de Riemann <sup>(1)</sup>.

##### 1. — VARIÉTÉS À DEUX DIMENSIONS.

Soient  $E$  un espace topologique régulier [au sens de Bourbaki <sup>(2)</sup>], et  $U(P)$  un voisinage faisant partie de la famille  $\mathcal{U}(P)$  des voisinages du point  $P$ . Un domaine  $G \subset E$  est un domaine élémentaire s'il est topologiquement représentable sur un cercle : une variété à deux dimensions est un espace topologique connexe pour lequel il existe un système de voisinages qui sont des domaines élémentaires à deux dimensions <sup>(3)</sup>.

*Triangulabilité.* — Il y a équivalence entre l'hypothèse de triangulabilité et la suivante : *Il existe un ensemble dénombrable de domaines élémentaires, qui recouvre la variété.*

*Représentation conforme locale.* — Supposons données les représentations topologiques  $T(U)$  qui représentent topologiquement les  $U$  sur le cercle unité :

*Axiome de conformité.* — Soit  $G \subset (U_1 \cap U_2)$ ,  $G'_1$  et  $G'_2$  les domaines images de  $G$ , respectivement par  $T(U_1)$  et  $T(U_2)$ . La correspondance  $T(U_2) \circ [T(U_1)]^{-1}$  est une représentation conforme directe de  $G'_1$  sur  $G'_2$ .

**DÉFINITION.** — Une surface de Riemann est une variété à deux dimensions, triangulable pour laquelle sont données les  $T(U)$  satisfaisant à l'axiome de conformité.

La surface  $S$ , variété triangulable à partir de laquelle est définie la surface de Riemann  $\mathcal{R}$  s'appellera *support de  $\mathcal{R}$* . L'ensemble des cercles unités  $\mathfrak{V}_i$  (images des  $U_i$ ), et des correspondances entre régions des  $\mathfrak{V}_i$  constitue l'*atlas* de  $\mathcal{R}$ . La représentation  $T(U_i)$  sera appelée l'*uniformisante locale* (Ortsuniformisierende) de  $U_i$ , ou *échelle de  $\mathfrak{V}_i$* .

<sup>(1)</sup> H. WEYL, *Die Idee der Riemannsche Fläche*; T. RADO, *Acta Szeged*, 2, 1925.

<sup>(2)</sup> BOURBAKI, *Topologie générale*, Ch. I. E satisfait aux axiomes  $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3 \mathfrak{V}_4$ , à l'axiome de Hausdorff H, et à l'axiome  $\mathcal{O}_{III}$ .

<sup>(3)</sup> Dans la suite les systèmes de voisinages seront toujours des domaines élémentaires.

**IDENTITÉ DE DEUX SURFACES DE RIEMANN.** — Pour que deux surfaces de Riemann soient identiques, il faut qu'elles aient *même support* (kollokale). Soient deux surfaces de même support  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$ ,  $(U^1)$  et  $(U^2)$  les systèmes de voisinages (équivalents) de  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{R}^2$ ,  $(T^1)$  et  $(T^2)$  les ensembles des uniformisantes locales correspondantes. La réunion  $(U^1) \cup (U^2)$  forme un système de voisinages de  $S$ ; si alors en conservant les mêmes uniformisantes locales, l'axiome de conformité est vérifié par le nouvel atlas les deux surfaces sont identiques.

Pour vérifier la transitivité de l'identité :  $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R}_2 \equiv \mathcal{R}_0$ ,  $\rightarrow \mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2$ , il suffira de vérifier la transitivité pour les structures analytiques, la transitivité de l'équivalence (topologique) des systèmes de voisinages définissant  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  étant connues.

**MORCEAU DE SURFACE DE RIEMANN.** — Un morceau  $G$  de  $\mathcal{R}$  est un sous-espace de  $S$  sur lequel les voisinages définissant la structure analytique, sont ceux définissant  $\mathcal{R}$  et contenus dans  $G$ , les uniformisantes locales étant les mêmes.

## 2. — REPRÉSENTATIONS CONFORMES.

**Définition.** — Soient  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  de supports respectifs  $S$  et  $S'$  et  $\Phi$  une représentation topologique de  $S$  sur  $S'$ . A  $(U)$  correspond par  $\Phi$ ,  $(U^*)$  sur  $S'$ . Les représentations  $T^*(U^*) = T(U) \circ \Phi^{-1}(U^*)$  constituent un système d'uniformisantes locales d'une surface de Riemann  $\mathcal{R}^*$  de support  $S'$ . Nous dirons que  $\Phi$  représente conformément  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{R}'$  si et seulement si  $\mathcal{R}^* \equiv \mathcal{R}'$ .

**Justification de l'identité.** — Soient  $\mathcal{R}_1 \equiv \mathcal{R}_2$ .  $\Phi$  leur fait correspondre  $\mathcal{R}_1^*$  et  $\mathcal{R}_2^*$ , dont les systèmes  $(U_1^*)$  et  $(U_2^*)$  avec leurs uniformisantes locales,  $T_1 \circ \Phi^{-1}(U_1^*)$  et  $T_2 \circ \Phi^{-1}(U_2^*)$  forment par réunion un système vérifiant l'axiome de conformité comme  $T_1(U_1)$  et  $T_2(U_2)$ . L'identité de deux surfaces de Riemann se conserve par représentation conforme.

**Inversion.** —  $\Phi$  représentant  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{R}'$ , on peut définir  $\mathcal{R}'$  par  $(U^*)$  et les uniformisantes locales  $T^*(U^*)$ .  $\Phi^{-1}$  transforme  $(U^*)$  en  $(U)$  et les uniformisantes locales sont  $T^*(U^*) \circ \Phi(U) = T(U) \circ \Phi^{-1}(U^*) \circ \Phi(U) = T(U)$ .  $\Phi^{-1}$  représente conformément  $\mathcal{R}'$  sur  $\mathcal{R}$ .

**Transitivité.** —  $\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_2$  par  $\Phi_1$ ,  $\mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_3$  par  $\Phi_2$ . Prenons pour  $(U_2)$  les  $(U_1^*)$  et pour  $(U_3)$  les  $(U_2^*)$ .  $\Phi_2 \circ \Phi_1$  réalise une représentation topologique de  $\mathcal{R}_1$  sur  $\mathcal{R}_3$  et le système  $(U_3)$  admet pour uniformisantes locales :

$$T_1(U_1) \circ [\Phi_2 \circ \Phi_1]^{-1}(U_3) = T_1(U_1) \circ \Phi_1^{-1}(U_2) \circ \Phi_2^{-1}(U_3^*) = T_2(U_2) \circ \Phi_2^{-1}(U_3) = T_3(U_3).$$

$\Phi_2 \circ \Phi_1$  transforme conformément  $\mathcal{R}_1$  en  $\mathcal{R}_3$ .

**THÉORÈME.** —  $T(U)$  représente conformément  $U$  sur le cercle unité.

Le cercle unité est muni de la topologie ordinaire (métrique euclidienne) et

les uniformisantes locales sont les représentations conformes ordinaires entre domaines plans.

Soit  $U_0$  représenté par  $T_0(U_0)$  sur le cercle unité  $V_0$ ; soient  $\mathfrak{V}$  la famille des voisinages définissant la topologie dans  $V_0$ ,  $V$  l'image conforme sur le cercle unité de  $\mathfrak{V}$ . Soit  $U \subset U_0$ ,  $T_0$  représente  $U$  sur  $U^* \subset V_0$ .  $T(U) \circ T_0^{-1}(U^*)$  définit sur  $V_0$  une surface de Riemann. Par hypothèse  $T_0$  est topologique, il reste à vérifier que les systèmes  $(\mathfrak{V})$  et  $(U^*)$  équivalents, vérifient l'axiome de conformité. Soit  $H_1 = U_1^* \cap \mathfrak{V}_1$ . La correspondance entre points de  $H_1$  considérés comme points de  $U_1^*$  et de  $\mathfrak{V}_1$  est l'identité, donc est conforme après représentation de  $\mathfrak{V}_1$  sur  $V_1$ . Comme  $U_0 \cap U_1 = U_1$ , les images de  $U_1$  par  $T_0$ , et par  $T(U_1)$  sont en correspondance conforme; ces images sont  $U_1^*$  et son image par  $T(U) \circ T_0^{-1}(U_1^*)$ . Les images de  $H_1$  sur  $V_1$  d'une part, et par  $T(U) \circ T_0^{-1}(U_1^*)$  d'autre part sont en correspondance conforme.

THÉORÈME. — *Les représentations conformes classiques sont des représentations conformes au sens ci-dessus.*

Soient  $D$  et  $\Delta$  deux domaines plans,  $(F)$  et  $(\Phi)$  les familles des voisinages de  $D$  et  $\Delta$ ,  $T(F)$  et  $\Theta(\Phi)$  les uniformisantes locales.  $\psi$  représente  $D$  sur  $\Delta$ , donc  $F$  sur  $F^*$  et, le système  $(F^*)$  avec les uniformisantes locales  $T(F) \circ \psi^{-1}(F^*)$ , définissent sur  $\Delta$  une surface de Riemann, identique à celle définie par  $(\Phi)$  avec les uniformisantes locales  $\Theta(\Phi)$  — on le reconnaît en remarquant que les uniformisantes locales  $T(F) \circ \psi^{-1}(F^*)$  et  $\Theta(\Phi)$  sont toutes deux des représentations conformes classiques.

### 3. — REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DE $\mathcal{R}$ <sup>(1)</sup>.

Soient  $P \in \mathcal{R}$  et  $U(P) \in (U)$  un voisinage de  $P$ , ayant pour image par  $T$ ,  $V$ , dans lequel  $Q$  est l'image de  $P$ . Soit  $V'$  déduit de  $V$  par l'homothétie  $\mathcal{H}(Q, 1/2)$ , et  $\mathfrak{V}$  l'image par l'homothétie  $\mathcal{H}(Q, 2)$  de l'ensemble des points de  $V$ , intérieurs à  $V'$ . Soit  $\mathcal{U}$  l'image de  $V'$  par  $[T(U)]^{-1}$ : c'est un domaine élémentaire  $\mathcal{U} \subset U(P)$  et  $P \in \mathcal{U}$ . Tous les points frontières de  $\mathcal{U}$  sont des points de  $\mathcal{R}$ . A chaque point  $P$  associons un  $\mathcal{U}$  particulier,  $\mathcal{U}_P$ .

$S$  peut être recouvert par un ensemble dénombrable de domaines élémentaires,  $D_i$ , ayant pour image par une certaine transformation topologique  $\Phi_i$ , un cercle  $d_i$ . Soit une suite  $C_i^j$  de cercles fermés concentriques à  $d_i$  et de rayons croissants tendant vers 1. Les  $C_i^j$  étant compacts, leurs images  $C_i^j$  sur  $S$  par  $\Phi_i^{-1}$  le sont aussi. Tout point de  $C_i^j$  est intérieur à un domaine élémentaire  $\mathcal{U}_P$ .  $C_i^j$  peut être recouvert par un nombre fini de  $\mathcal{U}_P$ , donc  $D_i$  et aussi  $S$  peuvent

(1) NEVANLINNA, *Ein Satz über offene Riemannsche Flächen* (Ann. Ac. Sci. Fenn., Ser. A, t. 54, n° 3); *Eindeutigkeitsfragen in der theorie der konformen Abbildung* (X<sup>e</sup> Congr. Math. Scand., Copenhague, 1946).

être recouverts par une infinité dénombrable de  $\overline{\mathcal{U}}_p$ . Appelons *éléments*  $\mathcal{E}_v$ , les  $\overline{\mathcal{U}}_p$  ainsi choisis pour recouvrir  $S$ .

Soit une surface de Riemann  $\mathcal{R}$  de support  $S$  définie par  $(U)$  et  $[T(U)]$  : on sait en déduire la famille des  $\mathcal{U}_p$  et leurs images  $\mathcal{V}_p$  par  $\mathcal{H}(Q, 2) \circ T(\mathcal{U}_p) = \mathcal{V}(\mathcal{U}_p)$ . Soient  $D \cap (\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2)$ ,  $D_1$  et  $D_2$  ses images par  $\mathcal{V}(\mathcal{E}_1)$  et  $\mathcal{V}(\mathcal{E}_2)$ ,  $D'_1$  et  $D'_2$  ses images par  $T(U_1)$  et  $T(U_2)$ . Les correspondances ponctuelles (dédites par identité des images sur  $D$ ) sont conformes directes entre  $D_1$  et  $D'_1$ , ainsi qu'entre  $D_2$  et  $D'_2$ . Or le système  $(U)$  et  $[T(U)]$  satisfait à l'axiome de conformité, donc la correspondance est conforme directe entre  $D'_1$  et  $D'_2$  et aussi entre  $D_1$  et  $D_2$ .

On dit qu'on a obtenu une représentation paramétrique de  $\mathcal{R}$  lorsqu'on a défini sur  $\mathcal{R}$  une famille de domaines  $(\mathcal{E}_v)$  satisfaisant aux conditions :

1° *Tout point de  $\mathcal{R}$  appartient à un élément au moins de la famille dénombrable  $(\mathcal{E}_v)$ .*

2° *La frontière de tout  $\mathcal{E}_v$  appartient à  $\mathcal{R}$ .*

3° *Deux points quelconques de  $\mathcal{R}$  peuvent être joints par une chaîne d'un nombre fini de  $(\mathcal{E}_v)$  chacun ayant une partie commune avec le précédent.*

4° *Tout  $(\mathcal{E}_v)$  est représentable conformément sur un cercle  $A_v$  (du plan  $z$ )  $|z| \leq 1$ . Cette représentation conforme biunivoque doit être prolongeable et rester biunivoque dans  $\mathcal{E}'_v \supset \overline{\mathcal{E}}_v$ ,  $\mathcal{E}'_v \subset \mathcal{R}$ .*

5° *Les images dans  $A_v$  et  $A_\mu$  de  $\delta = \mathcal{E}_v \cap \mathcal{E}_\mu$  sont en correspondance conforme. Les cercles  $A_v$  sont appelés *cercles paramètre*, leur ensemble et celui des correspondances conformes entre parties de  $A_v$  et  $A_\mu$  (<sup>(1)</sup>) constituent l'*Atlas réduit* de  $\mathcal{R}$ .*

CONSTRUCTION DE  $\mathcal{R}$ . — Donnons-nous un atlas réduit satisfaisant aux conditions suivantes :

*a.* A tout point frontière d'un  $A_v$  correspond par relation d'enchaînement un point intérieur d'un  $A_\mu$  au moins ;

*b.* Si  $d_v \subset A_v$  correspond à  $d_\mu \subset A_\mu$  et à  $d_\lambda \subset A_\lambda$ , la relation d'enchaînement entre  $A_\mu$  et  $A_\lambda$  représente conformément  $d_\mu$  sur  $d_\lambda$ .

Bornons-nous à la construction d'une surface de Riemann étalée (obtenue par prolongement d'éléments de Weierstrass) admettant l'atlas donné comme atlas réduit. La surface  $\mathcal{R}$  (si elle existe) dépend de l'élément  $\mathcal{E}_1$  que l'on fait correspondre au cercle paramètre  $A_1$  ; avec un même atlas, la construction de  $\mathcal{R}$  peut être possible ou impossible suivant le choix de  $\mathcal{E}_1$ , sous la condition que les  $T(U)$  soient des représentations conformes classiques.

---

(<sup>1</sup>) Ou relations d'enchaînement.

*Exemple.* — Soient dans un plan  $z$  les trois cercles suivants :

$$C_1 : |z - \sqrt{2}| \leq 1, \quad C_2 : |z| \leq 1, \quad C_3 : |z + \sqrt{2}| \leq 1.$$

Représentons ces trois cercles sur les cercles  $A_1, A_2, A_3$ ; les diverses images de  $C_1 \cap C_2$  et  $C_2 \cap C_3$  définissent des relations d'enchaînement entre  $A_1, A_2$  et  $A_3$ , qui peuvent être regardés comme atlas réduit du morceau du plan complexe  $z \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$ .

Soit alors  $C'_2 : |z| \leq 1 + a$  ( $0 < a < \sqrt{2} - 1$ ). Représentons  $C'_2$  sur le demi-plan  $\xi < 0$  de la variable  $\zeta = \xi + i\eta$  en associant  $1 + a \leftrightarrow 0, -1 - a \leftrightarrow \infty$ . Aux cercles  $C_1$  et  $C_2$  correspondent les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , et la fonction  $\log(\zeta - h)$ , holomorphe dans  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  leur associe des domaines (pouvant se recouvrir),  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Associons à  $A_1$  l'élément  $\mathcal{E}_1$ ; par prolongement de la relation d'enchai-

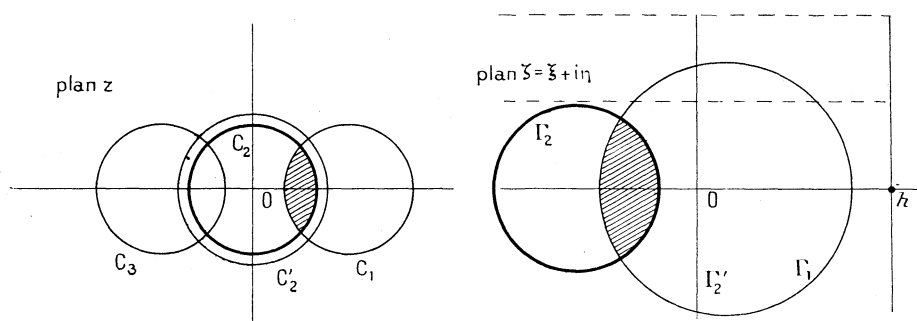


Fig. 17.

nement entre parties de  $A_1$  et  $A_2$ , on construit  $\mathcal{E}_2$  comme image de  $A_2$  sur  $\mathcal{R}$  cherchée; la relation d'enchaînement entre  $A_2$  et  $A_3$  fournit une représentation conforme biunivoque entre un morceau de  $\mathcal{E}_2$  et un morceau de  $A_3$ , prolongeable dans une partie de  $A_3$  mais pas dans  $A_3$  entier (il y a un point exceptionnel correspondant à  $z = -1 - a$ ). A l'atlas  $A_1, A_2, A_3$  correspond un morceau de surface de Riemann si l'on associe  $C_1$  à  $A_1$ , mais ce n'est plus vrai si l'on associe  $\mathcal{E}_1$  à  $A_1$ . Ainsi toutes les relations d'enchaînement interviennent pour déterminer la possibilité de construction d'une surface de Riemann admettant un atlas réduit donné, le premier élément étant aussi donné, la métrique conforme étant imposée.

#### 4. CARACTÈRES TOPOLOGIQUES.

*a.* Une surface  $\mathcal{R}$  est *fermée* si toute suite infinie de points intérieurs à  $\mathcal{R}$  admet un point limite intérieur à  $\mathcal{R}$ . Du fait que  $\mathcal{R}$  peut être recouverte par une infinité dénombrable d'éléments on déduit que cette définition des surfaces fermées (compacte au sens de Fréchet) est équivalente à la suivante :  $\mathcal{R}$  peut être recouverte par un nombre fini d'éléments. Ces surfaces sont aussi compactes au sens de Bourbaki.  $\mathcal{R}$  est dite ouverte si elle n'est pas fermée;



b. On appelle *genre* d'une surface  $\mathcal{R}$  le nombre maximum de courbes fermées, disjointes que l'on peut tracer à l'intérieur de la surface sans la morceler.

Les surfaces de genre zéro, ou quasi simples (schlichtartige), sont homéomorphes à des domaines plans.

c. Une surface de genre zéro est *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur elle la sépare en deux morceaux dont l'un est formé exclusivement de points intérieurs à la surface, lorsqu'on lui ajoute son adhérence.

## 5. INTERSECTION DE DEUX ÉLÉMENTS.

Soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  formés à partir de  $U_1$  et  $U_2$ , ayant pour images par  $T(U)$ ,  $V_1$  et  $V_2$  contenant  $V'_1$  et  $V'_2$  images de  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$ . Soient  $d_1$  et  $d_2$  les images de  $d = U_1 \cap U_2$ , limités par les circonférences  $C_1$  et  $C_2$  de  $V_1$  et  $V_2$  et par des

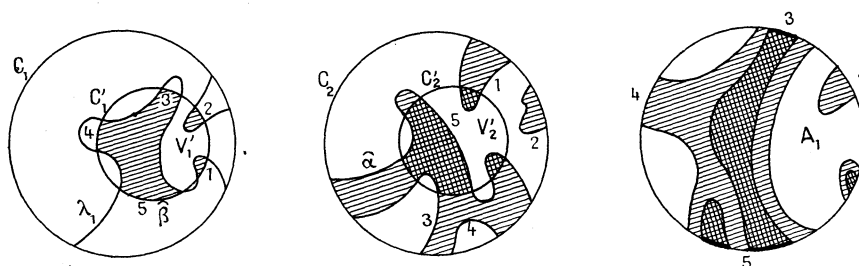


Fig. 18.

courbes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Soit  $m_1$  un point de  $\lambda_1$  : la correspondance résultant de l'identité des images sur  $\mathcal{R}$ , ne peut associer à  $m_1$  un point  $m_2 \in V_2$  : soit  $M$  l'image de  $m_1$  sur  $S$ ;  $M \in U_1$ , donc il existe  $U^1(M) \subset U_1$ ; de même il existerait  $U^2(M) \subset U_2$ . Posons  $U(M) = U^1(M) \cap U^2(M)$ ;  $U(M) \in (U)$ . Soient  $v(m_1) \subset V_1$  et  $v(m_2) \subset V_2$  les images par  $T(U)$  de  $U(M)$ . On aurait  $v(m_1) \subset d_1$  et  $v(m_2) \subset d_2$ , ce qui serait contraire au fait que  $m_1$  (et  $m_2$ ) sont frontières de  $d_1$  et  $d_2$ .

Soient  $C'_1$  et  $C'_2$  les circonférences de  $V'_1$  et  $V'_2$ .  $C'_1$  est partagée par  $\lambda_1$  (image de  $C_2$ ) en un nombre fini ou infini d'arcs  $\beta$  joignant deux points de  $\lambda_1$ , et auxquels correspondent dans  $V_2$  des arcs  $\alpha$  joignant deux points de  $C_2$ . Une courbe  $\gamma$  intérieure à  $V_2$  (en particulier  $C'_2$ ) ne peut être coupée que par un nombre fini d'arcs  $\alpha$  : sinon on pourrait considérer une suite de points communs à  $\gamma$  et aux arcs  $\alpha$ ; à cette suite correspondrait une suite de points sur  $C'_1$  s'accumulant en un point qui serait aussi point d'accumulation d'extrémités d'arcs  $\beta$ ; donc en revenant à l'image de la portion de  $\mathcal{R}$  correspondante, sur  $V_2$ , des points de  $C_2$  auraient même point limite que des points de  $\gamma$ . Un arc  $\alpha$  ne peut couper  $C'_2$  qu'en un nombre fini de points : on peut extraire de  $\alpha_0$  un arc  $\alpha'_0 \subset d_2$  (en supprimant des voisinages des extrémités); à  $\alpha'_0$

correspond  $\beta'_0 \subset d_1$ ;  $\alpha'_0$  est l'image par une fonction analytique de l'arc de cercle  $\beta'_0$  donc c'est un arc analytique ne pouvant couper  $C_2$  qu'en un nombre fini de points.

**THÉOREME.** — Soient deux éléments  $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j$  d'images  $A_i, A_j$ . L'image dans  $A_j$  de  $\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j$  est limitée par un nombre fini d'arcs analytiques intérieurs à  $A_j$  et correspondant à des arcs de la circonférence de  $A_i$ .

