Annales scientifiques de l'É.N.S.

Arrigo Finzi

Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 243-305
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__243_0>

SUR

LE PROBLÈME DE LA GÉNÉRATION

D'UNE

TRANSFORMATION DONNÉE D'UNE COURBE FERMÉE PAR UNE TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE

PAR M. ARRIGO FINZI (1).

CHAPITRE I.

J'ai achevé ce mémoire pendant la période que j'ai passée à Paris comme chargé de recherches auprès de M. Élie Cartan. Qu'il me soit permis d'exprimer ici au grand géomètre français mes sentiments de vive reconnaissance et de respectueuse admiration.

1. Je considère, sur une courbe fermée C, une transformation finie T, qui possède une inverse, d'équation

$$x_1 = g(x) \qquad \left(\frac{d\,g(x)}{dx} > 0\right), \tag{1}$$

dépourvue de points invariants, et j'étudie le problème de savoir s'il existe une transformation infinitésimale

$$\mathrm{X}f = \xi(x)\frac{df}{dx}, \tag{2}$$

telle que T fasse partie du groupe g_1 à un paramètre engendré par $\mathrm{X}f$.

(1) Il m'est très agréable d'exprimer mes remercîments à M. G. Ascoli, professeur à l'Université de Turin, qui, par ses conseils, m'a permis d'améliorer en plusieurs points la rédaction de ce Mémoire.

Il est facile d'indiquer une condition nécessaire pour que le problème soit possible : *Si une puissance* T^n *de* T *laisse invariant un point* P, *elle doit laisser invariant tout autre point de* C (¹). Soit, en effet, T' une transformation arbitraire du groupe g_1 auquel appartient T; soit P' le transformé de P par T'. Par les transformations successives T'^{-1}, T^n, T', P' ira en P, restera en P et reviendra enfin à sa position originaire. Mais T^n et T' sont échangeables entre elles, on a donc

$$T' T^n T'^{-1} = T^n;$$

on voit que P' aussi est invariant par T^n.

On peut concevoir trois cas :

1. *Il existe une puissance* T^n, *qui laisse invariants tous les points de* C. T *est cyclique*.

2. *Il existe une puissance* T^n, *qui laisse invariants quelques-uns seulement des points de* C.

3. *Il n'y a pas de points de* C *invariants pour une puissance quelconque de* T.

Nous dirons que les transformations 1 et 3 sont *régulières*, et que les transformations 2, qui ne satisfont pas à la condition nécessaire donnée, sont *irrégulières*.

On peut attacher à une transformation T un invariant k, le *module* : considérons T comme engendrée par un mouvement continu, qui porte tout point P en son transformé; on pourra considérer, pour une puissance T^n, le rapport $\frac{m}{n}$ du nombre m de tours complets de C, que ce point accomplit par T^n à l'exposant n. On définit le module comme la limite de ce rapport quand n croît. Nous verrons au paragraphe 6 que cette limite existe toujours et qu'elle est indépendante du point P considéré. Le module des transformations 1 et 2 est toujours rationnel, celui des transformations 3 est irrationnel.

Nous avons déjà vu que les transformations 2 ne sont engendrées par aucune transformation infinitésimale; on peut facilement démontrer que, au contraire, une *transformation* 1 *admet une infinité* (dépendant du choix arbitraire d'une fonction dans un intervalle) *de transformations infinitésimales qui l'engendrent, dans la seule hypothèse que* $g(x)$ *possède une dérivée continue*.

L'étude des transformations 3 régulières, de module irrationnel, n'a pas le même caractère élémentaire; on peut toutefois démontrer facilement qu'*une transformation* 3 *admet au plus une transformation infinitésimale, qui l'engendre*.

(¹) A. Finzi, *Su una questione posta da S. Lie* (*Rendiconti dell Acc. Naz. dei Lincei*, 1947, 8e série, vol. 3, p. 185).

Représentons maintenant par

$$\frac{m_\alpha}{n_\alpha} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{\alpha-1}}}}$$

la $\alpha^{\text{ième}}$ réduite du développement du module d'une transformation T du type 3; on démontre le théorème A : *il y a toujours une transformation infinitésimale, qui engendre une transformation* T *du type* 3 *si la fonction* $g(x)$ *possède une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz, et si l'on peut choisir un exposant positif* $\lambda < 1$, *de façon que*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0. \tag{3}$$

La démonstration est fondée sur la considération des transformations itérées de T.

Il est vraisemblable que la condition (3) concernant le module soit la moins restrictive que l'on puisse donner ([1]). De toute façon, si l'on ne fait aucune hypothèse concernant la croissance des entiers a_α, on ne peut pas affirmer *a priori* l'existence d'une transformation infinitésimale, qui engendre T; en effet, *pour des valeurs convenables du module, on peut construire des transformations* 3, *représentées par des fonctions admettant des dérivées d'ordre aussi élevé qu'on veut* (*ou même par des fonctions analytiques*), *et auxquelles ne correspond aucune transformation infinitésimale.*

D'ailleurs, pour une transformation T ayant un tel module, même lorsque la transformation infinitésimale correspondante existe, il ne semble pas possible de le reconnaître par un procédé fini et général ([2]). C'est que, dans le problème de la construction de la fonction $\xi(x)$ à partir de la fonction $g(x)$, il n'y a pas de continuité d'ordre fini, dans le sens du calcul fonctionnel. Mais *la continuité s'introduit lorsqu'on se borne à la considération de transformations ayant un module donné, satisfaisant à la condition* (3).

Un autre point à signaler est le suivant : si, à partir d'une transformation infinitésimale, qui est caractérisée par une fonction $\xi(x)$ ne possédant pas une dérivée première, on remonte par une intégration à une transformation finie T du groupe g_1 qu'elle engendre, on trouve, *en général*, que la fonction $g(x)$, qui caractérise T, ne possède pas une dérivée seconde. Dans le cas du théorème A,

---

([1]) Il serait toutefois bien désirable de le démontrer; on reviendra sur ce point dans le dernier paragraphe de ce Mémoire. De toute façon on démontrera (§ 33) que les nombres irrationnels compris entre 0 et 1, qui ne satisfont pas à la condition (3), constituent un ensemble de mesure nulle.

([2]) On est toutefois assuré que T admet une transformation infinitésimale qui l'engendre, lorsqu'on sait qu'elle appartient à une famille ∞^1 de transformations régulières, satisfaisant à certaines conditions.

au contraire, on part d'une fonction $g(x)$, qui possède une dérivée seconde et l'on arrive à une fonction $\xi(x)$, dont nous n'avons pas démontré qu'elle possède une dérivée première. *La question se poserait alors de savoir si cette dérivée première existe* en réalité; je ne sais pas toutefois si à cette question on doit répondre par l'affirmative.

On pourrait peut-être tâcher de démontrer le théorème A sous des conditions moins restrictives concernant la fonction $g(x)$. Cela ne semble toutefois guère facile; de toute façon la méthode employée ici devrait être complètement abandonnée.

Il serait aussi intéressant de savoir si, en admettant l'existence de dérivées d'ordre supérieur pour $g(x)$, il s'ensuit l'existence de dérivées pour $\xi(x)$.

On peut enfin considérer une transformation T *arbitraire*, qui soit représentée par une fonction $g(x)$, dont la dérivée seconde satisfait à la condition de Lipschitz, et poser le problème de savoir si cette transformation appartient au type 1 ou 2 ou bien si elle a un module irrationnel et admet une transformation infinitésimale, qui l'engendre (type $3'$), ou enfin si elle a un module irrationnel, mais n'est engendrée par aucune transformation infinitésimale (type $3''$). On peut répondre que, *les transformations* 1 *et* $3''$ *étant exceptionnelles, une transformation arbitraire peut appartenir ou bien au type* 2 *ou bien au type* $3'$.

D'une façon plus précise, soit

$$x_1 = g(x, \theta),$$

une famille de transformations dépendant d'un paramètre θ et choisie de façon arbitraire, à part quelques conditions qu'il est inutile de préciser ici; on démontre le théorème B :

L'ensemble des valeurs de θ, *qui correspond à des transformations* 1, *est vide; l'ensemble qui correspond à des transformations* $3''$ *a une mesure nulle; les deux ensembles, qui correspondent aux transformations* 2 *et* $3'$, *ont une mesure différente de zéro.*

La démonstration du théorème B utilise le théorème A.

Le travail actuel n'est pas sans relation avec la belle théorie des transformations d'une courbe, due à Poincaré et à Denjoy [1]. La notion de module avait été implicitement introduite par Poincaré; on doit à M. Denjoy un résultat

---

[1] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, (*Œuvres complètes*, t. I, p. 137-158); A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore* (*J. Math. pures et appliquées*, t. 11, 1932, p. 333). On pourra aussi consulter à propos des questions traitées dans ce Mémoire, et pour des informations bibliographiques, une Note de M. Hadamard, *Two works on iteration and related questions*. (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 50, 1944, p. 67).

que nous utiliserons pour démontrer le théorème A. On ne fera pas ici un exposé complet de cette théorie, mais on donnera, au Chapitre II, une démonstration du résultat de M. Denjoy.

Il n'est pas peut-être sans intérêt de remarquer que le problème traité dans les Mémoires de Poincaré et de M. Denjoy est au fond celui de l'équivalence d'une transformation T à une translation,

$$x_1 = x + k,$$

par rapport au groupe des transformations biunivoques de C, qui sont représentées par une fonction continue; le problème traité ici est celui de l'équivalence par rapport au groupe plus restreint des transformations biunivoques représentées par une fonction continue et douée d'une dérivée continue et positive.

Notre Mémoire est divisé en quatre Chapitres : les deux premiers servent d'introduction; au Chapitre III on donne la démonstration du théorème A; au Chapitre IV on construit des transformations 3'' et l'on démontre le théorème B.

2. x étant l'abscisse sur la courbe C, nous admettons qu'à un tour complet de la courbe correspond l'intervalle unitaire de l'abscisse : alors aux deux valeurs x et $x+1$ de l'abscisse correspondra le même point géométrique de C.

La fonction $g(x)$, qui décrit la transformation T sur la courbe C, satisfait évidemment la relation

$$g(x+1) = g(x) + 1.$$

Nous supposerons que $g(x)$ possède les dérivées continues jusqu'à un certain ordre, qui sera précisé; nous indiquerons ces dérivées de la façon suivante

$$\frac{d^h g(x)}{dx^h} \equiv g^h(x).$$

Nous convenons de dire que, lorsque l'abscisse x croît, le point x se déplace vers la droite; si nous supposons que le point x_1, transformé de x par T, est à la droite de x, nous aurons donc

$$g(x) > x.$$

Nous poserons (¹)

$$x_2 = g(g(x)) \equiv g_2(x),$$
$$x_3 = g(g(g(x))) \equiv g_3(x),$$

et nous indiquerons par $g_0(x) \equiv x$ la fonction, qui décrit la transformation identique; nous aurons aussi à considérer les fonctions d'index négatif, qui

(¹) On indiquera parfois, plus en général, par x_2, x_3, ... des nombres congrus (mod 1) à $g_2(x)$, $g_3(x)$ ..., qui représentent donc les mêmes points géométriques de C.

décrivent les puissances négatives de T. Enfin nous indiquerons par $g_n^h(x)$ la dérivée $h^{\text{ième}}$ de la fonction $g_n(x)$.

Nous dirons que le point d'abscisse $x_n \equiv g_n(n)$, transformé de x par T^n, est le $n^{\text{ième}}$ *conséquent* de x, et que $x_{-n} \equiv g_{-n}(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ *antécédent* de x.

Si les points x, x', x'' se suivent dans un certain ordre, leurs $n^{\text{ièmes}}$ conséquents (antécédents) se suivent dans le même ordre.

3. Supposons maintenant que la transformation infinitésimale

$$\xi(x)\frac{df}{dx} \tag{2}$$

engendre T. La fonction $\xi(x)$ sera supposée continue, positive, et de période 1.

On sait que l'équation du groupe g_1 engendré par (2) est

$$\int_x^{x_1} \frac{dx}{\xi(x)} = t,$$

t étant le paramètre du groupe, x un point de C et x_1 son transformé. Si l'on suppose donc qu'on obtient T en donnant au paramètre t la valeur particulière 1, on doit avoir

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1. \tag{4}$$

Soit k le module de T, introduisons une nouvelle abscisse y définie par l'équation

$$dy = \frac{k\,dx}{\xi(x)},$$

la transformation infinitésimale (2) s'écrit, dans y,

$$k\frac{df}{dy},$$

et l'équation de T devient donc

$$y_1 = y + k.$$

Le module k, qui est invariant par un changement de la variable, est donné, dans le cas actuel d'une translation, par le rapport de l'ampleur k de cette translation à l'intervalle de la variable y, qui correspond à un tour complet de C : on voit donc que cet intervalle est encore égal à 1.

4. Nous allons étudier, dans ce paragraphe, les transformations 1 (cycliques). On démontre facilement qu'*à une transformation cyclique correspond une infinité fonctionnelle de transformations infinitésimales, qui l'engendrent.*

Supposons, en effet, que pour T^n tout point de C revienne, pour la première fois, après m tours de la courbe, à sa position originaire. On aura donc

$$T^n = I.$$

Un point déterminé $\bar{x}$ de C possède $n-1$ homologues $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ par rapport au groupe cyclique engendré par T. Il y aura $m-1$ de ces points qui tombent entre $\bar{x}$ et $\bar{x}_1$; soit $\bar{x}_s$ le premier homologue à la droite de $\bar{x}$.

La démonstration se fait en construisant la fonction continue, positive et périodique $\xi(x)$, qui paraît dans l'expression de la transformation infinitésimale, de façon que l'équation (4) soit satisfaite. Nous définissons d'abord $\xi(x)$ dans l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$ en lui imposant la seule condition

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}_s} \frac{dx}{\xi(x)} = \frac{1}{m}.$$

Soit maintenant x un point extérieur à l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$, et soit T^r la puissance de T, qui porte en x le point x_{-r}, homologue de x et intérieur à l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$. Nous définissons $\xi(x)$ par l'équation

$$\frac{\xi(x)}{g_r^1(x_{-r})} = \frac{\xi[g_r(x_{-r})]}{g_r^1(x_{-r})} = \xi(x_{-r}). \tag{5}$$

La fonction $\xi(x)$ est de cette façon définie partout sur la courbe; elle est continue sauf dans les n points $\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}$. On peut éliminer facilement ces discontinuités en imposant à la fonction définie dans l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$ la relation

$$\frac{\xi(\bar{x}_s)}{g_s^1(\bar{x})} = \xi(\bar{x}).$$

Si l'on veut aussi que les dérivées de $\xi(x)$ soient continues, il faudra imposer d'autres relations.

Nous allons maintenant montrer que la fonction $\xi(x)$, que nous venons de définir, répond au problème posé. Il faut pour cela qu'on ait, quel que soit x,

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1.$$

Supposons d'abord que x ne coïncide avec aucun des points $\bar{x}$; entre x et $g(x)$ il y aura alors m de ces points; soit, dans l'ordre,

$$\bar{x}_i, \quad \bar{x}_j, \quad \ldots, \quad \bar{x}_l.$$

Évaluons l'intégrale

$$\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_j} \frac{dx}{\xi(x)};$$

T^i porte $(\bar{x}, \bar{x}_s)$ en $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$. Si nous prenons la nouvelle variable d'intégration x_{-i} définie par

$$x_{-i} = g_{-i}(x),$$

nous aurons, en vertu de (5),

$$\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_j} \frac{dx}{\xi(x)} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}_s} \frac{dx_{-i}}{\xi(x_{-i})} = \frac{1}{m}.$$

L'intégrale étendue de $\bar{x}_i$ à $\bar{x}_l$ sera donc égale à $\frac{m-1}{m}$. Il faut encore calculer les deux intégrales de x à $\bar{x}_i$ et de $\bar{x}_l$ à $g(x)$. On voit tout de suite que ces deux intégrales ont la valeur globale $\frac{1}{m}$, en remarquant que x et $g(x)$ possèdent un même homologue x_0 intérieur à $(\bar{x}, \bar{x}_s)$ et que, par exemple, l'intégrale de x à $\bar{x}_i$ est égale, en vertu de la relation (5), à l'intégrale de x_{-r} à $\bar{x}_s$.

