ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

TINH-QUAT PHAM

Quelques propriétés des fonctions méromorphes périodiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 307-320
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__307_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

FONCTIONS MÉROMORPHES PÉRIODIQUES

PAR M. PHAM TỊNH-QUAT.

Le but de cette étude est d'étendre aux fonctions méromorphes périodiques quelques propriétés que j'ai obtenues pour les fonctions entières périodiques (¹).

Je ne considère ici, comme dans mon précédent Mémoire, que les fonctions d'ordre fini, et je suppose, sans restreindre la généralité, que la période de la fonction est égale à 2π.

Dans la première Partie, je m'occuperai du théorème de Picard. En me basant sur l'expression du module d'une fonction entière périodique et en reprenant la méthode que M. Borel a employée dans le cas général, je montrerai l'existence possible d'une équation exceptionnelle de la forme

$$F(z) = G(z),$$

où $G(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre inférieur à $F(z)$ et de même période.

Comme application, j'indiquerai quelques propriétés immédiates d'une classe de fonctions admettant une telle équation exceptionnelle.

La seconde Partie est consacrée aux directions de Borel et aux cercles de remplissage. La transformation $u = e^{-iz}$ permet de définir d'abord une fonction caractéristique $T(y, F)$ analogue à la fonction caractéristique de M. Nevanlinna dans le cas général et d'obtenir ainsi une propriété simple concernant le défaut $\delta(x)$ dans un cas particulier.

La méthode directe, basée sur celle de MM. Milloux et Valiron, que j'ai employée pour résoudre le problème des directions de Borel et des cercles de remplissage des fonctions entières périodiques, s'applique immédiatement ici et donne des résultats en tout point analogues. Elle fournit en même temps une généralisation d'un résultat de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre nul.

(¹) *Thèse*, Paris, 1948, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1948.

PREMIÈRE PARTIE.

L'ORDRE DES FONCTIONS MÉROMORPHES PÉRIODIQUES ET LE THÉORÈME DE PICARD.

1. Soit

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

une fonction méromorphe, quotient de deux fonctions entières n'admettant pas de zéros communs. La périodicité de $F(z)$ exige que, si a est un zéro de $f(z)$, $a + 2k\pi$ soit un zéro de $F(z)$, c'est-à-dire de $f(z)$, quel que soit l'entier k [$g(z)$ ne pouvant pas devenir infinie en ces points].

Avec l'ensemble des zéros de $f(z)$ on peut former un produit canonique de facteurs primaires de Weierstrass, produit qui représente une fonction entière périodique de période 2π. Donc

$$f(z) = f_1(z)\, e^{f_2(z)}.$$

De même,

$$g(z) = g_1(z)\, e^{g_2(z)},$$

d'où

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}\, e^{h(z)},$$

$h(z) = f_2(z) - g_2(z)$ est une fonction entière.

La périodicité de $F(z)$, comme celles de $f_1(z)$ et $g_1(z)$, entraine la périodicité de $e^{h(z)}$. On obtient par suite la propriété suivante :

Toute fonction méromorphe de période 2π est le quotient de deux fonctions entières de même période.

Dans toute cette étude, je suppose que $f(z)$ et $g(z)$ sont deux produits canoniques de facteurs primaires sinusoïdaux, *débarrassés, le cas échéant, des facteurs exponentiels, de la forme e^{iz}.* L'ordre de $f(z)$ et de $g(z)$ est supposé fini.

$F(z)$ sera appelée forme canonique méromorphe.

Je rappelle que pour une fonction entière périodique, on a, avec les notations déjà employées (¹),

$$\log|f(z)| = n|y| - \Sigma r_p + k(x, y)\,|y|^{\rho+\varepsilon}.$$

L'égalitè est valable en dehors des domaines d'exclusion constitués par de petits rectangles entourant les zéros et de dimensions

$$2r_n^{-\lambda}, \quad 4e^{-y^\rho}.$$

(¹) Pour éviter des longueurs et des redites, je renvoie, pour les notations du présent travail, à mon Mémoire cité plus haut.

L'étendue totale des domaines d'exclusion, dans toute bande de largeur finie non parallèle à la période, est par suite finie.