$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$  comprend un nombre fini de composantes connexes. Si l'une n'est pas simplement connexe il existe une courbe fermée intérieure à  $V_1$  correspondant à un arc de  $C_2$  donc à  $C_2$  entière. C'est aussi le cas, si l'une des composantes de  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  n'est pas simplement connexe.  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ , satisfait à l'une des conditions suivantes :

**THÉOREME.** —  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ , sont formés d'un nombre fini de composantes simplement connexes;

—  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  doublement connexe est limité par la périphérie de  $\mathcal{E}_1$  et celle de  $\mathcal{E}_2$ ;

—  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$  ou  $\mathcal{E}_2$  : l'un des éléments est contenu dans l'autre.

#### B. — Raccordement des surfaces de Riemann.

Soient sur  $\mathcal{R}$  deux domaines D et C, limités par un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments  $\mathcal{E}_j$ . D et C sont représentés conformément sur les cercles  $\Delta$  et  $\Gamma$  des plans complexes  $u$  et  $v$ .  $D \cap C$  a pour image  $\Gamma'$  dans  $\Gamma$ . Soit dans un plan  $z$   $\Omega = (\Delta \stackrel{\Gamma'}{\cap} \Gamma)$  s'il existe.

a. A tout point  $M \in (D \cup C)$  correspond un point  $z \in \Omega$  et inversement. Il est immédiat que la représentation  $z = \Phi(M)$  de  $D \cup C$  sur  $\Omega$  est topologique.

b. Soit  $U \in (U)$  qui définit  $\mathcal{R}$ ;  $U \subset (D \cup C)$  et  $W = \Phi(U)$ . Soit V un voisinage dans  $\Omega$  et  $\delta = W \cap V$ . Pour montrer que  $z = \Phi(M)$  est conforme il suffit de vérifier que  $\delta$  et son image par  $T(U) \circ \Phi^{-1}(\delta)$ , ou W et  $T(U) \circ \Phi^{-1}(W)$  (c'est-à-dire les images de U par  $\Phi$  et T) sont en correspondance conforme. Soit  $P \in U$ , il existe  $U(P) \subset U$ .  $P \in (D \cup C)$  donc  $P \in \dot{D}$  ou  $P \in \dot{C}$ . Supposons  $P \in \dot{D}$ , on peut prendre  $U(P) \subset D$ . Comme  $U \cap U(P) = U(P)$  les images de  $U(P)$  par  $T(U)$  et  $T[U(P)]$  sont en correspondance conforme. La représentation conforme de D sur  $\Delta$  représente  $U(P)$  sur  $U'(p)$  en correspondance conforme avec l'image de  $U(P)$  par  $T[U(P)]$ . L'image de  $U(P)$  par  $\Phi$  se déduisant de  $U'(p)$  par représentation conforme est elle-même image conforme du transformé de  $U(P)$  par  $T(u)$ . Cela ayant lieu pour tout  $P \in U$ ,  $z = \Phi(M)$  est bien conforme.

#### 1. — CORRESPONDANCE ENTRE FRONTIÈRES.

Supposons  $\Gamma'$  connexe. Si  $\Gamma'$  était doublement connexe il n'y aurait pas d'éléments frontières de  $\Omega$  (plan entier). Supposons  $\Gamma'$  simplement connexe.

Nous supposons désormais que  $C$  est un morceau simplement connexe d'un élément  $\mathcal{E}$  décomposé en  $C'$  (image de  $\Gamma'$  sur  $\mathcal{R}$ ) et  $C - C'$  tous deux simplement connexes.

*a. Raccordement par croissants.* — Si  $(\Delta \stackrel{\Gamma}{\sqcup} \Gamma)$  est obtenu par un processus fini, la correspondance entre frontières est ponctuelle, analytique dans l'intérieur des arcs de circonférence, et continue même en  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  (notation ch. I).

— Soit  $A$  le cercle image de  $\mathcal{E}$  et  $V$  l'image de  $U$  (dont  $\mathcal{E}$  est extrait) par prolongement de la représentation précédente. Soit  $b$  l'image dans  $V$  de  $D \cap U$ ;  $b$  est limité par une courbe  $\lambda$  dont toute portion intérieure à  $V$  est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques. Soit  $G$  l'image de  $C$  dans  $A$ , décomposée en  $G'$  et  $G - G'$ .  $\lambda$  coupe la périphérie de  $G$  en deux points seulement dont l'un  $\beta$  est, après représentation de  $G$  sur un cercle, extrémité singulière de l'image de  $G'$ .

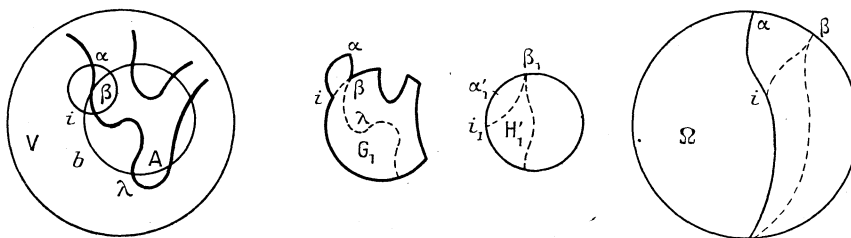


Fig. 19.

Construisons un petit cercle de centre  $\beta$ , coupant  $\lambda$  en deux points seulement (c'est possible d'après l'analyticité de  $\lambda$  au voisinage de  $\beta$ ), dont l'un  $\alpha$  est extérieur à  $A$ . Soit  $i$  le point où ce petit cercle coupe l'arc de circonférence de  $A$  intérieur à  $b$ . Soit  $G_1 = G \cup \text{triangle } \beta\alpha i$ ;  $\lambda$  décompose  $G_1$  en  $G'_1 = G' \cup \text{triangle } \beta\alpha i$ , et  $G - G'$ . Soit  $H_1$  l'image circulaire de  $G_1$ ,  $G'_1$  ayant pour image  $H'_1$ ;  $\beta_1, \alpha'_1, i_1$  correspondent à  $\beta, \alpha, i$ . Les parties de  $\Delta$  et  $H$  en correspondance conforme par identité des images sur  $\mathcal{R}$  ou  $V$ , sont dans  $\Delta$  et dans  $H$ , ( $H'_1$ ), du type « en croissant ». Dans  $\Delta$ , c'est l'homologue de  $\alpha'_1$  qui est extrémité de  $\Delta'$  (correspondant à  $H'_1$ ). Donc  $\Omega = (\Delta \stackrel{H'_1}{\sqcup} H_1)$  se construit par un processus fini (puisque  $\alpha'_1 \neq \beta_1$ ). On reconnaît que  $\Omega = (\Delta \stackrel{G}{\sqcup} G) = (\Delta \stackrel{\Gamma}{\sqcup} \Gamma)$ . La correspondance est encore continue au point  $\beta$  de  $V$ .

*Remarque.* — Si cela est nécessaire on fera la même construction autour du deuxième point d'intersection de  $\lambda$  avec la périphérie de  $G$ .

*b. Raccordement par pince et croissants.* — La périphérie de l'un des deux domaines ne sort pas de l'autre. Si  $\lambda \subset \bar{A}$ , ce serait une courbe fermée ayant en commun avec la circonférence, soit un ou plusieurs arcs, soit plusieurs points, soit un point. Dans les deux premiers cas on aurait à réaliser un raccordement par croissants entre  $\Delta$  et une partie de  $A$ , dans le troisième cas on aurait à

réaliser un raccordement par pinces (*fig. a*);  $\lambda \subset \bar{A}$  c'est le cas de raccordement par anneaux. Supposons donc la périphérie de  $G \subset \bar{b}$ . Le partage de  $G$  est du type « en pince » : Le partage de  $\Delta$  est du type « en croissant » (*fig. c*),  $\Delta - \Delta'$  pouvant être formé d'un nombre fini de composantes connexes. Si  $(\Delta \stackrel{\Gamma}{\sqcup} \Gamma)$  est obtenu par un processus fini, la correspondance entre frontières est ponctuelle continue; sinon soient  $\beta$  et  $\beta^*$  (*fig. b*) les points confondus où les deux branches de  $\lambda$  coupent la périphérie de  $G$ . Dans le voisinage de  $\beta$  chaque branche est composée de deux arcs analytiques, l'un extérieur, l'autre intérieur à  $A$ . Construisons un petit cercle de centre  $\beta$  coupant chaque branche de  $\lambda$  en deux points seulement, deux points d'intersection  $\alpha$  et  $\alpha^* \notin \bar{A}$ . Soient  $i$  et  $i^*$  les

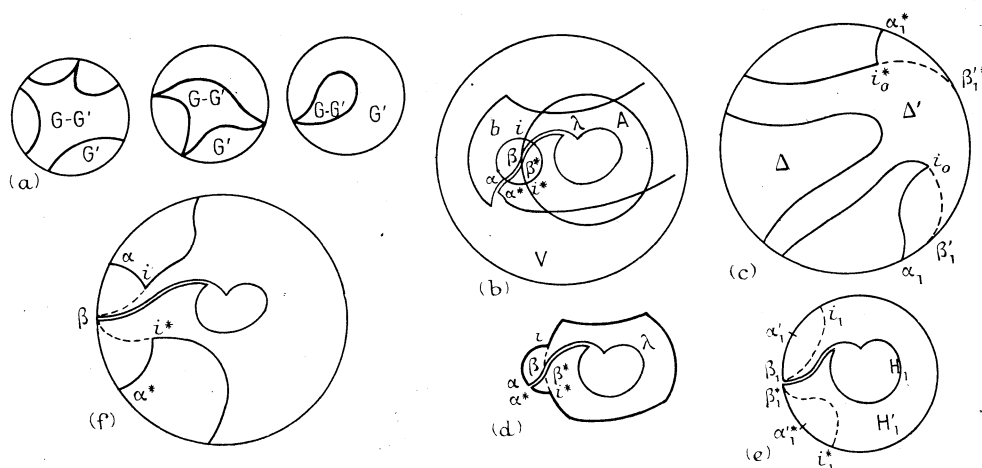


Fig. 20.

points où ce petit cercle coupe la circonférence de  $\bar{A}$ . Soient  $G_1 = G \cup$  triangle  $\beta xi \cup$  triangle  $\beta^* \alpha^* i^*$ ,  $H_1$  l'image circulaire de  $G_1$  (*fig. e*);  $\alpha_1, \alpha_1', i_1, i_1', \beta_1, \beta_1'$  correspondent à  $\alpha, \alpha^*, i, i^*, \beta, \beta^*$ . La partie de  $\Delta$  en correspondance conforme avec  $H_1$ , par identité des images sur  $V$  est encore du type en croissant (*fig. c*).  $\alpha_1, \beta_1', i_0, \alpha_1, \beta_1', i_0$  correspondent à  $\alpha^*, \beta^*, i^*, \alpha, \beta, i$ ;  $\Omega = (\Delta \stackrel{H_1}{\sqcup} H_1)$  se construit par un processus fini en introduisant les arcs de cercles d'extrémités  $\beta_1, \beta_1'$ .  $\Omega = (\Delta \stackrel{\Gamma}{\sqcup} \Gamma)$  et la correspondance est ponctuelle continue au point  $\beta$  de  $V$  (*fig. f*).

*c. Raccordement par pinces.* — La périphérie de chaque domaine est intérieure à l'autre.  $\lambda$  ne sort pas de  $A$  et a un point commun avec sa circonférence; dans le voisinage de ce point  $\lambda$  est formé de deux arcs analytiques. La méthode précédente, par l'introduction d'un petit cercle de centre  $\beta$  conduit par raccordement par anneaux au domaine  $\Omega$ , et la correspondance est encore ponctuelle continue en  $\beta$ .

**THÉORÈME.** — Soient sur  $\mathcal{R}$  deux domaines  $D$  et  $C$  limités chacun par un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments  $\mathcal{E}_i$ .  $D \cap C = C'$ .  $C \subset \mathcal{E}_i$  avec  $C$  et  $C - C'$  simplement connexes.  $D$  et  $C$  sont représentables sur des cercles  $\Delta$  et  $\Gamma$  des plans complexes  $z$  et  $\zeta$ . Dans ces conditions  $\dot{D} \cup \dot{C}$  est représentable conformément sur un domaine d'un plan complexe  $Z$  (plan entier, plan pointé ou cercle fini), la correspondance entre frontières étant ponctuelle continue.

**REMARQUES 1.** — D'après le rôle joué par  $\lambda$  on peut se borner à faire sur la nature de la frontière de  $D$ , l'hypothèse suivante : la périphérie de  $D$  est une courbe  $\Lambda$  dont toute portion intérieure à un voisinage  $U$  est formée d'un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments  $\mathcal{E}_i$ . Nous dirons que  $\Lambda$  est une courbe normale sur  $\mathcal{R}$ . Le théorème est encore valable.

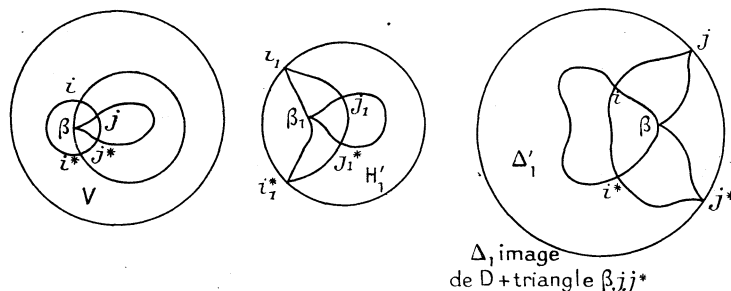


Fig. 21.

2. Conservons toujours les mêmes hypothèses sur  $C$ , et considérons un cercle  $\Delta$  dont un morceau  $\delta$ , simplement connexe, est représentable conformément sur  $d \subset \mathcal{R}$ , où  $d$  est limité par une courbe normale. Soit  $d' = C' = d \cap C$ , ayant pour images  $\delta'$  et  $\Gamma'$  dans  $\delta$  et  $\Gamma$ . On sait alors construire  $\Omega = (\Delta \stackrel{\delta'}{\cup} \Gamma)$  la correspondance entre frontières étant ponctuelle et continue.

## 2. RECOLLEMENT.

Soient sur la circonférence d'un cercle  $\Delta$ , deux arcs  $\widehat{pq'}$ ,  $\widehat{pq''}$  ( $\widehat{pq'} \cap \widehat{pq''} = \{p\}$ ). Supposons qu'il existe  $\delta \subset \Delta$  contigu à  $\widehat{q'pq''}$ , représenté conformément par  $\psi$  sur  $d \subset \mathcal{R}$ , de sorte que  $\widehat{pq'}$  et  $\widehat{pq''}$  aient pour image une même courbe  $\gamma$ , normale, d'extrémités  $P$  et  $Q$ . Soit  $C$  l'intérieur de  $d \cup \gamma$ , que nous supposons intérieur à un élément  $\mathcal{E}_i$  (et simplement connexe), représentable sur un cercle  $\Gamma$ , dans lequel  $\delta$  a pour image  $\Gamma'$ . On dit que  $\widehat{pq'}$  et  $\widehat{pq''}$  sont *contigus associés*. D'après la remarque 2 (ci-dessus), on sait construire  $\Omega = (\Delta \stackrel{\delta}{\cup} \Gamma)$ , les points de  $\widehat{q'pq''}$  correspondant à des points intérieurs à  $\Omega$ . Si  $\widehat{q'pq''}$  couvre la circonférence de  $\Delta$ , avec  $\delta$  doublement connexe,  $\Omega$  est le plan entier (fig. b); si  $\delta$  est simplement

connexe (*fig. c*),  $Q \notin C$ , et  $\Omega$  est le plan pointé (privé de l'image de  $Q$ ). Si  $\widehat{q'pq''}$  ne couvre pas la circonférence de  $\Delta$ ,  $\Omega$  est un cercle dont la circonférence est une image ponctuelle continue de l'arc  $\widehat{q'q''}$  ne contenant pas  $p$  (*fig a*). Dans tous les cas on dit qu'on est passé de  $\Delta$  à  $\Omega$  par *recollement* suivant les arcs contigus associés  $\widehat{pq'}$  et  $\widehat{pq''}$ .

Dans le cas où  $\Omega$  est un cercle que nous notons  $\Delta_0$ ,  $p_1$  étant l'image de  $q'$  (et  $q''$ ), il se peut que  $p_1$  soit l'extrémité commune de deux arcs contigus associés  $\widehat{p_1s'_1}$ ,  $\widehat{p_1s''_1}$  correspondant à  $\widehat{q'q'_1}$  et  $\widehat{q''q''_1}$  sur la circonférence de  $\Delta$ . Soit  $\Delta_1$  obtenu par recollement de  $\Delta_0$  suivant  $\widehat{p_1s'_1}$  et  $\widehat{p_1s''_1}$ . Il se peut que l'on puisse recoller  $\Delta_2$  et ainsi de suite :

a. Si  $\Delta_n$  ne peut pas être recollé : si  $q'_n \neq q''_n$  la circonférence de  $\Delta_n$  est en correspondance ponctuelle continue avec  $\widehat{q'_nq''_n}$  qui  $\nexists p$ . Cette correspondance

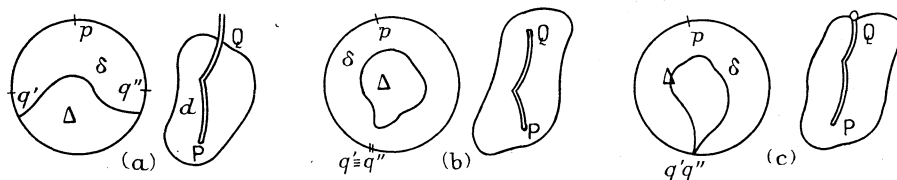


Fig. 22.

est analytique entre les intérieurs de ces arcs; si  $q'_n = q''_n$ ,  $\Delta_n$  est soit le plan pointé soit le plan entier, suivant la façon dont a pu être effectué le recollement de  $\Delta_{n-1}$  (*fig. b* et *c*) : Dans ces deux cas on dira encore que  $\widehat{pq'_n}$  et  $\widehat{pq''_n}$  sont contigus associés.

b. La suite des  $\Delta_n$  étant infinie, chaque  $\Delta_n$  contient une image conforme de  $\Delta_{n-1}$ . Toutes les représentations de  $\Delta$  dans  $\Delta_n$  étant normalisées au centre de  $\Delta$ , on peut appliquer les résultats du Chapitre I, A. Soit  $\Omega$  le cercle limite. Sur la circonférence de  $\Delta$ ,  $q'_n \rightarrow Q'$ ,  $q''_n \rightarrow Q''$ . L'intérieur de  $\widehat{Q'pQ''}$  se représente sur un arc  $\lambda \subset \Omega$ , tandis que l'intérieur de  $\widehat{Q'Q''}$  est représenté analytiquement sur un arc de la circonférence de  $\Omega$ , mais plusieurs éventualités sont possibles concernant la représentation des points  $Q'$  et  $Q''$  : il se peut que un arc de circonférence de  $\Omega$  soit un bout premier correspondant à  $Q'$  ou  $Q''$ , ou que la circonférence entière de  $\Omega$  soit bout première correspondant à  $Q'$  si  $Q' \equiv Q''$ ,  $\Omega$  étant de rayon fini. On dit que  $\widehat{pQ'}$  et  $\widehat{pQ''}$  sont contigus associés *au sens large*.

APPLICATION. — Soit sur  $\mathcal{R}$  un domaine  $D$  limité par un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments  $\mathcal{E}_i$ , représentable conformément sur un cercle  $\Delta$ , la correspondance étant ponctuelle, continue entre les frontières. Supposons que deux arcs frontières de  $D$ ,  $PQ$  et  $PQ'$  suivent le même tracé  $\Lambda$  sur  $\mathcal{R}$  et correspondent à  $pq'$

et  $pq''$  sur la circonférence de  $\Delta$ . Les deux arcs  $\widehat{pq'}$  et  $\widehat{pq''}$  sont contigus associés : en d'autres termes  $D \cup \Lambda$  est représentable conformément sur un cercle, la correspondance étant encore ponctuelle continue entre les frontières, le cercle image de  $D \cup \Lambda$  pouvant être de rayon infini.

Il suffit de remarquer que  $\Lambda$  peut être recouvert par un nombre fini d'éléments  $\mathcal{E}_i$ , et de prendre pour domaines  $\mathcal{C}$  les morceaux les plus grands possibles de ces  $\mathcal{E}_i$ . On se trouve alors nécessairement dans le cas *a* ci-dessus.

### 3. — SOUDURE.

Soient deux cercles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et deux morceaux simplement connexes  $\delta_1 \subset \Delta_1$ ,  $\delta_2 \subset \Delta_2$ , contigus aux arcs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  des circonférences de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Supposons qu'il existe deux représentations conformes, de  $\delta_1$  sur  $d_1 \subset \mathcal{R}$ , et de  $\delta_2$  sur  $d_2 \subset \mathcal{R}$  telles que  $d_1 \cap d_2 = \emptyset$  et que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  aient pour images sur  $\mathcal{R}$  une même courbe normale  $\Lambda$ . Dans ces conditions on peut réaliser la soudure de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  suivant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , c'est-à-dire construire un cercle  $\Delta$  contenant une image conforme de  $\Delta_1$ , de  $\Delta_2$  et de  $d_1 \cup d_2 \cup \Lambda$ . Si l'une des extrémités de  $\Lambda$  appartient à  $\mathcal{R}$ , il lui correspond un point sur la circonférence de  $\Delta$ .

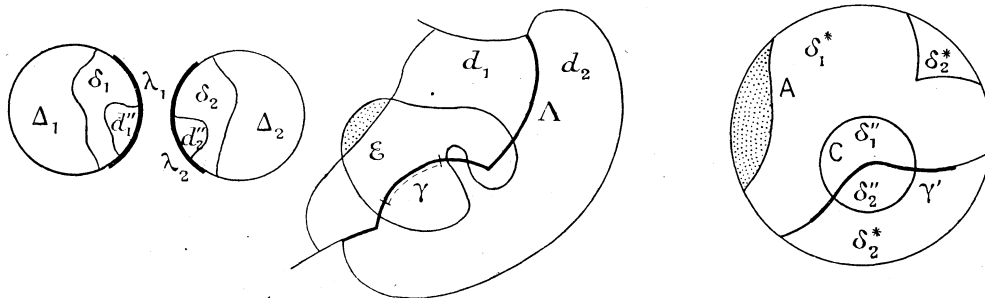


Fig. 23.