Si x coïncide avec un des points $\bar{x}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ la démonstration est encore plus simple.

5. Nous allons voir qu'à la différence des transformations cycliques, *les transformations de module irrationnel sont engendrées par une transformation infinitésimale au plus.* Soit en effet T une transformation de module irrationnel k, qui admet deux transformations infinitésimales

$$\mathrm{X}f = \xi(x)\frac{df}{dx}, \qquad \mathrm{Z}f = \eta(x)\frac{df}{dx};$$

si l'on l'introduit l'abscisse y définie par l'équation

$$dy = \frac{k\,dx}{\xi(x)},$$

Xf se transforme (§ 3) en $k\frac{df}{dy}$ et T se transforme dans la translation d'ampleur k; enfin Zf se transforme en

$$\mathrm{Z}'f = k\frac{\eta(x(y))}{\xi(x(y))}\frac{df}{dy}.$$

Il y a des multiples de k qui diffèrent d'un entier aussi peu qu'on veut; il y a donc, parmi les puissances de la translation d'ampleur k, des translations qui déplacent les points de C aussi peu qu'on veut. Il est impossible que toutes ces translations soient engendrées par Z$'f$; en effet les transformations engendrées par Z$'f$ et très proches de l'identité sont de la forme

$$y = y + k\frac{\eta(x(y))}{\xi(x(y))}dt + \ldots; \tag{6}$$

$\frac{\eta(x(y))}{\xi(x(y))}$ n'est pas une constante et les transformations (6) ne sont donc pas des translations.

CHAPITRE II.

6. Revenons, pour mieux la préciser, sur la notion de *module*.

Si T est du type 1 ou 2 et si pour T^n les points de C (ou une partie de ces points) reviennent à leur position originaire après m tours de la courbe, il est évident que le module est égal au nombre rationnel $\frac{m}{n}$.

Considérons maintenant une transformation du type 3. Nous devons montrer que le rapport $\frac{m}{n}$ du nombre m de tours que x accomplit par T^n à l'exposant n tend à une limite.

Supposons que x accomplisse m' tours par la transformation $T^{n'}$ et m'' tours par $T^{n''}$. Puisque x accomplit m' tours par $T^{n'}$, il accomplira, par $(T^{n'})^{n''}$, un nombre de tours compris entre $m'n''$ et $(m'+1)n''$, mais on voit, d'une façon analogue, que le nombre de tours en question doit être compris entre $m''n'$ et $(m''+1)n'$.

La différence entre $m''n'$ et $m'n''$ ne peut donc dépasser le plus grand entre les deux entiers n' et n''. Par conséquent

$$\left|\frac{m'}{n'}-\frac{m''}{n''}\right|=\left|\frac{m'n''-m''n'}{n'n''}\right|<\left|\frac{n'+n''}{n'n''}\right|,$$

cela montre bien que $\frac{m}{n}$ tend vers une limite k pour $n\to\infty$.

Il nous reste à montrer que, dans le cas actuel, le module k est irrationnel. Soit T^{n_1} la plus grande puissance de T par laquelle un point x n'arrive pas à accomplir un tour complet de C; le point x_{n_1} sera à la gauche de x. Les points

$$x_1,\quad x_{n_1+1},\quad x_{2n_1+1},\quad x_{3n_1+1},\quad \ldots$$

se suivent donc de droite à gauche; soit

$$x_{\alpha_1 n_1+1}=x_{n_2}$$

le dernier parmi ces points qui se trouve, ainsi que ceux qui le précèdent, à la droite de x. Par T^{n_2}, x accomplit a_1 tours de C.

Considérons maintenant les points

$$x_{n_1},\quad x_{n_2+n_1},\quad x_{2n_2+n_1},\quad x_{3n_2+n_1},\quad \ldots;$$

ils se suivent de gauche à droite, soit

$$x_{a_2 n_2+n_1}=x_{n_3}$$

le dernier d'entre eux, qui se trouve, ainsi que ceux qui le précèdent, à la gauche de x. Par T^{n_3}, x accomplit *presque complètement* $a_1 a_2+1$ tours de C.

On peut poursuivre de la sorte; si l'on indique par

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = a_2, \qquad m_3 = a_2 a_1 + 1, \qquad \ldots$$

le nombre des tours accomplis (ou *presque complètement* accomplis) par le point x lorsqu'il est transformé par T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}, ... respectivement, et si l'on pose $m_0 = 0$, $n_0 = 1$, on comprend que la succession

$$\frac{m_0}{n_0}, \quad \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{m_3}{n_3}, \quad \ldots$$

tend vers le module k de la transformation T. Mais on a, d'une façon générale,

$$\begin{aligned} m_{\alpha+2} &= a_{\alpha+1} m_{\alpha+1} + m_\alpha, \\ n_{\alpha+2} &= a_{\alpha+1} n_{\alpha+1} + n_\alpha, \end{aligned}$$

ce qui montre que la succession des fractions représente le système des réduites du développement de k en fraction continue illimitée; k est donc irrationnel. Le module de T^n est évidemment nk, il peut être plus grand que 1, et l'on devra attribuer des modules négatifs aux puissances négatives de T. D'ailleurs, si l'on considère une transformation au point de vue *géométrique*, le module n'est défini, au fond, qu'à un entier près.

Considérons en particulier les transformations T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}, ..., T^{n_α}, ...; leurs modules sont donnés par $n_1 k$, $n_2 k$, $n_3 k$, ..., $n_\alpha k$. Posons

$$x_{n_\alpha} = g_{n_\alpha}(x) = x + m_\alpha + \gamma_\alpha(x);$$

la transformation

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x)$$

coïncide, au point de vue géométrique, avec T^{n_α}; son module est donné par

$$n_\alpha k - m_\alpha \equiv k_\alpha;$$

les fonctions $\gamma_\alpha(x)$ sont alternativement positives et négatives.

De même, les nombres k_α sont alternativement positifs et négatifs; de

$$\left| k - \frac{m_\alpha}{n_\alpha} \right| < \frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}},$$

on déduit

$$|k_\alpha| = |n_\alpha k - m_\alpha| < \frac{1}{n_{\alpha+1}}.$$

Les nombres k_α sont donc de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n_{\alpha+1}}$, ils satisfont au même système d'équations récurrentes que les nombres m_α et n_α,

$$k_{\alpha+2} = a_{\alpha+1} k_{\alpha+1} + k_\alpha;$$

ils constituent, à un facteur constant près, la seule solution du système, qui tende vers zéro pour $\alpha \to \infty$; en effet, s'il y avait deux solutions indépendantes tendant vers zéro, il en serait de même de la solution générale.

7. Nous dirons qu'une transformation continue τ de C, dépourvue de points invariants, d'équation

$$x_1 = x + \gamma(x),$$

est *très petite* [1], si, en indiquant par δ_1 et δ_2 deux membres positifs convenables très petits par rapport à 1, on a toujours

$$|\gamma(x)| < \delta_1$$

et

$$1 - \delta_2 < \frac{\gamma(x')}{\gamma(x)} < 1 + \delta_2,$$

lorsque x' appartient à l'intervalle (x, x_1).

L'équation de la transformation inverse τ^{-1} est donnée, approximativement [2], par

$$x_{-1} = x - \gamma(x).$$

Pour calculer l'équation de $T\tau T^{-1}$, transformée de τ par la transformation T d'équation (1) [en supposant que $g(x)$ possède une dérivée seconde continue], remarquons que par les transformations successives T^{-1}, τ, T le point x va en $g_{-1}(x)$, en $g_{-1}(x) + \gamma(g_{-1}(x))$ et enfin en

$$g[g_{-1}(x) + \gamma(g_{-1}(x))] = x + \gamma(g_{-1}(x))\, g^1(g_{-1}(x)) + \ldots;$$

l'équation cherchée est donc, approximativement,

$$x_1 = x + \gamma(g_{-1}(x))\, g^1(g_{-1}(x)).$$

Considérons enfin le module d'une transformation très petite. Le module d'une telle transformation est donné, approximativement, par l'inverse de l'exposant de la plus petite puissance de la transformation par laquelle un point x accomplit un tour complet de C; cet exposant est à son tour donné approximativement par

$$\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma(x)},$$

on a donc pour le module l'expression

$$\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma(x)}}.$$

---

(1) *Très petit* a une signification relative; on veut dire *assez petit* pour que les relations qu'on va donner dans ce paragraphe (qui seraient exactes pour δ_1 et δ_2 infiniment petits, c'est-à-dire pour des transformations infiniment petites) soient valables avec une approximation suffisante pour les applications qu'on en fera dans ce Mémoire (aux paragraphes 32 et 40).

(2) Je pense que la signification mathématique exacte du mot *approximativement*, qui paraît plusieurs fois dans ce paragraphe, est évidente dans chaque cas et ne demande pas d'autres explications. Par exemple, dans le cas actuel, je veux dire par ce mot que la différence entre les deux abscisses x_{-1} et $x - \gamma(x)$ est plus petite que $\delta_1\delta_2$, donc plus petite qu'une quantité quadratique en δ_1 et δ_2.

Supposons enfin que la transformation très petite τ soit égale au produit $\tau_{(1)}\tau_{(2)}\ldots\tau_{(n)}$ de n transformations très petites $\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \ldots, \tau_{(n)}$, représentées par n fonctions $\gamma_{(1)}(x)$; $\gamma_2(x), \ldots, \gamma_{(n)}(x)$, toutes du même signe; supposons que le rapport

$$\frac{\gamma_{(j)}(x')}{\gamma_{(j)}(x)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

soit toujours très proche de l'unité lorsque x' varie dans l'intervalle (x, x_1) compris entre un point x et son transformé par τ. On a alors, approximativement,

$$\gamma(x) = \gamma_{(1)}(x) + \gamma_{(2)}(x) + \ldots + \gamma_{(n)}(x).$$

Entre le module k de τ et les modules $k_{(1)}, k_{(2)}, \ldots, k_{(n)}$ de $\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \ldots, \tau_{(n)}$ on a la relation

$$k \geqq k_{(1)} + k_{(2)} + \ldots + k_{(n)},$$

valable approximativement. Pour l'établir il suffit d'avoir recours à l'expression du module, que nous venons de donner; il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma_{(1)}(x)+\gamma_{(2)}(x)+\ldots+\gamma_{(n)}(x)}} \geqq \frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma_{(1)}(x)}} + \ldots + \frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma_{(n)}(x)}};$$

c'est là un cas particulier d'une relation connue [1].

8. On peut faire correspondre, à un point x de C et à l'ensemble de ses homologues par rapport aux puissances de T, un ensemble de points sur un cercle Γ de longueur 1. La considération de cette représentation, due à Poincaré, va jouer un rôle important dans la suite. Au point x de C faisons correspondre un point particulier y de Γ; en général aux points

$$\ldots, \quad x_{-3}, \quad x_{-2}, \quad x_{-1}, \quad x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots$$

de C faisons correspondre les points

$$\begin{gathered} \ldots, \quad y_{-3} \equiv y - 3k, \quad y_{-2} \equiv y - 2k, \quad y_{-1} \equiv y - k, \quad y, \\ y_1 \equiv y + k, \quad y_2 \equiv y + 2k, \quad y_3 \equiv y + 3k, \quad \ldots \end{gathered}$$

respectivement. Il est bien clair qu'à deux valeurs de y, qui diffèrent d'un entier, correspond le même point de Γ. Désignons par θ la rotation de Γ d'un angle $2\pi k$, qui porte y_i en y_{i+1}.

Soit maintenant $x_i, x_j, x_k, \ldots$ des homologues quelconques de x et $y_i, y_j, y_k, \ldots$ les points correspondants de Γ. *Les points $x_i, x_j, x_k, \ldots$ sont situés dans le même ordre que les points $y_i, y_j, y_k, \ldots$*; cette remarque est due à Poincaré.

---

(1) HARDY, POLYA et LITTLEWOOD, *Inequalities*, p. 146.

Il suffit évidemment de démontrer cette propriété pour un groupe de trois points, dont l'un est le point x,

$$x, \quad x_i, \quad x_j,$$

et pour les points correspondants de Γ,

$$y, \quad y_i, \quad y_j.$$

Supposons, par exemple, $i < j$. T^i porte x en x_i, T^j porte x en x_j, enfin T^{j-i} porte x_i en x_j.

Le module de T^i est donné par ik; soit i' le plus grand entier contenu dans ik, alors T^i amène x en x_i après i' tours de C. De même, si j' est le plus grand entier contenu dans le module jk de T^j, cette transformation amènera x en x_j après j' tours complets de C. Enfin le nombre de tours après lequel la transformation T^{j-i} amène x_i en x_j est évidemment égal à $j' - i'$ si en se déplaçant de x vers la droite on rencontre x_i d'abord, et x_j après; il est égal à $j' - i' - 1$ dans le cas opposé. Ce même nombre est donné, d'autre part, par le plus grand entier contenu dans $(j - i)k$.

D'autre part, on va de y à y_i par θ^i et par un déplacement total donné par ik, en faisant d'abord i' tours complets de Γ; on va de y_i à y_j par θ^j et par un déplacement total donné par jk, et en faisant d'abord j' tours complets de Γ; enfin par θ^{j-i} on va de y_i à y_j après un nombre de tours qui est évidemment égal à $j' - i'$ si en se déplaçant de y vers la droite on rencontre y_i d'abord, et y_j ensuite, et qui est égal à $j' - i' - 1$ dans le cas opposé. Mais, ici encore, ce nombre est égal au plus grand entier contenu dans $(j - i)k$. On voit donc que y_i précède y_j si x_i précède x_j, et *vice versa*.

L'ampleur du déplacement $y_j - y_i$ qui porte un point y_i en un point y_j est donnée par le module $(j - i)k$ de la transformation T^{j-i}. La distance entre les points géométriques y_j et y_i est donnée aussi par le module de T^{j-i}, à un entier près.

9. Les déductions des paragraphes 9, 10, 11 et 12, quoique élémentaires, sont parfois un peu minutieuses. Il sera surtout nécessaire, pour la suite, d'être quelque peu familiarisé avec les considérations de ce paragraphe et de bien rappeler le lemme du paragraphe 10 et le premier lemme énoncé en italique au paragraphe 11.

Les considérations du paragraphe précédent font comprendre l'importance de considérer la distribution des points y_i sur Γ, distribution que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Considérons d'abord les $n_1 + 1$ points

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_{n_1};$$

ils se suivent de gauche à droite à une distance égale à k; enfin l'intervalle

$$(y_{n_1}, y)$$

a l'ampleur

$$1 - kn_1 = |k_1|.$$

On voit en somme que ces premiers $n_1 + 1$ points divisent Γ en n_1 intervalles (y_i, y_{i+1}) $(0 \leqq i < n_1)$ d'ampleur k et un intervalle (y_{n_1}, y) d'ampleur $|k_1|$.

L'intervalle

$$(y_{n_1+1}, y_1)$$

peut être obtenu à partir de (y_{n_1}, y) par le déplacement d'ampleur k, son ampleur est donc encore donnée par $|k_1|$. Après cela, le point $y_{n_1+i}(i < n_1)$ divise l'intervalle

$$(y_{i-1}, y_i)$$

en deux parties, dont

$$(y_{n_1+i}, y_i)$$

a l'ampleur $|k_1|$. Deux points y_{2n_1+i}, y_{n_1+i} déterminent également un intervalle d'ampleur $|k_1|$ compris dans (y_{i-1}, y_i).

On peut poursuivre; on voit que les $a_1 n_1$ points $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_{n_2+n_1-1}$ divisent chacun des n_1 intervalles d'ampleur k du premier réseau en a_1 intervalles partiels d'ampleur $|k_1|$ et un intervalle d'ampleur $|k_2|$, situé à gauche. On a ainsi un nouveau réseau formé par les $n_2 + n_1$ points

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n_2+n_1-1}$$

et constitué par $a_1 n_1 + 1 = n_2$ intervalles

$$(y_i, y_{i+n_1}) \qquad (0 \leqq i < n_2)$$

d'ampleur $|k_1|$ et par n_1 intervalles

$$(y_i, y_{i+n_2}) \qquad (0 \leqq i < n_1)$$

d'ampleur k_2.