Donc, pour une fonction méromorphe périodique d'ordre $1+\rho$, on peut écrire

$$\log|F(z)=(n-n')|y|-\Sigma(r_p-r'_p)+k(x,y)|y|^{\rho+\varepsilon},$$

l'égalité étant valable en dehors des domaines d'exclusion d'étendue totale finie dans toute bande donnée non parallèle à la période, n' et r'_p étant relatifs à $g(z)$.

2. Une fonction entière périodique d'ordre fini et qui ne se réduit pas à une combinaison finie d'exponentielles, ne peut admettre des valeurs exceptionnelles au sens de Picard. Autrement dit, pour une fonction $f(z)$ d'ordre $1+\rho$, la suite des zéros de $f(z)-x$ admet comme exposant $1+\rho$ quelle que soit la valeur x.

Ce résultat s'étend immédiatement aux équations

$$f(z)-\varphi(z)=0,$$

où $\varphi(z)$ représente une fonction entière périodique de même période et d'ordre inférieur à $f(z)$. Parmi de telles équations il n'y en a aucune qui soit exceptionnelle, en ce sens que la suite des zéros admet toujours $1+\rho$ comme exposant.

Cette circonstance est due à ce que la fonction $f(z)-\varphi(z)$ est d'ordre $1+\rho$ et par suite elle se représente par un produit canonique de facteurs primaires sinusoïdaux d'ordre $1+\rho$, multiplié, le cas échéant, par une exponentielle linéaire.

Il n'en est plus de même pour une fonction méromorphe qui peut admettre *une* valeur exceptionnelle au sens de Picard ([1]).

Si l'on considère une fonction méromorphe de la forme

$$\frac{f(z)}{g(z)},$$

où $f(z)$ est d'ordre inférieur à $g(z)$, la valeur zéro est visiblement exceptionnelle.

J'appelle transformées homographiques périodiques de $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ l'ensemble des fonctions $\dfrac{af+bg}{cf+dg}$ dans lesquelles a, b, c, d représentent des fonctions périodiques de même période que F, mais d'ordre moindre.

J'appelle équation exceptionnelle, une équation de la forme

$$F(z)-G(z)=0,$$

([1]) J'écarte le cas, du reste sans intérêt, des fonctions méromorphes qui s'expriment par une combinaison finie d'exponentielles linéaires. Une telle fonction peut évidemment admettre deux valeurs exceptionnelles : ainsi $e^z:(e^z+1)$ admet 0 et 1 comme valeurs lacunaires.

telle que la suite des zéros admet un exposant inférieur à l'ordre de $F(z)$, $G(z)$ désignant une fonction méromorphe de même période mais d'ordre inférieur.

Les généralisations de M. Borel sur le théorème de Picard (1) s'appliquent facilement ici, avec des simplifications manifestes et conduisent à la proposition suivante :

Étant donnée une forme canonique méromorphe périodique $F(z)$, *parmi les équations* $F(z) - G(z) = 0$, *où* $G(z)$ *représente une fonction méromorphe quelconque de même période mais d'ordre inférieur, il n'y en a pas en général d'exceptionnelles, s'il y en a, il n'y en a qu'une* (2).

Si l'on appelle fonction exceptionnelle, une fonction qui donne lieu à une équation exceptionnelle, on voit encore que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme canonique méromorphe périodique soit exceptionnelle, est qu'elle soit la transformée homographique périodique d'une fonction entière.

Applications.

3. *Sur une classe de fonctions exceptionnelles.* — Soit une fonction périodique méromorphe *exceptionnelle* d'ordre inférieur à 2, ou bien d'ordre quelconque mais transformée homographique périodique d'une fonction entière à croissance régulière. Une telle fonction est de la forme

$$F(z) = \frac{af + b}{cf + d},$$

$f(z)$ étant une fonction entière périodique d'ordre inférieur à 2, ou bien d'ordre quelconque, mais alors à croissance régulière, a, b, c, d des fonctions périodiques de même période d'ordre inférieur à $f(z)$.

Remarquons d'abord, d'après l'expression du module d'une fonction entière périodique d'ordre $1 + \rho$, qu'en dehors des domaines d'exclusion le logarithme du module de la fonction reste supérieur à

$$-|y|^{\rho+\varepsilon};$$

par suite, si $f(z)$ est d'ordre inférieur à 2 ou à croissance régulière, et $a(z)$ une fonction entière de même période et d'ordre inférieur, $\log|af|$ est équivalent à $\log|f|$, pour $|y|$ suffisamment grand, et ce, en dehors des domaines d'exclusion

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars (Chap. III, p. 61 et suiv.).