Soit  $\gamma \subset \Lambda$ , et périphérique de  $\mathcal{E}_\gamma$ . Sur  $A$ , image de  $\mathcal{E} \supset \gamma$  ( $\gamma$  est pris assez petit pour qu'un tel  $\mathcal{E}$  puisse exister),  $\gamma$  a pour image un arc analytique, dont  $\gamma$  est une portion connexe intérieure à  $A$ . Soient  $\delta_1^*$  et  $\delta_2^*$  les images dans  $A$  de  $\mathcal{E} \cap d_1$  et  $\mathcal{E} \cap d_2$ ,  $\delta_1'$  et  $\delta_2'$  les composantes connexes de  $\delta_1^*$  et  $\delta_2^*$  contiguës à  $\gamma'$ . On peut construire dans  $\delta_1' \cup \gamma' \cup \delta_2'$  un cercle  $C$  coupant  $\gamma'$  en deux points seulement sous des angles  $\neq 0$  et  $\pi$ .  $\delta_1'' = C \cap \delta_1'$ ,  $\delta_2'' = C \cap \delta_2'$ . La représentation de  $\delta_1''$  sur le morceau correspondant de  $\delta_1$  restant analytique au voisinage de l'arc  $\gamma'$ , la périphérie de  $d_1''$  image de  $\delta_1''$  coupe la circonférence de  $\Delta_1$  sous des angles  $\neq 0, \pi$ .  $\omega_1 = (\Delta_1 \setminus d_1'', C)$  s'obtient alors par un processus fini. Soit  $d_2''$  l'image dans  $\omega_1$  de  $\delta_2''$ . Dans  $\Delta_2$  la périphérie de  $d_2''$  est un arc analytique coupant la circonférence de  $\Delta_2$  sous des angles  $\neq 0, \pi$ . Donc  $\omega = (\omega_1 \setminus d_2'', \Delta_2)$  s'obtient par un processus fini. On a réalisé la soudure de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  suivant  $\lambda_1''$  et  $\lambda_2''$  corres-

pondant à  $\gamma'' = C \cap \gamma'$ . Soient  $\lambda_1^1, \lambda_1^2$  les deux arcs de la circonférence de  $\mathcal{O}$ , correspondant à  $\lambda_1 - \lambda_1''$ , et  $\lambda_2^1, \lambda_2^2$  ceux qui correspondent à  $\lambda_2 - \lambda_2''$ .  $\lambda_1^1$  et  $\lambda_1^2$  sont contigus associés (au sens large seulement si  $\Lambda$  n'a pas d'extrémité correspondante sur  $\mathcal{R}$ ) ainsi que  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$ . La réalisation du recollement de  $\mathcal{O}$  suivant  $\lambda_1^1, \lambda_1^2$  d'une part,  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  d'autre part conduit à un domaine  $\Omega$  qui réalise la soudure de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  suivant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On dit que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des arcs *associables*.

### C. — Représentation conforme des surfaces de Riemann découpées.

#### 1. — DÉCOUPAGE DE $\mathcal{R}$ .

$A_1$  étant le cercle image de  $\mathcal{E}_1$ , toutes les représentations considérées seront définies dans  $A_1$  et normalisées au centre.

*a.* Soit  $\mathcal{E}_2$  l'élément de plus faible indice tel que  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ .

— Si  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$  ou  $\mathcal{E}_2$ ,  $A_1$  ou  $A_2$  réalisent la représentation sur un cercle de  $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ .

— Si  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  est doublement connexe,  $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$  couvre  $S$  (fermée). On sait construire  $z = \Phi(M)$  représentant  $\mathcal{R}$  sur le plan entier.

—  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$  est formé d'un nombre fini de composantes simplement connexes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ .  $\mathcal{C}_1$  est contiguë à  $\mathcal{E}_1$  suivant un arc au moins : soit  $\Gamma_1$  l'un deux (le plus grand possible) et soit  $\mathcal{C}'_1$  la composante de  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$  contiguë à  $\Gamma_1$ . Soient  $C_1, C'_1, \gamma_1$  les images dans  $A_2$  de  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1, \Gamma_1$ ;  $\mathcal{C}_1 \cup \gamma_1 \cup \mathcal{C}'_1$  simplement connexe est représentable sur un cercle  $\mathcal{C}_1$  dans lequel  $\mathcal{C}'_1$  est l'image de  $C'_1$ . Soit  $\mathcal{O}_1 = (A_1 \mathcal{C}_1)$ , l'image conforme de  $\mathcal{O}_1^* = \mathcal{E}_1 \cup \gamma_1 \cup \mathcal{C}_1$ . Opérant avec  $\mathcal{O}_1^*$  et  $\mathcal{C}_2$  comme avec  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{C}_1$ , on construit  $\mathcal{O}_2 = (\mathcal{O}_1 \mathcal{C}_2)$ .  $\mathcal{O}_n$  est une image conforme circulaire de  $\mathfrak{D}_2 \subset \mathcal{R}$  constituée par les points de  $\mathcal{E}_1$  et de  $\mathcal{E}_2$ , certains points intérieurs de  $\mathcal{E}_2$ , points frontières de  $\mathcal{E}_1$  pouvant être frontières de  $\mathfrak{D}_2$ . La frontière de  $\mathfrak{D}_2$  est formée d'un nombre fini d'arcs périphériques d'éléments  $\mathcal{E}_i$ , et la correspondance entre la frontière de  $\mathfrak{D}_2$  et la circonférence de  $D_2 = \mathcal{O}_n$  est ponctuelle continue.

*b.* Soit  $\mathcal{E}_3$  l'élément de plus faible indice tel que  $\mathfrak{D}_2 \cap \mathcal{E}_3 \neq \emptyset$ . Les composantes de  $\mathfrak{D}_2 \cap \mathcal{E}_3$  sont les composantes de  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_3$  et celles de  $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_3$ , peuvent être réunies ou séparées par la suppression et la conservation d'arcs frontières de  $\mathcal{E}_1$  pénétrant dans  $\mathcal{E}_2$ . En remarquant que, s'il existe dans  $\mathfrak{D}_2$  une courbe fermée frontière de  $\mathfrak{D}_2 \cap \mathcal{E}_3$ , c'est la périphérie complète de  $\mathcal{E}_3$  et qu'elle est donc unique on déduit que le théorème relatif à l'intersection de deux éléments  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  est valable pour l'intersection de  $\mathfrak{D}_2$  et  $\mathcal{E}_3$ , en remplaçant dans son énoncé  $\mathcal{E}_1$  par  $\mathfrak{D}_2$  et  $\mathcal{E}_2$  par  $\mathcal{E}_3$ .

Les mêmes cas que dans *a* peuvent se rencontrer, et dans le troisième l'opéra.



tion peut se poursuivre : on obtient un cercle  $D'_3$  image conforme de  $\mathfrak{D}'_3 \subset \mathcal{R}$ , constitué par les points de  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ , certains points intérieurs de  $\mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$  (frontières de  $\mathfrak{D}_2$  donc de  $\mathcal{E}_1$  ou  $\mathcal{E}_3$ ) pouvant être points frontières de  $\mathfrak{D}'_3$ . La frontière de  $\mathfrak{D}'_3$  est l'image sur  $\mathcal{R}$  d'un nombre fini d'arcs des circonférences de  $A_1, A_2, A_3$ . Il peut arriver que  $D'_3$  possède deux arcs frontières contigus associés. Par recollement de  $D'_3$  suivant ces arcs on obtient  $D_3$  qui est soit le plan entier ( $D_3$  est image conforme de  $\mathcal{R}$  entière), soit un cercle fini ( $D_3$  est image de  $\mathfrak{D}_3 \subset \mathcal{R}$  avec correspondance ponctuelle continue entre les frontières), soit le plan pointé (c'est le cas où la frontière de  $\mathfrak{D}_2$  est intérieure à  $\mathcal{E}_3$ , où la frontière de  $\mathcal{E}_3$  est intérieure à  $\mathfrak{D}_2$  et où les deux frontières ont un ou plusieurs points communs. Ces points sont intérieurs à des  $\mathcal{E}_i$  d'indice plus élevés et l'opération peut se poursuivre).

c. L'introduction de  $\mathcal{E}_4$  conduit à la construction de  $D_4$  image de  $\mathfrak{D}_4 \subset \mathcal{R} \dots$

$\mathcal{R}$  SURFACE FERMÉE. — On a construit sur  $\mathcal{R}$  une suite finie de domaines  $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3 \subset \dots \subset \mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}$ . Ou bien  $\mathfrak{D} = \mathcal{R}$  et  $D_n = D$  est le plan entier, ou bien  $D$  est un cercle fini et la frontière de  $\mathfrak{D}$  est formée d'un nombre fini d'arcs périphériques des éléments  $\mathcal{E}_i$ . On a construit  $z = \Phi(P)$  représentant conformément  $\mathfrak{D} (\subset \mathcal{R})$  sur le plan entier ou un cercle fini  $D$ .

$\mathcal{R}$  SURFACE OUVERTE. — La suite  $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}_3 \subset \mathfrak{D}_4 \subset \dots \subset \mathfrak{D}_n \subset \dots$  est infinie. Tout  $\mathcal{E}_i$  est atteint :  $\mathcal{E}_i$  peut être joint à  $\mathcal{E}_1$  par une chaîne finie d'éléments  $\mathcal{E}_j$ ; chaque élément de cette chaîne est atteint au bout d'un nombre fini d'opérations après que le précédent ait été atteint. Les cercles  $D_n$  de rayon croissant ont pour limite un cercle  $D$  (application du Chapitre 1, A), et les  $\varphi_{n,h}$  convergent uniformément dans  $\dot{D}_n$  vers  $z = \Phi_n(z_n)$ . Soit  $P \in \mathfrak{D}_m$ , alors  $P \in \mathfrak{D}_i$  (tout  $i > m$ ) et notons  $\zeta_i$  son image dans  $\dot{D}_i$ ;  $z = \Phi_i(\zeta_i)$  est indépendante de  $i$ . On a donc défini  $z = \Phi(P)$ . Un domaine  $\Gamma \subset \mathfrak{D}_i$  est représentable conformément sur  $D_i$ , donc aussi sur  $G$  du plan  $z$  par  $z = \Phi(P)$ .

Si  $P$  frontière de  $\mathfrak{D}_K$ , ou bien  $P \in \mathfrak{D}_n$  pour  $n \geq N$  (alors  $\Phi(P)$  est une représentation conforme définie dans un domaine contenant  $P$ ) ou bien  $P$  est frontière de tous les  $\mathfrak{D}_n$  ( $n \geq K$ ). Soit alors  $\mathcal{E}_\nu$  le premier élément de la suite  $\mathcal{E}_i$  (la dernière formée) tel que  $P \in \mathcal{E}_\nu$ ;  $P$  fait partie d'un arc frontière d'un  $\mathcal{E}_i$  au moins ( $i \leq K, i < \nu$ ). La construction des  $\mathfrak{D}_n$  montre qu'on ne tracera pas dans  $\mathcal{E}_\nu$  d'autres coupures que celles existant avant la  $\nu^{\text{ième}}$  opération :  $P$  est frontière de  $\mathfrak{D}_\nu$ ,  $P \in \mathcal{E}_\nu \subset \mathfrak{D}_h$  pour tout  $h \geq \nu$ . Sur  $A_\nu$  (image circulaire de  $\mathcal{E}_\nu$ ) la frontière de  $\mathfrak{D}_\nu$  se représente suivant un nombre fini d'arcs analytiques (cf. p. 25). On peut alors construire dans  $A_\nu$  un domaine  $d(P') \ni P'$  (image de  $P$ ), tel que l'image de la frontière de  $\mathfrak{D}_\nu$  à l'intérieur de  $d(P')$  soit formée d'un nombre fini d'arcs analytiques  $C_i$  issus de  $P'$ , chacun étant image d'un seul arc périphérique d'un  $\mathcal{E}_h$ . On peut même construire  $d(P')$  tel qu'il soit partagé

par les  $C_i$  en autant de triangles curvilignes  $t_i$ . Soient sur  $\mathcal{R}$ ,  $\partial(P)$ ,  $\tau_i$  les domaines correspondant à  $d(P')$  et  $t_i$ ,  $\gamma_i$  les arcs images des arcs  $C_i$ . On peut remplacer  $\partial(P)$  par un voisinage  $U(P) \subset \partial(P)$ . S'il y avait un seul arc  $\gamma_1$  issu de  $P$ , la représentation circulaire de  $\mathfrak{D}_v$ ,  $D_v$  admettrait sur sa circonférence deux arcs contigus associés, correspondant au tracé  $\gamma_1$  sur  $\mathcal{R}$ . Le recollement suivant ces deux arcs aurait été effectué sur  $D'_h$  ( $h \leq v$ ). Soit alors  $p (\geq 2)$  le nombre des arcs  $\gamma_i$ : il existe au moins deux arcs  $\gamma_i$ , frontières de  $\mathfrak{D}_v$  et de tous les  $\mathfrak{D}_n$   $n \geq v$ ; sinon dans  $\partial(P)$  et sur  $p-1$  au moins des arcs  $\gamma_i$ , certains points deviendraient points intérieurs de domaines  $\mathfrak{D}_q$ ; mais cela ne peut avoir lieu que par un recollement suivant  $\gamma_i$  et ce recollement se poursuit sur tout  $\gamma_i$ , suivant  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  si  $p=2$  (mais alors  $P$  deviendrait point intérieur d'un  $\mathfrak{D}_q$ ), jusqu'à  $P$  exclusivement si  $p > 2$ ; le nombre des  $\gamma_i$  devenant  $p-1$ , après une autre opération de rang fini, un autre arc  $\gamma_i$  disparaîtra et l'on sera ramené au cas  $p=2$ , puis  $P$  deviendrait intérieur à  $\mathfrak{D}_r$  pour une valeur assez grande de  $r$ .

**THÉORÈME.** — *Si  $P$  est frontière de tous les  $\mathfrak{D}_n$   $n > N$ , il existe sur  $\mathcal{R}$  un voisinage  $\partial(P)$  et un système de  $m$  arcs ( $m \geq 2$ ) issus de  $P$ , qui sont les seuls arcs frontières, intérieurs à  $\partial(P)$ , de tous les  $\mathfrak{D}_n$  pour  $n > N_0$  <sup>(1)</sup>.*

Nous appellerons *arc définitif*  $\gamma$  un arc frontière d'un  $\mathcal{E}_i$  et frontière de tous les  $\mathfrak{D}_n$  à partir d'un certain rang.

Tout point frontière de  $\mathfrak{D}_v$  est intérieur à un  $\partial(P)$  dans lequel il existe un nombre fini (peut-être nul) d'arcs définitifs extérieurs ou frontières de  $\mathfrak{D}_v$ . La frontière de  $\mathfrak{D}_v$  peut être couverte par un nombre fini de  $\partial(P)$ , donc un nombre fini d'arcs définitifs appartiennent à la frontière de  $\mathfrak{D}_v$ . Tout arc définitif appartenant à la frontière d'un  $\mathfrak{D}_v$ , on déduit :

**THÉORÈME.** — *Les arcs définitifs  $\gamma$  forment une famille dénombrable, finie si  $\mathcal{R}$  est fermée.*

Considérons un morceau compact  $K \subset \mathcal{R}$  dont aucun point n'appartient à un arc définitif : il existe un  $\mathfrak{D}_m \supset K$  :  $K$  peut être couvert par un nombre fini de  $\mathcal{E}_i$ ; soit  $\mathcal{E}_h$  celui de plus fort indice et  $\Delta_h = \bigcup_{i=1}^{i=h} \mathcal{E}_i$ .  $\bar{\mathfrak{D}}_h = \Delta_h$ . La frontière de  $\mathfrak{D}_h$  comprend un nombre fini d'arcs intérieurs à  $\Delta_h$  et la construction des  $\mathfrak{D}_m$   $m > h$  n'introduit pas de nouveaux arcs frontières  $\subset \Delta_h$ , qui seraient donc  $\subset \bar{\mathfrak{D}}_h$ . Il n'y a besoin que d'un nombre fini d'opérations de recollement pour éliminer tous les arcs non définitifs  $\subset \Delta_h$  : il existe donc un  $\mathfrak{D}_m \supset K$ .  $z = \Phi(P)$  représente donc  $K$  sur  $K^* \subset \hat{D}$ . D'autre part, tout compact  $K_1^* \subset \hat{D}$  est couvert par l'image

<sup>(1)</sup> On indique seulement l'existence de  $N_0$ , mais non un moyen de déterminer  $N_0$  ou de caractériser les arcs définitifs parmi les  $\gamma_i \subset \partial(P)$ .

conforme d'un  $D_m$ , donc d'un  $\mathfrak{D}_m$ , donc d'un compact  $K_1 \subset \mathcal{R}$  et tel qu'aucun arc  $\gamma$  ne pénètre à l'intérieur de  $K_1$ .

L'ensemble  $\Gamma$  des arcs  $\gamma$  est appelé *coupure* sur  $\mathcal{R}$ . Si  $\Gamma_1$  est une courbe fermée formée de points intérieurs à  $\mathcal{R}$  et  $\Gamma_1 \cap \Gamma = \emptyset$ ,  $\Gamma_1$  appartient à un compact  $K$ , donc à un  $\mathfrak{D}_n$  et  $z = \Phi(P)$  représente  $\Gamma_1$  sur une courbe fermée  $\subset D$ . Donc  $\Gamma_1$  sépare sur  $\mathcal{R}$  un domaine formé de points intérieurs à  $\mathcal{R}$  et  $\notin \Gamma$ .

**THÉORÈME.** —  $\mathcal{R}^*$  déduite de  $\mathcal{R}$  par suppression des points appartenant à la coupure  $\Gamma$ , est une surface de Riemann simplement connexe, que la fonction  $z = \Phi(P)$  représente conformément sur un cercle  $D$  de rayon  $R$  (fini ou infini).

## 2. — CORRESPONDANCE ENTRE LES FRONTIÈRES.

Soient  $P \in \Gamma$ ,  $\partial(P)$  déjà introduit,  $m$  le nombre d'arcs définitifs issus de  $P$ . Sur  $A$ , les arcs  $\gamma_i$  ( $i \bmod m$ ) ont pour images les arcs analytiques  $C_i$ . Soit  $\mathfrak{D}_n$  un domaine dont tous les arcs frontières qui pénètrent dans  $\partial(P)$  sont définitifs. Coïncidant sur  $\mathcal{R}$  avec  $\gamma_i$ , distinguons  $\gamma_{i,+}$  arc périphérique de  $\mathfrak{D}_n$  contigu au triangle  $\tau_i$  compris entre  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i+1}$ , et  $\gamma_{i,-}$  contigu au triangle  $\tau_{i-1}$  compris entre  $\gamma_i$  et  $\gamma_{i-1}$ . Notons  $\beta_i = \gamma_{i,+} \cup \gamma_{i,-}$ , soit  $b_i$  son image sur le plan  $\zeta$ ,  $t_i$  se représente conformément sur un croissant de  $D_n$ ,  $b_i$  ayant pour images  $b_i''$  sur la circonférence de  $D_n$ ,  $\varphi_{n,m-n}$  représente  $b_i''$  sur  $b_i'''$  de la circonférence de  $D_m$ , la correspondance étant continue sur  $b_i''$  analytique dans l'intérieur.

Que  $\mathcal{R}$  soit ouverte ou fermée,  $b_i$  se représente sur un arc de la circonférence de  $D(b_i''$  ou  $b_i''')$ , la correspondance étant continue sur  $b_i$  analytique à l'intérieur des arcs  $c_{i,+}$  et  $c_{i+1,-}$ . En particulier si  $\gamma_{i,+}$  et  $\gamma_{i+1,-}$  appartiennent au même arc définitif de  $\Gamma$ ,  $c_i$  et  $c_{i+1}$  ne constituent qu'un seul arc analytique et la correspondance est encore analytique en  $P$ .

**THÉORÈME.** — La représentation  $z = \Phi(P)$  est continue sur la coupure définitive de  $\mathcal{R}^*$ , analytique à l'intérieur des arcs définitifs.

*Remarque.* — La circonférence de  $D$  ne peut comprendre deux arcs contigus associés. Sinon soit  $P'$  l'extrémité commune à ces deux arcs sur la circonférence de  $D$ , et  $P$  l'image de  $P'$  sur  $\mathcal{R}$ . Il existe  $D_n$  admettant deux arcs frontières issus de  $P_n$  (correspondant à  $P'$ ), contigus associés, sinon cela n'aurait pas lieu pour  $D$  : mais le recollément de  $D_n$  doit avoir été fait suivant tous les arcs où il était possible.

## 3. — SURFACES SIMPLEMENT CONNEXES.

La coupure  $\Gamma$  ne sépare pas  $\mathcal{R}$ . Soit alors  $P \in \Gamma$ . On peut distinguer, coïncidant avec  $P$  sur  $\mathcal{R}$ , au moins deux points  $P'$  et  $P''$  frontières de  $\mathcal{R}^*$ , que l'on peut joindre par une courbe  $C \subset \mathcal{R}^*$  (sauf en  $P$ ).  $C$  est une courbe fermée de  $\mathcal{R}$  qui si  $\mathcal{R}$  est simplement connexe, sépare  $\mathcal{R}$  en deux morceaux dont l'un  $G$  est

tel que  $\mathcal{G} = G \cup C$  est formé de points intérieurs à  $\mathcal{R}$ ;  $\mathcal{G}$ , morceau compact de  $\mathcal{R}$ , recouvrable par un nombre fini d'éléments est recouvert par  $\Delta_h = \bigcup_{i=1}^{i=h} \mathcal{E}_i$ .

$\Gamma \cap \Delta_h$  ne comprenant que des arcs périphériques de  $\mathcal{E}_i (i \leq h)$ , en nombre fini, est formé à l'intérieur de  $G$  d'un nombre fini d'arcs définitifs  $\gamma$ . Supposons qu'aucun arc  $\gamma$  n'ait d'extrémité libre, c'est-à-dire, que toute extrémité d'arc  $\gamma$  est aussi extrémité d'un autre arc  $\gamma$  : à partir d'un point sur  $\Gamma$  (et intérieur à  $G$ ) on peut parcourir  $\Gamma$  dans les deux sens et après un nombre fini de pas (si nous appelons pas la traversée d'une extrémité commune à deux arcs  $\gamma$ ) on a parcouru entièrement  $\Gamma \cap G$ ; or  $\Gamma$  ne coupe  $C$  qu'en un point  $P$ , donc nécessairement  $\Gamma$  se referme à l'intérieur de  $\mathcal{G}$ , mais alors une boucle fermée de  $\Gamma$  sépare  $\mathcal{R}$  simplement connexe en deux morceaux, ce qui est absurde. Soit donc  $Q$  une extrémité libre d'un arc  $\gamma$ . Soit  $\mathcal{E}_v \ni Q$ . On peut construire sur  $\mathcal{R}$ ,  $\partial(Q) \subset \mathcal{E}_v$ ,  $\partial(Q)$  ayant pour image sur  $A_v$  un cercle, dont la circonférence n'est coupée par l'image de  $\Gamma$  qu'en un point; le recollement de  $D$  serait possible suivant les arcs images d'une portion de  $\Gamma \cap \partial(Q)$  voisine de  $Q$ .  $\Gamma$  ne peut pas exister.

PREMIER THÉORÈME DE L'UNIFORMISATION. — Si  $\mathcal{R}$  est simplement connexe,  $z = \Phi(P)$  la représente conformément et biunivoquement soit sur le plan entier (cas des surfaces fermées), soit sur le plan pointé (cas parabolique), soit sur un cercle fini (cas hyperbolique).

Remarquer que si  $z = \Phi(P)$  représente  $\mathcal{R}^*$  sur le plan pointé, on peut affirmer que  $\mathcal{R}^* \equiv \mathcal{R}$ , car si  $\Gamma$  existait  $D$  serait de rayon fini.