On peut poursuivre indéfiniment dans la formation de nouveaux réseaux. Le $\alpha^{\text{ième}}$ réseau sera formé par les $n_\alpha + n_{\alpha-1}$ points

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n_\alpha+n_{\alpha-1}-1}$$

et sera constitué par n_α intervalles,

$$(y_i, y_{i+n_{\alpha-1}}) \qquad (0 \leqq i < n_\alpha),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, et par $n_{\alpha-1}$ intervalles,

$$(y_i, y_{i+n_\alpha}) \qquad (0 \leqq i < n_{\alpha-1}),$$

d'ampleur $|k_\alpha|$.

On passera du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+1^{\text{ième}}$ réseau par la considération de $n_\alpha a_\alpha$ nouveaux conséquents de y, en divisant chaque intervalle d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$ en a_α intervalles,

$$(y_{i+n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha},\ y_{i+n_{\alpha-1}+(b_\alpha+1)n_\alpha}) \qquad (b_\alpha = 0,\ 1,\ \ldots,\ a_\alpha - 1),$$

d'ampleur $|k_\alpha|$, et un

$$(y_i,\ y_{i+n_{\alpha+1}}),$$

d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$, situé à droite (à gauche). De même, on passera du $\alpha+1^{\text{ième}}$ au $\alpha+2^{\text{ième}}$ réseau par la considération de $n_{\alpha+1}\,a_{\alpha+1}$ nouveaux conséquents de y, en divisant chaque intervalle d'ampleur $|k_\alpha|$ en $a_{\alpha+1}$ intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$ et un d'ampleur $|k_{\alpha+2}|$ situé à gauche (à droite).

Nous aurons aussi à considérer, par la suite, un deuxième système de réseaux, celui des réseaux *incomplets* : le $\alpha^{\text{ième}}$ réseau imcomplet est formé par les n_α points

$$y,\quad y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_{n_\alpha-1};$$

il est constitué par $n_\alpha - n_{\alpha-1}$ intervalles,

$$(y_i,\ y_{i+n_{\alpha-1}}) \qquad (0 \leqq i < n_\alpha - n_{\alpha-1}),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, et par $n_{\alpha-1}$ intervalles,

$$(y_i,\ y_{i-n_\alpha+n_{\alpha-1}}) \qquad (n_\alpha - n_{\alpha-1} \leqq i < n_\alpha)$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|+|k_\alpha|$.

Évidemment, *à tout réseau de* Γ *correspond un réseau de* C, *ayant son origine dans un point donné* x. Nous dirons qu'un intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$ d'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$, qui correspond à un intervalle d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$ de Γ, *a le module* $|k_{\alpha-1}|$.

10. Dans la suite de ce Chapitre nous allons supposer que la variation totale V de la fonction $g_1(x)$ soit bornée.

Soit x un point de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$ et i une valeur de l'index $\leqq n_\alpha$. Nous allons montrer que, *lorsque* α *et* i *croissent, le rapport*

$$\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)} \tag{7}$$

reste toujours compris entre deux quantités positives convenables, qu'on peut choisir indépendamment de x, x', i *et* α*;* nous exprimerons cela en disant que le rapport *reste fini*. Pour la démonstration, remarquons qu'on a

$$g_i^1(x) = \prod_0^{i-1}{}_j\, g^1(x_j), \qquad g_i^1(x') = \prod_0^{i-1}{}_j\, g^1(x'_j);$$

par conséquent

$$\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)} = \prod_0^{i-1}{}_j \left(1 + \frac{g^1(x'_j) - g^1(x_j)}{g^1(x_j)}\right).$$

Pour montrer que ce produit reste toujours fini, il suffit de montrer que la sommation

$$\sum_{0}^{i-1}{}_j \frac{|g^1(x'_j) - g^1(x_j)|}{g^1(x_j)}$$

reste bornée. Les dénominateurs, qui paraissent dans les termes de la sommation, ne sont certainement pas plus petits que le minimum de la fonction continue et positive $g_1(x)$; il suffit donc de montrer que

$$\sum_{0}^{i-1}{}_j |g^1(x'_j) - g^1(x_j)|$$

reste bornée. Les intervalles $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ $(j < n_\alpha)$, qui appartiennent au $\alpha^{\text{ième}}$ réseau de C, ne peuvent avoir que les extrêmes en commun; à plus forte raison les intervalles (x_j, x'_j) ne peuvent pas avoir des points intérieurs en commun; la dernière sommation ne peut donc dépasser la variation totale V de $g^1(x)$.

Le rapport (7) resterait encore fini si x' était dans l'intervalle plus grand $(x, x_{2n_{\alpha-1}})$. Pour le prouver il suffit de choisir un point x'' qui appartienne à $(x, x_{n_{\alpha-1}})$ et tel que x' appartienne à $(x'', x''_{n_{\alpha-1}})$; alors du fait que les deux rapports $\frac{g_i^1(x'')}{g_i^1(x')}$ et $\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)}$ restent finis, il s'ensuit que (7) aussi reste fini.

11. Nous allons démontrer que le rapport

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x'_i)}{\gamma_\alpha(x_i)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x'_i)}{\gamma_\alpha(x')}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_i)}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{\dfrac{x'_{i+n_\alpha} - x'_i}{x'_{n_\alpha} - x'}}{\dfrac{x_{i+n_\alpha} - x_i}{x_{n_\alpha} - x}} \tag{8}$$

reste toujours fini. Nous avons indiqué par x' un point de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$ et par i un entier $\leq n_\alpha$.

Le théorème de la moyenne nous donne

$$x'_{i+n_\alpha} - x'_i = g_i(x'_{n_\alpha}) - g_i(x') = (x'_{n_\alpha} - x')\, g_i^1(x'^\star),$$

en indiquant par $x'^\star$ un point convenable de l'intervalle (x', x'_{n_α}). On tire de là

$$\frac{x'_{i+n_\alpha} - x'_i}{x'_{n_\alpha} - x'} = g_i^1(x'^\star).$$

En faisant la même chose pour le dénominateur du troisième membre de (8), on arrive à conclure que le rapport (8) est donné par

$$\frac{g_i^1(x'^\star)}{g_i^1(x^\star)},$$

$x^\star$ étant dans (x, x_{n_α}). Cela démontre que le rapport (8) reste toujours fini.

Nous voulons montrer maintenant que *le rapport*

$$(9) \qquad \frac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)} = \frac{x_{2n_\alpha} - x_{n_\alpha}}{x_{n_\alpha} - x}$$

entre les ampleurs de deux intervalles contigus de même module $|k_\alpha|$ *reste fini lorsque* α *croît.*

Soit $\bar{x}$ le point de maximum de la fonction $|\gamma_\alpha(x)|$; si l'on fait, dans (8), $i = n_\alpha$ et que l'on substitue $\bar{x}$ à x' et $\bar{x}'_{-n_\alpha}$ à x, on déduit que le produit

$$\frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{-n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})} \frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})}$$

(qui évidemment est plus petit que 1) ne peut pas devenir infiniment petit. En remarquant alors que ni l'un ni l'autre des deux facteurs

$$(10) \qquad \frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{-n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})}, \quad \frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})},$$

ne dépasse 1, on reconnaît qu'aucun de ces facteurs ne peut devenir infiniment petit; nous pouvons donc conclure qu'ils restent finis.

Considérons maintenant le réseau incomplet formé par les n_α points

$$y, \quad y_1, \quad \ldots, \quad y_{n_\alpha - 1};$$

nous avons vu (§ 9) que ce réseau divise Γ en n_α intervalles dont l'ampeur ne dépasse pas $|k_{\alpha-1}| + |k_\alpha|$. Si l'on considère donc un intervalle quelconque d'ampleur $|2k_{\alpha-1}|$,

$$(y^\star - k_{\alpha-1}, \; y^\star + k_{\alpha-1}),$$

il y aura certainement un point y_i parmi les n_α considérés, qui tombe dans cet intervalle. On voit alors qu'il y aura aussi un point $x_i (i < n_\alpha)$, qui tombe dans l'intervalle de module $|2k'_{\alpha-1}|$

$$(\bar{x}_{-n_{\alpha-1}}, \; \bar{x}_{n_{\alpha-1}});$$

en effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait déplacer x par continuité jusqu'à ce que l'un des extrêmes de l'intervalle $(\bar{x}_{-n_{\alpha-1}}, \bar{x}_{n_{\alpha-1}})$ vienne à coïncider avec l'un, x_j, parmi les points $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n_{\alpha-1}}$, tandis qu'aucun de ces points ne tomberait à l'intérieur de l'intervalle. A l'intervalle de C obtenu de la sorte correspond l'intervalle $(y_j, \; y_j + |2k_{\alpha-1}|)$ ou l'intervalle $(y_j, \; y_j - |2k_{\alpha-1}|)$ du cercle Γ; alors à l'intérieur de cet intervalle d'ampleur $|2k_{\alpha-1}|$ il ne tomberait aucun des points $y, y_1, \ldots, y_{n_{\alpha-1}}$, ce que nous avons exclu.

Substituons maintenant x_{n_α} à x' dans le premier membre de (8) et indiquons par i la même valeur de l'indice que dans les lignes précédentes; nous trouvons

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{g_i^1(x^\star_{n_\alpha})}{g_i^1(x^\star)},$$

$x^\star$ étant un point convenable de (x, x_{n_α}) et $x^\star_{n_\alpha}$ étant un point convenable de $(x_{n_\alpha}, x_{2n_\alpha})$; nous en déduisons que le premier membre de l'équation reste fini. De même, si dans le second membre de l'équation (8) on fait $i = n_\alpha$ et l'on substitue x_i à x et $\overline{x}$ à x', on déduit que le rapport

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(\overline{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\overline{x})}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}}$$

reste fini. De la comparaison de ce dernier rapport avec le premier membre de l'équation précédente, et en rappelant que le second des rapports (10) reste fini, on déduit finalement que le rapport (9) reste fini.

Plus en général, *en indiquant* maintenant *par x' un point dans* (x, x_{n_α}), on reconnaît que *le rapport*

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)} = \frac{x'_{n_\alpha} - x'}{x_{n_\alpha} - x}$$

reste fini. On le voit facilement en remarquant que les points

$$x, \quad x', \quad x_{n_\alpha}, \quad x'_{n_\alpha}, \quad x_{2n_\alpha}, \quad x'_{2n_\alpha}$$

sont ordonnés et que les deux rapports

$$\frac{x_{2n_\alpha} - x_{n_\alpha}}{x_{n_\alpha} - x}, \quad \frac{x'_{2n_\alpha} - x'_{n_\alpha}}{x'_{n_\alpha} - x'}$$

restent finis.

12. Nous avons vu que, lorsqu'on passe du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha + 1^{\text{ième}}$ réseau de Γ, on obtient, de l'intervalle $(y, y_{n_{\alpha-1}})$ d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, un intervalle d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$,

$$(y, y_{n_{\alpha+1}}),$$

et $a_{\alpha+1} \geqq 1$ intervalles d'ampleur $|k_\alpha|$,

$$(y_{n_{\alpha-1}}, y_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}), \quad (y_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}, y_{n_{\alpha-1}+2n_\alpha}), \quad \ldots, \quad (y_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, y_{n_{\alpha+1}}).$$

De même, lorsqu'on passe du $\alpha + 1^{\text{ième}}$ au $\alpha + 2^{\text{ième}}$ réseau, on obtient, de

$$(y_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, y_{n_{\alpha+1}}),$$

un intervalle d'ampleur $|k_{\alpha+2}|$ et $a_{\alpha+1} \geqq 1$ intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$, dont l'un est

$$(y_{n_{\alpha+1}}, y_{2n_{\alpha+1}}).$$

On voit donc que, en passant du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha + 2^{\text{ième}}$ réseau, on obtient, de l'intervalle

$$(y, y_{n_{\alpha-1}}),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, au moins deux intervalles contigus d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$,

$$(y, y_{n_{\alpha+1}}), \quad (y_{n_{\alpha+1}}, y_{2n_{\alpha+1}}).$$

En passant ensuite du $\alpha+2^{\text{ième}}$ au $\alpha+4^{\text{ième}}$ réseau nous obtiendrons, de chacun de ces deux intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$, deux intervalles au moins d'ampleur $|k_{\alpha+3}|$. Il y aura donc dans $(y, y_{n_{\alpha-1}})$ au moins quatre intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+3}|$ appartenant au $\alpha+4^{\text{ième}}$ réseau.

On aura de même au moins quatre intervalles de module $|k_{\alpha+3}|$ du $\alpha+4^{\text{ième}}$ réseau de C, qui sont contenus dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$. Si alors

$$(x', x'_{n_{\alpha+3}})$$

est un intervalle quelconque de module $|k_{\alpha+3}|$ contenu dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, il y aura au moins un intervalle de module $|k_{\alpha+3}|$, contigu à $(x', x'_{n_{\alpha+3}})$, qui est également contenu dans $|(x, x_{n_{\alpha-1}})|$.

Si l'on remarque que le rapport entre l'ampleur des deux intervalles contigus doit rester fini et que la somme des ampleurs est certainement plus petite que l'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$ de $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, on voit que le rapport

$$\frac{\gamma_{\alpha+3}(x')}{\gamma_{\alpha-1}(x)}$$

reste toujours inférieur à un nombre positif convenable plus petit que 1, qu'on peut choisir indépendamment de x, de x' et de α, et que nous voulons considérer comme la quatrième puissance p^4 d'un nombre positif p.

Considérons maintenant plus en général un entier $\alpha' < \alpha$ et supposons que l'intervalle (x', x'_{n_α}) soit contenu dans $(x, x_{n_{\alpha'}})$. En indiquant par $E\left(\frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)$ le plus grand entier contenu dans $\frac{\alpha-\alpha'}{4}$, on pourra construire une chaîne de $E\left(\frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)$ intervalles, dont le premier est l'intervalle (x', x'_{n_α}), de modules respectivement égaux à $|k_\alpha|$, $|k_{\alpha-4}|$, $|k_{\alpha-8}|$, ..., chacun de ces intervalles étant contenu dans le suivant et le dernier étant contenu dans $(x, x_{n_{\alpha'}})$ [où, éventuellement, coïncidant avec $(x, x_{n_{\alpha'}})$]. On déduit ainsi que le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$$

est plus petit que $p^{4E\left(\frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)} \geqq p^{\alpha-\alpha'-3}$.

L'ampleur de l'intervalle (x, x_{n_α}) ne peut pas, en particulier, dépasser $p^{\alpha-3}$. Le maximum de l'ampleur des intervalles des réseaux successifs constitués par un point x et par ses conséquents tend donc à zéro. *L'ensemble dérivé de l'ensemble constitué par x et par ses infinis conséquents recouvre donc la courbe* C *tout entière* (1). C'est ce dernier résultat, qui est dû à M. Denjoy.

(1) Il n'en est pas nécessairement de même si l'on ne suppose pas que $g^1(x)$ soit à variation bornée. Dans ce cas, comme l'ont montré Poincaré et Denjoy, l'ensemble dérivé peut se réduire à un sous-ensemble parfait et discontinu de C, qui ne dépend pas du point x considéré.

13. Nous indiquons par

$$c_\alpha$$

le maximum absolu de $\gamma_\alpha(x)$. D'après ce que nous venons de voir c_α tend vers zéro pour $\alpha \to \infty$, et, plus en général, $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$ tend vers zéro pour $\alpha - \alpha' \to \infty$. c_α est inférieur à $p^{\alpha-3}$.

Nous allons évaluer le maximum absolu du rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)} \qquad (\alpha' < \alpha),$$

en indiquant toujours par x' un point tel que (x', x'_{n_α}) soit contenu dans $(x, x_{n_{\alpha'}})$.