(2) L'essentiel de cette démonstration se résume en ceci :

Parmi les transformées homographiques périodiques de $F(z)$ ne figure pas de fonction entière et alors $F(z)$ ne peut être exceptionnelle.

Parmi ces transformées figure une fonction entière, et comme cette fonction ne se réduit pas à une combinaison finie d'exponentielles linéaires, cas déjà écarté, $F(z)$ n'admet qu'une équation exceptionnelle.

de $f(z)$ et de $a(z)$; car, en effet, en dehors de ces domaines, la double inégalité

$$|y|^{1+\rho-\varepsilon} < \log|f| < |y|^{1+\rho+\varepsilon}$$

finit par être constamment vérifiée, pendant que l'on a

$$-|y|^{\rho'+\varepsilon} < \log|a| < |y|^{1+\rho'+\varepsilon},$$

$1+\rho' < 1+\rho$ désigne l'ordre de $a(z)$.

De même si $b(z)$ désigne, comme $a(z)$, une fonction entière périodique de même période que $f(z)$ mais d'ordre inférieur, le rapport des modules de $b(z)$ à $a(z)f(z)$ est infiniment petit en dehors des mêmes domaines, et par suite $\log|af+b|$ est encore équivalent à $\log|f|$ en dehors des domaines d'exclusion des fonctions $a(z)$ et $f(z)$.

En définitive, en dehors des domaines d'exclusion de $f(z)$, $a(z)$, $c(z)$, on a l'égalité

$$\log|F(z)| = \log\left|\frac{af+b}{cf+d}\right| = k(x, y)|y|^{\rho'} = o(1)|y|^{\rho'} \qquad (\rho' < 1+\rho).$$

On voit que toutes les transformées homographiques périodiques de $f(z)$ qui n'admettent ni zéro ni ∞ comme valeur exceptionnelle, se comportent comme des fonctions d'ordre inférieur à $f(z)$, en dehors des domaines d'exclusion dont l'étendue totale est finie dans toute bande de largeur finie non parallèle à la période.

Si maintenant l'on prend

$$F(z) = \frac{af+b}{d} \qquad \text{ou} \qquad F(z) = \frac{b}{cf+d},$$

c'est-à-dire si $F(z)$ admet zéro ou ∞ comme valeur exceptionnelle, le logarithme du module de $F(z)$ se comporte au contraire, en dehors des domaines d'exclusion analogues, comme celui de la fonction entière $f(z)$ ou de la fonction $1:f(z)$.

4. *Sur les fonctions à croissance régulière.* — Un raisonnement déjà employé montre qu'il existe, pour toutes les fonctions périodiques à croissance régulière d'ordre $1+\rho$, des bandes parallèles aux suites primaires et d'ordonnée indéfiniment croissante telles que l'on ait, en dehors des domaines d'exclusion,

$$\log|f(z)| = \mathrm{A}n|y|,$$

$\mathrm{A} = \mathrm{A}(x, y)$ est compris entre $\frac{1-\varepsilon}{1+\rho}$ et 1, et qu'étant donnée deux fonctions entières périodiques à croissance régulière quelconques il existe une infinité de ces bandes d'ordonnées indéfiniment croissante telles qu'on ait simultanément

$$\log|f(z)| = \mathrm{A}n|y|,$$
$$\log|g(z)| = \mathrm{B}n'|y|,$$

$B = B(x, y)$ est analogue à A. Ici, il faut exclure de ces bandes les domaines d'exclusion des deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ à la fois.

Ces bandes jouent le rôle de ce que j'ai appelé les domaines de régularité communs aux deux fonctions, lorsqu'on s'attache au module maximum sur un cercle de centre l'origine.

Il en résulte que pour toute fonction méromorphe périodique à croissance régulière, il existe des bandes parallèles aux suites primaires et d'ordonnée indéfiniment croissante telle que dans chacune de ces bandes on ait

$$\log|F(z)| = (An - Bn')|y|$$

et ce, en dehors des domaines d'exclusion, n et n' désignant respectivement le nombre de zéros et de pôles d'ordonnée comprise entre zéro et y.