#### D. — Représentation d'une surface ouverte.

##### 1. — LOI DE LA SOUDURE.

Soient  $D_0$  l'image de  $\mathcal{R}^*$  par  $z = \Phi(P)$ , et  $(D_i) (i = 1, 2, \dots, n, \dots)$  une suite de disques identiques à  $D_0$ . Numérotions les côtés (image d'un  $\gamma$ ) sur la circonférence de chaque disque  $D_i$ , de la même façon sur tous les  $D_i$ .  $\lambda_{i,k}$  désigne le côté ayant le numéro  $k$  sur la circonférence du disque  $D_i$ . Tout arc  $\gamma_j$  a sur la circonférence de  $D_0$  deux arcs images  $\lambda_{0,s}$  et  $\lambda_{0,r}$  parcourus dans des sens opposés quand on parcourt  $\gamma_j$  sur  $\mathcal{R}$ .  $\lambda_{0,s}$  et  $\lambda_{0,r}$  sont dits associés. Ainsi les deuxièmes indices peuvent être associés par couples. Il en résulte que  $\lambda_{i,r}$  et  $\lambda_{j,s}$  sont associables : en effet, soient dans  $D_0$  deux morceaux simplement connexes  $d_r$  et  $d_s (d_r \cap d_s = \emptyset)$  contigus à  $\lambda_{0,r}$  et  $\lambda_{0,s}$ ,  $d_{i,r}$  et  $d_{j,s}$  ces mêmes morceaux pris dans  $D_i$  et  $D_j$ ;  $d_{i,r}$  et  $d_{j,s}$  sont les images de  $\partial_r$  et  $\partial_s$  sur  $\mathcal{R}$ , sans points communs et admettant une courbe frontière commune  $\gamma_{r,s}$  correspondant à  $\lambda_{i,r}$  et  $\lambda_{j,s}$ . Effectuons alors la soudure de  $D_1$  et  $D_2$  suivant  $\lambda_{1,1}$  et  $\lambda_{2,p}$  (où les

deuxièmes indices  $i$  et  $p$  sont associés). On obtient un cercle  $\Delta'_2$  sur la circonférence duquel il peut y avoir deux arcs contigus associés, on effectue alors le recollement de  $\Delta'_2$  suivant ces arcs et l'on obtient un cercle  $\Delta_2$ . Sur la circonférence de  $\Delta_2$  les côtés ont pour indices  $\lambda_{i,k}$  ( $i = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n, \dots$ ). Les côtés  $\lambda_{i,p}$  et  $\lambda_{3,s}$  sont associables : pour le voir il suffit de considérer dans  $\Delta_2$  l'image de  $d_{i,p}$ . Nous effectuons la soudure de  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  suivant la loi ci-dessous.

*Loi de la soudure.* — Soit  $\Delta_n$  sur la circonférence duquel il n'existe pas d'arcs contigus associés. Nous lui soudons un nouveau disque  $D_{n+1}$  suivant l'arc de la circonférence de  $\Delta_n$  dont la somme des indices est minimum. Si plusieurs arcs ont la même somme d'indices on choisira celui de premier indice le plus faible. Il se peut que la circonférence de  $\Delta'_{n+1}$  obtenu par soudure de  $\Delta_n$  et  $D_{n+1}$  possède deux arcs contigus associés. On effectue alors le recollement de  $\Delta'_{n+1}$  suivant ces arcs tant que cela est possible. On obtient alors  $\Delta_{n+1}$ .

Comme il s'agit de surfaces ouvertes, la circonférence de  $\Delta'_{n+1}$  obtenue par soudure de  $\Delta_n$  et  $D_{n+1}$  possède nécessairement un sommet singulier (point d'accumulation de côtés) ne correspondant pas à un point de  $\mathcal{R}$ , comme celle de  $D_{n+1}$  elle-même, et le recollement ne peut être réalisé suivant la circonférence entière ni de  $\Delta_n$ , ni de  $D_{n+1}$ . On définit ainsi une suite de domaines  $(\Delta_n)$ , ayant chacun une image dans le suivant par  $w_{n+1} = \varphi_{n,1}(w_n)$  normalisée au centre, et à laquelle on peut appliquer (si elle n'est pas finie, ce qui *a priori* serait possible) les résultats du Chapitre I, A. On obtient alors un cercle  $\Delta$  de rayon fini ou infini, contenant une image conforme biunivoque de tout  $\Delta_n$  et tel que tout cercle de rayon plus petit est couvert par l'image d'un  $\Delta_p$ .

## 2. — ÉTUDE DE $\Delta$ .

Si  $P \in \Delta$ , il est intérieur à l'image dans  $\Delta$  d'un  $\Delta_n$ . Soit  $P_n$  le point de  $\Delta_n$  image de  $P$  avec correspondance conforme biunivoque d'un voisinage.  $P_n$  est soit intérieur à l'image dans  $\Delta_n$  d'un  $D_j$ , soit frontière de plusieurs images de disques  $D_j$ .

*Premier cas.* —  $P_n$ , donc  $P$  est l'image d'un point  $P_0 \in D_0$ , avec correspondance conforme biunivoque d'un voisinage. Or  $P_0$  est l'image localement conforme de  $\mathcal{X} \in \mathcal{R}^* \subset \mathcal{R}$ , c'est donc aussi vrai pour  $P$ . Inversement si  $\mathcal{X} \in \mathcal{R}^*$ , il a une image dans  $D_0$ , localement conforme, donc aussi dans tout  $D_i$ , et  $n$  images dans  $\Delta_n$ ; une de ces images  $P_n^i$  est intérieure à l'image de  $D_i$  dans  $\Delta_n$ .

*Deuxième cas.* —  $P_n$  est frontière de plusieurs images de disques  $D_j$ , nécessairement en nombre fini. Soit  $D_h$  le disque de plus petit indice dont l'image dans  $\Delta_n$  admet  $P_n$  pour point frontière.  $P_n$  correspond à un point  $P_h$  de la frontière de  $\Delta_h$ . Puisque  $P_h$  devient point intérieur d'un  $\Delta_k$  c'est que  $P_h$  est soit intérieur à un côté de  $\Delta_h$ , soit sommet régulier (extrémité d'un côté, correspondant à un point de  $\mathcal{R}$ ), la loi de la soudure ne permettant pas à d'autres points péri-

phériques de  $\Delta_k$  de devenir points intérieurs d'un  $\Delta_k$ . Supposons  $P_{k-1}$  frontière de  $\Delta_{k-1}$ . La soudure de  $\Delta_{k-1}$  et  $D_k$  fait intervenir (*cf.* recollement) un domaine  $C \subset \mathcal{R}$  et son image circulaire  $\Gamma$ .  $\Delta_k$  contient, entourant  $P_k$  une image conforme du domaine  $C$  contenant l'image  $\mathcal{X}$  de  $P_{k-1}$ ; il en résulte que  $P_k$ , donc  $P_n$  et  $P$  sont des images localement conformes de  $\mathcal{X}$ .

Inversement : 1°  $\mathcal{X} \in$  l'intérieur d'un côté de  $\mathcal{R}^*$ .  $\mathcal{X}$  a deux images  $P_0$  et  $P'_0$  sur la circonférence de  $D_0$ ,  $P_0 \in \tilde{\lambda}_{0,r}$ ,  $P'_0 \in \lambda_{0,s}$ . Soient  $P_h$  et  $P'_h$  les deux points de  $\bar{\Delta}_h$  qui, sur l'image de  $D_h$ , correspondent à  $P_0$  et  $P'_0$ . Si  $P_h \in \bar{\Delta}_h$ , alors  $\Delta_h$  contient un voisinage de  $P_h$  en correspondance conforme biunivoque avec un voisinage de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{R}$ . Si  $P_h$  est sur la frontière de  $\Delta_h$ ,  $P_h \in \tilde{\lambda}_{h,r}$ . Après un nombre fini de soudures,  $\lambda_{h,r}$  finira par être le côté de  $\Delta_{k-1}$  dont la somme des indices est minimum. Alors la soudure de  $\Delta_{k-1}$  et  $D_k$  se fera suivant les arcs  $\lambda_{h,r}$  et  $\lambda_{k,s}$ , et  $P_{n-1}$  aura pour image  $P_k \in \bar{\Delta}_k$ ; la correspondance est alors localement

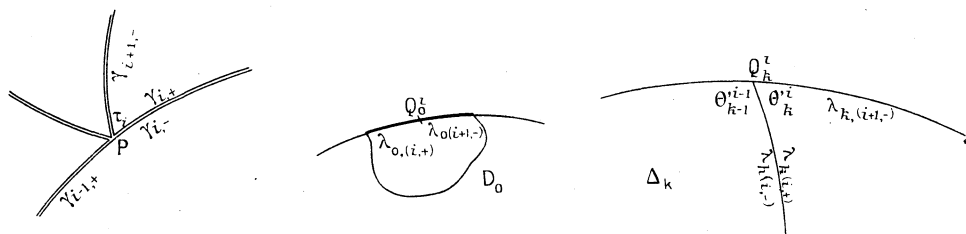


Fig. 24.

conforme entre  $\mathcal{X} \in \mathcal{R}$ ,  $P_k \in \bar{\Delta}_k$  et son image  $P \in \bar{\Delta}$ . Remarquons que l'image de  $P_{k-1}$  peut devenir intérieure à  $\Delta_k$  à la faveur d'un recollement sans que  $\lambda_{h,r}$  ait été le côté de somme d'indices minimum. Une image de  $\mathcal{X}$  dans  $\Delta$  sera définie par  $P_h$  ou  $P'_h$  suivant qu'il s'agit sur la frontière de l'image de  $D_h$ , du point correspondant à  $P_0$  ou à  $P'_0$ .  $P_h \equiv P'_k$ .

2°  $\mathcal{X}$  est extrémité d'un arc  $\gamma$ . En  $\mathcal{X}$  aboutissent  $p$  arcs  $\gamma_i$  séparant des triangles  $\tau_i$  dans  $\partial(\mathcal{X})$ . Chaque triangle  $\tau_i$  se représente suivant un croissant  $\theta^i$  de  $D_0$ . Soient  $Q_0^i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) les points de la circonférence de  $D_0$  images de  $\mathcal{X}$ .  $Q_0^i$  est l'extrémité commune de  $\lambda_{0,(i,+)}$  et  $\lambda_{0,(i+1,-)}$ ; c'est aussi le sommet du croissant  $\theta^i$ . L'ensemble des  $p$  points  $Q_0^i$  est appelé un cycle de sommets. Si la soudure de  $\Delta_{k-1}$  et  $D_k$  (ou un recollement au cours de cette soudure) a lieu suivant les arcs  $\lambda_{h,(i,-)}$  et  $\lambda_{k,(i,+)}$  on a rassemblé dans  $\Delta_k$  le croissant  $\theta_k^i$  image de  $\theta^i$ , son sommet étant l'image  $Q_k^i$  de  $Q_{k-1}^{i-1}$  sur  $\bar{\Delta}_{k-1}$  et de  $Q_0^i$ . Sur la circonférence de  $\Delta_{k-1}$ , supposons que plusieurs croissants aient déjà été rassemblés avec  $Q_{k-1}^i$  pour sommet commun. Soient  $\lambda_{l,(j,+)}$  et  $\lambda_{h,(i,-)}$  les côtés de la circonférence de  $\Delta_{k-1}$  aboutissant en  $Q_{k-1}^i$ . Les croissants rassemblés en  $Q_{k-1}^{i-1}$  sont donc  $\theta_{k-1}^\alpha$  ( $\alpha=j, j+1, \dots, i-1$ ). Supposons le nombre de ces croissants  $< p$  (ce qui est vrai pour  $\Delta_1 \equiv D_1$ , où il n'y a qu'un seul croissant à chaque sommet). Après la  $k^{\text{ième}}$  soudure, le croissant  $\theta_i$  est aussi rassemblé autour du point  $Q_k^i$ .

Ou bien le nombre des croissants réunis en  $Q$  est encore  $< p$ , ou bien il est égal à  $p$ , puisqu'on n'en a ajouté qu'un. Dans le dernier cas  $i + 1 = j \bmod p$ , et l'on peut poursuivre le recollement de  $\Delta_k$  suivant les arcs  $\lambda_{i, (j, +)}$  et  $\lambda_{k, (i+1, -)}$ . Ce recollement se fait en introduisant un cercle contenant une image conforme d'un voisinage de  $\mathcal{R}$ .  $Q_k^i$  devient alors point intérieur de  $\Delta_k$ , en étant une image localement conforme de  $\mathcal{R}$ . Il se peut que le recollement de  $\Delta_k$  puisse se poursuivre le long de la circonférence de  $D_k$  à partir de l'extrémité de l'arc (suivant lequel a été faite la première soudure), qui n'a pas été utilisée pour conduire à  $Q_k^i$ . La périphérie de  $D_k$  et celle de  $\Delta_{k-1}$  contenant chacune au moins un sommet singulier, le recollement ne peut se faire ni jusqu'au point  $Q_{k,i}$  par l'arc  $\lambda_{k, (i+1, -)}$  et ses suivants, ni jusqu'au point  $Q_{k-1}^{i-1}$  par l'arc  $\lambda_{i, (j, +)}$ . Donc une opération de soudure n'a bien ajouté qu'un seul croissant  $\theta_k^i$  à l'ensemble des croissants déjà réunis en  $Q_{k-1}^{i-1}$ . Après un nombre fini de soudure  $\mathcal{R}$  aura encore une image localement conforme à l'intérieur d'un  $\Delta_n$ , donc de  $\Delta$ .

DEUXIÈME THÉORÈME DE L'UNIFORMISATION. — *Toute surface de Riemann ouverte est représentable par une représentation conforme, uniforme ou non, soit sur un cercle, soit sur le plan pointé, de la manière suivante : tout point de  $\mathcal{R}$  peut être enfermé dans un de ses voisinages, que la représentation précédente applique conformément et biunivoquement sur un voisinage d'une de ses images. Tout point du cercle image, correspond à un point de  $\mathcal{R}$ , avec correspondance conforme biunivoque d'au moins un voisinage sur  $\mathcal{R}$ .*

### CHAPITRE III.

#### LES SURFACES DE RECOUVREMENT ET LEURS ARBRES TOPOLOGIQUES.

##### A. — Surfaces de recouvrement.

##### 1. — DÉFINITIONS (1).

A. DOMAINE RÉGULIÈREMENT COUVERT. — Soit  $f$  une représentation conforme d'une surface de Riemann  $\mathcal{R}$  dans une autre  $R$ . Un domaine  $D$  de  $R$  est régulièrement couvert par  $\mathcal{R}$  pour  $f$  si l'ensemble  $E$  des points de  $\mathcal{R}$  dont l'image par  $f$ , appartient à  $D[E = f^{-1}(D)]$ , n'est pas vide et si toute composante connexe de  $E$  est représentée conformément et biunivoquement sur  $D$  par  $f$ .

B. RECOUVREMENT ABSTRAIT. — Soit  $R$  une surface de Riemann; un recouvrement abstrait  $(\mathcal{R}, f)$  de  $R$  est un couple formé par une surface de Riemann  $\mathcal{R}$ , et une représentation  $f$  de  $\mathcal{R}$  sur  $R$  telle que tout point de  $R$  possède un voisinage régulièrement couvert par  $\mathcal{R}$  pour  $f$ .

(1) D'après Chevalley, *Theory of Lie Groups, pour les recouvrements d'espaces topologiques.*

2. — CHOIX DE  $\mathcal{R}$ .

$(\mathcal{R}, f)$  étant un recouvrement de  $R$ ,  $(\mathcal{R}', \varphi)$  un recouvrement de  $\mathcal{R}$ ,  $(\mathcal{R}', f \circ \varphi)$  est un recouvrement de  $R$ .

$f \circ \varphi$  représente  $\mathcal{R}'$  sur  $R$  en satisfaisant aux conditions A et B. En particulier, toute surface de Riemann  $\mathcal{R}'$  conformément équivalente à  $\mathcal{R}$ , peut, combinée avec une fonction convenable, constituer un recouvrement de  $R$ .

RECOUVREMENTS SIMPLEMENT CONNEXES. — *a. Existence.* — D'après le deuxième théorème de l'uniformisation, étant donné une surface  $R$ , il existe une représentation conforme d'un cercle  $\Delta$  (de rayon fini ou infini), sur  $R$  telle que tout point  $P \in R$  possède un voisinage  $U(P)$  régulièrement couvert par  $\Delta$  pour  $f$ . Reprenons  $R^* = R - \Gamma$ ; si  $P \in R^*$ , prenons  $U(P) \subset R^*$ ; si  $P \in \Gamma$ , il est intérieur à un arc de  $\Gamma$ , donc à un « disque » ayant servi à recoller divers exemplaires de  $R^*$  [ces « disques » ayant été ordonnés on prendra  $U(P)$  inclus dans le disque de plus petit indice]. Tout cercle  $\subset \Delta$  est couvert par un nombre fini d'images de  $R^*$  ou de disques.

$E(U) \neq \emptyset$ , puisqu'il y a des points de  $E(U)$  dans le premier exemplaire de l'image de  $R^*$ . Soit  $M \in U(P)$  et  $\mu$  une image de  $M$  dans  $\Delta$ . La connaissance de  $\mu$  permet de déterminer soit l'exemplaire de l'image de  $R^*$ , soit l'image du « disque » auquel il appartient. Dans les deux cas, l'image considérée contient une image conforme biunivoque de  $U(P)$  par  $f^{-1}$ .

*b. Équivalence conforme.* — Soient  $(\Delta, f)$  et  $(\Delta', f')$  deux recouvrements simplement connexes de  $R$  où  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont deux cercles des plans  $z$  et  $z'$ . Soit  $p \in \Delta$  dont l'image sur  $R$  par  $f$  est  $P$ .

Il existe sur  $R$ ,  $U(P)$  représenté conformément et biunivoquement sur  $u(p)$  et  $u'(p')$  [une composante quelconque de  $f'^{-1}(U)$ ]. Pour obtenir  $U(P)$  on aura pu être amené à se restreindre à l'intersection de deux voisinages de  $P$ , l'un régulièrement couvert par  $\Delta$  pour  $f$ , l'autre par  $\Delta'$  pour  $f'$ . On a ainsi défini  $z'(z)$  holomorphe, univalente dans  $u(p)$ ; soit  $p_1$  sur la périphérie de  $u(p)$ , auquel correspondent  $P_1$  sur  $R$  et  $p'_1$  sur la périphérie de  $u'(p')$ . [En ayant au besoin réduit  $U(P)$  pour que ses représentations sur  $u$  et  $u'$  soient encore biunivoques entre les frontières].  $U_1(P_1)$  est représenté conformément et biunivoquement sur  $u_1(p_1)$  et  $u'_1(p'_1)$ .  $z'(z)$  est holomorphe dans  $u \cap u_1 (\neq \emptyset)$  et est prolongeable dans  $u_1$  entier. Ce prolongement est possible dans tout  $\Delta$  : soit  $q \in \Delta$  dont on peut s'approcher indéfiniment, par prolongement de  $z'(z)$  suivant une courbe  $\lambda$ .  $Q$  est l'image de  $q$  sur  $R$ ; il existe  $V(Q)$ , régulièrement couvert par  $\Delta$  pour  $f$  et par  $\Delta'$  pour  $f'$ ; la composante de  $f^{-1}(V)$ , connexe à  $q$  étant  $v(q)$ , il existe  $u_n(p_n)$  tel que  $\partial \subset (u_n \cap v)$  ne soit pas vide et ait pour image par  $f$ ,  $d$ .  $d$  a une image dans  $u'_n$ , soit  $d'$ , et  $V(Q)$  a une image dans  $\Delta'$ , connexe à  $d'$ ,



par  $f'^{-1}$  : le prolongement de  $z'(z)$  est donc possible en  $q$ .  $z'(z)$  est analytique dans  $\Delta$ , uniforme d'après le théorème de monodromie; elle est univalente, sinon  $z(z')$  ne serait pas uniforme, et  $z'$  couvre  $\Delta'$  quand  $z$  parcourt  $\Delta$  entier.  $z'(z)$  est donc homographique.

**THÉORÈME.** — *Les recouvrements simplement connexes de  $R$  sont tous conformément équivalents.*

### 3. — CHOIX DE $f$ .

Choisissons maintenant pour représentation  $f$ , l'identité locale <sup>(1)</sup>;  $f$  qui représente une composante connexe de  $f^{-1}(D)$  sur  $D$  est l'identité. La surface  $\mathcal{R}$  qui, combinée à  $f$  constitue un recouvrement de  $R$ , est alors appelée *surface de recouvrement de  $R$ , relativement non ramifiée*.

**Existence.** — Construisons sur  $R$ ,  $k$  arcs de courbes ne morcelant pas  $R$  (on peut même supposer qu'il y en a une infinité dénombrable, comme c'est le cas pour  $\Gamma$ ), certains pouvant être fermés. Comme  $R$  est orientable on peut distinguer sur  $R$ , deux bords d'un tel arc de courbe : nous les noterons  $(a_i$  et  $a'_i)$ , c'est la loi d'association (Chap. II, D, 1); soit  $R^*$  la surface ainsi découpée,  $R_j^*$  une suite d'exemplaires identiques à  $R^*$ . Si le bord  $a_i$  de l'exemplaire de  $R_j^*$  est noté  $a_{j,i}$ , on peut construire  $\mathcal{R}_i = R_0^* \cup R_1^* \cup a_{0,i} \cup a'_{1,i}$ , où les points  $a_{0,i}$  et  $a'_{1,i}$  correspondants sont identifiés. En se donnant une certaine loi de formation  $R_\lambda$  [par exemple la loi de la soudure (Chap. II, D, 1)], on définit une surface de Riemann qui est une surface de recouvrement de  $R$ .

## B. — Arbre topologique. Généralités.

### 1. — DÉFINITIONS.

Pour les surfaces de Riemann de fonctions analytiques, et possédant seulement un nombre fini de points fondamentaux, c'est-à-dire dont les points de ramification se projettent sur un nombre fini de points, on a utilisé un mode de représentation de ses surfaces par les réseaux ou les arbres topologiques [Speiser <sup>(2)</sup>, Nevanlinna <sup>(3)</sup>, Le van Thiem <sup>(4)</sup>]. Nous décomposerons un arbre topologique en les éléments suivants :

**a. SCHEMA.** — *L'ensemble des nœuds et des traits de liaison (ou côtés).* — Le nombre  $q$  des traits de liaison issus d'un nœud, est indépendant du nœud.

<sup>(1)</sup> Abus de langage, pour désigner une projection de domaines plans, à un ou plusieurs feuillets, sur un autre domaine plan. Nous dirons aussi que ces plans sont « au-dessus » les uns des autres.

<sup>(2)</sup> *Ueber Riemannsche Flächen* (Comm. Math. Helv., 2, 1930).

<sup>(3)</sup> *Eindentliche analytische Funktionen* (Springer, 1936).

<sup>(4)</sup> *Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flächen* (Comm. Math. Helv., 20, 1947).

*Cycle.* — Ensemble de nœuds et des côtés qui les joignent, de telle sorte que la ligne polygonale ainsi formée, soit fermée et sépare le plan en deux régions dont l'une ne contient aucun nœud.

Un cycle peut avoir un nombre fini  $n$  (cycle d'ordre  $n$ ) de nœuds (donc le même nombre de côtés) ou une infinité (cycle d'ordre infini).

*b. ORIENTATION.* — *Nœuds.* — Les nœuds sont de deux sortes, notés  $\circ$  et  $\times$ . Un côté joint un  $\circ$  à un  $\times$ .

*Côtés.* — Les côtés de  $q$  sortes, notés  $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}, a_q$ . Si l'on tourne autour d'un  $\circ$  dans le sens direct, et que l'on rencontre les côtés dans l'ordre  $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}, a_q$ , il en est de même pour tous les autres nœuds  $\circ$ , et si l'on tourne dans le même sens autour d'un nœud  $\times$  quelconque, on rencontre les côtés dans l'ordre  $a_s, a_q, a_{q-1}, \dots, a_2$ .