Convenons d'indiquer en particulier par x et x' deux points de C, en correspondance desquels le rapport $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ atteint son maximum absolu et par $\bar{x}$ le point dans lequel $\gamma_{\alpha'}(x)$ atteint le maximum $c_{\alpha'}$. Faisons la remarque que les $2n_{\alpha'+1}$ intervalles transformés de $(x, x_{n_{\alpha'}})$ par $T^0, T^1, T^2, \ldots, T^{2n_{\alpha'+1}-1}$ recouvrent une fois au moins tout point de C; $\bar{x}$ appartiendra donc à un au moins de ces intervalles, soit $(x_j, x_{j+n_{\alpha'}})$. Par une déduction analogue à celle du paragraphe 11 on trouve

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_{\alpha'}(x_j)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}} = \frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_\alpha(x')}}{\dfrac{\gamma_{\alpha'}(x_j)}{\gamma_{\alpha'}(x)}} = \frac{g_j^1(x^\star)}{g_j^1(x^{\star\star})},$$

$x^\star$ et $x^{\star\star}$ étant deux points convenables de $(x, x_{n_{\alpha'}})$. Le dernier rapport reste fini; le rapport entre $\frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_{\alpha'}(x_j)}$ et $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ reste donc fini. Nous pouvons affirmer d'autre part, d'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe 11, que le rapport entre $\gamma_{\alpha'}(x_j)$ et $\gamma_{\alpha'}(\bar{x})$ reste fini, nous voyons donc que le rapport entre $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ et $\frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_{\alpha'}(\bar{x})}$ reste fini.

Mais

$$\frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_\alpha(\bar{x})} = \frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{c_{\alpha'}} \leq \frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}};$$

nous pouvons enfin affirmer que le rapport entre $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ et $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$ reste borné; nous dirons que $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ *est au plus de l'ordre de* $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$.

CHAPITRE III.

14. Nous allons donner, dans ce Chapitre, la démonstration du théorème A:

Il y a toujours une transformation infinitésimale qui engendre une transformation T *du type* 3 *si* $g(x)$ *possède une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz, et si l'on peut donner un exposant* $\lambda < 1$ *de façon que*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0. \tag{3}$$

La démonstration du théorème étant assez longue, il n'est pas mal d'en donner, dès maintenant, une idée générale.

Nous avons déjà vu que les transformations $T^{n_\alpha}(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ correspondent à des transformations géométriques déplaçant tout point de C aussi peu qu'on veut, alternativement à droite et à gauche; on peut représenter ces transformations géométriques par

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les modules k_α de ces transformations sont alternativement positifs et négatifs et tendent vers zéro. Supposons maintenant que la suite des fonctions

$$\frac{\gamma_1(x)}{k_1}, \quad \frac{\gamma_2(x)}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}, \quad \ldots \tag{11}$$

converge d'une façon uniforme vers une fonction positive $\xi(x)$, on démontre qu'on obtient alors nécessairement la transformation donnée T lorsque, dans l'équation du groupe g_1 engendré par

$$\xi(x)\frac{df}{dx},$$

on donne la valeur particulière k au paramètre t. Tout revient donc à démontrer la convergence uniforme de la suite (11).

Lorsque l'on passe du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha + 1^{\text{ième}}$ réseau sur C, l'intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha-1}}),$$

d'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$, est divisé (§ 12) en un intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha+1}})$$

d'ampleur $|\gamma_{\alpha+1}(x)|$, et a_α intervalles

$$(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}), \quad (x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+2n_\alpha}), \quad \ldots, \quad (x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, x_{n_{\alpha+1}}),$$

d'ampleurs respectives

$$|\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}})|, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha})|, \quad \ldots, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha})|. \tag{12}$$

Si ces a_α dernières quantités étaient égales entre elles et égales à $|\gamma_\alpha(x)|$, on pourrait donc poser

$$\gamma_{\alpha-1}(x) = \gamma_{\alpha+1}(x) - \alpha_\alpha \gamma_\alpha(x),$$

d'où

$$\gamma_{\alpha+1}(x) = a_\alpha \gamma_\alpha(x) + \gamma_{\alpha-1}(x).$$

C'est le même système d'équations auquel satisfont les quantités k_α (§ 6) et nous avons remarqué que ces quantités constituent, à une constante multiplicative près, la seule solution du système qui tend vers zéro lorsque $\alpha \to \infty$.

En réalité, les quantités (12) ne sont pas rigoureusement égales entre elles; on démontrera toutefois que, pour $\alpha \to \infty$, le rapport entre l'ampleur de deux intervalles contigus de module $|k_\alpha|$ tend vers l'unité. On conçoit qu'il puisse en découler que les rapports

$$(11) \qquad \frac{\gamma_1(x)}{k_1}, \quad \frac{\gamma_2(x)}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha} \ldots,$$

sans être rigoureusement égaux entre eux, puissent du moins être convergents pour $\alpha \to \infty$.

Au paragraphe 11 nous avons déduit que le rapport entre deux intervalles consécutifs de module $|k_\alpha|$ reste fini du fait que le rapport

$$(7) \qquad \frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)} \qquad (i \leq n_\alpha)$$

reste fini. Par un raisonnement tout à fait analogue on déduira que le rapport entre deux intervalles contigus de module $|k_\alpha|$ tend vers 1 pour $\alpha \to \infty$, du fait que, en réalité, le rapport (7) tend aussi vers 1 pour $\alpha \to \infty$.

La démonstration du théorème A reviendra donc au fond à démontrer que *le rapport* (7) *tend vers* 1 *avec une rapidité suffisante*. On démontrera d'abord que le rapport (7) tend vers 1; une démonstration successive qui utilise l'hypothèse (3) nous permettra ensuite de démontrer que le rapport (7) tend vers 1 avec une rapidité suffisante. La première démonstration occupera la première partie du Chapitre jusqu'au paragraphe 20.

15. Nous allons introduire des locutions, dont nous ferons un usage très fréquent dans la suite de ce Mémoire.

P′ et P″ étant deux quantités dépendant d'un ou de plusieurs indices (et, éventuellement, du choix d'un ou de plusieurs points de C) l'affirmation « P″ *est de l'ordre de* P′ » indiquera qu'on peut donner deux inégalités

$$p\mathrm{P}' < \mathrm{P}'' < q\mathrm{P}',$$

les nombres p et q dépendant seulement de $g(x)$ [plus précisément du maximum et du minimum de $g^1(x)$, du maximum et de la constante de Lipschitz de $g^2(x)$] et non pas des autres arguments, dont dépendent P′ et P″. L'affirmation « P″ *est* *de l'ordre de* P′ *au plus* » indiquera qu'on peut donner la deuxième des deux inégalités; l'affirmation « P″ *est de l'ordre de* P′ *au moins* » indiquera qu'on peut donner la première des deux inégalités.

Indiquons par x' et x'' deux points de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$. *Nous devons étudier le rapport*

$$\frac{g^1_{n_\alpha}(x')}{g^1_{n_\alpha}(x'')}; \tag{13}$$

à part une différence non essentielle dans la forme on peut obtenir (13) en posant, dans le rapport (7), $i = n_\alpha$. Faisons d'abord la remarque que *si x' est très voisin de x'', de façon que le rapport*

$$\left|\frac{x'-x''}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| = \left|\frac{x'-x''}{x_{n_{\alpha-1}}-x}\right| = \rho'$$

soit très petit, la différence de (13) *à l'unité est à son tour très petite, de l'ordre de ρ' au plus.*

Pour établir cela, il suffit (*voir* le paragraphe 10) de démontrer que la sommation

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \,|\, g^1(x'_j) - g^1(x''_j)\,| \tag{14}$$

est au plus de l'ordre de ρ'. On a, en vertu du théorème de la moyenne,

$$\frac{\left|\dfrac{x'_j-x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j}-x_j}\right|}{\rho'} = \frac{\dfrac{x'_j-x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j}-x_j}}{\dfrac{x'-x''}{x_{n_{\alpha-1}}-x}} = \frac{\dfrac{x'_j-x''_j}{x'-x''}}{\dfrac{x_{n_{\alpha-1}+j}-x_j}{x_{n_{\alpha-1}}-x}} = \frac{g^1_j(x^\star)}{g^1_j(x^{\star\star})},$$

$x^\star$ étant dans (x'', x') et $x^{\star\star}$ dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$. Le dernier rapport reste fini, ce qui montre que les rapports

$$\frac{x'_j-x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j}-x_j}$$

sont tous de l'ordre de ρ'. Alors la mesure de la somme des intervalles (x''_j, x'_j) est aussi de l'ordre de ρ'. Enfin la sommation (14) ne dépasse pas la variation de $g^1(x)$ dans la somme des intervalles (x''_j, x'_j). La fonction $g^1(x)$ satisfaisant à la condition de Lispchitz, cette variation est au plus de l'ordre de la mesure de la somme des intervalles.

16. Nous savons déjà que le rapport (13) reste fini. Dans les prochains paragraphes (jusqu'au paragraphe 19) nous allons démontrer que, plus précisément, *ce rapport tend vers* 1 *lorsque* $\alpha \to \infty$. Soit α' une valeur de l'index, fonction de α, telle que α' et $\alpha - \alpha'$ soient infiniment grands pour $\alpha \to \infty$: nous allons choisir, par exemple, α' égal au plus grand entier contenu dans $\frac{\alpha}{2}$.

Le $\alpha'^{\text{ième}}$ réseau de C est formé par les $n_{\alpha'}+n_{\alpha'-1}$ intervalles

$$\begin{aligned}&(x_i,\, x_{i+n_{\alpha'-1}}) \qquad (i<n_{\alpha'}),\\ &(x_l,\, x_{l+n_{\alpha'}}) \qquad (l<n_{\alpha'-1}).\end{aligned}$$

Considérons l'expression

$$(15) \qquad \sum_0^{n_{\alpha'}-1}{}_i \frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)}\left|x_{i+n_{\alpha'-1}}-x_i\right| + \sum_0^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l \frac{g^2(x_l)}{g^1(x_l)}\left|x_{l+n_{\alpha'}}-x_l\right|,$$

(15) représente une somme de Riemann de l'intégrale définie

$$\int_x^{x+1}\frac{g^2(x)}{g^1(x)}\,dx=\int_x^{x+1} d\log g^1(x)=0;$$

sa valeur est donc donnée par l'erreur qu'on commet en la substituant à l'intégrale. La fonction sous le signe d'intégration étant une fonction de Lipschitz, sa variation dans chaque intervalle est au plus de l'ordre de l'ampleur de l'intervalle; l'erreur considérée est donc au plus de l'ordre de

$$\sum_0^{n_{\alpha'}-1}{}_i (x_{i+n_{\alpha'-1}}-x_i)^2+\sum_0^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l (x_{l+n_{\alpha'}}-x_l)^2.$$

L'ampleur de chaque intervalle est (§ 13) inférieure à $c_{\alpha'-1}$; on voit enfin que l'erreur considérée est au plus de l'ordre de

$$c_{\alpha'-1}\left\{\sum_0^{n_{\alpha'}-1}{}_i \left|x_{i+n_{\alpha'-1}}-x_i\right| + \sum_0^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l \left|x_{l+n_{\alpha'}}-x_l\right|\right\}=c_{\alpha'-1}.$$

La valeur de l'expression (15) *est donc de l'ordre de* $c_{\alpha'-1}$ *au plus*. Après ces remarques, nous allons étudier le rapport

$$(13) \qquad \frac{g^1_{n_\alpha}(x')}{g^1_{n_\alpha}(x'')}=\prod_0^{n_\alpha-1}{}_j\left(1+\frac{g^1(x'_j)-g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}\right);$$

ce rapport reste fini (§ 10) puisque la sommation $\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{|g^1(x'_j)-g^1(x''_j)|}{g^1(x''_j)}$ reste bornée; considérons maintenant la sommation

$$(16) \qquad \sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j)-g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)};$$

cette sommation devient infiniment petite lorsque α croît, comme nous allons le démontrer; il en résulte que la différence entre le produit (13) et l'unité devient infiniment petite, et qu'elle est donnée par la sommation (16) lorsqu'on néglige des quantités, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur ou qui sont de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$ au plus ([1]).

Nous devons donc évaluer l'ordre de grandeur de la sommation (16). Étant donné que nous nous intéressons à l'ordre de grandeur, mais non pas au signe de (16), et du fait que les quantités $(x_j - x''_j)$ sont toutes du même signe, nous pouvons multiplier le terme d'index j par $|x'_j - x''_j|$ et le diviser par $(x'_j - x''_j)$; en appliquant le théorème de la moyenne on obtient la sommation

$$(16^\star) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_j \frac{g^2(x^\star_j)}{g^1(x''_j)} |x'_j - x''_j|,$$

les $x^\star_j$ étant des points convenablement choisis dans les intervalles (x''_j, x'_j).

Soit $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ $[$ou $(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})]$ l'intervalle du $\alpha'^{\text{ième}}$ réseau auquel appartient (x''_j, x_j), son ampleur est plus petite que $c_{\alpha'-1}$; $g^1(x)$ et $g^2(x)$ sont des fonctions de Lipschitz, la différence entre $\frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)}$ et $\frac{g^2(x^\star_j)}{g^1(x''_j)}$ est donc de l'ordre de $c_{\alpha'-1}$ au plus. En rappelant (§ 15) que les rapports $\frac{x'_j - x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j} - x_j}$ sont tous de l'ordre de ρ', on trouve facilement que l'erreur totale, qu'on commet en substituant dans la sommation $(16^\star)$ $\frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)}$ ou $\frac{g^2(x_l)}{g^1(x_l)}$ à $\frac{g^2(x^\star_j)}{g^1(x''_j)}$, est de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1}$ au plus.

Si alors nous désignons par $f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ et par $f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$ la somme des ampleurs des intervalles (x''_j, x'_j) contenus dans $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ et, respectivement,

---

([1]) On a en effet

$$\begin{aligned}\frac{g^1_{n_\alpha}(x')}{g^1_{n_\alpha}(x'')} &= 1 + \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)} \\ &\quad \times \left[\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_l \frac{g^1(x'_l) - g^1(x''_l)}{g^1(x''_l)} - \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}\right] + \ldots \\ &= 1 + \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)} + \frac{1}{2}\left[\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \left[\frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}\right]^2 + \ldots;\end{aligned}$$

pour $\alpha \to \infty$ le troisième terme du dernier membre est infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au second si celui-ci est infiniment petit; en ce qui concerne le quatrième terme, remarquons que

$$\frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}$$

est au plus de l'ordre de $|x'_j - x''_j|$, donc, à plus forte raison, au plus de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$; par conséquent le quatrième terme est au plus de l'ordre de

$$\rho' c_{\alpha-1} \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j |x'_j - x''_j| < \rho' c_{\alpha-1}.$$

dans $(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$, on obtient ainsi l'expression

$$(17)\qquad \sum_0^{n_{\alpha'}-1}{}_i \frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)} f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}}) + \sum_0^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l \frac{g^2(x_l)}{g^1(x_l)} f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}),$$

qui donc diffère de (16) d'une quantité de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1}$ au plus.

Si les $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ rapports

$$\frac{f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})}{|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}|}, \qquad \frac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}|},$$

qui sont de l'ordre de ρ', étaient exactement égaux entre eux, (17) serait la somme de $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ termes proportionnels à ceux de (15); sa valeur serait alors de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1}$ au plus; $c_{\alpha'-1}$ est d'autre part (§ 12) plus petit que $p^{\alpha'-1}$, p étant un nombre positif convenable plus petit que 1; la valeur de l'expression (17) serait donc de l'ordre de $\rho' p^{\alpha'}$ au plus.

En réalité les $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ rapports en question ne sont pas exactement égaux; il faudra en tenir compte.

17. Comparons d'abord entre eux les rapports

$$\frac{f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})}{|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}|} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'} - 1).$$

Considérons un intervalle (x''_j, x'_j) appartenant à l'intervalle $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau *incomplet* et à l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$ du $\alpha'^{\text{ième}}$ réseau *complet*. La transformation $T^i (i < n_{\alpha'})$ amène (x''_j, x'_j), $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ et $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$ dans (x''_{i+j}, x'_{i+j}), $(x_{i+j}, x_{i+j+n_{\alpha-1}})$ et $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ respectivement.