Supposons que ∞ soit valeur exceptionnelle pour la fonction $F(z)$ à croissance régulière, dans les bandes précédentes on a

$$\log|F(z)| = O(1)\, n\, |y|.$$

Si l'on considère

$$F(z) - G(z),$$

où $G(z)$ désigne une fonction de même période, à croissance régulière et d'ordre inférieur, il existe des bandes où

$$\log|F(z) - G(z)| \sim \log|F(z)|.$$

On peut alors affirmer qu'il existe des valeurs de y indéfiniment croissantes pour lesquelles les nombres de zéros de $F(z)$ et de $F(z) - G(z)$ d'ordonnée comprise entre zéro et y sont équivalents.

On obtient une conclusion identique si l'on suppose que zéro est valeur exceptionnelle de $F(z)$.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE, DIRECTIONS DE BOREL CERCLES DE REMPLISSAGE.

5. Dans le cas particulier où la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles d'ordonnée négative, la transformation

$$u = e^{-iz}$$

fait correspondre à $F(z)$ une fonction méromorphe $G(u)$ d'ordre nul, et réciproquement à toute fonction méromorphe $G(u)$ d'ordre nul telle que

$$\varlimsup_{R=\infty} \frac{\log T(R, G)}{\log \log R} = 1 + \rho \geqq 1,$$

il correspond une fonction méromorphe périodique de période 2π d'ordre $1+\rho$.

La caractéristique de M. Nevanlinna peut s'écrire pour une telle fonction

$$2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} | F(x+iy) | \, dx = \int_{0}^{y} n(t, \infty) \, dt,$$

à supposer, pour simplifier l'écriture, que la fonction n'admette pas de pôles d'ordonnée négative, $n(t, \infty)$ désignant ici le nombre de pôles « fondamentaux » d'ordonnée inférieure à t.

Dans le cas général, considérons, avec M. Nevanlinna, l'expression

$$m\left(y, \frac{1}{F-a}\right) + N\left(y, \frac{1}{F-a}\right)$$

et, pour $a = \infty$,

$$m(y, F) + N(y, F),$$

avec

$$m\left(y, \frac{1}{F-a}\right) = m(y, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} \left| \frac{1}{F(x+iy)-a} \right| dx,$$

$$N\left(y, \frac{1}{F-a}\right) = N(y, a) = \int_{0}^{y} n(t, a) \, dt;$$

$n(t, a)$ désigne le nombre de zéros « fondamentaux » *d'ordonnée comprise entre zéro et t.*

La différence entre ces expressions et les expressions habituelles relatives à une fonction méromorphe est qu'elles concernent, dans le plan des u, une fonction admettant zéro et ∞ comme points singuliers essentiels.

Mais, grâce à l'introduction de la moyenne des zéros « fondamentaux » d'ordonnée comprise entre zéro et y, la somme considérée jouit de la même propriété essentielle de la fonction caractéristique de M. Nevanlinna.

Soit, en effet,

$$F(z) = F_1(z) \, F_2(z) = G(u) = G_1(u) \, G_2\left(\frac{1}{u}\right) \qquad (u = e^{-iz}),$$

F_1 n'a que des zéros et pôles d'ordonnée positive, F_2 des zéros et pôles d'ordonnée négative; G_1 et G_2 deux fonctions méromorphes d'ordre nul en u et $1 : u$ respectivement.

Quand on fait tendre y vers $+\infty$, G_2 tend vers une limite finie, et d'après la définition même de $m(y, F)$, on a

$$m(y, F) = m(y, F_1) + O(1),$$

$$m\left(y, \frac{1}{F}\right) = m\left(y, \frac{1}{F_1}\right) + O(1).$$

Quant aux expressions

$$N(y, F) \quad \text{et} \quad N\left(y, \frac{1}{F}\right),$$

elles sont respectivement identiques à

$$\mathrm{N}(y, \mathrm{F}_1) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\left(y, \frac{1}{\mathrm{F}_1}\right),$$

à cause de la définition de $n(t, \infty)$.

En appliquant la formule de Jensen à $\mathrm{G}_1(u)$, donc à $\mathrm{F}_1(u)$, et en tenant compte des égalités précédentes, on obtient

$$m\left(y, \frac{1}{\mathrm{F}}\right) + \mathrm{N}\left(y, \frac{1}{\mathrm{F}}\right) = m(y, \mathrm{F}) + \mathrm{N}(y, \mathrm{F}) + \mathrm{O}(1).$$

On déduit de là, par un raisonnement connu, qu'il est inutile de reproduire ici [1] :

$$m(y, a) + \mathrm{N}(y, a) = m(y, \infty) + \mathrm{N}(y, \infty) + \mathrm{O}(1).$$

Ce n'est autre que le premier théorème fondamental de M. Nevanlinna.