**THÉORÈME.** — *Tous les cycles du schéma étant d'ordre pair, l'orientation est déterminée lorsqu'on a fixé la nature ( $\circ$  ou  $\times$ ) d'un nœud, et la nature d'un trait de liaison.*

S'il y avait un cycle d'ordre pair, le fait pour un nœud de ce cycle, d'avoir une nature  $\circ$  ou  $\times$  serait incompatible avec le fait qu'un côté joint deux nœuds de natures différentes. Pour un cycle d'ordre pair, les natures de ces nœuds et de ses côtés (donc des côtés issus d'un nœud quelconque de ce cycle) ne dépendent pas du trajet effectué sur la périphérie du cycle, pour atteindre ce nœud, à partir d'un nœud origine. Or deux trajets distincts joignant un nœud origine à un nœud quelconque sont réductibles l'un à l'autre en remplaçant sur un nombre fini de cycles, une partie du contour d'un cycle par l'autre partie du contour du même cycle ayant les mêmes extrémités (<sup>1</sup>).

Le schéma et l'orientation constituent *l'arbre topologique*, et si l'on a fixé les projections sur un plan  $z$ , des points de ramification d'une surface de Riemann, en spécifiant leur nature (par celle des deux arcs de liaison qui l'entourent), la surface de Riemann est déterminée; l'hypothèse (<sup>1</sup>) correspond au fait que la surface de Riemann est simplement connexe. L'arbre topologique d'une surface de Riemann peut dans certains cas suffire pour déterminer le type de la surface, alors que la liberté du choix des points fondamentaux de ramification peut *a priori* modifier le type de la surface.

## 2. — LES ARBRES TOPOLOGIQUES A CYCLES FINIS ET RÉGULIÈREMENT RAMIFIÉS.

Il s'agit d'arbres  $T$  ne possédant pas de cycles infinis et dont les nœuds ne s'accumulent qu'à l'infini.

(<sup>1</sup>) Cela implique que les nœuds du schéma, s'ils sont en nombre infini, ne s'accumulent qu'au point à l'infini du plan. Nous nous placerons toujours dans cette hypothèse.

DÉFINITIONS. — *a. Nœuds schématiquement équivalents.* — Deux nœuds  $P$  et  $P'$  sont dits schématiquement équivalents ( $P \approx P'$ ) si les figures constituées par le schéma et le point  $P$  d'une part, le schéma et le point  $P'$  d'autre part, sont identiques (en tant que figures définies à une transformation topologique près).

*Transitivité.* — Il est évident que  $P \approx Q$ ,  $Q \approx R$  entraînent  $P \approx R$ .

*b. Un schéma est régulièrement ramifié, s'il existe un certain ensemble fini (E) de nœuds tel que tout nœud du schéma soit  $\approx$  à un nœud de E.*

*c. Nœuds équivalents.* —  $P$  et  $Q$  sont équivalents ( $P \sim Q$ ), si les figures constituées par l'arbre  $T$  et le point  $P$  d'une part, l'arbre  $T$  et le point  $Q$  d'autre part, sont identiques.

*Transitivité.* —  $P \sim Q$ ,  $Q \sim R$  entraînent  $P \sim R$ .

*d. Arbre régulièrement ramifié.* —  $T$  est un arbre régulièrement ramifié, s'il existe un certain ensemble fini  $K$  de nœuds, tel que tout nœud de l'arbre soit  $\sim$  à un nœud de  $K$ .

D'après le théorème du paragraphe 1, l'ensemble des nœuds  $\approx P_0$  peut être séparé au plus en 24 classes de nœuds équivalents, d'où :

THÉORÈME. — *Un arbre topologique à schéma régulièrement ramifié est régulièrement ramifié.*

THÉORÈME. — *Si  $T$ , régulièrement ramifié, possède une infinité de nœuds, tout nœud  $Q$  a une infinité de nœuds équivalents.*

L'un au moins des nœuds de  $K$ , soit  $P_0$ , possède une infinité de nœuds  $P_i \sim P_0$ . Soit  $Q$  un nœud de  $T$ , qui peut être joint à  $P_0$  par une ligne polygonale  $\Gamma_0$ . On peut construire d'une manière unique à partir de chaque  $P_i$  une ligne  $\Gamma_i$ , comme  $\Gamma_0$  est construite sur  $T$  à partir de  $P_0$ . Chaque  $\Gamma_i$  détermine un nœud  $Q_i \sim Q$ . De plus  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  déterminent  $Q_i$  et  $Q_j$  distincts, car  $Q_i$  étant équivalent à  $Q$ , la ligne  $\Gamma_i$  peut se construire d'une manière unique à partir de  $Q_i$  comme  $\Gamma_0$  à partir de  $Q$ . D'où l'on déduit :

THÉORÈME. — *Si  $T$ , régulièrement ramifié n'a qu'un nombre fini de nœuds, chaque classe de nœuds équivalents comprend le même nombre de nœuds.*

*e. Cycles équivalents.* — Deux cycles sont équivalents si tous leurs nœuds sont deux à deux équivalents, et rencontrés dans le même ordre lorsqu'on parcourt les cycles dans le même sens : Il n'y a qu'un nombre fini de classes de cycles équivalents ; et d'autre part, pour que deux cycles soient équivalents, il suffit qu'un nœud de l'un soit équivalent à un nœud de l'autre, et que les côtés du cycle issus de ces nœuds soient de même nature. La condition sur les sens est respectée d'elle-même, puisque les nœuds équivalents sont de même nature.

## C. — Les surfaces fermées et leurs surfaces de recouvrement.

## I. — ARBRE TOPOLOGIQUE D'UNE SURFACE FERMÉE.

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée du plan  $\varepsilon$  passant par les projections des points critiques de  $R$ ;  $\Gamma$  est partagée en un certain nombre d'arcs par les projections de ces points critiques. Construisons alors à partir de  $R$  une surface  $R^*$  simplement connexe obtenue en retirant de  $R$  les points de certains arcs  $\gamma$  dont les projections sur le plan  $\varepsilon$  sont des arcs de  $\Gamma$ . La construction de l'arbre topologique  $T^*$  de  $R^*$  met en évidence des côtés issus de certains nœuds, et n'aboutissant pas à un autre nœud. Ces côtés représentent des liaisons entre demi-feuillets à travers un arc de  $R - R^*$ . Cet arc sépare dans son voisinage deux demi-feuillets de natures différentes, et à chacune de ces deux lèvres correspond un côté libre de l'arbre  $T^*$ . Identifions conventionnellement ces deux côtés libres notés  $\lambda$ ,  $-\lambda$ . Alors tout côté de  $T^*$  joint effectivement deux nœuds ( $\circ$  et  $\times$ ), et  $T^*$  devient l'arbre  $T$  de  $R$ . Une transformation topologique globale de  $R$  transforme les demi-feuillets en domaines sur  $S$  transformée de  $R$ . Si nous prenons pour  $S$  une surface type de même genre que  $R$ , un coussin à  $p$  trous par exemple, les domaines transformés des demi-feuillets seront appelés demi-domaines d'univalence, et la frontière de chacun pourra être séparée en autant d'arcs que  $\Gamma$ . Sur cette surface  $S$ , l'arbre  $T$  de  $R$  peut être construit sans que l'on ait recours à l'identification conventionnelle d'éléments « libres ».

*Remarque.* — L'arbre  $T$  peut être régulièrement ramifié, si les définitions  $c$  et  $d$  s'appliquent à l'arbre  $T$  construit sur la surface  $S$ .

Inversement, soit  $T^*$  un arbre composé d'un nombre fini de nœuds, dont certains sont origines de côtés libres eux-mêmes associés par couples ( $\varepsilon$ ,  $-\varepsilon$ ); si deux côtés libres associés étaient successifs sur la périphérie de  $T^*$ , on pourrait les raccorder en fermant un cycle; deux côtés associés doivent être de même nature et issus de nœuds de natures différentes. Dans ces conditions on peut construire de proche en proche la surface  $R^*$  représentée par  $T^*$  et la limiter par des coupures indiquées par les côtés libres de  $T^*$ ; en identifiant les coupures correspondant aux liaisons  $\varepsilon$ ,  $-\varepsilon$ , on a construit une surface de Riemann  $R$  à nombre fini de feuillets. On sait déterminer le nombre  $n$  de feuillets de  $R$ , sur  $T^*$ , et pour déterminer le genre de  $R$ , il suffit de déterminer le nombre des points critiques avec leur ordre. La périphérie de  $T^*$  est séparée par les côtés libres en un nombre fini d'arcs polygonaux qui représentent chacun un trajet sur  $R$  limité aux deux coupures représentées par les côtés libres extrêmes. Ce trajet peut se poursuivre sur  $R$  et simultanément sur d'autres arcs polygonaux de la périphérie de  $T^*$ . Lorsque le parcours se sera fermé, le trajet correspondant sur  $R$  se sera également fermé, et l'on aura décrit sur  $R$  un chemin fermé entourant un seul point critique : tous les arcs polygonaux ainsi

parcourus sur la périphérie de  $T^*$  appartiennent à un même cycle dont l'ordre est  $2\nu$  (nombre de côtés de l'ensemble de ces arcs) et le point critique correspondant a pour ordre  $\nu$ . Sur la surface  $S$  on ne distinguera pas les cycles initialement fermés sur  $T^*$  et ceux qui correspondaient à des systèmes d'arcs polygonaux de la périphérie de  $T^*$ . Nous dirons que le « centre » d'un cycle d'ordre  $2\nu$  correspond à un point critique d'ordre  $\nu$ . D'où le genre de  $R$ ,  $2p = \Sigma(\nu_i - 1) - 2(n - 1)$  qui ne dépend que de  $T^*$ .

## 2. — SURFACE DE RECOUVREMENT.

Soit  $\mathfrak{T}$  l'arbre topologique de  $\mathcal{R}$ , surface de recouvrement de  $R$ . Un nœud  $\mathcal{N}$  de  $\mathfrak{T}$  représente un demi-feuillet de  $\mathcal{R}$  et comme tel correspond à un nœud  $N$  de  $T$  (Chap. III, A, 3). Soit alors un point critique de  $\mathcal{R}$  permutant une famille de demi-feuillets, dont fait partie celui représenté par  $\mathcal{N}$ . A ce point critique sur  $\mathcal{R}$  correspond sur  $R$  un point critique de même ordre, donc à chacun des cycles auxquels appartient  $\mathcal{N}$  correspond un cycle de même ordre sur  $T$  auquel appartient  $N$  (d'où l'on conclut que  $\mathfrak{T}$  est à cycles finis). La correspondance entre  $\mathcal{N}$  et  $N$  ayant ainsi été prolongée à tous les nœuds des cycles contenant  $\mathcal{N}$  et  $N$ , on peut à partir de  $\mathcal{N}$  construire un arbre  $T_0$  identique à  $T$ . L'arbre  $\mathfrak{T}$  est l'arbre de la surface de recouvrement représentée par  $T_0$ . Mais  $T_0$  peut être construite à partir de n'importe quel point  $\mathcal{N}$  de  $\mathfrak{T}$ , donc :

**THÉORÈME.** —  *$\mathfrak{T}$  est à cycles finis, régulièrement ramifié, l'ensemble  $K$  (cf. déf., Chap. III, B, 2) pouvant être pris identique à l'arbre  $T$  de  $R$ .*

Cela n'exclut pas que l'on puisse trouver un ensemble  $K'$  plus restreint que  $T$ .

## 3. — CELLULES.

Soit  $\Omega$  un ensemble fini de nœuds de  $\mathfrak{T}$ . On peut définir les éléments suivants sur  $\mathfrak{T}$  : *nœud périphérique* de  $\Omega$ , nœud  $N \in \Omega$  et tel que l'un au moins des nœuds de  $\mathfrak{T}$  et  $\notin \Omega$  soit reliable à  $N$  par un seul côté; *nœud extrapériphérique* de  $\Omega$ , nœud  $Q$  de  $\mathfrak{T}$  et  $\notin \Omega$ , reliable à un nœud  $N \in \Omega$  par un seul côté.  $N$  est donc périphérique de  $\Omega$ .

*Cellules.* — Une cellule est un ensemble fini  $\mathfrak{C}$  de nœuds de  $\mathfrak{T}$ , tel qu'il n'y ait pas dans  $\mathfrak{C}$ , deux nœuds équivalents, et que tout nœud extrapériphérique de  $\mathfrak{C}$  soit équivalent à un nœud de  $\mathfrak{C}$ .

*Construction.* — Soit  $P \in \mathfrak{T}$ , et  $b'_1$  l'ensemble des nœuds extra-périphériques pour  $P$ . Désignons par  $b_1$  le plus petit sous-ensemble de  $b'_1$ , tel que tout nœud de  $b'_1$  soit  $\sim$  à un nœud de  $b_1$ ; posons  $B_1 = b_1 \cup P$ . Soit  $b'_2$  l'ensemble des nœuds extra-périphériques de  $B_1$  et  $b_2$  le plus petit sous-ensemble de  $b'_2$  tel que tout nœud de  $b'_2$  ait un équivalent dans  $B_2 = B_1 \cup b_2$ , .... Cette construction des  $B_i$

ne peut fournir une suite croissante de  $B_i$ , puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de nœuds équivalents. Lorsque  $B_{n+1} \equiv B_n$ ,  $B_n$  est une cellule  $\mathfrak{C}$ .

*Côtés libres associés.* — Un côté libre de  $\mathfrak{C}$  est un trait de liaison de  $T$  joignant un nœud périphérique de  $\mathfrak{C}$  à un nœud extra-périphérique. Soit  $Q$  extra-périphérique, il possède un nœud équivalent  $R$  dans  $\mathfrak{C}$ , et soit  $\alpha$  un côté libre joignant  $Q$  à  $Q'$  (périphérique); le côté issu de  $R$  et de même nature que  $\alpha$  joint  $R \in \mathfrak{C}$  à  $R'$  qui ne peut être  $Q'$  lui-même, sinon il y aurait deux côtés de même nature issus de  $Q'$ , puisque  $Q$  et  $R$  sont distincts;  $R'$  qui est  $\sim Q'$  ne peut donc appartenir à  $\mathfrak{C}$ , sinon  $\mathfrak{C}$  comprendrait deux nœuds équivalents. Les côtés  $(RR')$  et  $(QQ')$  sont deux côtés libres dits associés. Il est immédiat que cette association est réciproque et qu'un côté libre n'a qu'un seul associé. (Nous conviendrons dans ce qui suit de ne représenter que la moitié d'un côté libre.)

*Arcs périphériques.* — Appelant extrémités de  $\mathfrak{C}$  les extrémités des demi-côtés libres, nous pouvons séparer sur la périphérie de  $\mathfrak{C}$  (précisément au moyen des extrémités) des arcs périphériques.

PAVAGE DE  $\mathfrak{S}$  PAR LES CELLULES. — A partir de deux nœuds de  $\mathfrak{S}$ ,  $P_i$  et  $Q_j$  respectivement équivalents aux nœuds  $P$  et  $Q \in \mathfrak{C}$ , on peut construire d'une manière unique des cellules  $\mathfrak{C}_i$  et  $\mathfrak{C}_j$ , comme  $\mathfrak{C}$  est construite à partir de  $P$  et  $Q$ .

THÉORÈME. —  $\mathfrak{C}_i$  et  $\mathfrak{C}_j$  ou bien sont confondues ou bien n'ont aucun nœud commun.

Supposons qu'il existe  $N \in \mathfrak{C}_i$  et à  $\mathfrak{C}_j$ .  $N$  a donc un équivalent  $N_0 \in \mathfrak{C}$  et un seul.  $\mathfrak{C}_i$  et  $\mathfrak{C}_j$  sont construits à partir de  $N$  comme  $\mathfrak{C}$  à partir de  $N_0$  et cette manière de construire  $\mathfrak{C}_i$  et  $\mathfrak{C}_j$  n'a qu'une solution, donc  $\mathfrak{C}_i \equiv \mathfrak{C}_j$ .

THÉORÈME. — Tout nœud  $P \in \mathfrak{S}$  a un équivalent dans  $\mathfrak{C}$ .

Soit  $P \in \mathfrak{S}$ , on peut le joindre à  $O \in \mathfrak{C}$  par une ligne polygonale  $L$ , d'un nombre fini de côtés. Parcourons  $L$  (de  $O$  vers  $P$ ); soit  $P_1$  le premier point extra-périphérique de  $L$  pour  $\mathfrak{C}$ , il a un équivalent  $P'_1$  dans  $\mathfrak{C}$ ; on peut construire  $\mathfrak{C}_1$  à partir de  $P_1$  comme  $\mathfrak{C}$  à partir de  $P'_1$  et  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}$  n'ont aucun point commun. Soit alors  $P_2$  le premier nœud extra-périphérique de  $L$  pour  $\mathfrak{C} \cup \mathfrak{C}_1$ , il est extra-périphérique pour l'une au moins de ces cellules et a par conséquent un équivalent périphérique,  $P'_2 \in \mathfrak{C}$ . On construit  $\mathfrak{C}_2$  à partir de  $P_2$  comme  $\mathfrak{C}$  à partir de  $P'_2$ . Comme  $P_2 \neq P_1$ , et que  $L$  comprend seulement un nombre fini de nœuds, il existe  $\mathfrak{C}_n \ni P$ . Donc  $P$  a un équivalent dans  $\mathfrak{C}$ , évidemment unique. Si l'on distingue  $O \in \mathfrak{C}$  et l'ensemble de tous les  $O_n \sim O$ , on couvre  $\mathfrak{S}$  entier sans omission, ni superposition en construisant les  $\mathfrak{C}_n$  à partir des  $O_n$  comme  $\mathfrak{C}$  à partir de  $O$ . Soient  $\mathfrak{C}_i$  et  $\mathfrak{C}_j$  deux cellules telles que  $P_i \in \mathfrak{C}_i$  et  $Q_j \in \mathfrak{C}_j$  soient reliés par un seul côté (cellules juxtaposées),  $Q'_j$  désignant

l'équivalent dans  $\mathfrak{C}_i$  de  $Q_j$  le côté issu de  $Q'_j$  et de même nature que  $Q_j P_i$  est précisément l'associé de  $P_i Q_j$  dans la cellule  $\mathfrak{C}_i$ .

**THÉORÈME.** — *Dans le pavage de  $\mathfrak{S}$  deux cellules juxtaposées sont reliées l'une à l'autre par des traits de liaison associés.*

#### 4. — CYCLES.

Considérons un cycle  $K$  de  $\mathfrak{S}$ ; pour former le contour de  $K$ , il faut juxtaposer dans le pavage de  $\mathfrak{S}$ , un certain nombre de cellules. Un certain nombre  $\varphi$  d'arcs périphériques de  $\mathfrak{C}$  contribuent à la formation du contour de ce cycle (en pouvant y apparaître plusieurs fois). Il n'existe pas sur la périphérie de  $\mathfrak{C}$  d'arcs périphériques (autres que les  $\varphi$  ci-dessus), contribuant à la formation du contour d'un cycle équivalent, sinon  $\mathfrak{C}$  comprendrait deux nœuds équivalents. Supposons qu'un arc périphérique de  $\mathfrak{C}$  apparaisse  $\nu$  fois sur le contour du cycle  $K$ . Soient  $P_1, \dots, P_\nu$ ,  $\nu$  nœuds équivalents appartenant à ces arcs; comme  $\mathfrak{S}$  est le même à partir de chacun des  $P_i$ , tout arc qui contribue à la formation du contour de  $K$  apparaît également  $\nu$  fois;  $\nu$  est donc aussi le nombre de nœuds équivalents apparaissant sur le contour de  $K$ , et à ce titre est indépendant de  $\mathfrak{C}$ . Nous appellerons  $\nu$  la *caractéristique* de  $K$ . Par contre,  $\varphi$  dépend de la décomposition cellulaire. Le nombre total d'arcs périphériques de cellules  $\mathfrak{C}$  apparaissant sur le contour de  $K$  est  $\nu\varphi$ .

#### 5. — ARBRE DE BASE.

L'arbre de base de  $\mathfrak{S}$  est un arbre  $T$ , avec un nombre fini de nœuds, et une loi d'association entre côtés libres, qui soit l'arbre d'une surface algébrique  $A$ , tous les cycles de  $T$  ayant l'ordre qu'ils ont sur  $\mathfrak{S}$ . Si tous les cycles ont pour caractéristique 1,  $\mathfrak{C}$  est l'arbre de base de  $\mathfrak{S}$ , mais ce n'est plus le cas dès qu'il y a sur  $\mathfrak{S}$  un cycle de caractéristique  $\neq 1$ .

Prenons pour  $T$  un groupement  $G$  de  $N$  cellules  $\mathfrak{C}_\lambda$  dont les indices sont définis mod  $N$ . On va chercher un choix des indices des cellules  $\mathfrak{C}_\lambda$  de façon que, en parcourant un cycle  $K_j$  dans le sens direct, on passe par les demi-liaisons  $(i, -i)$  [la liaison  $i \in \mathfrak{C}_h$ , et la liaison  $-i \in \mathfrak{C}_k$ ] de la cellule  $\mathfrak{C}_h$  à la cellule  $\mathfrak{C}_k$  avec  $k = h + x_i$ . On a alors  $x_{-i} = -x_i$  [si nous cherchons à faire de  $x_i$  un coefficient lié à la liaison  $(i, -i)$  indépendant des cellules qu'elle relie], ce que l'on voit en parcourant le cycle  $K_j$  adjacent à  $K_j$  suivant  $(i, -i)$ . Pour chaque  $K_j$  on a une équation

$$(1) \quad \nu_j \sum_{\mathfrak{C}_j} x_i = \lambda_j N,$$

où  $\nu_j$  est la caractéristique du cycle  $K_j$ ;  $\sum_{\mathfrak{C}_j}$  la somme des  $x_i$  distincts corres-

pendant aux côtés libres reliant deux cellules consécutives du cycle.  $\lambda_j$  doit être un entier premier avec  $\nu_j$ , sinon le cycle se fermerait sans être constitué par  $\nu\rho$  arcs périphériques de  $\mathfrak{C}$ .

Si le système (1) est résoluble en nombres entiers, on peut construire un groupement de  $N$  cellules ayant toutes des indices différents, et prendre pour loi d'association, la suivante : soit  $i$  un côté libre de  $\mathfrak{C}_h$ , on lui associe le côté libre  $-i$  de  $\mathfrak{C}_{h+x_i}$ ; l'association est évidemment réciproque : à  $-i$  de  $\mathfrak{C}_{h+x_i}$  correspond  $i$  de  $\mathfrak{C}_{h+x_i-x_i} \equiv \mathfrak{C}_h$ . On a ainsi constitué un arbre de base  $T$  d'une surface algébrique  $A$  <sup>(1)</sup>.

**SURFACE DE RECOUVREMENT DE  $A$ .** — Soit  $P \in \mathfrak{T}$  et  $O$  un nœud de  $T$ . On peut construire une ligne polygonale  $OP$  ou  $\Lambda$ . Soit  $P_1$  le premier nœud extra-périphérique pour  $T$  sur  $\Lambda$ ,  $P_1Q_1$  le côté de  $\Lambda$  précédant  $P_1$  ( $Q_1 \in T_1$ ).  $PQ_1$  côté libre de  $T$  a un associé  $Q'_1P'_1$  ( $P'_1 \in T$ ) et l'on peut construire une ligne  $\Lambda_1$  à partir de  $P'_1$  comme  $\Lambda$  à partir de  $P_1$ . Soit  $P_2$  le premier nœud extra-périphérique sur  $\Lambda_1$  pour  $T$ ; on peut construire  $\Lambda_2$  et à chacune de ces opérations on progresse au moins d'un côté sur  $\Lambda$ , et l'on associe ainsi à  $P$  un point  $\Pi$  de  $T$ .