On a

$$(18')\qquad \frac{\dfrac{x'_{i+j} - x''_{i+j}}{x_{i+j+n_{\alpha-1}} - x_{i+j}}}{\dfrac{x'_j - x''_j}{x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j}} = \frac{\dfrac{x'_{i+j} - x''_{i+j}}{x'_j - x''_j}}{\dfrac{x_{i+j+n_{\alpha-1}} - x_{i+j}}{x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j}} = \frac{g_i^1(x_j^*)}{g_i^1(x_j^{**})} \qquad (i < n_{\alpha'}),$$

x_j^* et x_j^{**} étant deux points convenables de $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$. Le rapport

$$\left|\frac{x_j^{**} - x_j^*}{x_{n_{\alpha'-1}} - x}\right| \leqq \left|\frac{x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j}{x_{n_{\alpha'-1}} - x}\right|$$

est (§ 13) au plus de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$, par conséquent le rapport (18′) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$ au plus (§ 15). Une conclusion tout à fait analogue est valable pour le rapport

$$(18'') \qquad \frac{\dfrac{x'_{i+j} - x''_{i+j}}{x_{i+j+n_{\alpha-1}-n_\alpha} - x_{i+j}}}{\dfrac{x'_j - x''_j}{x_{j+n_{\alpha-1}-n_\alpha} - x_j}},$$

dans le cas où (x''_j, x'_j) appartient à un intervalle $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}-n_\alpha})$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau incomplet.

Si alors on considère tous les intervalles $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ et $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}-n_\alpha})$, qui recouvrent $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$, et si l'on additionne les numérateurs et les dénominateurs des rapports correspondants (18') et (18''), on parvient à conclure que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})}{|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}|}}{\dfrac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x - x_{n_{\alpha'-1}}|}}$$

est lui aussi égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$ au plus. $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$ est d'autre part (§ 13) de l'ordre de $p^{\alpha'}$ au plus.

18. Nous allons maintenant comparer chacun des rapports

$$\frac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}|} \qquad (l = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'-1} - 1)$$

à

$$\frac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x - x_{n_{\alpha'-1}}|}.$$

Lorsqu'on passe du $\alpha'^{\text{ième}}$ au $\alpha' + 1^{\text{ième}}$ réseau, l'intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha'-1}}),$$

de module $|k_{\alpha'-1}|$, que nous indiquons ici par A_0, est divisé (§ 12) en deux parties, la première, que nous indiquons par A_1, constituée par $a_{\alpha'}$ intervalles

$$(x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}, x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}}) \qquad (b_{\alpha'} = 0, 1, \ldots, a_{\alpha'} - 1),$$

de module $|k_{\alpha'}|$, la deuxième, A_2, constituée par un seul intervalle de module $|k_{\alpha'+1}|$,

$$(x, x_{n_{\alpha'+1}}).$$

Les transformations $T^{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}-l}$ portent l'intervalle

$$(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}),$$

que nous indiquerons par B_0, dans chacun des $a_{\alpha'}$ intervalles, qui constituent A_1. Faisons maintenant, pour l'intervalle $(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$ et pour chaque intervalle $(x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}, x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}})$, un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au paragraphe précédent pour $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$ et $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$, et remarquons que l'exposant $n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}-l$ est plus petit que $n_{\alpha'+1}$. Nous arrivons ainsi à conclure que les rapports

$$\frac{\dfrac{f(x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}, x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}})}{|x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}-x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}}|}}{\dfrac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l-x_{l+n_{\alpha'}}|}} \qquad (b_{\alpha'}=0, 1, \ldots, a_{\alpha'}-1)$$

sont tous égaux à l'unité, à des quantités près, de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'}}$ au plus.

Additionnons les premières lignes, et, respectivement, les secondes lignes de ces $a_{\alpha'}$ rapports; indiquons par $m(A_1)$ et $m(B_0)$ la mesure de A_1 et de B_0, et par $f(A_1)$ et $f(B_0)$ la somme des ampleurs des intervalles (x_j'', x_j') contenus, respectivement, dans A_1 et dans B_0. On trouve ainsi que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_1)}{m(A_1)}}{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}}$$

est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'}}$ au plus.

Si l'on passe maintenant du $\alpha'+1^{\text{ième}}$ au $\alpha'+2^{\text{ième}}$ réseau, l'intervalle B_0 est à son tour divisé en une partie B_1, composée par $a_{\alpha'+1}$ intervalles de module $|k_{\alpha'+1}|$, et en une partie B_2, constituée par l'intervalle unique $(x_l, x_{l+n_{\alpha'+2}})$ de module $|k_{\alpha'+2}|$.

On peut amener l'intervalle A_2, $(x, x_{n_{\alpha'+1}})$, dans chacun des $a_{\alpha'+1}$ intervalles, qui composent B_1, par des puissances de T d'exposant inférieur à $n_{\alpha'+2}$. On en déduit, comme plus haut, que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_2)}{m(A_2)}}{\dfrac{f(B_1)}{m(B_1)}}$$

est égal à l'unité, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'+1}}$ au plus. On peut poursuivre.

Le processus se terminera de l'une des deux façons suivantes :

I. Si $\alpha-\alpha'-1$ est pair, on parviendra à un intervalle $A_{\alpha-\alpha'-1}$ de module $|k_{\alpha-2}|$ et à un intervalle $B_{\alpha-\alpha'-1}$ de module $|k_{\alpha-1}|$. L'intervalle $A_{\alpha-\alpha'-1}$ est divisé en deux parties, la première, $A_{\alpha-\alpha'}$, composée de $a_{\alpha-1}$ intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$, dans chacun desquels il y a un intervalle (x''_j, x'_j), la seconde, $A_{\alpha-\alpha'+1}$, constituée par un seul intervalle de module $|k_\alpha|$, dans lequel il n'y a pas d'intervalles (x''_j, x'_j). Dans l'intervalle $B_{\alpha-\alpha'-1}$ il y a un seul intervalle (x''_j, x'_j). La mesure de $A_{\alpha-\alpha'+1}$ est au plus de l'ordre de celle de $A_{\alpha-\alpha'}$, par conséquent le rapport

$$\frac{m(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}=\frac{m(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'})+m(A_{\alpha-\alpha'+1})}<1$$

reste certainement toujours supérieur à une quantité positive convenable donnée; d'autre part $f(A_{\alpha-\alpha'-1})$ est égale à $f(A_{\alpha-\alpha'})$; on déduit que le rapport

$$\frac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}=\frac{f(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'})}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}$$

est de l'ordre de ρ'.

D'autre part le rapport $\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}$ est aussi de l'ordre de ρ'. On reconnaît ainsi que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}}$$

reste fini.

II. Si $\alpha-\alpha'-1$ est impair on parviendra, d'une part, à un intervalle $A_{\alpha-\alpha'}$, de module $|k_{\alpha-1}|$, dans lequel il y a un intervalle (x''_j, x_j) et, d'autre part, à un intervalle $B_{\alpha-\alpha'-2}$ de module $|k_{\alpha-2}|$, qui est divisé en une partie $B_{\alpha-\alpha'-1}$ composée de $a_{\alpha-1}$ intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$ et en une partie $B_{\alpha-\alpha'}$ constituée par un intervalle de module $|k_\alpha|$, dans lequel il n'y a aucun intervalle (x''_j, x'_j).

On reconnaît que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2})}}$$

reste fini.

Dans une note placée à la fin de ce Mémoire, nous montrerons que, dans ces conditions, on peut affirmer que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l-x_{l+n_{\alpha'}}|}}{\dfrac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x-x_{n_{\alpha'-1}}|}}=\frac{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}}{\dfrac{f(A_0)}{m(A_0)}},$$

que nous devions étudier, est égal à l'unité, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\alpha' p^{\alpha'}$ au plus.

19. Nous poserons

$$\frac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x - x_{n_{\alpha'-1}}|} = \rho^\star;$$

$\rho^\star$ est de l'ordre de ρ'.

D'après ce que nous avons vu dans les deux derniers paragraphes, on pourra écrire

$$f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}}) = \rho^\star(1 + r_i \quad p^{\alpha'})\,|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}| \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'} - 1,)$$
$$f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}) = \rho^\star(1 + r_l\,\alpha' p^{\alpha'})\,|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}| \qquad (l = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'-1} - 1),$$

r_i et r_l étant des nombres pour la valeur absolue desquels on peut donner une borne indépendamment de α.

Si l'on porte ces expressions dans (17), on arrive à conclure que (17) elle-même est de l'ordre de $\rho'\alpha' p^{\alpha'}$ au plus.

Nous avons vu d'autre part, au paragraphe 16, que la différence entre (16) et (17) est au plus de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1} < \rho' p^{\alpha'-4}$; nous pouvons donc affirmer que (16) est de l'ordre de $\rho'\alpha' p^{\alpha'}$ au plus. Au paragraphe 16 on a également montré que la différence entre le rapport (13) et l'unité est donnée par la sommation (16), lorsqu'on néglige des quantités, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à (16) ou qui sont de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$ au plus; on en déduit que la différence en question est de l'ordre de $\rho'\alpha' p^{\alpha'}$ au plus. On peut affirmer, en conclusion, qu'*on peut donner une borne pour la valeur absolue de la différence entre le rapport* (13) *et l'unité*, *de la forme*

$$\rho' \varepsilon_\alpha,$$

ε_α *étant un nombre de l'ordre de* $\alpha' p^{\alpha'}$ $\left(\text{de l'ordre de } \frac{2}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{2}}\right)$, *qui tend donc vers zéro pour* $\alpha \to \infty$.

20. Nous devons considérer maintenant le rapport

$$(7') \qquad \frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x'')} \qquad (i < n_\alpha),$$

x' et x'' étant deux points de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$.

Soit $b_{\alpha-1} \leqq a_{\alpha-1}$ le quotient de la division de i par $n_{\alpha-1}$; divisons le reste par $n_{\alpha-2}$, on obtient un deuxième quotient $b_{\alpha-2} \leqq a_{\alpha-2}$ et un deuxième reste. En poursuivant, on arrive à mettre le nombre i sous la forme

$$(19) \qquad i = i_0 = \sum_{0}^{\alpha-1}{}_{\alpha'} b_{\alpha'} n_{\alpha'}.$$

Posons, plus en général,

$$i_{\overline{\alpha}} = \sum_{\overline{\alpha}}^{\alpha-1}{}_{\alpha'} b_{\alpha'} n_{\alpha'}, \qquad i_\alpha = 0;$$

on a alors

$$(20)\qquad \frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x'')} = \prod_{\bar\alpha=0}^{\alpha-1} \frac{g^1_{b_{\bar\alpha}n_{\bar\alpha}}\big(x'_{i_{\bar\alpha+1}}\big)}{g^1_{b_{\bar\alpha}n_{\bar\alpha}}\big(x''_{i_{\bar\alpha+1}}\big)},$$

et l'on est ramené à l'étude des rapports

$$(21)\qquad \frac{g^1_{b_{\bar\alpha}n_{\bar\alpha}}\big(x'_{i_{\bar\alpha+1}}\big)}{g^1_{b_{\bar\alpha}n_{\bar\alpha}}\big(x''_{i_{\bar\alpha+1}}\big)} \equiv \prod_{l=0}^{b_{\bar\alpha}-1} \frac{g^1_{n_{\bar\alpha}}\big(x'_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big)}{g^1_{n_{\bar\alpha}}\big(x''_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big)}.$$

$x'_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}$ et $x''_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}$ tombent tous les deux dans l'intervalle limité par les points $x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}}$ et $x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}} + \gamma_{\bar\alpha-1}\big(x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}}\big) \equiv x_{i_{\bar\alpha+1}}$; la différence entre le facteur d'index l du deuxième membre de (21) et l'unité ne dépasse donc pas (§ 19) $\dfrac{\big|x'_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}} - x''_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}} - x_{i_{\bar\alpha+1}}\big|}\,\varepsilon_{\bar\alpha}$; on a d'autre part

$$(22)\qquad \frac{\big|x'_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}} - x''_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}} - x_{i_{\bar\alpha+1}}\big|} = \frac{\big|x'_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}} - x''_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}+n_{\alpha-1}} - x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}$$
$$\times \frac{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}+n_{\alpha-1}} - x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}+(l+1)n_{\bar\alpha}} - x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}\;\frac{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}+(l+1)n_{\bar\alpha}} - x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}} - x_{i_{\bar\alpha+1}}\big|}.$$

Le premier facteur du second membre est de l'ordre de ρ' au plus, le deuxième est de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\bar\alpha}}$ au plus. Le facteur d'index l du deuxième nombre de (21) est donc égal à l'unité, à une quantité près qui est au plus de l'ordre de

$$(23)\qquad \rho'\,\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\bar\alpha}}\,\frac{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}+(l+1)n_{\bar\alpha}} - x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}}\big|}{\big|x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}} - x_{i_{\bar\alpha+1}}\big|}\,\varepsilon_{\bar\alpha}.$$

La différence entre le produit (21) et l'unité est alors de l'ordre de la somme des quantités (23) au plus; en remarquant que les $b_{\bar\alpha}$ intervalles

$$\big(x_{i_{\bar\alpha+1}+ln_{\bar\alpha}},\ x_{i_{\bar\alpha+1}+(l+1)n_{\bar\alpha}}\big)$$

sont contenus dans

$$\big(x_{i_{\bar\alpha+1}},\ x_{i_{\bar\alpha+1}-n_{\bar\alpha-1}}\big),$$

on reconnaît que cette différence est au plus de l'ordre de

$$\rho'\,\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\bar\alpha}}\,\varepsilon_{\bar\alpha}.$$

On aura donc enfin une borne $\rho'\varepsilon^{\star}_{\alpha}$ pour la valeur absolue de la différence entre le rapport (7′) et l'unité, de l'ordre de

$$(24)\qquad \rho'\sum_{\bar\alpha=0}^{\alpha-1} \frac{c_{\alpha-1}}{c_{\bar\alpha}}\,\varepsilon_{\bar\alpha};$$

en considérant l'ordre de grandeur des nombres c_α et ε_α, tel qu'il est donné par les résultats des paragraphes 13 et 19, on reconnaît facilement que (24) tend vers zéro pour $\alpha \to \infty$.

21. Au paragraphe 11, nous avons démontré que le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)} \tag{9}$$

entre deux intervalles contigus de même module $|k_\alpha|$ reste fini lorsque α croît; nous avons déduit cela du fait que le rapport (7) reste fini. Nous allons reprendre le raisonnement développé alors, en tenant compte du fait que les rapports (7′) et (13) tendent vers l'unité, lorsque $\alpha \to \infty$.

On reconnaît donc, par les mêmes considérations utilisées au paragraphe 11, que les rapports

$$\frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})}, \quad \frac{\dfrac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}},$$

considérés alors, sont égaux à l'unité, à des quantités près, de l'ordre de ε_α au plus. D'autre part, en rappelant que, dans l'équation

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{g_i^1(x^\star_{n_\alpha})}{g_i^1(x^\star)},$$

considérée au même paragraphe 11, on a $i < n_\alpha$ et que $x^\star$ représente un point de (x, x_{n_α}) et $x^\star_{n_\alpha}$ représente un point de $(x_{n_\alpha}, x_{2n_\alpha})$, on trouve que le premier membre de la même équation est égal à 1, à une quantité près de l'ordre de $\left|\dfrac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| \varepsilon^\star_\alpha$ au plus. On arrive de la sorte à démontrer que *le rapport* (9) *est égal à l'unité, à une quantité près de l'ordre de* $\varepsilon_\alpha + \left|\dfrac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| \varepsilon^\star_\alpha$ *au plus, donc,* à fortiori, *de l'ordre de* $\varepsilon_\alpha + \dfrac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}} \varepsilon^\star_\alpha$ *au plus.*

On a démontré, à la fin du paragraphe 11, que, plus en général, si x' est dans (x, x_{n_α}), le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}$$

reste fini. On peut préciser maintenant cette affirmation par un raisonnement analogue à celui qu'on a employé alors et démontrer que *le rapport* $\dfrac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}$ *est infiniment peu différent de* 1 *lorsque* $\alpha \to \infty$. Choisissons pour cela un entier l de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^\star \dfrac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}}}$; les l quantités

$$|x_{n_\alpha} - x|, \quad |x_{2n_\alpha} - x_{n_\alpha}|, \quad \ldots, \quad |x_{ln_\alpha} - x_{(l-1)n_\alpha}|$$

sont toutes du même ordre et le rapport entre deux consécutives entre elles est infiniment proche de 1. Il en est de même des quantités

$$|x'_{n_\alpha} - x'|, \quad |x'_{2n_\alpha} - x'_{n_\alpha}|, \quad \ldots, \quad |x'_{ln_\alpha} - x'_{(l-1)n_\alpha}|.$$

En remarquant, en outre, que les points

$$x, \quad x', \quad x_{n_\alpha}, \quad x'_{n_\alpha}, \quad x_{2n_\alpha}, \quad x'_{2n_\alpha}, \quad \ldots, \quad x_{(l-1)n_\alpha}, \quad x'_{(l-1)n_\alpha}$$

sont ordonnés, on déduit facilement la propriété énoncée.