Dans le cas particulier où la fonction $\mathrm{F}(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et pôles d'ordonnée négative, on sait que le premier membre de l'égalité précédente représente une fonction croissante et convexe de y. La méthode employée ici ne permet pas d'affirmer qu'il en est encore ainsi dans le cas général.

Je conviens d'appeler encore fonction caractéristique de $\mathrm{F}(z)$ la fonction

$$\mathrm{T}(y, \mathrm{F}) = m(y, \infty) + \mathrm{N}(y, \infty).$$

On pourra au besoin remplacer $\mathrm{T}(y, \mathrm{F})$ par une fonction croissante et convexe de y et qui n'en diffère que par une fonction bornée. Il existe de telles fonctions, ne serait-ce la fonction caractéristique de $\mathrm{F}_1(z)$ qui possède cette propriété (pour y positif).

6. Il convient de distinguer les ordres relatifs de $\mathrm{T}(y, \mathrm{F})$ des deux côtés de l'axe réel. Une transformation homographique à coefficients constants dont le déterminant ne s'évanouit pas, n'altère pas la fonction caractéristique à une fonction additive bornée près. Ceci montre que deux fonctions appartenant à la famille de ces transformées possèdent le même ordre relatif du côté des y positifs, et le même ordre relatif, qui peut être différent du premier, du côté des y négatifs.

Soit $\mathrm{F} = f : g$, il existe des parallèles à $\mathrm{O}x$, d'ordonnée indéfiniment croissante, en dehors des domaines d'exclusion des fonctions f, g, $f - ag$, car l'épaisseur totale des bandes d'exclusion est finie.

Sur une telle droite, on peut écrire, d'après l'expression du module de F du n° 1 et compte tenu de la définition de $\mathrm{N}(y, 1 : \mathrm{F}) = ny - \Sigma r_p$,

$$\log |\mathrm{F}(x + iy) - a| = \mathrm{N}\left(y, \frac{1}{\mathrm{F} - a}\right) - \mathrm{N}(y, \mathrm{F} - a) + k(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon}.$$

---

[1] R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars (Chap. I, n° 7).

Faisons l'hypothèse qu'il existe une infinité de telles parallèles sur lesquelles $|F(z)-a|>1$.

Intégrant le long d'une telle droite entre $-\pi, \pi$ on obtient, en remarquant que $N(y, a)$ ne dépend pas de x et que le long de cette droite $\log|F-a|$ est positif,

$$m(y, F-a) = N\left(y, \frac{1}{F-a}\right) - N(y, F-a) + o(1)y^{\rho+\varepsilon},$$

ou

$$T(y, F) = N\left(y, \frac{1}{F-a}\right) + o(1)y^{\rho+\varepsilon}.$$

Si donc on suppose que la fonction F est à croissance régulière, c'est-à-dire que

$$\lim_{y=\infty} \frac{\log T(y)}{\log y} = 1 + \rho,$$

ou bien que son ordre est inférieur à 2, le rapport de $y^{\rho+\varepsilon}$ à $T(y, F)$ est infiniment petit avec $1:y$.

En appelant, suivant la terminologie habituelle, défaut de la valeur a l'expression

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim_{y=\infty}} \frac{N(y, a)}{T(y, F)},$$

on obtient la proposition suivante :

Soit une fonction méromorphe périodique d'ordre inférieur à 2, *ou bien d'ordre quelconque mais à croissance régulière, si a est une valeur telle que* $|F(z)-a|>1$ *sur une suite de parallèles à* Ox *d'ordonnée indéfiniment croissante, en dehors des bandes d'exclusion de la fonction, on peut affirmer que le défaut de la valeur a est nul.*

La proposition précédente s'applique à une fonction périodique méromorphe F d'ordre inférieur à 2 ou à croissance régulière, dès que F admet ∞ comme valeur exceptionnelle. On a vu, en effet, au nº 3, que pour une telle fonction le logarithme du module se comporte, en dehors des domaines d'exclusion, comme une fonction entière à croissance régulière ou d'ordre inférieur à 2, pour laquelle le logarithme du module finit par surpasser toute valeur finie en dehors des domaines d'exclusion.