Ce point  $\Pi$  ne dépend pas de  $\Lambda$ ; il suffit de montrer que  $\Pi$  n'est pas changé si l'on remplace dans  $\Lambda$ , une ligne polygonale contour d'un cycle, par la ligne polygonale complétant le contour du même cycle et ayant les mêmes extrémités. Cela revient à montrer que si  $Q$  est un nœud de  $\mathfrak{T}$ , et  $M$  un nœud  $T \sim Q$ , et que l'on fasse parcourir à  $Q_1$  le contour d'un cycle en partant de  $Q$  et revenant en  $Q$ , le point  $M_1 \sim Q_1$  va parcourir à partir de  $M$  une ligne polygonale connexe ou disjointe de  $T$  se fermant en  $M$  quand et seulement quand  $Q_1$  atteint  $Q$ . C'est une conséquence du fait que les équations (1) sont vérifiées ( $\lambda_j$  premier avec  $\nu_j$ ), d'autre part, si  $Q_1$  décrit un cycle d'ordre  $2r$ ,  $M_1$  parcourt une ligne polygonale de  $2r$  côtés (en comptant pour un seul deux demi-liaisons associées).

Soit  $\mathcal{R}$  la surface de Riemann représentée par  $\mathfrak{T}$  et admettant les mêmes points fondamentaux de ramification que  $A$ . Un point de  $\mathcal{R}$  appartient, soit à un demi-feuillet : alors la correspondance établie entre les nœuds de  $\mathfrak{T}$  et ceux de  $T$ , permet d'établir entre un point d'un demi-feuillet de  $\mathcal{R}$  et un point d'un demi-feuillet de  $A$ , une correspondance conforme des voisinages, localement identique; soit à l'intérieur d'un arc séparant deux demi-feuillets : la correspondance ci-dessus s'étend encore à ce cas, avec correspondance identique des voisinages; ou bien c'est un point critique de  $\mathcal{R}$ , d'ordre  $\lambda$  correspondant sur  $\mathfrak{T}$  à un cycle d'ordre  $2\lambda$ . A ce cycle correspond sur  $T$  une ligne polygonale de  $2\lambda$  côtés, donc sur  $A$  un point critique d'ordre  $\lambda$ . La correspondance entre

(1) J'ai montré par une toute autre méthode que l'ordre de base  $T$  pouvait être construit même dans le cas où (1) n'est pas résoluble en nombres entiers, (*C. R., Acad. Sc.*, 232, 1951, p. 467).



« centres » de cycles s'étend encore dans le voisinage des points critiques, par identité locale.

**THÉORÈME.** — *La surface  $\mathcal{R}$  représentée par  $\mathfrak{E}$  et ayant les mêmes points fondamentaux de ramification que  $A$ , est la surface de recouvrement de  $A$  représentée par  $T$ .*

#### 6. — RÉSOLUTION DU SYSTÈME (1).

Au lieu de conserver  $x_i$  et  $x_{-i}$  dans les équations (1) nous écrirons  $\varepsilon_{ji}x_i$  où  $\varepsilon_{ji}$  est le coefficient de  $x_i$  dans l'équation de  $K_j$ .

a.  $2n$  désignant le nombre des côtés libres de  $\mathfrak{C}$ , les équations

$$(1) \quad \sum_{K_j} \varepsilon_{ji} x_i = \lambda_j N$$

contiennent  $n$  inconnues. Puisqu'il y a  $2n$  côtés libres, il y a aussi  $2n$  arcs périphériques de  $\mathfrak{C}$ , d'où  $2n$  équations. Si dans une équation figurent  $h$  inconnues, c'est que  $h$  arcs périphériques de  $\mathfrak{C}$  participent à la formation de  $K_j$ , et l'équation de  $K_j$  se trouve répétée  $h$  fois dans les  $2n$  que nous avons écrites;  $h$  est ici le  $\rho$  défini plus haut.

b. Retirons du système les équations qui se rencontrent plusieurs fois et écrivons le système sous la forme

$$(2) \quad \sum_K \varepsilon_{ji} x_i = \lambda_j \frac{N}{\nu_j}.$$

Dans ce système, puisque les cycles  $K_j$  sont toujours parcourus dans le sens direct, l'inconnue  $x_i$  se rencontrera deux fois seulement dans deux équations distinctes, avec des signes différents, puisque la liaison  $(i, -i)$  correspondante, est un côté commun à deux cycles seulement et est parcourue dans deux sens différents lorsqu'on parcourt les deux cycles dans le même sens.

c. Si toutes les équations comportent au moins deux inconnues, il y a au plus  $n$  équations dans le système (2). Supposons que (1) contienne  $\alpha$  équations à une inconnue, ce qui ramène à  $2n - \alpha$  le nombre des équations répétées au moins deux fois :

Si  $\alpha \leq 2$ , il y a au plus  $n - 1$  équations distinctes à plus d'une inconnue, ce qui porte à  $n + 1$  au plus le nombre d'équations distinctes dans (2).

Si  $\alpha > 2$ , soient sur la périphérie de  $\mathfrak{C}$  deux arcs périphériques de  $\rho = 1$ , limités par les côtés associés  $\lambda$  et  $-\lambda$  et  $\mu$  et  $-\mu$ , et tels qu'il n'y ait pas d'autre arc de  $\rho = 1$  entre les côtés libres  $\lambda$  et  $\mu$ . Il y a alors entre  $\lambda$  et  $\mu$ , un arc au moins d'un cycle de  $\rho > 2$ ; sinon à partir des côtés libres  $\lambda$  et  $-\lambda$  tous

les côtés libres seraient deux à deux associés, et l'on trouverait que  $\mu$  aurait un autre associé que  $-\mu$ , puisque entre  $-\lambda$  et  $-\mu$  il y a d'autres arcs de cycles avec  $\varphi = 1$ . Cela ayant lieu entre chaque couple d'arcs dont les extrémités sont associées, on déduit que :

Si  $\alpha = 3$  au moins une équation est écrite trois fois dans (1).

Si  $\alpha = 4$  au moins deux équations sont écrites trois fois ou une équation est écrite quatre fois, etc. ; dans le cas général on pourra retirer  $\alpha - 2$  équations de (1) pour se ramener au cas où toutes les équations restantes (à part celles ne contenant qu'une inconnue) sont encore écrites au moins deux fois. Il reste donc au plus  $\alpha + \frac{1}{2}[(2n - \alpha) - (\alpha - 2)] = n + 1$  équations dans (2).

d. Le système (2) comprenant  $p$  équations, le rang du tableau des coefficients est  $p - 1$  ; la somme de toutes les formes linéaires figurant aux premiers membres est  $\equiv 0$ , d'après (b). Donc le système ne sera résoluble que si l'on peut trouver  $N$  et un système de  $\lambda_j$  (chacun premier avec le  $\nu_j$  correspondant) vérifiant

$$(3) \quad \sum \lambda_j \frac{N}{\nu_j} = 0.$$

Si le rang était  $< p - 1$ , il serait possible d'exprimer une forme linéaire des premiers membres, comme somme (changée de signe) d'autres formes de (2), sans pour cela les utiliser toutes ; revenons alors à la signification de ces équations : l'équation d'un cycle fera toujours intervenir les équations de tous les cycles qui lui sont contigus qui sont les seuls où figurent les inconnues apparaissant dans la forme initiale, et de proche en proche tous les cycles périphériques de  $\mathfrak{C}$  interviendront.

Il est à remarquer que la condition (3) ne fait pas intervenir la structure de  $\mathfrak{C}$ , ni les cycles de caractéristique 1. C'est une condition ne dépendant que de  $\mathfrak{C}$ .

c. Calcul du déterminant des  $p - 1$  formes principales. Il possède la propriété suivante H : *chaque colonne se compose de zéros et de deux éléments au plus,  $\neq 0$  égaux l'un à  $+1$ , l'autre à  $-1$ .*

Nous chercherons seulement la valeur absolue de ce déterminant, sachant qu'il est  $\neq 0$ , et nous permuterons sans précautions pour le signe, lignes ou colonnes. Aucune colonne ne pouvant être composée exclusivement de zéros, ni aucune ligne, on peut placer un 1 comme premier terme de la diagonale principale et ajouter la première ligne à celle où figure  $-1$  à la première colonne. Le coefficient de  $a_1^1$  est un déterminant  $D_1$  de même espèce que le précédent, puisqu'on a modifié une seule ligne sans altérer la propriété fondamentale H. Il en résulte que ce déterminant a pour valeur absolue 1.

Sous la condition (3) le système (2) est résoluble en nombres entiers.

## CHAPITRE IV.

## DÉCOMPOSITION EN FEUILLETS DE CERTAINES SURFACES DE RIEMANN.

## A. — Méthodes d'isolation des singularités.

## 1. — NOTATIONS.

La variable complexe étant  $w$ , nous considérerons des surfaces de Riemann  $\mathcal{R}$  obtenues par prolongement analytique. Nous admettrons que le prolongement est possible au delà d'un point algébrique sur  $\mathcal{R}$ , et nous réserverons le nom de point critique à la projection sur le plan  $w$ , d'un point algébrique de  $\mathcal{R}$ .  $\mathcal{R}$  sera supposée simplement connexe, représentée sur un cercle  $C$  de rayon  $\rho$  (fini ou infini), par une fonction  $z = \varphi(w)$  dont la fonction inverse sera  $w = f(z)$ .

Un point  $w_0$  est transcendant pour  $\varphi$ , s'il existe à l'intérieur de tout cercle centré en  $w_0$  un élément  $\mathcal{E}(w, z)$  prolongeable dans l'intérieur de ce cercle, suivant un certain chemin jusqu'à  $w_0$  exclusivement. Un point transcendant n'existe que dans le plan  $w$  [les points critiques sont provisoirement exclus, puisque l'on a admis que  $\varphi$  était prolongeable au delà des points algébriques]. Il peut arriver que certains éléments soient prolongeables jusqu'en  $w_0$  inclusivement; nous dirons qu'ils définissent une branche régulière (ou algébrique) en  $w_0$ . Nous désignerons par  $\mathcal{T}$  l'ensemble des points transcendants,  $\mathcal{T}'$  son dérivé,  $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ . Nous nous bornerons aux surfaces  $\mathcal{R}$  telles qu'il est possible pour chaque valeur de l'entier  $n$ , de construire un ensemble fini de domaines simplement connexes  $\delta_n^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p_n$ ) tels que :

$$1^\circ \quad \mathcal{T}' \subset \bigcup_i \delta_n^i;$$

$$2^\circ \quad \max \text{dist}(P, \mathcal{T}') \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ } P \text{ parcourant la frontière de } \bigcup_i \delta_n^i.$$

2. — EXHAUSTION QUASI SIMPLE DE  $C\overline{\mathcal{T}}$ .

Soit  $\gamma_n^i$  la courbe fermée frontière de  $\delta_n^i$ ; la trace de  $\mathcal{T}'$  sur  $\delta_n^i$  est un ensemble fermé intérieur à  $\delta_n^i$ , dont la distance à  $\gamma_n^i$  est  $h_n^i > 0$ . La couronne comprise entre  $\gamma_n^i$  et une courbe  $\gamma_n^{i'}$  dont tous les points sont à une distance de  $\gamma_n^i < h_n^i$ , ne renferme qu'un nombre fini de points transcendants, et au plus une infinité dénombrable de points critiques. Il est donc possible de construire dans cette couronne une courbe  $\gamma_n^{i'}$  fermée limitant un domaine  $\delta_n^{i'} \subset \delta_n^i$ , contenant à son intérieur tous les points de  $\overline{\mathcal{T}}$  intérieurs à  $\delta_n^i$ , et ne passant par aucun point critique. Les points de  $\mathcal{T}$  extérieurs à  $\bigcup_i \delta_n^{i'}$  sont isolés et en nombre fini : on peut les enfermer dans des domaines  $d_n^k$  ne contenant chacun qu'un seul point trans-

ependant, et dont les courbes frontières ne passent par aucun point critique; on peut assujettir les  $d_n^k$  à avoir des diamètres qui tendent vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . Désignons par  $\delta_n^i$  les domaines  $\delta_n^{ji}$  ou  $d_n^k$  ( $i = 1, 2, \dots, q_n$ ) et posons  $\Delta_n = \subset \bigcup_i \delta_n^i$ ; les  $\Delta_n$  forment une suite croissante, chacun étant limité par un nombre fini  $q_n$  de courbes fermées  $\gamma_n^i$  limitant les domaines  $\delta_n^i$ ;  $\bar{\Delta}_n$  ne contient aucun point transcendant et les  $\gamma_n^i$  ne passent par aucun point critique. Les  $\delta_n^i$  satisfont alors à

$$1^\circ \quad \bar{\mathfrak{C}} \subset \bigcup_i \delta_n^i;$$

$$2^\circ \quad \max \text{dist}(P, \bar{\mathfrak{C}}) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ } P \text{ parcourant la frontière de } \bigcup_i \delta_n^i;$$

$$3^\circ \quad \gamma_n^i \text{ ne passe par aucun point critique ni transcendant}$$

### 3. — EXHAUSTION SIMPLEMENT CONNEXE DE $\bar{\mathfrak{C}}$ .

Sur chaque courbe  $\gamma_n^i$  marquons un point  $A_n^i$ . Construisons alors dans  $\Delta_1$  à partir d'un point  $A_0$  intérieur non critique,  $q_1$  courbes ne passant par aucun point critique, sans autres points communs que  $A_0$  et aboutissant aux points  $A_1^i$ .

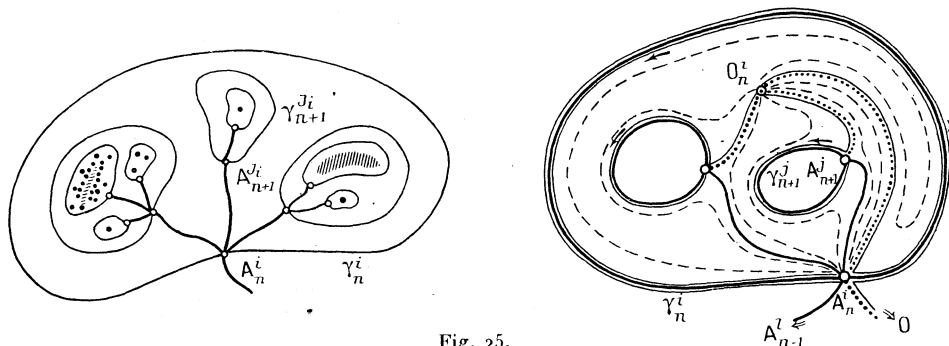


Fig. 25.

Les  $\delta_n^i$  se séparent en  $q_n$  familles: tous les  $\delta_{n+1}^{ih}$  d'une même famille étant intérieurs au même  $\delta_n^h$ . Joignons alors chaque  $A_{n+1}^{ih}$  à  $A_n^h$  par une courbe ne rencontrant pas de point critique, intérieure à  $d_n^h = \Delta_{n+1} \cap \delta_n^h$ . Ces courbes, qui n'ont d'autre point commun que  $A_n^h$ , seront notées  $[A_n^h A_{n+1}^{ih}]$ . En retirant de  $\Delta_n$  toutes les courbes ainsi tracées, on obtient un domaine  $\Delta'_n$  simplement connexe. Les courbes qui deviennent ainsi frontières de  $\Delta'_n$ , en constituent la « frontière régulière ». La suite des  $\Delta'_n$  est croissante; soit  $\Delta'$  le domaine limite dont la « frontière régulière » est l'ensemble de toutes les courbes  $[A_n^h A_{n+1}^{ih}]$ . Soit  $\omega_1 \notin \bar{\mathfrak{C}}$ ; il est donc à une distance  $\rho > 0$  de  $\bar{\mathfrak{C}}$  et d'après la condition  $2^\circ$ ,  $\omega_1$  est extérieur aux  $\delta_n^i$  pour  $n$  assez grand. Donc  $\omega_1 \in \bar{\Delta}'$ , en étant soit intérieur, soit sur sa frontière régulière (celle d'un  $\Delta'_n$  pour  $n$  assez grand).

Considérons une courbe fermée  $\Gamma$  intérieure à  $\bar{\Delta}'$ ; elle sépare le plan en deux

régions dont l'une (dite intérieure) ne contient pas  $A_0$ . Cette région est formée de points intérieurs à  $\Delta'$  : en effet, s'il y avait un point de  $\overline{\mathfrak{E}}$  dans cette région, comme  $\Gamma$  est à une distance  $\rho > 0$  de  $\overline{\mathfrak{E}}$ , il y aurait toute une courbe  $\gamma_n^i$  dans l'intérieur de  $\Gamma$ , donc un point  $A_n^i$ , et la frontière régulière de  $\Delta_n^i$ , donc celle de  $\Delta'$  couperait  $\Gamma$ , ce qui est exclu. Un point  $\alpha_1 \in \overline{\mathfrak{E}}$ , qui n'est pas intérieur à  $\Delta'$ , est donc sur la frontière régulière d'un  $\Delta_n^i$ , et s'il était intérieur à  $\Gamma$ , on aurait la même contradiction que dans le cas précédent : les  $\Delta_n^i$  et  $\Delta'$  sont simplement connexes.

#### 4. — CONSTRUCTION DES FEUILLETS DE $\mathcal{R}$ .

1° LES RAYONS DE PROLONGEMENT. — Soit  $O_n^i$  un point non critique intérieur à  $d_n^i$ . Soit une famille de courbes  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$  dépendant d'un paramètre continu  $\mu$  (variant par exemple de 0 à  $\pi$ ), intérieures à  $d_n^i$ , joignant  $O_n^i$  au point  $A_n^i$ , sans autres points communs que les extrémités, telles que par tout point de  $d_n^i$ , il passe une et une seule  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$ , une  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$  ne pouvant passer par plus d'un seul point critique. Appelons  $d_n^i$  le domaine simplement connexe obtenu en retirant de  $d_n$  la frontière régulière de  $\Delta_{n+1}^i$  ; un certain nombre de courbes  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$  sont à double détermination : elles sont des deux types suivants :

$\alpha$ . des courbes  $(O_n^i A_{n+1}^{i,i}) +$  (pour l'une des déterminations seulement) la courbe  $\gamma_{n+1}^{i,i} \hat{\curvearrowright}^{(1)} +$  l'arc  $[A_{n+1}^{i,i} A_n^i]$ . Il y a autant de ces courbes que de  $\partial_{n+1}^{i,i}$  intérieurs à  $\partial_n^i$ .

$\beta$ . une courbe  $(O_n^i A_n^i) +$  (pour l'une des déterminations seulement) la courbe  $\gamma_n^i \hat{\curvearrowright}$ . Dans un voisinage de  $A_n^i$  on peut distinguer un arc de  $\gamma_n^i \hat{\curvearrowright}$  issu de  $A_n^i$  et un arc aboutissant en  $A_n^i$ . Nous pouvons assujettir les arcs  $(O_n^i A_n^i)$  et  $(O_{n-1}^k A_n^i)$  à ne comprendre dans l'angle qu'ils forment en  $A_n^i$  que l'arc de  $\gamma_n^i \hat{\curvearrowright}$  issu de  $A_n^i$  et aucun arc  $[A_n^i A_{n-1}^k]$  ou  $[A_n^i A_{n+1}^{i,i}]$ . Les courbes à double détermination sont astreintes à ne passer par aucun point critique.

2° PROLONGEMENT DANS  $d_n^i(\zeta)$ . — Considérons un élément  $\mathcal{E}(O_n^i, \zeta)$  de  $\varphi(\alpha)$  et prolongeons-le radialement suivant les courbes  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$ . On ne poursuivra pas le prolongement au delà d'un point algébrique et l'on appellera « rayon exceptionnel », la portion de  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$  (sur  $\mathcal{R}$ ) comprise entre le point algébrique et le point  $A_n^i$ . Pour les  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$  à double détermination on effectuera le prolongement suivant les arcs  $(O_n^i A_{n+1}^{i,i})$  et  $\gamma_{n+1}^{i,i} \hat{\curvearrowright}$  seulement pour les courbes du type  $\alpha$ , et suivant  $(O_n^i A_n^i)$  et  $\gamma_n^i \hat{\curvearrowright}$  pour le type  $\beta$ . Le prolongement de  $\mathcal{E}(O_n^i, \zeta)$  a été effectué dans  $\overline{d}_n^i(\zeta) \equiv d_n^i$  privé des arcs  $[A_n^i A_{n+1}^{i,i}]$  et des « rayons exceptionnels », toujours en nombre fini : sinon ils s'accumuleraient suivant une  $\mathfrak{C}_{n,i}^\mu$  (à simple ou double détermination) qui passerait par un point transcendant, ce qui est impossible.

---

(1)  $\gamma_{n+1}^{i,i} \hat{\curvearrowright}$  désigne la courbe  $\gamma_{n+1}^{i,i}$  parcourue dans le sens direct à partir de  $A_{n+1}^{i,i}$ .

3° CONSTITUTION D'UN FEUILLET. — Soit  $O_0$  une origine dans  $\Delta_2$  et  $\mathcal{E}(O_0, \zeta_0)$  un élément de  $\varphi(\omega)$ . Effectuons son prolongement dans  $\Delta'_1$  comme il vient d'être dit ( $\Delta'_1 \equiv \Delta_1$  privé des arcs  $[A_0 A'_1]$ ) et suivant chacune des courbes  $\gamma'_1$ . Ce prolongement permet de définir dans chaque  $d'_1$ , un élément unique  $\mathcal{E}(O'_1, \zeta'_{0,1})$  qui, prolongé dans  $d'_1(\zeta'_{0,1})$ , coïncide sur  $\gamma'_1$  avec le prolongement de  $\mathcal{E}(O_0, \zeta_0)$ . Nous dirons qu'on a sur  $\mathcal{R}$  un domaine ne se recouvrant pas, simplement connexe, tel que tout point du plan  $\omega$  qui  $\in \overline{C\mathfrak{E}}$  soit projection d'un point ou intérieur ou frontière de ce domaine, que nous appellerons *feuillet* de  $\mathcal{R}$  couvrant  $\overline{C\mathfrak{E}}$ . Ce feuillet sera dit *complet* si  $\overline{C\mathfrak{E}}$  couvre le plan  $\omega$ .

4° DOMAINES D'UNIVALENCE. — Un feuillet de  $\mathcal{R}$  est l'image par  $\omega = f(z)$  de domaines du plan  $z$  où  $f$  est univalente, ses valeurs couvrant  $\overline{C\mathfrak{E}}$ . Soit  $z_0 \in \hat{C}$  : si  $f(z_0) \notin \overline{C\mathfrak{E}}$ , on sait déterminer par un nombre fini d'opérations, le domaine d'univalence auquel appartient  $z_0$ , où les domaines (en nombre fini) dont il est point frontière.  $\omega_0$  est à une distance finie de  $\mathfrak{E}$ , donc il existe  $n$  assez grand pour que  $d'_n \ni \omega_0$ . On prolonge alors  $\mathcal{E}(\omega_0, z_0)$  jusqu'à  $O'_n$  suivant la  $\mathfrak{C}^u_n$ , passant par ce point. Si ce prolongement rencontre un point algébrique entre  $\omega_0$  et  $O'_n$ , on obtient deux éléments en  $O'_n$ ; on peut en obtenir plus de deux si  $\mathcal{E}(\omega_0, z_0)$  est lui-même élément algébrique de  $\varphi(\omega)$ . Le prolongement du ou des éléments obtenus en  $O'_n$  suivant le système des courbes  $(O'_n A'_n)(A'_n O'_{n+1})(O'_{n+1} A'_{n+1})$  conduit en  $O_0$  à un nombre égal d'éléments : les feuillets construits à partir de ces éléments comprennent le point  $(\omega_0, z_0)$  de  $\mathcal{R}$ , donc les domaines d'univalence correspondants comprennent  $z_0$ , comme point intérieur ou frontière d'un nombre fini de feuillets ou domaines d'univalence.