Considérons enfin le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}})}{\gamma_\alpha(x)},$$

entre l'ampleur des deux intervalles (x, x_{n_α}) et $(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha})$ de module $|k_\alpha|$, homologues par rapport à $T^{n_{\alpha-1}}$. Par des considérations analogues à celles que nous venons d'employer dans l'étude du rapport (9), on démontre que ce rapport est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\varepsilon_{\alpha-1} + \left|\dfrac{\gamma_{\alpha-1}(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right| \varepsilon_{\alpha-1}^\star$ au plus, donc, *a fortiori*, de l'ordre de $\varepsilon_{\alpha-1}^\star$ au plus.

22. En utilisant les résultats de ces derniers paragraphes nous pouvons substituer l'affirmation faite au paragraphe 13 par une autre plus précise. Nous savons maintenant, en effet, que les rapports $\dfrac{g_j^1(x^\star)}{g_j^1(x^{\star\star})}$ et $\dfrac{\gamma_{\alpha'}(x_j)}{\gamma_{\alpha'}(\bar{x})}$, considérés alors, tendent vers l'unité pour $\alpha' \to \infty$; en reprenant le raisonnement du paragraphe 13 nous pouvons donc affirmer que le rapport

$$\left|\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}\right|$$

ne peut dépasser $\dfrac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$, sinon d'une quantité, qui est infiniment petite d'ordre supérieur pour $\alpha' \to \infty$.

Soit, d'autre part, $\bar{\bar{x}}$ le point de C où $\gamma_\alpha(x)$ atteint son maximum c_α; indiquons par $\bar{\bar{x}}^\star$ un point de C tel que l'intervalle $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{x}}_{n_\alpha})$ soit contenu dans $(\bar{\bar{x}}^\star, \bar{\bar{x}}^\star_{n_{\alpha'}})$. En convenant maintenant, comme au paragraphe 13, d'indiquer par x et x' deux points de C, en correspondance desquels le rapport $\dfrac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ atteint son maximum, on a

$$\left|\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}\right| \geqq \left|\frac{\gamma_\alpha(\bar{\bar{x}})}{\gamma_{\alpha'}(\bar{\bar{x}}^\star)}\right| = \left|\frac{c_\alpha}{\gamma_{\alpha'}(\bar{\bar{x}}^\star)}\right| \geqq \frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}.$$

En réunissant les deux résultats obtenus nous pouvons donc affirmer que *le maximum du rapport* $\left|\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}\right|$ *est égal à* $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$, *à une quantité infiniment petite d'ordre supérieur près.*

23. Considérons maintenant le rapport

$$(25) \qquad \left|\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|,$$

entre l'ampleur de deux intervalles contigus de module $|k_\alpha|$ et $|k_{\alpha-1}|$. Choisissons une suite monotone de nombres positifs M_α, qui tendent vers l'infini, moins rapidement que $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$. *Nous allons démontrer que, si* $a_\alpha < M_\alpha$, *le rapport* (25) *est égal à* $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$, *à une quantité près, qui est infiniment petite par rapport à* $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ *pour* $\alpha \to \infty$; *que ce même rapport est encore de l'ordre de* $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ *si* $a_\alpha < \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$; *et qu'il est enfin de l'ordre de* ε_α *au plus si* $a_\alpha > \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$.

Nous avons déjà vu (§ 12) que, lorsqu'on passe du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+1^{\text{ième}}$ réseau, l'intervalle de module $|k_{\alpha-1}|$,

$$(x, x_{n_{\alpha-1}}),$$

est divisé en un intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha+1}}),$$

de module $|k_{\alpha+1}|$ et d'ampleur $|\gamma_{\alpha+1}(x)|$, et en a_α intervalles

$$(26) \qquad (x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}), \quad (x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+2n_\alpha}), \quad \ldots, \quad (x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, x_{n_{\alpha+1}}),$$

de module $|k_\alpha|$ et d'ampleur respective

$$|\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}})|, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha})|, \quad \ldots, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha})|.$$

Considérons un entier $b_\alpha < a_\alpha$; le rapport $\frac{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+(b_\alpha-1)n_\alpha})}$ entre deux intervalles contigus $(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+(b_\alpha+1)n_\alpha})$ et $(x_{n_{\alpha-1}+(b_\alpha-1)n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})$ est égal à l'unité, à une quantité près, qui est de l'ordre de

$$\varepsilon_\alpha + \left|\frac{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| \varepsilon_\alpha^*$$

au plus.

Remarquons maintenant que les intervalles (26), d'ampleur $|\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})|$, sont contenus dans l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, d'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$. $l \leqq a_\alpha$ étant un entier de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$ au plus, nous voyons par là que le rapport entre les ampleurs de deux quelconques des l premiers intervalles (26) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de

$$l\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^*$$

au plus; c'est-à-dire que ces l intervalles sont tous du même ordre.

Supposons maintenant $a_\alpha > \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$ et choisissons l de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$: l'ampleur de chacun des l intervalles sera évidemment au plus de l'ordre de $\frac{|\gamma_{\alpha-1}(x)|}{l}$, c'est-à-dire de $\varepsilon_\alpha |\gamma_{\alpha-1}(x)|$. Le rapport entre le premier de ces l intervalles, $(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_\alpha+n_{\alpha-1}})$, et l'intervalle (x, x_{n_α}), d'ampleur $|\gamma_\alpha(x)|$, est d'autre part égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^\star_{\alpha-1}$ au plus (§ 21). On voit donc que $\left|\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|$ est de l'ordre de ε_α au plus; la dernière partie du lemme est démontrée.

Considérons ensuite le cas où $a_\alpha < \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$; en choisissant $l = a_\alpha$, on voit que les a_α intervalles (26) sont tous du même ordre de grandeur; ils sont alors de l'ordre de $\frac{|\gamma_{\alpha-1}(x)|}{a_\alpha}$ et il en est donc de même de l'intervalle (x, x_{n_α}). $\frac{|\gamma_\alpha(x)|}{|\gamma_{\alpha-1}(x)|}$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{a_\alpha}\left(\text{de } \left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|\right)$.

Supposons enfin $a_\alpha < M_\alpha$. Le rapport entre deux quelconques des intervalles (26) est alors égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de

$$a_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^\star_\alpha$$

au plus; le rapport entre l'un quelconque des intervalles (26) et l'intervalle (x, x_{n_α}) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de

$$a_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^\star_\alpha + \varepsilon^\star_{\alpha-1}$$

au plus. On voit alors qu'on peut donner, pour le rapport (25), l'expression approchée

$$\frac{1}{a_\alpha + \left|\frac{\gamma_{\alpha+1}(x)}{\gamma_\alpha(x)}\right|},$$

en négligeant des quantités qui représentent une fraction du rapport (25) de l'ordre de $a_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^\star_\alpha + \varepsilon^\star_{\alpha-1} < M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^\star_\alpha + \varepsilon^\star_{\alpha-1}$ au plus.

Nous avons ramené notre question à la question analogue relative à la valeur successive de l'index. Si l'on a aussi $a_{\alpha+1} < M_\alpha < M_{\alpha+1}$, en appliquant les mêmes considérations au rapport $\frac{|\gamma_{\alpha+1}(x)|}{|\gamma_\alpha(x)|}$ nous pouvons déduire pour (25) la nouvelle expression approchée

$$\frac{1}{a_\alpha + \cfrac{1}{a_{\alpha+1} + \cfrac{1}{\left|\frac{\gamma_{\alpha+2}(x)}{\gamma_{\alpha+1}(x)}\right|}}},$$

en négligeant des quantités qui ne représentent certainement pas une fraction de (25) d'ordre plus grand que $M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^\star_\alpha + \varepsilon^\star_{\alpha-1}$.

Supposons que, en poursuivant de la sorte, on trouve un premier quotient incomplet $a_{\alpha^*} > M_\alpha$, nous avons, toujours avec la même approximation, l'expression

$$\cfrac{1}{a_\alpha + \cfrac{1}{a_{\alpha+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_{\alpha^*-1} + \left|\cfrac{\gamma_{\alpha^*}(x)}{\gamma_{\alpha^*-1}(x)}\right|}}}$$

En remarquant d'autre part que, en vertu des considérations déjà développées dans ce paragraphe, le rapport $\left|\frac{\gamma_{\alpha^*}(x)}{\gamma_{\alpha^*-1}(x)}\right|$ est certainement au plus de l'ordre de $\frac{1}{M_\alpha}$, on peut enfin affirmer que le rapport (25) est donné par la fraction continue limitée

$$\cfrac{1}{a_\alpha + \cfrac{1}{a_{\alpha+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_{\alpha^*-1}}}},$$

en négligeant une quantité qui ne représente certainement pas une fraction de (25) d'ordre plus grand que

$$M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha + \varepsilon^*_{\alpha-1} + \frac{1}{M_\alpha}.$$

On trouve d'autre part la même fraction continue lorsqu'on développe $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ et qu'on néglige le reste $\left|\frac{k_{\alpha^*}}{k_{\alpha^*-1}}\right|$, qui est au plus de l'ordre de $\frac{1}{M_\alpha}$. La première partie du lemme est donc démontrée dans ce cas. Dans l'autre cas, où les entiers $a_{\alpha+1}$, $a_{\alpha+2}$, $a_{\alpha+3}$, ... ne dépassent jamais M_α, on peut déduire, pour le rapport (25) et pour $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$, le même développement en fraction continue illimitée, en négligeant une fraction du rapport (25), de l'ordre de $M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha + \varepsilon^*_{\alpha-1}$ au plus. Le lemme est maintenant complètement démontré.

Il importe de remarquer que le résultat énoncé pour le rapport $\left|\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|$ *est valable aussi pour le rapport* $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}}$.

24. La borne

$$\rho' \varepsilon_\alpha$$

pour la valeur absolue de la différence entre le rapport (13′) et l'unité, telle qu'elle nous est donnée par la méthode déjà exposée, n'est pas suffisamment petite pour la démonstration du théorème A.

Nous allons supposer, par la suite, α assez grand pour que les nombres ε_α et ε^*_α soient déjà assez petits en vertu de la méthode précédente, et nous allons déduire, par une nouvelle méthode, les nombres ε_α et ε^*_α pour les valeurs supérieures de l'index.

Nous supposons, dans les déductions qui vont suivre, $c_{\alpha-1}$ *infiniment petit par rapport à* ε_α *pour* $\alpha \to \infty$; nous montrerons *a posteriori*, au paragraphe 30, qu'une telle hypothèse est permise.

De l'hypothèse, que nous venons de faire, et de ce qu'on a vu dans une Note en bas de page au paragraphe 16, on déduit que la différence entre le rapport (13) et l'unité est donnée, à des quantités près, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur, par la sommation

$$\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}; \tag{16}$$

en remarquant que l'ampleur des intervalles (x_j, x'_j) et (x_j, x''_j) est certainement inférieure à $c_{\alpha-1}$, on reconnaît, par un raisonnement déjà développé au paragraphe 16, qu'on peut substituer à la sommation (16) la suivante :

$$\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g^1(x_j)}(x'_j - x''_j); \tag{27}$$

l'erreur qu'on commet est de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$ au plus.

Les n_α intervalles (x''_j, x'_j) sont contenus dans les n_α intervalles $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ de module $|k_{\alpha-1}|$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau; cela nous suggère de considérer d'abord la sommation

$$\sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g^1(x_j)}(x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j) \equiv \sum_{0}^{n_\alpha - 1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g^1(x_j)} \gamma_{\alpha-1}(x_j). \tag{28}$$

On peut substituer à cette sommation l'intégrale

$$\int \frac{g^2(x)}{g^1(x)}\,dx,$$

étendue à l'ensemble des intervalles $(x_j, x_{n_{\alpha-1}+j})$; on voit, comme au paragraphe 16, que l'erreur que l'on commet de la sorte est de l'ordre de $c_{\alpha-1}$ au plus. Enfin, l'intégrale étendue à C tout entière étant nulle, l'intégrale définie considérée est égale, au signe près, à l'intégrale étendue à l'ensemble complémentaire constitué par les $n_{\alpha-1}$ intervalles (x_j, x_{j+n_α}) de module $|k_\alpha|$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau.

Pour évaluer cette dernière intégrale, remarquons d'abord que, lorsqu'on passe du $\alpha - 1^{\text{ième}}$ au $\alpha^{\text{ième}}$ réseau, les intervalles de module $|k_{\alpha-2}|$ sont divisés chacun en $a_{\alpha-1}$ intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$ et un de module $|k_\alpha|$; au contraire les intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$ ne sont pas divisés. On voit donc que chaque intervalle (x_j, x_{j+n_α}) du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau appartient à un intervalle $(x_j, x_{j+n_{\alpha-2}})$ du $\alpha - 1^{\text{ième}}$ réseau.

Cela posé, considérons la différence entre le rapport

$$\frac{g^1_{n_{\alpha-1}}(x_{n_\alpha})}{g^1_{n_{\alpha-1}}(x)}$$

et l'unité; cette différence ne dépasse pas $\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\varepsilon_{\alpha-1}$, d'autre part elle est donnée, à une quantité près, qui est infiniment petite d'ordre supérieur pour $\alpha\to\infty$, par la sommation

$$\sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_j \frac{g^1(x_{j+n_\alpha})-g^1(x_j)}{g^1(x_j)}.$$

La différence entre le terme d'index j de cette sommation et l'intégrale

$$\int_{x_j}^{x_{j+n_\alpha}}\frac{g^2(x)}{g^1(x)}dx$$

est de l'ordre de $(x_{j+n_\alpha}-x_j)^2$ au plus; la différence entre la sommation elle-même et l'intégrale étendue aux $n_{\alpha-1}$ intervalles (x_j, x_{j+n_α}), que nous devions évaluer, est au plus de l'ordre de

$$=\sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_j (x_{j+n_\alpha}-x_j)^2$$

$$=\sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_j\left[\frac{\gamma_\alpha(x_j)}{\gamma_{\alpha-2}(x_j)}(x_{n_{\alpha-2}+j}-x_j)\right]^2<\left(\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right)^2 c_{\alpha-2}\sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_j|x_{j+n_{\alpha-2}}-x_j|<\left(\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right)^2 c_{\alpha-2};$$

on voit enfin que la différence considérée est de l'ordre de c_α au plus. Il faut remarquer que, pour établir la première inégalité, nous avons supposé que tous les rapports $\frac{\gamma_\alpha(x_j)}{\gamma_{\alpha-2}(x_j)}$ étaient égaux à $\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}$; l'erreur totale commise de la sorte est toutefois infiniment petite d'ordre supérieur pour $\alpha\to\infty$ par rapport à $\left(\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right)^2 c_{\alpha-2}<c_\alpha$.

Il résulte donc que l'intégrale considérée ne dépasse pas $\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}$, en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur; enfin, en négligeant une quantité de l'ordre de $c_{\alpha-1}$ au plus, on déduit que la sommation (28) ne dépasse pas

$$\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}.$$

25. Reprenons l'étude de la sommation

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j\frac{g^2(x_j)}{g_1(x_j)}(x'_j-x''_j). \tag{27}$$

Si les rapports

$$\left|\frac{x'_j-x''_j}{\gamma_{\alpha-1}(x_j)}\right|$$

étaient tous égaux à $\left|\frac{x'-x''}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|=\rho'$, on aurait, pour la valeur absolue de la sommation (27), la borne

$$\rho'\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)},$$

en négligeant une quantité de l'ordre de $c_{\alpha-1}\rho'$ au plus. En réalité, les rapports en question ne sont pas exactement égaux et il est donc nécessaire de tenir compte du terme

$$(29) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g_1(x_j)}\{\rho' \,|\, \gamma_{\alpha-1}(x_j) \,|\, - |\, x'_j - x''_j \,|\};$$

nous devons déterminer une borne pour la valeur absolue de ce terme.