Si l'on suppose maintenant que F, toujours à croissance régulière ou d'ordre inférieur à 2, admet a comme valeur exceptionnelle, une transformation homographique convenable à coefficients constants transforme F en une fonction K admettant ∞ comme valeur exceptionnelle et pour laquelle la proposition précédente s'applique. Comme les zéros de $F-b$ (b quelconque différent de a) sont ceux de $K-c$ (pour b infini, on prendra les zéros de $1:F$, la valeur correspondante c reste toujours finie), la proposition s'applique à F pour laquelle le défaut de toute valeur finie ou infinie autre que la valeur exceptionnelle a est nul.

Pour toute fonction méromorphe périodique exceptionnelle (en particulier pour une fonction entière) d'ordre inférieur à 2, ou à croissance régulière, le défaut de toute valeur finie ou infinie autre que la valeur exceptionnelle est nul [1].

En supposant que la fonction n'admet qu'un nombre fini de suites négatives, et en prenant la transformée $G(u)$, on obtient les propositions suivantes :

Pour les fonctions méromorphes d'ordre nul satisfaisant à

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log \log r} < 2,$$

ou bien simplement à

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log \log r} < \infty,$$

mais à croissance régulière, le défaut d'une valeur a est nul si l'on peut trouver une suite de cercles centres à l'origine de rayon indéfiniment croissant, en dehors des couronnes centres à l'origine contenant les zéros et les pôles de la fonction, tels que sur ces cercles $|G(u) - a| > 1$.

Si la fonclion, qui satisfait toujours aux mêmes hypothèses, admet une valeur exceptionnelle (il en est ainsi pour les fonctions entières), le défaut est nul pour toute valeur autre que la valeur exceptionnelle.

La notion de défaut, dans les deux derniers énoncés, est prise dans le sens habituel.

7. D'après ce qui précède, si l'on désigne par

$$n[r, F - G, D(\varepsilon)],$$

le nombre de zéros de $F - G$ de module inférieur à r et contenus dans l'angle $D(\varepsilon)$ d'ouverture 2ε et de sommet à l'origine, situé du côté du plan où l'ordre relatif de F est $1 + \rho$, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \log^+ \frac{n[r, F - G, D(\varepsilon)]}{\log r} = 1 + \rho,$$

G désigne toujours une fonction méromorphe de même période et d'ordre

---

(1) Est exclu de cet énoncé, le cas sans intérêt, des combinaisons finies d'exponentielles linéaires.

J'avais énoncé, dans ma thèse (n° 24), cette propriété pour les fonctions entières, mais j'avais omis de préciser les conditions de validité relatives à la croissance régulière ou à l'ordre. Il est clair que dans l'égalité $T(y, F) = N(y, a) + o(1) y^{\rho+\varepsilon}$ rien n'indique, dans le cas général, que le rapport du dernier terme au premier est infiniment petit, précisément pour la suite des valeurs de y vérifiant cette égalité.

inférieur à $1+\rho$. L'égalité ne peut être en défaut que pour une fonction G au plus.

Il y a donc au plus une valeur exceptionnelle au sens de M. Borel et cette valeur est la même que la valeur exceptionnelle au sens de Picard.

Toute droite issue de l'origine contient une direction de Borel de la fonction.

Au lieu de considérer un angle infiniment petit, on peut considérer une bande de largeur infiniment petite (non parallèle à la période) et examiner la limite du premier membre de l'égalité précédente.

J'avais montré qu'il existait, dans la bande $-\pi < x < \pi$, pour les fonctions entières périodiques, au moins une telle bande qui confère au premier membre de l'égalité ci-dessus sa valeur maximum, c'est-à-dire ρ. La démonstration que j'en avais donnée, qui n'est qu'une transposition d'une méthode due à M. Valiron ([1]), basée sur une inégalité classique de M. Milloux, s'applique aussi aux fonctions méromorphes périodiques d'ordre fini. Elle s'applique même, *mutatis mutandis*, quand on considère, non plus des bandes parallèles à Oy, mais des bandes de direction quelconque non parallèles à la période.

8. Appelons, avec M. Valiron, caractère de la direction D, l'expression

$$\gamma(\mathrm{D}, \mathrm{Z}) = \lim_{\varepsilon=0}\left[\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{\pi \mathrm{N}[y, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}]}{\varepsilon \mathrm{T}(y, \mathrm{F})}\right]$$

relative à la valeur Z ([2]).