## 5. — RÉDUCTION DES ENCLAVES FINIES.

Soit  $\mathcal{E}(A'_n, a'_n)$  un élément que l'on prolonge suivant  $\gamma'_n$  sans limiter ce prolongement lorsqu'on rencontre  $A'_n$ . Supposons que la courbe  $\Gamma_n^i$  obtenue dans le plan  $z$  comme image de  $\gamma_n^i$  soit une courbe fermée, qui se décompose donc en  $p$  arcs élémentaires ayant chacun pour image  $\gamma_n$  parcourue une seule fois. Prolongeons alors  $\mathcal{E}(A'_n, a'_n)$  dans  $\delta_n^i$  de toutes les façons possibles. Ce prolongement n'est arrêté par aucun point transcendant puisque  $\Gamma_n^i$  est fermée. Le domaine  $\mathfrak{D}_n^i$  obtenu dans le plan  $z$ , est ou simplement connexe, ou de connexion finie, puisque  $f(z) = A'_n$  n'a qu'un nombre fini de solutions à l'intérieur de  $\Gamma_n^i$ ; dans le cas où  $\mathfrak{D}_n^i$  est multiplement connexe les courbes frontières autres que  $\Gamma_n^i$  ont pour image  $\gamma_i$  dans le plan  $\omega$ , et peuvent être décomposées en un nombre fini d'arcs élémentaires. Dans les deux cas  $\mathfrak{D}_n^i$  ne comprend qu'un nombre fini de zéros de  $f(z)$  et peut être décomposé en un nombre fini de cellules d'univalence dans chacune desquelles  $f(z)$  prend toutes les valeurs couvrant  $\delta_n^i$ . Chacune de ces cellules a pour frontière un arc élémentaire de la frontière de  $\mathfrak{D}_n^i$ . Dans le

cas où  $\mathfrak{D}_n^i$  est de connexion multiple, soit  $\Gamma_n^{*i}$  une des courbes intérieures, obtenue par prolongement suivant  $\gamma_n^i$  de  $\mathcal{E}(A_n^i, a_n^{*i})$ . Prolongeons cet élément de toutes les façons possibles à l'extérieur de  $\gamma_n^i$ . On peut renouveler pour le domaine  $\mathfrak{D}_n^i$  (obtenu ainsi à l'intérieur de  $\Gamma_n^{*i}$  tout ce qui a été dit pour  $\mathfrak{D}_n^i$ ). On décompose  $\mathfrak{D}_n^i$  en cellules d'univalence et l'on rassemble en un même domaine d'univalence deux cellules, l'une intérieure, l'autre extérieure à  $\Gamma_n^{*i}$ , ayant en commun un arc élémentaire de  $\Gamma_n^{*i}$ . Ces domaines complets d'univalence sont complètement intérieurs à  $\Gamma_n^i$  et de ce fait sont en nombre fini ; même en considérant tous ceux que l'on peut constituer à partir de toutes les courbes intérieures à  $\Gamma_n^i$ , images de  $\gamma_n^i$ . Nous appellerons *réduction* de l'enclave finie  $\Gamma_n^i$ , l'opération qui a consisté à décomposer l'intérieur de  $\Gamma_n^i$  en domaines complets d'univalence, et en cellules à valeurs couvrant  $\delta_n^i$ , ces dernières admettant chacune un arc élémentaire de  $\Gamma_n^i$  comme arc frontière.

**THÉORÈME FONDAMENTAL.** — Soit  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ . Si  $w_0 = f(z_0) \notin \mathfrak{E}^*(\delta_n^i)^{(1)}$  on sait déterminer le domaine d'univalence de  $f(z)$  auquel  $z_0$  est intérieur, ou les domaines (en nombre fini) dont il est point frontière.

Soit  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$  avec  $w_0 = f(z_0) \in \overline{\mathfrak{E}}$ , mais tel que les diamètres des  $\delta_n^i$  qui contiennent  $w_0$ , décroissent vers zéro. Convenons que dans la méthode générale de construction des domaines d'univalence, nous réduisons les enclaves finies  $\Gamma_n^i$  toutes les fois que cela est possible. Soit  $\mathcal{E}(w_0, z_0)$  l'élément de  $\varphi(w)$  correspondant à  $z_0$  : c'est un élément à un ou plusieurs feuillets qui se projette sur un disque  $E_0$  du plan  $w$  ; il existe un  $\delta_n^i \subset E_0$  avec  $w_0 \in \delta_n^i$  et  $A_n^i \in E_0$ . L'élément  $\mathcal{E}(A_n^i, a_n^i)$  prolongement immédiat de  $\mathcal{E}(w_0, z_0)$ , prolongé suivant  $\gamma_n^i$  engendre dans le plan  $z$  une courbe fermée  $\Gamma_n^i$ . Dans la suite des  $\delta_n^i$  ( $m = n, n-1, n-2, \dots, 1$ ), soit  $\delta_{m_0}^{j_0}$  celui d'indice le plus faible, tel qu'un élément  $\mathcal{E}(A_{m_0}^{j_0}, a_{m_0}^{j_0})$  prolongé suivant  $\gamma_{m_0}^{j_0}$  engendre, dans le plan  $z$  une courbe fermée  $\Gamma_{m_0}^{j_0}$  contenant  $z_0$ . La réduction de l'enclave finie correspondante permet de déterminer le ou les domaines d'univalence de  $f(z)$  auxquels appartient  $z_0$  soit comme point intérieur, soit comme point frontière.

## 6. — VOISINAGE D'UN POINT TRANSCENDANT ISOLÉ.

Si  $\omega$  est transcendant isolé, il existe  $\delta_n^\omega \ni \omega$ , de diamètre arbitrairement petit, et  $\mathcal{E}(A_n^\omega, a_n^\omega)$  — où  $A_n^\omega$  est un point du contour de  $\delta_n^\omega$  — qui, prolongé dans  $\delta_n^\omega$  de toutes les façons possibles, lui fait correspondre un domaine  $\Delta_n^\omega$  non fermé, c'est-à-dire admettant des points de la circonférence  $C$ , comme points frontières, sans que ce prolongement soit arrêté par d'autres points transcendants

(1) Nous notons  $\mathfrak{E}^*(\delta_n^i)$  l'ensemble des points de  $\overline{\mathfrak{E}}$  pour lesquels la suite des  $\delta_n^i$  (satisfaisant aux conditions du paragraphe A,2) qui les contiennent, n'ont pas des diamètres qui tendent vers zéro.

que  $\omega$ , ou que les projections des points algébriques rencontrés s'accumulent en un autre point que  $\omega$ .

a. Si  $\delta_n^\omega$  ne renferme aucun point critique,  $\Delta_n^\omega$  est alors limité par un seul contour. Joignons  $A_n^\omega$  au point  $\omega$ , et dans le plan  $z$ , prolongeons tous les éléments  $\mathcal{E}(A_n^\omega, a_n^{\omega,i})$  tels que  $a_n^{\omega,i}$  appartienne au contour de  $\Delta_n^\omega$ , suivant  $(A_n^\omega, \omega)$ . On a ainsi séparé  $\Delta_n^\omega$  en cellules d'univalence à valeurs couvrant  $\delta_n^\omega$ , chaque cellule admettant un arc élémentaire du contour de  $\Delta_n^\omega$  pour arc frontière.

b. Si  $\delta_n^\omega$  renferme un nombre fini de points critiques, on peut, en réduisant le diamètre de  $\delta_n^\omega$ , construire un  $\delta_m^\omega$  correspondant au cas précédent.

c. Si  $\delta_n^\omega$  renferme une infinité de points critiques, construisons dans  $\delta_n^\omega$  une famille de courbes  $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$  joignant  $\omega$  à  $A_n^\omega$ , et soit encore  $(\omega, A_n^\omega)$  la  $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$  à double détermination. Supposons que les prolongements de tous les  $\mathcal{E}(A_n^\omega, a_n^{\omega,i})$  suivant  $(A_n^\omega, \omega)$  conduisent à des éléments réguliers en  $\omega$ . On effectue alors le prolongement de chaque élément obtenu en  $\omega$  suivant la famille des  $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$ . Les cellules d'univalence obtenues dans  $\Delta_n^\omega$  sont limitées par un nombre fini de courbes correspondant à des « rayons exceptionnels » joignant des points algébriques à  $A_n^\omega$ .

REMARQUES. — 1. Dans le cas où  $f$  est méromorphe, on reconnaît dans les cas *a* et *b*, les points directement critiques de première espèce; dans le cas *c*, les points indirectement critiques, où les rayons du cercle de centre  $\omega$  considérés par Iversen <sup>(1)</sup> sont remplacés par la famille des courbes  $\mathfrak{C}_{n,\omega}^\mu$ .

2. Dans les trois cas ci-dessus on dira qu'on a *réduit* l'enclave infinie  $\Delta_n^\omega$ . La méthode utilisée est bien la méthode générale où l'on a considéré dès le début une courbe  $(A_n^\omega \omega)$  au lieu de considérer une suite d'arcs  $(O_n^i A_{n+1}^i, O_{n+1}^j)$  dont l'ensemble constitue une courbe joignant  $A_n^\omega$  à  $\omega$ .

## B. — Surface de Riemann de type parabolique.

L'existence de fonctions méromorphes  $w = f(z)$  pour lesquelles toute valeur  $w$  est point transcendant pour la fonction inverse  $z = \varphi(w)$  montre que même pour des surfaces de Riemann de type parabolique, il peut ne pas exister de suites de domaines  $\delta^i$  de diamètres tendant vers zéro et enfermant  $\bar{\mathfrak{C}}$ .

### 1. — CONSÉQUENCE DU THÉORÈME DE GROSS.

Soit  $\mathcal{F}$  la famille dénombrable des éléments réguliers de  $\varphi(w)$ , dont les centres sont à coordonnées rationnelles. D'après le théorème de Gross [sous la

<sup>(1)</sup> *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*. Thèse, Helsingfors, 1914.



forme donnée par R. Nevanlinna <sup>(1)</sup>], si  $\mathcal{E}(\omega_0, z_0)$  est un élément régulier de  $\mathcal{F}(\omega)$ , il est prolongeable jusqu'à  $\omega = \infty$ , sur presque tous les rayons issus de  $\omega_0$ ; donc dans tout angle  $\theta' < \arg(\omega - \omega_0) < \theta''$ , il existe une demi-droite  $\arg(\omega - \omega_0) = \theta$ , ( $\theta' < \theta < \theta''$ ) suivant laquelle  $\mathcal{E}(\omega_0, z_0)$  est prolongeable jusqu'à  $\omega = \infty$ . Rangeons les éléments de  $\mathcal{F}$  en une suite  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n, \dots$  de centres  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ . Soit  $C_0$  un domaine convexe borné fermé du plan  $\omega$ : si  $\omega_1 \in C_0$ , et si  $E'_1$  désigne un cercle de rayon inférieur à celui du cercle de convergence de  $\mathcal{E}_1$ , le domaine  $C_1 = C_0 \cap E'_1$  est un domaine convexe borné fermé dans lequel  $\mathcal{E}_1$  est prolongeable radialement. Si  $\omega_1 \notin C_0$ , il existe dans l'angle que font les deux « tangentes » issues de  $\omega_1$  à  $C_0$  une demi-droite suivant laquelle le prolongement de  $\mathcal{E}_1$  est possible jusqu'à  $\omega = \infty$ . On peut alors déterminer un angle  $A_1$  de sommet  $\omega_1$ , d'ouverture  $\alpha_1 > 0$ , contenant  $\Delta_1$  à son intérieur, dans lequel le prolongement radial de  $\mathcal{E}_1$  est possible jusque dans  $C_1 = C_0 \cap A_1$ ; le prolongement de  $\mathcal{E}_1$  étant supposé possible suivant les demi-droites extrêmes de  $A_1$ ,  $C_1$  est convexe, borné, fermé.  $C_1$  et  $\mathcal{E}_2$  jouant alors le rôle que jouaient  $C_0$  et  $\mathcal{E}_1$ , on peut définir un nouveau domaine  $C_2$  convexe borné fermé dans lequel  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont prolongeables radialement. On obtiendra ainsi une suite de domaines convexes, dont aucun ne se réduit à sa frontière, ordonnés par inclusion

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \dots \supseteq C_n \supseteq \dots,$$

qui ont au moins un point commun  $\Omega$ .

THÉORÈME. — *Tout élément  $\mathcal{E}_i \in \mathcal{F}$  est prolongeable radialement jusqu'au point  $\Omega$  inclusivement et y définit un élément  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$ , (distincts ou non) <sup>(2)</sup>.*

## 2. — ÉTOILE D'HOLOMORPHIE $E^*(\Omega, \omega)$ DE $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ .

1° LES SECTEURS S. — Désignons par  $[\theta]$  la demi-droite  $\arg(\omega - \Omega) = \theta$ . Supposons  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , prolongeable suivant  $[\theta_0]$  jusqu'à  $|\omega - \Omega| = R$  inclusivement. Ce prolongement est possible en utilisant seulement un nombre fini d'éléments dont l'ensemble forme une chaîne  $\mathcal{C}(\theta_0)$ . Soient  $[\theta_1]$  et  $[\theta'_1]$  ( $\theta'_1 < \theta_0 < \theta_1$ ) les deux rayons dont tous les points sauf un nombre fini,  $\in \mathcal{C}(\theta_0)$ . Soient  $A_1$  et  $A'_1$  les points d'intersection de  $[\theta_1]$  et  $[\theta'_1]$  avec  $|\omega - \Omega| = R$ .

I. Supposons  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  non prolongeable suivant  $[\theta_1]$  jusqu'en  $A_1$ :

$\alpha$ . Si la première singularité rencontrée sur  $[\theta_1]$  à partir de  $\Omega$  est algébrique, on introduit l'élément algébrique d'ordre  $k$  correspondant et l'on prolonge suivant  $[\theta_1]$  la branche dont l'image dans le plan  $z$  fait  $+\frac{\pi}{k}$  avec la branche

<sup>(1)</sup> *Eindentliche Analytische funktionen*, Springer, 1936.

<sup>(2)</sup> Shimizu utilise un tel point  $\Omega$ , mais n'en démontre pas l'existence : *On the fundamental domains* (*Jap. Journ. math.*, VIII, 1931, p. 175-304).

d'arrivée (s'il s'agit du rayon  $[\theta_1]$  on remplace  $+\frac{\pi}{k}$  par  $-\frac{\pi}{k}$ ). On dira que l'on a *contourné* le point algébrique dans le secteur  $[\theta_1 - \theta_0]$ .

3. Supposons que par prolongement suivant  $[\theta_1]$ , après avoir éventuellement contourné les points algébriques dans  $[\theta_1 - \theta_0]$ , on rencontre un point transcendant  $T$ . On peut construire un segment  $PQ \ni T$ , morceau de  $[\theta_1]$  dont tous les points sauf  $T$ , sont intérieurs à  $\mathcal{C}(\theta_0)$ ; construisons un lacet  $L$ , intérieur à  $\mathcal{C}(\theta_0)$  joignant  $P$  à  $Q$ ; l'élément  $\mathcal{E}(P, p)$  obtenu par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  définit par prolongement suivant  $L$  un élément  $\mathcal{E}(Q, q)$ . Aux prolongements de  $\mathcal{E}(P, p)$  et  $\mathcal{E}(Q, q)$  suivant  $[\theta_1]$  jusqu'en  $T$  (exclusivement) correspondent deux arcs infinis  $pt$ ,  $qt$  ( $t$  à l'infini), qui avec l'arc  $\widehat{pq}$  image de  $L$ , limitent une langue image conforme biunivoque de la portion du plan  $w$  com-

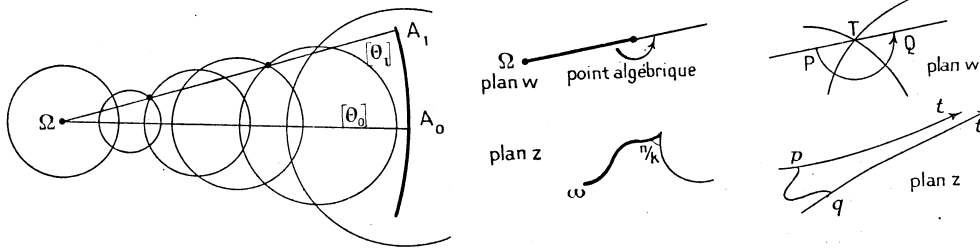


Fig. 26.

prise entre  $L$  et le segment  $PQ$  de  $[\theta_1]$ . Nous disons que les deux arcs  $pt$  et  $qt$  se raccordent en  $t$ .

La portion de  $[\theta_1]$  comprise entre  $\Omega$  et le premier point singulier (algébrique transcendant), sera un segment  $\Gamma$  et l'arc issu de  $\omega$  qui lui correspond (fini ou infini) sera un arc  $\gamma$ . L'image dans le plan  $z$  du secteur  $[\theta_1 - \theta_0]$  est un domaine limité par :

- une courbe finie image de la portion de  $[\theta_0]$  vérifiant  $|\omega - \Omega| \leq R$ ;
- un arc  $\widehat{\alpha_0 \alpha_1}$  image de l'arc  $\widehat{A_0 A_1}$  de  $|\omega - \Omega| = R$  ( $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ );
- une courbe  $\gamma$  issue de  $\omega$  aboutissant en  $c$  [ $c$  à l'infini ou bien  $f'(c) = 0$ ];
- un nombre fini d'arcs finis ou infinis, se raccordant entre eux et à l'extrémité de  $\gamma$  (à l'infini ou en des points annulant  $f'$ ).

II. Supposons le prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  possible suivant  $[\theta_1]$  jusqu'en  $A_1$  inclusivement. On peut alors construire  $[\theta_2]$  à partir de  $[\theta_1]$  comme  $[\theta_1]$  à partir de  $[\theta_0]$ . Il se peut que  $[\theta_2]$  soit de l'espèce étudiée au paragraphe I, sinon on définira  $[\theta_3]$  à partir de  $[\theta_2]$ , et ainsi de suite. Supposons qu'aucun  $[\theta_n]$  ne rentre dans le cas I. Alors si  $R$  est supérieur au rayon de convergence de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , les  $[\theta_n]$  tendent vers une position limite  $[\theta]$ . Le prolongement de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  est holomorphe dans le secteur (ouvert)  $[\theta - \theta_0]$  et sur  $[\theta_0]$ . Prolon-

geons  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  suivant  $[\Theta]$ ; si la première singularité rencontrée est algébrique, on définit dans le plan  $z$ , l'arc  $\gamma$  joignant  $\omega$  à un point à distance finie où  $f'(z) = 0$ . Si la première singularité rencontrée est transcendante, l'arc  $\gamma$  est infini.

Considérons un élément  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  dans  $[\Theta - \theta_0]$  obtenu par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ . Le prolongement radial de  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  montre que les singularités rencontrées sur  $[\Theta]$  par ce prolongement forment un ensemble fermé de mesure nulle. Ces singularités sont évidemment les mêmes pour le prolongement radial de tout élément centré dans  $[\Theta - \theta_0]$  et obtenu lui-même par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ . Sur tout intervalle de  $[\Theta]$  si petit soit-il, il existe un élément régulier  $\mathcal{E}(u, \zeta)$  qui peut se déduire par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$ . Prolongeons  $\mathcal{E}(u, \zeta)$  suivant  $[\Theta]$  vers  $\Omega$  et vers  $A$ , en contournant s'il y a lieu les points critiques dans  $[\Theta - \theta]$ ; ce prolongement ne sera donc arrêté que par des points transcendants. Partageons  $\Omega A$  en intervalles de longueur  $\frac{R}{2^n}$ ; dans chacun de ces intervalles il existe au moins un  $\mathcal{E}(u_i, \zeta_i)$  que nous prolongeons vers  $\Omega$  et vers  $A$  suivant  $[\Theta]$ ; nous obtenons ainsi dans le plan  $z$ , outre l'arc  $\gamma$  déjà construit qui peut se prolonger par d'autres arcs dont l'un s'éloigne à l'infini, un un nombre fini de courbes allant de l'infini à l'infini, images de segments de  $[\Theta]$ .

$\alpha$ . Il se peut que pour une valeur de  $n$ , tout point de  $[\Theta]$  ait été atteint inclusivement ou exclusivement. Il est alors impossible de prolonger  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  à travers  $[\Theta]$  sans traverser l'une au moins des courbes déjà tracées dans le plan  $z$ : tout prolongement de  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  à travers  $[\Theta]$  traverse ce rayon en un point régulier qui a donc été atteint inclusivement par le prolongement suivant  $[\Theta]$  d'un au moins  $\mathcal{E}(u_i, \zeta_i)$ .

$\beta$ . Dans le cas contraire, on peut affirmer qu'il n'existe plus sur  $[\Theta]$  d'intervalles supérieurs à  $\frac{R}{2^{n-1}}$  ne contenant aucun point atteint par le prolongement suivant  $[\Theta]$ , des  $\mathcal{E}(u_i, \zeta_i)$ . On divisera alors  $\Omega A$  en intervalles  $\frac{R}{2^{n+1}}$  et on introduira un  $\mathcal{E}(u_j, \zeta_j)$  dans chacun des nouveaux intervalles où il n'y a pas de point atteint par les prolongements de l'opération précédente. On poursuivra la division indéfiniment et l'on obtient à la limite dans le plan  $z$  une infinité dénombrable de courbes allant de l'infini à l'infini. Tout prolongement de  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  qui peut se faire en traversant  $[\Theta]$ , traverse  $[\Theta]$  en un point régulier dont le cercle de convergence couvrirait une portion de  $[\Theta]$ , supérieure à  $\frac{R}{2^p}$  et nous avons vu qu'il n'y a pas, après la  $(p+2)^{\text{ème}}$  opération, d'intervalle supérieur à  $\frac{R}{2^{p+1}}$  où ne pénètre pas le prolongement d'un  $\mathcal{E}(u, \zeta)$ . Il est donc impossible de prolonger  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  à travers  $[\Theta]$  sans traverser l'une au moins des courbes tracées dans le plan  $z$  comme images d'une famille dénombrable de segments de  $[\Theta]$ ,

Si l'on remarque qu'on a considéré les prolongements radiaux de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  dans  $|\omega - \Omega| \leq R$ , on constate que l'image de l'arc  $A_0 A$  de  $|\omega - \Omega| = R$ , se compose d'un seul arc issu de  $\alpha_0$ , et aboutissant soit en  $\alpha(f(\alpha) = A)$ , soit à l'infini.