Choisissons, dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, un point $\bar{x}$ quelconque, et deux points x''' et x^{IV} de façon que l'intervalle (x', x'') soit compris dans (x''', x^{IV}); posons

$$\left|\frac{x''' - x^{\text{IV}}}{\gamma_{\alpha-1}(\bar{x})}\right| = \rho''' \qquad (\rho''' \geqq \rho').$$

Considérons la sommation

$$(30) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(\bar{x}_j)}{g^1(\bar{x}_j)}\left\{\frac{\rho'}{\rho'''}\,|\, x'''_j - x^{\text{IV}}_j \,|\, - |\, x'_j - x''_j \,|\right\},$$

qui se réduit à la sommation (29) pour $\bar{x} = x$, $x^{\text{IV}} = x$, $x''' = x_{n_{\alpha-1}}$; nous allons donner une borne pour la valeur absolue de cette expression plus générale. Nous avons

$$\frac{\left|\dfrac{x'_j - x''_j}{x'''_j - x^{\text{IV}}_j}\right|}{\dfrac{\rho'}{\rho'''}} = \frac{\dfrac{x'_j - x''_j}{x'''_j - x^{\text{IV}}_j}}{\dfrac{x' - x''}{x''' - x^{\text{IV}}}} = \frac{\dfrac{x'_j - x''_j}{x' - x''}}{\dfrac{x'''_j - x^{\text{IV}}_j}{x''' - x^{\text{IV}}}} = \frac{g^1_j(x^\star)}{g^2_j(x^{\star\star})},$$

$x^\star$ et $x^{\star\star}$ étant deux points convenablement choisis dans (x^{IV}, x'''); la valeur absolue de la différence entre $\dfrac{g^1_j(x^\star)}{g^1_j(x^{\star\star})}$ et l'unité ne dépasse pas $\rho'''\varepsilon^\star_\alpha$. On en déduit

$$\left|\frac{\rho'}{\rho'''}\,|\, x'''_j - x^{\text{IV}}_j \,|\, - |\, x'_j - x''_j \,|\right| < \rho' \,|\, x'''_j - x^{\text{IV}}_j \,|\, \varepsilon^\star_\alpha = \rho'\rho'''\varepsilon^\star_\alpha \,|\, \gamma_{\alpha-1}(x_j) \,|,$$

l'égalité entre le deuxième et le troisième membre n'ayant lieu qu'à des quantités près, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$.

On voit alors qu'on peut donner, pour la valeur absolue de la sommation (30), une borne de la forme $\rho'\rho'''\bar{\varepsilon}_\alpha$, $\bar{\varepsilon}_\alpha$ étant un nombre indépendant de x, de ρ' et de ρ''', qu'on peut supposer infiniment petit pour $\alpha \to \infty$.

Nous trouvons ainsi, pour la valeur absolue de la sommation (29), la borne

$$\rho'\bar{\varepsilon}_\alpha,$$

ce qui donne, pour la valeur abolue de (27), la borne

$$\rho'\varepsilon_\alpha = \rho'\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)} + \rho'\bar{\varepsilon}_\alpha.$$

Il nous reste à montrer de quelle façon on peut évaluer $\bar{\varepsilon}_\alpha$ en fonction des quantités analogues d'index inférieur.

26. Si l'on divise un nombre $j < n_\alpha$ par $n_{\alpha-1}$, et si l'on pose

$$j = b_{\alpha-1} n_{\alpha-1} + j',$$

on a, ou bien $b_{\alpha-1} < a_{\alpha-1}$, $j' < n_{\alpha-1}$, ou bien $b_{\alpha-1} = a_{\alpha-1}$, $j' < n_{\alpha-2}$.

Nous pouvons donc écrire (30) de la façon suivante :

$$(30') \quad \sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}} \sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_{j'} \frac{g^2(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} \left\{ \frac{\rho'}{\rho'''} | x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | - | x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | \right\}$$

$$+ \sum_{0}^{n_{\alpha-2}-1}{}_{j'} \frac{g^2(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} \left\{ \frac{\rho'}{\rho'''} | x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\text{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | - | x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | \right\}.$$

Nous devons transformer encore (30'). On a, pour $b_{\alpha-1} = 0, 1, \ldots, a_{\alpha-1}$,

$$\frac{\left| \dfrac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right|}{\dfrac{\rho'}{\rho'''}} = \frac{\dfrac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x' - x''}}{\dfrac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x''' - x^{\text{IV}}}} = \frac{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^\star_{(b_{\alpha-1})})}{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^{\star\star}_{(b_{\alpha-1})})},$$

$x^\star_{(b_{\alpha-1})}$ et $x^{\star\star}_{(b_{\alpha-1})}$ étant des points convenablement choisis dans (x^{IV}, x'''). On reconnaît, par un raisonnement déjà utilisé au paragraphe 20, que la valeur absolue de la différence entre $\dfrac{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^\star_{(b_{\alpha-1})})}{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^{\star\star}_{(b_{\alpha-1})})}$ et 1 ne dépasse pas $\rho''' \varepsilon_{\alpha-1}$. On tire de là

$$\frac{\rho'}{\rho'''} = \left| \frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right| + r_{b_{\alpha-1}} \varepsilon_{\alpha-1} \rho',$$

$r_{b_{\alpha-1}}$ étant des coefficients, dont la valeur absolue ne dépasse pas 1.

Si l'on introduit dans (30') ces expressions pour $\frac{\rho'}{\rho'''}$ on obtient

$$(30'') \quad \sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}} \sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_{j'} \frac{g^2(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}$$

$$\times \left\{ \left| \frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right| | x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | - | x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | \right\}$$

$$+ \sum_{0}^{n_{\alpha-2}-1}{}_{j'} \frac{g^2(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}$$

$$\times \left\{ \left| \frac{x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\text{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right| | x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\text{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | - | x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} | \right\}$$

$$+ \rho' \varepsilon_{\alpha-1} \sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}} r_{b_{\alpha-1}} \sum_{0}^{n_{\alpha-1}-1}{}_{j'} \frac{g^2(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} | x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} |$$

$$+ \quad \rho' \varepsilon_{\alpha-1} r_{\alpha-1} \sum_{0}^{n_{\alpha-2}-1}{}_{j'} \frac{g^2(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} | x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\text{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} |.$$

Nous allons établir une borne pour la valeur absolue de (30''), en admettant, toutefois, qu'on puisse négliger des quantités infiniment petites d'ordre supérieur.

Choisissons un point $\overline{\overline{x}}$ de façon que les $a_{\alpha-1}$ intervalles $(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}, x_{(b_{\alpha-1}+1)n_{\alpha-1}})$ $(b_{\alpha-1}=0, 1, \ldots, a_{\alpha-1})$ soient intérieurs à l'intervalle $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{x}}_{n_{\alpha-2}})$. Si, dans la sommation par rapport à j' dans la première et la seconde lignes de (30''), on divise le numérateur et le dénominateur de $\left|\dfrac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}\right|$ par $|\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})|$, on a une expression de la forme (30); il suffit de substituer α par $\alpha-1$, x par $\overline{\overline{x}}$ et $x', x'', x''', x^{\text{IV}}$ par $x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$, $x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$, $x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$, $x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$. On a alors, pour la valeur absolue de cette sommation, la borne

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|.$$

En négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, on a

$$\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|=\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}\right|\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|=\rho'\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|,$$

$$\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|=\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}\right|\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|=\rho'''\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|;$$

on peut donc substituer la borne précédente par

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\left[\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right]^2\rho'\rho'''.$$

Supposons d'abord $a_{\alpha-1}<M_{\alpha-1}$ [1]; on a

$$\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|=\frac{\gamma_{\alpha-2}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}\right|;$$

à un facteur près, qui est infiniment petit pour $\alpha\to\infty$, le premier facteur du second membre est égal à 1 (§ 21), le deuxième est égal à $\left|\dfrac{k_{\alpha-1}}{k_{\alpha-2}}\right|$ (§ 23); on a alors, pour la valeur absolue de la sommation double de la première ligne de (30''), la borne

$$a_{\alpha-1}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-2}}\rho'\rho'''.$$

En tous cas, du fait que les $a_{\alpha-1}$ intervalles $(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}, x_{(b_{\alpha-1}+1)n_{\alpha-1}})$ sont contenus dans $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{x}}_{n_{\alpha-2}})$, on a, en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur,

$$\sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}}\left[\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right]^2<\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}}\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|<\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}},$$

---

[1] Les nombres M_α ont été introduits au paragraphe 23.

et l'on trouve, pour la valeur absolue de la même sommation double, la borne

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\rho'\rho'''.$$

Considérons maintenant la sommation par rapport à j' de la troisième et la quatrième lignes de (30″) : si l'on divise le numérateur et le dénominateur de $\left|\frac{x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}-x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}}{x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}-x^{\text{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}}\right|$ par $|\gamma_{\alpha-3}(x)|$, on trouve encore une expression de la forme (30), relative, cette fois, à la valeur $\alpha-2$ de l'index. On a alors, pour cette même sommation, la borne

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\left[\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-3}(x)}\right]^2\rho'\rho''',$$

qu'on peut substituer, si $a_{\alpha-1}<M_{\alpha-1}$ et $a_{\alpha-2}<M_{\alpha-2}$, par

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-3}}\rho'\rho''',$$

et, en tous cas, par

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\frac{c^2_{\alpha-1}}{c^2_{\alpha-3}}\rho'\rho'''.$$

Considérons après cela la sommation par rapport à j' dans la cinquième ligne de (30″) : on reconnaît qu'elle est de la forme (27), relative à la valeur $\alpha-1$ de l'index; une borne pour la valeur absolue de cette sommation est donc donnée par

$$\varepsilon_{\alpha-1}\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\text{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|;$$

en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, on peut substituer à cette valeur la suivante :

$$\varepsilon_{\alpha-1}\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\overline{\overline{x}})}\right|\rho'''.$$

On voit alors que la valeur absolue de la sommation double de la troisième ligne de (31) ne dépasse pas

$$\varepsilon^2_{\alpha-1}\rho'\rho'''.$$

Enfin, pour la valeur absolue de la sommation de la sixième ligne de (30″), on trouve la borne

$$\varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\rho'\rho'''.$$

En conclusion on trouve, pour la valeur absolue de (30″), la borne

$$a_{\alpha-1}\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-2}}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\rho'\rho'''+\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-3}}\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\rho'\rho'''+\varepsilon^2_{\alpha-1}\rho'\rho'''+\varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\rho'\rho''', \tag{31'}$$

valable lorsque $a_{\alpha-1} < \mathrm{M}_{\alpha-1}$ et $a_{\alpha-2} < \mathrm{M}_{\alpha-2}$, et la borne

$$(31'') \qquad \frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}} \bar{\varepsilon}_{\alpha-1} \rho' \rho''' + \left(\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\right)^2 \bar{\varepsilon}_{\alpha-2} \rho' \rho''' + \varepsilon_{\alpha-1}^2 \rho' \rho''' + \varepsilon_{\alpha-1} \varepsilon_{\alpha-2} \frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}} \rho' \rho''',$$

valable dans tous les cas.

En rassemblant ici les résultats de ces deux derniers paragraphes, nous pouvons conclure : *on peut déterminer le nombre ε_α par l'équation*

$$(32) \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{c_\alpha}{c_{\alpha-2}} \varepsilon_{\alpha-1} + \bar{\varepsilon}_\alpha.$$

Le nombre $\bar{\varepsilon}_\alpha$ peut à son tour être déterminé par l'équation

$$(33') \qquad \bar{\varepsilon}_\alpha = a_{\alpha-1} \frac{k_{\alpha-1}^2}{k_{\alpha-2}^2} \bar{\varepsilon}_{\alpha-1} + \frac{k_{\alpha-1}^2}{k_{\alpha-3}^2} \bar{\varepsilon}_{\alpha-2} + \varepsilon_{\alpha-1}^2 + \varepsilon_{\alpha-1} \varepsilon_{\alpha-2} \frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}},$$

lorsque $a_{\alpha-1} < \mathrm{M}_{\alpha-1}$ et $a_{\alpha-2} < \mathrm{M}_{\alpha-2}$; il peut, en tout cas, être déterminé par l'équation

$$(33'') \qquad \bar{\varepsilon}_\alpha = \frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}} \bar{\varepsilon}_{\alpha-1} + \left(\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\right)^2 \bar{\varepsilon}_{\alpha-2} + \varepsilon_{\alpha-1}^2 + \varepsilon_{\alpha-1} \varepsilon_{\alpha-2} \frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}.$$

Il est toutefois nécessaire de rappeler que (32) d'un côté, (33′) et (33″) de l'autre, ne sont pas des relations exactes : nous pouvons, en toute rigueur, affirmer que *les nombres ε_α et $\bar{\varepsilon}_\alpha$ peuvent être choisis de façon à ne pas dépasser les seconds membres de ces relations, sinon de quantités infiniment petites d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$*.

27. On voit facilement qu'on peut supposer $\bar{\varepsilon}_\alpha$ de l'ordre de ε_α. En effet, d'après (33″), on doit choisir $\bar{\varepsilon}_\alpha$ plus grande que $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}} \bar{\varepsilon}_{\alpha-1}$. De là et de l'équation (32), on déduit que $\bar{\varepsilon}_\alpha$ est de l'ordre de ε_α si $\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}$ est de l'ordre de $\varepsilon_{\alpha-1}$; il n'est pas possible, d'autre part, que le rapport $\frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{\varepsilon_\alpha}$ devienne graduellement très petit, parce que, si $\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}}{\varepsilon_{\alpha-1}}$ est très petit, on voit, par ces mêmes équations, que $\frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{\varepsilon_\alpha} > \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}}{\varepsilon_{\alpha-1}}$.

28. On démontrera très facilement le théorème A lorsqu'on aura fait voir qu'*on peut choisir les nombres ε_α de façon qu'ils deviennent, pour $\alpha \to \infty$, plus petits que toute puissance de $|k_{\alpha-1}|$ $\left(\text{de } \frac{1}{n_\alpha}\right)$ d'exposant positif donné plus petit que* 1.

D'après le paragraphe précédent, on peut démontrer le même lemme pour les nombres $\bar{\varepsilon}_\alpha$.

Pour une valeur α_1 de l'index nous pouvons envisager les cas suivants :

1. Supposons d'abord $a_{\alpha_1-1} > \frac{1}{\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}}$; alors (§ 23) $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}$ est au plus de l'ordre de $\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}$. Dans le second membre de (33″) le premier et le troisième termes sont de l'ordre de $\bar\varepsilon^2_{\alpha_1-1}$ au plus, le deuxième et le quatrième termes sont infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à $\bar\varepsilon^2_{\alpha_1-1}$; *il est alors possible de choisir $\bar\varepsilon_{\alpha_1}$ de l'ordre de $\bar\varepsilon^2_{\alpha_1-1}$*. Remarquons que $\frac{\bar\varepsilon_{\alpha_1}}{\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}}$ est de l'ordre de $\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}$ et que $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}$ est de l'ordre de $\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}$ au plus; en multipliant éventuellement la valeur de $\bar\varepsilon_{\alpha_1}$, telle qu'elle nous est donnée par (33″), par un facteur borné, nous pouvons donc satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\bar\varepsilon_{\alpha_1}}{\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}} > \frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}. \tag{34}$$

2. Supposons en deuxième lieu $\frac{1}{\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}} > a_{\alpha_1-1} > \mathrm{M}_{\alpha_1-1}$. Le second membre de (33″) est de l'ordre de $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}$; $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}$ est d'autre part (§ 23) de l'ordre de $\left|\frac{k_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}}\right|$; *on peut choisir dans ce cas $\bar\varepsilon_{\alpha_1}$ de l'ordre de*

$$\left|\frac{k_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}}\right|\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}.$$

On peut supposer, comme dans le cas 1, que l'inégalité (34) soit satisfaite.