La considération de $\gamma(\mathrm{D}, \mathrm{Z})$ permet d'énoncer un résultat plus précis que celui que j'ai énoncé pour les fonctions entières périodiques, et fournit une généralisation des théorèmes connus de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre nul.

Théorèmes. — A. *Pour toute fonction méromorphe périodique d'ordre fini (sauf pour les fonctions d'ordre 2 ne vérifiant pas l'égalité*

$$\left.\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{\mathrm{T}(y, \mathrm{F})}{y^2 \log y} = \infty\right),$$

si le caractère de D *est nul pour trois valeurs de* Z, *il est nul pour toutes les valeurs de* Z *à l'exception, peut-être, d'un ensemble de* Z *de mesure linéaire nulle sur la sphère de Riemann.*

B. *Il existe au moins une direction de caractère positif, pour tous les* Z, *sauf pour deux* Z *au plus.*

([1]) Valiron, *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul* (*Bull. Sc. Math.*, 59, 1935).

([2]) Pour les notations de ce numéro et des suivants, *cf.* mon précédent Mémoire.

Une fois le théorème A établi, pour démontrer le théorème B, il suffit de reprendre ce qui a été dit pour les fonctions entières, en faisant le passage du nombre $n(y, \mathrm{D}, \mathrm{Z})$ à la moyenne $\mathrm{N}(y, \mathrm{D}, \mathrm{Z})$. Pour éviter des redites, je me contente de préciser quelques points nécessaires à l'établissement du théorème A.

Cas des fonctions d'ordre supérieur à 2 ou d'ordre 2 vérifiant

$$\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{\mathrm{T}(y, \mathrm{F})}{y^2 \log y} = \infty.$$

Afin d'éviter les irrégularités dans la croissance possible de $\mathrm{T}(y, \mathrm{F})$, introduisons, avec M. Valiron, une fonction $\mathrm{U}(y)$ continue telle que

$$\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{\mathrm{T}(y, \mathrm{F})}{\mathrm{U}(y)} = 1,$$

$$\lim_{y=\infty} \frac{\mathrm{U}(y)}{y^2 \log y} = \infty.$$

On sait qu'on peut définir une telle fonction $\mathrm{U}(y)$.

Remplaçons, dans la définition de $\gamma(\mathrm{D}, \mathrm{Z})$, $\mathrm{T}(y, \mathrm{F})$ par $\mathrm{U}(y)$.

Soit une suite de valeurs de y en progression arithmétique de raison 2ε, y_1, $y_2, \ldots, y_p, \ldots$.

Couvrons le rectangle

$$\mathrm{D}(\varepsilon) \qquad (0 < y < y_p)$$

à l'aide de p cercles C_q de rayon $\varepsilon\sqrt{2}$ et traçons Γ_q concentriques à C_q et de rayon k fois plus grand. On a, d'après une inégalité de M. Milloux, comme dans le cas des fonctions entières,

$$n[y_p, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}] < 2\mathrm{A} \sum_{u=a,b,c} n[y_p, \mathrm{D}(k\varepsilon), u] + p.\mathrm{B} - \mathrm{D}.p \log \eta + 2\mathrm{D} \log p\,!$$

Z est représenté sur la sphère à l'extérieur de deux cercles dont la somme des rayons est inférieure à 2η.

Mais

$$2\varepsilon \sum_{1}^{p-1} n[y_q, \mathrm{D}(\alpha), u] < \mathrm{N}[y_p, \mathrm{D}(\alpha), u] < 2\varepsilon \sum_{1}^{p} n[y_q, \mathrm{D}(\alpha), u],$$

d'où

$$\mathrm{N}[y_p, \mathrm{D}(\varepsilon), \mathrm{Z}] < 2\mathrm{A} \sum_{u=a,b,c} \mathrm{N}[y_p, \mathrm{D}(k\varepsilon), u]$$
$$+ 4\mathrm{A}\varepsilon \sum_{u=a,b,c} n[y_p, \mathrm{D}(k\varepsilon), u] + \sum_{q=1}^{p} [q.\mathrm{B} - \mathrm{D}.q \log \eta + 2\mathrm{D} \log q\,!].$$

L'avant-dernière somme est moindre que $y_p^{\rho+\varepsilon'}$. La dernière est moindre que

$$\text{const.}\, y_p^2 \log y_p.$$

Par suite, si le caractère de D est nul pour les valeurs a, b, c, on a

$$N[y_p, D(k\varepsilon), u] < \lambda U(y_p) \qquad (u = a, b, c),$$

λ est donné aussi petit que l'on veut; l'inégalité est assurée dès que p est suffisamment grand, et ε suffisamment petit, ce que nous supposons.