Si l'on opère de la même façon, à partir de  $[\Theta_0]$  vers les  $\theta$  décroissants, on limite dans  $|\omega - \Omega| \leq R$  un secteur  $[\Theta - \Theta']$  que nous appellerons secteur  $S$ , ou secteur d'holomorphic pour  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ . Il correspond dans le plan  $z$ , au secteur  $S$ , un domaine  $s$  limité par  $F_s$ :

$$F_s \left\{ \begin{array}{l} \text{deux courbes } \gamma \text{ issues de } \omega; \\ \text{un arc } \rho, \rho(\Theta - \Theta'), \text{ image de l'arc } A'A \text{ de } |\omega - \Omega| = R; \\ \text{des arcs } h, \text{ formant au plus une infinité dénombrable, images d'inter-} \\ \text{valles sur les rayons } [\Theta] \text{ et } [\Theta']. \end{array} \right.$$

Puisque le prolongement de tout élément  $\mathcal{E}(\omega_1, z_1)$  obtenu par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  ne peut se faire à l'extérieur de  $S$  sans que le point  $z$  traverse une courbe de la famille  $F_s$ , on déduit que  $s$  est un domaine d'univalence pour  $f(z)$  à valeurs couvrant  $S$ .

2° EXHAUSTION DU CERCLE  $|\omega - \Omega| \leq R$ . — Partageons le cercle  $|\omega - \Omega| \leq R$  en secteurs  $\Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_{2^n}$  d'ouverture  $\frac{\pi}{2^n}$ . Dans chacun de ces secteurs il existe au moins un rayon suivant lequel on peut prolonger  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  jusqu'à  $|\omega - \Omega| \leq R$  inclusivement. Faisant jouer à ce rayon le rôle de  $[\theta_0]$  de la première partie, on définit à partir de lui un secteur  $S$ , auquel correspond dans le plan  $z$  un domaine  $s$ . Si deux domaines  $s$  ont un point commun ils sont identiques.

$\alpha$ . Il se peut que pour une valeur de  $n$  les secteurs  $S$  recouvrent entièrement  $|\omega - \Omega| \leq R$ . On reconnaît alors que les rayons exceptionnels de l'étoile de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  ayant leur origine à l'intérieur ou sur la frontière de  $|\omega - \Omega| \leq R$ , sont en nombre fini et l'on sait construire l'image dans le plan  $z$ , de cette étoile que nous noterons  $E^n(\Omega, \omega)$ . Les domaines  $s$  se raccordent suivant *les courbes*  $\gamma$  que l'on supprime.

$\beta$ . Quel que soit  $n$ , les secteurs  $S$  ne recouvrent pas  $|\omega - \Omega| \leq R$ . Considérons un rayon quelconque  $[\theta]$  suivant lequel  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  est prolongeable jusqu'à  $|\omega - \Omega| = R$  inclusivement : il existe donc un secteur  $\sigma$  d'ouverture non nulle contenant ce rayon et intérieur lui-même à la chaîne  $\mathcal{C}(\theta)$ . Ce secteur fait nécessairement partie d'un secteur  $S$ , puisque après la  $n^{\text{ième}}$  opération il n'y a plus d'angle supérieur à  $\frac{\pi}{2^{n-1}}$  dans lequel ne pénètre au moins un secteur  $S$ ; si  $2^{n-1} > \pi/\text{ouverture de } \sigma$ , le secteur  $\sigma$  est tout entier dans un secteur  $S$ . Considérons alors dans le plan  $z$ , l'ensemble dénombrable des domaines  $s$  et introduisons toutes les courbes limites des systèmes  $F_s$ , en désignant spécialement par  $\lambda^*$

les courbes limites de suites de courbes  $\gamma$  :  $\lambda^*$  est formée d'un ou plusieurs arcs distincts, dont l'un est issu de  $\omega$ , et a pour image dans le plan  $\omega$ , un segment de rayon  $[\theta]$ ,  $\Lambda^*$ , issu de  $\Omega$ , le rayon  $[\theta]$  étant limite de rayons exceptionnels;  $\lambda^*$  n'a pas d'autre extrémité à distance finie (excluons le cas où cette extrémité serait celle d'un arc dont les deux bords seraient plages d'accumulation de courbes  $\gamma$ ; cette éventualité ne peut en effet se présenter puisque  $f(z)$  est holomorphe et que l'image de  $\lambda^*$  est un segment de  $[\theta]$ ); une extrémité de  $\lambda^*$  ne peut être que point d'accumulation d'extrémités des courbes  $\gamma$ , donc de points qui sont des zéros de  $f'(z)$  et qui, par conséquent, ne peuvent s'accumuler à distance finie. L'arc de  $\lambda^*$  issu de  $\omega$  est un arc infini et les autres arcs de la même courbe  $\lambda^*$ , vont de l'infini à l'infini. Appelons  $\lambda$  l'arc de  $\lambda^*$  issu de  $\omega$  et se terminant au premier point où  $f'(z) = 0$ , ou joignant  $\omega$  à l'infini si  $f'(z) \neq 0$  sur  $\lambda^*$ . Soit  $\Lambda$  l'image de  $\lambda$ .

3° COURBES  $\gamma$  ET COURBES  $\lambda$ . — Si  $\omega_0 = f(z_0) \in \Gamma$  ou  $\Lambda$ ,  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  est prolongeable radialement jusqu'à  $\omega_0$ . Inversement si  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  est prolongeable radialement jusqu'à  $\omega_0$ ,  $\omega_0$  est soit intérieur à un secteur  $S$  soit sur une  $\Gamma$  ou une  $\Lambda$  : supposons que  $\omega_0$  n'appartienne pas à un secteur  $S$ , c'est que  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  n'est pas prolongeable jusqu'à  $|\omega - \Omega| = R$ , suivant le rayon  $[\theta]$  qui passe par  $\omega_0$ . Dans tout angle  $(\theta, \theta + \alpha)$ , il existe un rayon prolongeable jusqu'à  $|\omega - \Omega| = R$ , qui appartient donc à un secteur  $S$  auquel n'appartient pas  $[\theta]$ . C'est donc que  $[\theta]$  est soit frontière pour un secteur  $S$ , et alors  $\omega \in \Gamma$ , ou bien il existe des rayons exceptionnels, donc des  $\Gamma$  dans tout angle  $(\theta, \theta + \alpha)$  pour si petit que soit  $\alpha$ . Les courbes  $\Gamma$  s'accumulent suivant une portion  $\Lambda^*$  de  $[\theta]$  :  $\omega_0 \in \Lambda^*$ , sinon les extrémités des  $\Gamma$  s'accumuleraient en un point de  $[\theta]$  situé entre  $\Omega$  et  $\omega_0$  et le prolongement de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  ne serait pas possible jusqu'à  $\omega_0$ , donc  $\omega_0 \in \Lambda$ . Comme  $[\theta]$  peut être limite de rayons par valeurs supérieures ou inférieures, il se pourrait que certains arcs de  $\lambda$  soient aussi des arcs  $\gamma$ . La propriété ci-dessus montre donc que cela ne peut arriver que pour un arc de  $\lambda$ . Les courbes  $\lambda$  et  $\gamma$  forment donc une famille telle qu'aucune de ses courbes ne peut être d'une autre espèce parmi celles qui ont été définies.

4° FORMATION DE  $E^R(\Omega, \omega)$ . — Supprimons dans le plan  $z$  toutes les courbes  $\gamma$  et  $\lambda$ . Soient  $\mathcal{G}$  le système des courbes restantes,  $\mathcal{E}(\omega_0, z_0)$  un élément ( $|\omega_0 - \Omega| < R$ ), accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_0)$ ; soit  $z_1$  relié à  $z_0$  par une courbe ne coupant aucun arc de  $\mathcal{G}$ . Soient  $l$  cette courbe,  $L$  son image dans le plan  $\omega$ . S'il existe sur  $l$  un point  $z_2$ , tel que  $\mathcal{E}(\omega_2, z_2)$  ne soit pas accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , il existe un point  $\zeta$ , tel que tous les points de l'arc  $(z_0, \zeta)$  de  $l$ , correspondent à des éléments accessibles par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , et que cette propriété ne soit plus vraie pour tout autre point  $\zeta'$  au delà de  $\zeta$  sur  $l$  (en partant de  $z_0$ ).  $\zeta$  ainsi défini ne peut correspondre à un élément accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ ,

sinon il en serait de même pour tous les points voisins, sur  $l$ , sauf si  $|f(\zeta) - \Omega| = R$ ; supposons que  $|f(\zeta) - \Omega| = R$ , l'élément  $\mathcal{E}(f(\zeta), \zeta)$  régulier ou algébrique, est accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ ; si  $[\theta]$  désigne le rayon passant par  $f(\zeta)$ ,  $[\theta]$  ne peut être rayon limite de rayons exceptionnels, ni par valeurs supérieures de  $\theta$ , ni par valeurs inférieures, il en résulte que  $[\theta]$  est soit un rayon intérieur à un secteur  $S$ , soit un segment  $\Gamma$  commun à deux secteurs  $S$  (si  $f'(\zeta) = 0$ ; dans le premier cas  $\zeta$  est sur une courbe  $\rho$  d'un système  $F_s$  (donc sur une courbe de  $\mathcal{G}$ ); dans le deuxième cas  $\zeta$  est l'extrémité commune de deux courbes  $\rho$  de deux systèmes  $F_s, F_{s'}$  (et dans ce cas encore  $\zeta$  est sur une courbe de  $\mathcal{G}$ );  $l$  couperait  $\mathcal{G}$ , ce qui est exclu. Supposons donc que  $\mathcal{E}(f(\zeta), \zeta)$  ne soit pas accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ . Les points précédant  $\zeta$  sur  $l$ , sont soit intérieurs à des domaines  $s$ , soit sur des courbes  $\gamma$  ou  $\lambda$ . Si  $\zeta$  est limite de points situés sur des courbes  $\gamma$ ,  $\zeta$  est sur une  $\lambda^*$  sans être sur l'arc  $\lambda$  correspondant, donc  $\zeta$  serait sur une courbe de  $\mathcal{G}$ . Si dans un voisinage suffisamment petit de  $\zeta$  avant  $\zeta$ , sur  $l$ , il n'y a pas de point sur des  $\gamma$ , c'est que tous ses points sont intérieurs au même domaine  $s$ .  $\zeta \notin s$  et l'on ne peut prolonger un élément intérieur à  $S$  sans que le point  $z$  correspondant traverse une courbe de  $F_s$ , donc  $\zeta$  est sur une courbe  $\rho$  (ou  $h$ ), c'est-à-dire sur une courbe de  $\mathcal{G}$ .

*Tout point reliable à  $\omega$  par une courbe ne coupant pas  $\mathcal{G}$ , correspond à un élément accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , dans  $|\omega - \Omega| < R$ , et inversement (sauf s'il s'agit de points dont l'image est sur  $|\omega - \Omega| = R$ ).  $\mathcal{G}$  limite donc une région  $\delta^R$  du plan  $z$  qui est un domaine d'univalence à valeur couvrant un domaine  $E^R(\Omega, \omega)$ .*

5° FORMATION DE  $E^*(\Omega, \omega)$ . — Soient  $\delta^R$  et  $\delta^{R'}$  deux domaines images de  $E^R(\Omega, \omega)$  et  $E^{R'}(\Omega, \omega)$  avec  $R' > R$ : Si  $P \in \delta^R, P \in \delta^{R'}$ :  $P \in \delta^R$  correspond à un élément accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , c'est donc que  $P \in \delta^{R'}$ , puisque son image n'est pas sur  $|\omega - \Omega| = R'$ .

Tout point frontière de  $\delta^R$  correspondant à un élément non accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  est donc aussi point frontière de  $\delta^{R'}$ , puisqu'il ne peut être point intérieur et qu'il y a dans son voisinage des points intérieurs à  $\delta^R$ , donc à  $\delta^{R'}$ . (Il y a peut-être exception s'il s'agit d'un point frontière d'un arc  $\rho$ .)

Considérons alors une suite de cercles  $|\omega - \Omega| = R_n$  où  $R_n$  croît indéfiniment. On peut construire une suite de domaines  $\delta^{R_n}$ , tels que tout point intérieur d'un  $\delta^{R_n}$  est intérieur à tous les  $\delta^{R_{n'}} (n' > n)$  et tel que tout point frontière d'un  $\delta^{R_n}$ , dont l'image n'est pas sur  $|\omega - \Omega| = R_n$ , est frontière de tous les  $\delta^{R_{n'}} (n' > n)$ . Soit un domaine borné  $|z| \leq \rho$ . On peut toujours supposer que  $|z| = \rho$  ne passe par aucun pôle de  $f(z)$ : alors  $|f(z)| \leq M$  pour  $|z| = \rho$ . Soit  $\omega$  une racine déterminée de  $f(z) = \Omega$  à l'intérieur de  $|z| < \rho$ , et prenons dans la suite des  $R_n$ ,  $n$  tel que  $R_n > M$ . On peut alors entourer les pôles de  $f(z)$  intérieurs à  $|z| < \rho$

de courbes fermées  $|f(z)| = R_n$ . Dans le domaine restant  $\Delta_n$ ,  $|f(z)| < R_n$ ; construisons le domaine  $\delta^{R_n}$  relatif à  $\omega$ . Nous pouvons affirmer que tout point de  $\Delta_n$  est situé par rapport à la suite des  $\delta^{R_{n'}} (n' > n)$ , soit comme point intérieur, soit frontière, soit extérieur. Appelons alors  $\delta$  le domaine limite des  $\delta^{R_n}$ , qui a pour image  $E^*(\Omega, \omega)$  dans le plan  $\omega$ .

6° ACCESSIBILITÉ DES POINTS FRONTIÈRES DE  $\delta$ . —  $\delta$  est limité par des courbes  $g$  du système  $\mathcal{G}$ . Supposons qu'une famille  $g_i$  de ces courbes s'accumulent suivant une courbe  $g_\infty$  (qui est aussi par conséquent de la famille  $\mathcal{G}$ ). Un point de  $g_\infty$  ne peut correspondre à un élément accessible par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , car il n'y aurait pas, sur le plan  $\omega$ , dans un voisinage du point correspondant, de rayons exceptionnels, pas plus par conséquent que dans une image conforme biunivoque obtenue dans le plan  $z$ . L'image de  $g_\infty$  dans le plan  $\omega$  est donc

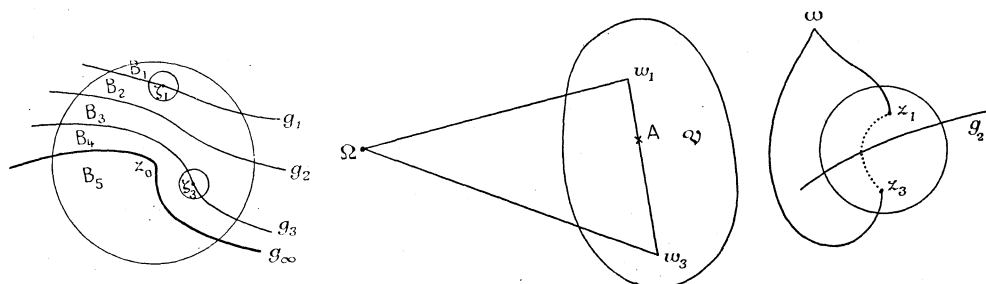


Fig. 27.

nécessairement un segment de droite  $\arg(\omega - \Omega) = C^{\text{te}}$ , sinon on serait en contradiction avec le théorème de Gross. Soit  $z_0 \in g_\infty$  ( $f(z_0) \neq \infty$ ,  $f'(z_0) \neq 0$ ). On peut considérer un voisinage  $U_0$  de  $z_0$ , de sorte que  $\delta^{R_n}$  permette de définir  $\delta$  (par ses points intérieurs et ses points frontières) à l'intérieur de  $U_0$ . Soit maintenant  $\mathcal{U}$  un cercle de centre  $z_0$ , intérieur à  $U_0$  et assez petit pour que son image dans le plan  $\omega$  soit un domaine convexe  $\mathcal{V}$  (à un feuillet évidemment) : c'est toujours possible avec  $f'(z_0) \neq 0$ , de plus tous les cercles de centre  $z_0$  et de rayons plus petits se représentent sur des domaines convexes. Une courbe  $g$  qui pénètre dans  $\mathcal{U}$  le partage en deux régions seulement, puisque l'image de  $g$  est un segment de droite qui partage  $\mathcal{V}$  en deux régions. Soient alors  $g_1, g_2, g_3$  trois courbes de la famille  $\mathcal{G}$ , qui pénètrent dans  $\mathcal{U}$ . Ces courbes et  $g_\infty$  séparent le plan en cinq régions  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  (on a pris  $g_1, g_2, g_3$  du même côté de  $g_\infty$ ). De plus les courbes  $g_i$  ne peuvent se couper, en raison de leur image sur le plan  $\omega$ . Soient dans  $\mathcal{U}$ ,  $\zeta_1 \in g_1$  et  $\zeta_3 \in g_3$  et des voisinages  $u_1$  et  $u_3$  de  $\zeta_1$  et  $\zeta_3$  respectivement :  $u_1$  ne pénétrant que dans les régions  $B_1$  et  $B_2$ ,  $u_3$  dans  $B_3$  et  $B_4$ . Dans  $u_1$  il existe  $z_1 \in \delta$  et dans  $u_3$ ,  $z_3 \in \delta$ . Tout chemin joignant dans  $\mathcal{U}$ ,  $z_1$  à  $z_3$  doit nécessairement couper  $g_2$ . Soient  $w_1 = f(z_1)$ ,  $w_3 = f(z_3)$ .  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$  est prolongeable radialement jusqu'à  $w_1$  et  $w_3$  inclusivement, et  $\mathcal{E}(w_1, z_1)$  est prolon-

geable jusqu'à  $\omega_3$  inclusivement suivant le segment de droite  $\overline{\omega_1\omega_3}$  entièrement intérieur  $\mathfrak{V}$ , l'élément obtenu en  $\omega_3$  étant précisément  $\mathcal{E}(\omega_3, z_3)$ . L'arc  $\widehat{z_1z_3}$  image de  $\overline{\omega_1\omega_3}$  ne sort pas de  $\mathfrak{U}$ , donc coupe  $g_2$  en  $\alpha$ , l'image  $A$  dans  $\mathfrak{V}$  (il ne peut y avoir qu'un seul point d'intersection d'après l'image dans  $\mathfrak{V}$ ). En parcourant le pourtour du triangle curviligne  $\omega z_1 z_3$ , on fait parcourir à  $\omega$  le triangle  $\Omega\omega_1\omega_2$  une seule fois, et inversement; il y a correspondance conforme biunivoque des intérieurs de ce triangle et tous les points du segment  $\overline{\omega_1\omega_3}$  peuvent être atteints par prolongement radial de  $\mathcal{E}(\Omega, \omega)$ , ce qui est contraire au fait que  $\mathcal{E}(A, \alpha)$  n'est pas accessible par un tel prolongement.

*Les courbes du système  $\mathcal{G}$  ne s'accumulent pas à distance finie. Tous les points frontière de  $\delta$  sont accessibles par l'intérieur.*

*Remarque.* — Au 2° on a introduit toutes les courbes limites des systèmes  $F_s$ , ce qui n'a donc introduit en fait que des courbes  $\lambda^*$ , puisque les autres courbes frontières des domaines  $s$  sont des courbes de  $\mathcal{G}$  qui ne s'accumulent pas à distance finie.

### 3. — CONSTRUCTION DES FEUILLETS DE $\mathcal{R}$ , OU DES DOMAINES D'UNIVALENCE DE $f(z)$ .

Considérons les domaines  $\delta_i$  construits dans le plan  $z$  à partir des éléments  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$  formant un ensemble dénombrable. Les  $\delta_i$  sont des domaines complets d'univalence pour  $f$  et deux  $\delta_i$  et  $\delta_j$  ne peuvent avoir de points intérieurs communs sans être identiques. Dans toute portion du plan il pénètre au moins un domaine  $\delta_i$ : soit  $z$  et un voisinage  $\mathfrak{U}$  assez petit pour que son image  $\mathfrak{V}$  dans le plan  $\omega$  soit à un feuillet ( $f'(z) \neq 0$ ).  $\mathfrak{V}$  contient des points  $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \dots$  à coordonnées rationnelles dont les images dans le plan  $z$  sont  $\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n \dots$  dans  $\mathfrak{U}$ . Les éléments  $\mathcal{E}(\eta_n, \zeta_n)$  sont de la famille  $\mathcal{F}$ , donc sont prolongeables radialement jusqu'à  $\Omega$ , où ils déterminent des éléments  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_k)$  à partir desquels on a construit  $E^*(\Omega, \omega_k)$  ayant pour image  $\delta_k$  dans le plan  $z$ .  $\zeta_n$  est intérieur à  $\delta_k$ .  $\delta_i$  étant caractérisé par l'élément  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$ , de l'étoile duquel il est l'image, peut-on déterminer à quel domaine  $\delta_i$  appartient un point  $z$  du plan?

a. Si  $\omega = f(z)$  est à coordonnées rationnelles,  $\mathcal{E}(\omega, z) \in \mathcal{F}$  et  $z \in \delta_i$  que l'on sait déterminer si  $f'(z) \neq 0$ . Si  $f'(z) = 0$ ,  $z$  est frontière de plusieurs  $\delta_i$ , que l'on détermine par prolongement radial jusqu'à  $\Omega$  des diverses branches de  $\mathcal{E}(\omega, z)$ . On peut en effet avoir inclus dans  $\mathcal{F}$  l'ensemble dénombrable des éléments  $\mathcal{E}(\omega, z)$  algébriques à coordonnées rationnelles.

b. Si  $\mathcal{E}(\omega, z)$  est prolongeable radialement jusqu'à  $\Omega$  inclusivement, l'élément  $\mathcal{E}(\Omega, \omega')$  obtenu contient des points à coordonnées rationnelles, centres d'éléments de  $\mathcal{F}$  dont  $\mathcal{E}(\Omega, \omega')$  est le prolongement immédiat. Donc  $\mathcal{E}(\Omega, \omega')$  est de la famille  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_i)$  et  $z \in \delta_i$  relatif à  $\omega'$ .



c. Supposons  $\mathcal{E}(w, z)$  non prolongeable jusqu'à  $\Omega$  suivant le segment  $\overline{w\Omega}$ . Introduisons une suite de points  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$  tendant vers  $z$ , dont les images  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$  sont à coordonnées rationnelles. Si tous les éléments  $\mathcal{E}(\eta_i, \zeta_i)$  conduisent par prolongement radial au même élément  $\mathcal{E}(\Omega, \omega_j)$  [on doit prendre la suite telle que les arguments des  $\eta_n$  forment une suite monotone],  $z$  peut être sur la frontière d'un domaine  $s_j^i$ , donc sur la frontière d'un  $\delta_j$  que l'on sait déterminer; si  $z$  n'est sur la frontière d'aucun  $s_j^i$ , comme les points  $\zeta_i$  sont soit intérieurs aux  $s_j^i$ , soit sur les courbes  $\gamma$  communes à  $s_j^i$  et  $s_j^{i'}$ , soit sur des  $\lambda$  limites de domaines  $s_j^i, s_j^{i'}, \dots, s_j^p, \dots$ ,  $z$  est par conséquent sur une courbe  $\lambda^*$  qui n'est pas une  $\lambda$ . Dans tous ces cas  $z$  est sur la frontière de  $\delta_j$  relatif à  $\omega_j$ . Si les  $\mathcal{E}(\eta_i, \zeta_i)$  ne conduisent jamais, à partir d'un certain rang à un élément unique,  $z$  fait partie d'une courbe limite de frontières de domaines  $\delta_k$  que l'on peut déterminer. C'est le cas de *division impropre*, mis en évidence par G. Valiron dans son étude sur la fonction  $w = \frac{e^z - 1}{z} + 1$  (').

---

(') *Journ. Math.*, t. 49, 1940. Division en feuillets d'une surface de Riemann.