Il suit facilement de là, grâce aux hypothèses faites, que

$$\gamma(D, Z) = \lim_{\varepsilon=0}\left[\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{\pi N[y, D(\varepsilon), z]}{\varepsilon U(y)}\right] = 0.$$

Cas des fonctions d'ordre inférieur à 2. — Circonscrivons aux domaines d'exclusion situés dans $D(\varepsilon)$ des cercles C_q et traçons Γ_q concentriques et de rayon k fois plus grand.

C_q finit par être dans $D(\varepsilon)$, et Γ_q dans $D(k\varepsilon)$.

Considérons une suite de valeurs y_1; y_2, ..., y_p, ..., telle que dans chaque rectangle

$$D(\varepsilon) \qquad (y_{q-1} < y < y_q),$$

il finit par y avoir un seul cercle d'exclusion.

On a encore, en remarquant que dans $D(\varepsilon)$ les zéros de $F(z) - Z$ finissent par être dans C_q, si l'on exclut les Z de module supérieur à un nombre donné, d'ailleurs aussi grand que l'on veut, ce qui revient à exclure sur la sphère un cercle de rayon aussi petit que l'on veut

$$n[y_p, D(\varepsilon), Z] < 2A \sum_{u=a,b,c} n[y_p, D(k\varepsilon), u] + pB - Dp\log\eta + 2D\log p\,! + n_0(p),$$

$n_0(p)$ désigne le nombre, fini, de zéros de $F(z) - Z$ du domaine $0 < y < y_p$, $D(\varepsilon)$ en dehors des C_q.

On déduit, comme dans le premier cas, une inégalité entre les moyennes des zéros, inégalité qui ne diffère du cas précédent que par l'adjonction au second membre d'un terme de l'ordre de p, provenant de la sommation des termes en $n_0(p)$.

Ici, p est inférieur à y_p^ρ, $\log p\,!$ est inférieur à $\rho y_p^\rho \log y$. La fin de la démonstration se fait comme plus haut, en remarquant que

$$\lim \frac{y^{2\rho}\log y}{U(y)} = 0.$$

Le théorème A est donc établi.

C'est par erreur que j'avais affirmé que les théorèmes de M. Valiron sur l'existence d'une direction de caractère positif s'appliquaient à toutes les fonctions d'ordre nul (du moins d'après son Mémoire déjà cité). Ces théorèmes ne s'appliquent en réalité qu'aux fonctions d'ordre nul vérifiant

$$\overline{\lim} \frac{T(r)}{(\log r)^2} = \infty.$$

La démonstration précédente montre qu'ils s'appliquent encore aux fonctions d'ordre nul quelconques, sauf à celles d'entre elles qui vérifient simultanément

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r)}{\log \log r} = 2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim} \frac{T(r)}{(\log r)^2 \log \log r} < \infty.$$

9. Le problème des cercles de remplissage n'appelle aucun développement nouveau : les résultats obtenus pour les fonctions entières périodiques s'appliquent sans modification aux fonctions méromorphes.

Pour les fonctions d'ordre supérieur à 2, il existe, dans chaque direction de caractère positif, une suite infinie de cercles C_q de rayon arbitrairement petit tels que dans chacun de ces cercles la fonction prend au moins

$$|z_q|^{\rho-1-\eta_q} \qquad (z_q \text{ centre de } C_q)$$

fois toute valeur z représentée à l'extérieur de deux cercles de rayon d_q sur la sphère de Riemann, η_q et d_q tendant vers zéro avec $\frac{1}{q}$.

Pour les fonctions d'ordre inférieur à 2, il existe simplement des domaines D_n de dimensions

$$e^{-|a_n|^\rho} \qquad (|a_n|^{-A}),$$

tels que, à partir d'un certain rang $n(A, N)$, dans chaque domaine D_n, la fonction prend au moins une fois toute valeur donnée Z de module inférieur à N.

Il existe naturellement de tels domaines dans toutes les directions de caractère positif.