3. Supposons $a_{\alpha_1-1} < \mathrm{M}_{\alpha_1-1}$, mais $a_{\alpha_1-2} > \mathrm{M}_{\alpha_1-2}$. (33″) montre que, dans ce cas aussi, *on peut choisir $\bar\varepsilon_{\alpha_1}$ de l'ordre de* $\left|\frac{k_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}}\right|\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}$ et de façon à satisfaire (34).

4. Supposons enfin $a_{\alpha_1-1} < \mathrm{M}_{\alpha_1-1}$ et $a_{\alpha_1-2} < \mathrm{M}_{\alpha_1-2}$. Utilisons dans ce cas (33′) : en rappelant ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 26 et en remarquant que le troisième et le quatrième termes du second membre sont infiniment petits d'ordre supérieur par rapport au premier, on déduit, en divisant par $k^2_{\alpha_1-1}$,

$$\frac{\bar\varepsilon_{\alpha_1}}{k^2_{\alpha_1-1}} = (1+\mu_{\alpha_1})\left\{ a_{\alpha_1-1}\frac{\bar\varepsilon_{\alpha_1-1}}{k^2_{\alpha_1-2}} + \frac{\bar\varepsilon_{\alpha_1-2}}{k^2_{\alpha_1-3}}\right\}, \tag{35}$$

μ_{α_1} étant une quantité positive, qu'on peut supposer infiniment petite pour $\alpha_1 \to \infty$.

Si l'on a aussi

$$a_{\alpha_1} < \mathrm{M}_{\alpha_1}, \qquad a_{\alpha_1+1} < \mathrm{M}_{\alpha_1+1}, \qquad \ldots, \qquad a_{\alpha_1+j} < \mathrm{M}_{\alpha_1+j} \qquad (j \geqq 0),$$

on pourra considérer, à côté de l'équation (35), $j+1$ équations analogues, en introduisant $j+1$ nombres positifs $\mu_{\alpha_1+1}, \mu_{\alpha_1+2}, \ldots, \mu_{\alpha_1+j+1}$. Soit alors $\alpha_2 > \alpha_1$ la plus grande valeur de l'indice telle que

$$a_{\alpha_1} < \mathrm{M}_{\alpha_1}, \qquad a_{\alpha_1+1} < \mathrm{M}_{\alpha_1+1}, \qquad \ldots, \qquad a_{\alpha_2-2} < \mathrm{M}_{\alpha_2-2}$$

et

$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_1+1} + \ldots + \mu_{\alpha_2-1} < 1; \tag{36}$$

ajoutons à l'équation (35) les suivantes :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1+1}}{k_{\alpha_1}^2} = (1 + \mu_{\alpha_1+1}) \left\{ a_{\alpha_1} \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}}{k_{\alpha_1-1}^2} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}^2} \right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}}{k_{\alpha_2-2}^2} = (1 + \mu_{\alpha_2-1}) \left\{ a_{\alpha_2-2} \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-2}}{k_{\alpha_2-3}^2} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-3}}{k_{\alpha_2-4}^2} \right\}.$$

Les nombres $\frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{k_{\alpha-1}^2}$ satisferaient, s'il n'y avait pas les coefficients $(1 + \mu_\alpha)$, aux mêmes équations récurrentes que m_α et n_α; une solution de ces équations est de la forme $m_\alpha + c n_\alpha$ (c constant) et ne peut donc pas croître (lorsque α croît) plus rapidement que m_α, n_α, ou $\left|\frac{1}{k_{\alpha-1}}\right|$. On pourrait alors en déduire que

$$\frac{\dfrac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}}{k_{\alpha_2-2}^2}}{\dfrac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}^2}}$$

est au plus de l'ordre de $\left|\frac{k_{\alpha_1-2}}{k_{\alpha_2-2}}\right|$ et, de là, que $\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}$ *est au plus de l'ordre de* $\varepsilon_{\alpha_1-1}\left|\frac{k_{\alpha_2-2}}{k_{\alpha_1-2}}\right|$. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que cette conclusion reste valable, en vertu de (36), lorsqu'on tient compte des coefficients $(1 + \mu_\alpha)$.

Étant donné que les rapports

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha''}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha'}}, \quad \frac{c_{\alpha''-1}}{c_{\alpha'-1}} \qquad (\alpha_1 - 1 \leq \alpha' < \alpha'' \leq \alpha_2 - 1)$$

sont du même ordre de grandeur, on peut toujours, en augmentant éventuellement les nombres $\bar{\varepsilon}_\alpha$ sans changer leur ordre de grandeur, faire en sorte que le premier des deux rapports soit toujours plus grand que le second; (34) sera donc satisfaite.

Nous devons distinguer le cas 4 en deux cas, 4′ et 4″, suivant que la sommation

$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_1+1} + \ldots + \mu_{\alpha_2}$$

dépasse ou non l'unité. Il est nécessaire de remarquer que, dans le cas 4′, le nombre $\alpha_2 - \alpha_1$ augmente indéfiniment pour $\alpha_1 \to \infty$.

Après avoir considéré ces différents cas, définissons la suite croissante d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots$ de la façon suivante : $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$, si pour α nous sommes dans les cas 1, 2, 3; si pour α_i nous sommes dans le cas 4, α_{i+1} doit être choisi à partir de α_i de la même façon que α_2 à partir de α_1.

Faisons la remarque que, pour $\alpha_i \to \infty$, les rapports

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{i+1}-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}}, \qquad \left|\frac{k_{\alpha_{i+1}-2}}{k_{\alpha_i-2}}\right|$$

deviennent infiniment petits, excepté éventuellement le cas où, pour α_i, nous sommes dans 3 ou 4″. Remarquons aussi que, si le cas 3 se présente pour α_i, il ne se présente certainement pas pour α_{i+1}; si, d'autre part, nous sommes dans le cas 4″ pour α_{i+1}, nous sommes nécessairement dans le cas 1 ou 2 pour α_{i+2}.

On aura donc au plus deux entiers consécutifs de la suite, correspondant aux cas 3 ou 4″.

29. La démonstration du lemme énoncé au début du paragraphe précédent est désormais très facile : nous allons montrer que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\log|k_{\alpha_i-2}|}{\log \bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}} = 1.$$

On a

$$\frac{\log|k_{\alpha_i-2}|}{\log \bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}} = \frac{\log|k_{\alpha_1-2}| + \log\left|\frac{k_{\alpha_2-2}}{k_{\alpha_1-2}}\right| + \log\left|\frac{k_{\alpha_3-2}}{k_{\alpha_2-2}}\right| + \ldots + \log\left|\frac{k_{\alpha_{j+1}-2}}{k_{\alpha_j-2}}\right| + \ldots + \log\left|\frac{k_{\alpha_i-2}}{k_{\alpha_{i-1}-2}}\right|}{\log \bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1} + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}} + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_3-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}} + \ldots + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{j+1}-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_j-1}} + \ldots + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{i-1}-1}}}.$$

Chaque terme $\log\left|\frac{k_{\alpha_{j+1}-2}}{k_{\alpha_j-2}}\right|$ du numérateur ou $\log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{j+1}-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_j-1}}$ du dénominateur est négatif et il devient, lorsque l'indice croît, infiniment grand en valeur absolue, si l'on n'est pas, pour α_j, dans les cas 3 ou 4″. Nous venons de remarquer que ces cas ne peuvent se présenter que deux fois consécutivement au plus.

D'autre part, la différence entre un terme au numérateur et le terme correspondant au dénominateur reste toujours bornée lorsqu'on n'est pas dans le cas 1 en correspondance de ces deux termes. Dans le cas 1, au contraire, le terme au numérateur peut dépasser, en valeur absolue, le terme au dénominateur d'une quantité très grande. Toutefois, pendant que le terme au dénominateur est égal, à une quantité finie près, à la somme des termes précédents du dénominateur, le terme au numérateur ne dépasse pas, en vertu de la condition (3), la somme des termes précédents du numérateur multipliée par λ.

On reconnaît facilement, que, dans ces conditions, le rapport tend vers 1 pour $i \to \infty$.

30. Nous avons supposé, au paragraphe 24, $c_{\alpha-1}$ infiniment petit par rapport à ε_α pour $\alpha \to \infty$.

Considérons maintenant, au contraire, le cas, où l'on peut toujours choisir ε_α de l'ordre de $c_{\alpha-1}$. D'après le lemme du paragraphe 23, $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}}$ est alors de l'ordre de $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ lorsque a_α est plus petit que $c_{\alpha-1}$; de l'ordre de $c_{\alpha-1}$ au plus dans l'autre cas. On voit alors, en imitant le raisonnement du paragraphe précédent que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\log|k_{\alpha-1}|}{\log c_{\alpha-1}} = 1;$$

ε_α étant d'autre part de l'ordre de $c_{\alpha-1}$, le lemme du paragraphe 28 est immédiat dans ce cas.

Le cas est exclu, d'autre part, où le rapport $\frac{c_{\alpha-1}}{\varepsilon_\alpha}$ a sa plus grande limite finie et sa plus petite limite égale à zéro. En effet, d'après (34), le rapport considéré est décroissant.

31. Considérons un exposant λ' plus grand que λ et plus petit que 1.

Pour α assez grand $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$ sera plus grand que $n_\alpha^{\lambda'}$, a_α sera plus petit que n_α^{λ} ; le cas 1 du paragraple 26 ne pourra plus se présenter. On pourra choisir le nombre M_α, dont il est question au paragraphe 23, de l'ordre de n_α^{λ} ; alors le produit

$$M_\alpha \varepsilon_\alpha$$

sera au plus de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha^{\lambda'-\lambda}}$. Enfin, on voit sans difficulté qu'on peut supposer, d'après (24), que les nombres $\varepsilon_\alpha^\star$ et $\varepsilon_{\alpha-1}^\star$ ne sont pas plus grands que toute puissance de $\frac{1}{n_\alpha}$ d'exposant positif donné. La différence entre le rapport

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}}{\dfrac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}} = \frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}}{\dfrac{\gamma_{\alpha-1}(x)}{k_{\alpha-1}}}$$

et l'unité est au plus de l'ordre de

$$M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^\star + \varepsilon_{\alpha-1}^\star + \frac{1}{M_\alpha},$$

d'après le lemme du paragraphe 23; elle n'est donc certainement pas plus grande que toute puissance de $\frac{1}{n_\alpha}$ d'exposant positif donné, d'après ce que nous venons de voir. Il s'ensuit sans difficulté que le rapport $\frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}$ converge vers une fonction finie et positive $\xi(x)$. Cette convergence étant d'ailleurs uniforme, la fonction limite est continue.

32. Nous devons montrer qu'on obtient la transformation T lorsqu'on donne la valeur k au paramètre t dans l'équation du groupe g_1 engendré par

$$Xf = \xi(x)\frac{df}{dx}.$$

Indiquons par τ_α la transformation d'équation

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x),$$

qui coïncide avec T^{n_α} au point de vue géométrique; de

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha} = \xi(x),$$

on tire

$$\gamma_\alpha(x) = k_\alpha \xi(x) + \eta_\alpha(x),$$

la fonction $\eta_\alpha(x)$ étant infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à k_α pour $\alpha \to \infty$. D'une façon analogue, si

$$x^\star_{n_\alpha} = g(x, k_\alpha) = x + k_\alpha \xi(x) + \eta^\star_\alpha(x)$$

est l'équation de la transformation $\tau^\star_\alpha$, obtenue en donnant la valeur k_α au paramètre t dans l'équation

$$x_1 = g(x, t)$$

du groupe g_1 engendré par $\mathrm{X}f$, $\eta^\star_\alpha(x)$ est infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à k_α pour $\alpha \to \infty$.

Indiquons par s_α le nombre $+1$ ou -1 selon que $\frac{k}{k_\alpha}$ est positif ou négatif et par r_α la partie entière de $\left|\frac{k}{k_\alpha}\right|$; le point transformé d'un point x par $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$ est situé à gauche de x_1, transformé de x par T; au contraire le point transformé de x par $\tau_\alpha^{s_\alpha(r_\alpha+1)}$ est situé à droite de x_1. De ce que τ_α tend vers l'identité pour $\alpha \to \infty$, on tire que les points transformés de x par $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$ et par $\tau_\alpha^{s_\alpha(r_\alpha+1)}$ sont infiniment proches à x_1 pour $\alpha \to \infty$; alors $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$ tend vers T.

Considérons maintenant la transformation $\tau_\alpha^{\star r_\alpha s_\alpha}$, qui est engendrée par g_1 lorsqu'on donne la valeur $r_\alpha|k_\alpha|$ au paramètre t. On a

$$\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha} = [(\tau_\alpha^{s_\alpha}\tau_\alpha^{\star -s_\alpha})\tau_\alpha^{\star s_\alpha}]^{r_\alpha} = \left\{ \prod_l^{r_\alpha - 1} {}_0\, \tau_\alpha^{\star s_\alpha l}(\tau_\alpha^{s_\alpha}\tau_\alpha^{\star -s_\alpha})\tau_\alpha^{\star -s_\alpha l} \right\} \tau_\alpha^{\star s_\alpha r_\alpha};$$

on a entre accolades le produit des transformations transformées de la transformation très petite $\tau_\alpha^{s_\alpha}\tau_\alpha^{\star -s_\alpha}$ par les puissances de $\tau^\star_\alpha$; en employant les formules données au paragraphe 7, on trouve facilement que la fonction, qui représente la transformation très petite indiquée entre accolades, est donnée par

$$s_\alpha \sum_{l=0}^{r_\alpha - 1} \{\eta_\alpha[g(x, -lk_\alpha)] - \eta^\star_\alpha[g(x, -lk_\alpha)]\} g^1[g(x, -lk_\alpha), lk_\alpha],$$

en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$.

Le facteur entre accolades dans chaque terme de la sommation est infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à k_α (à $n_{\alpha+1}$) pour $\alpha \to \infty$. D'autre part, de

$$(4') \qquad \int_{g(x,-lk_\alpha)}^{x} \frac{dx}{\xi(x)} = lk_\alpha,$$

en dérivant par rapport à x on tire

$$g^1[g(x, -lk_\alpha), lk_\alpha] = \frac{\xi(x)}{\xi[g(x, -lk_\alpha)]};$$

N étant le maximum et $\underline{\mathrm{N}}$ le minimum de la fonction continue et positive $\xi(x)$, $g^1[g(x, -lk_\alpha), lk_\alpha]$ ne peut donc pas dépasser $\frac{\mathrm{N}}{\underline{\mathrm{N}}}$.

On voit donc que chacun des $r_\alpha < n_{\alpha+1}$ termes de la sommation par rapport à l est le produit d'un facteur infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $k_\alpha \left(\text{à } \frac{1}{n_{\alpha+1}}\right)$ pour un facteur borné; la sommation est donc infiniment petite pour $\alpha \to \infty$. Alors $\tau_\alpha^{*s_\alpha r_\alpha}$ tend vers $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$, ou encore vers T; on reconnaît donc qu'on obtient T en donnant la valeur k au paramètre t dans l'équation de g_1. *Le théorème* A *est ainsi démontré.*

CHAPITRE IV.

33. Il importe de montrer que l'ensemble E des nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$, qui ne satisfont, pour aucune valeur de $\lambda < 1$, à la condition

$$(3) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0,$$

a une mesure nulle.

Considérons l'ensemble des nombres, qui ne satisfont pas à la condition (3) lorsqu'on donne à λ une valeur particulière plus petite que 1. Cet ensemble contient E; il suffira donc d'avoir démontré qu'il a lui-même une mesure nulle.

Considérons la succession

$$(37) \qquad \frac{a_1}{n_1^\lambda}, \quad \frac{a_2}{n_2^\lambda}, \quad \frac{a_3}{n_3^\lambda}, \quad \ldots,$$

pour la valeur considérée de λ et pour un nombre k de l'intervalle $(0, 1)$; on peut distinguer trois cas :

I. La succession tend à zéro.

II. La succession a une plus grande limite finie.

III. La succession a ∞ pour plus grande limite.

Il faudrait montrer que la mesure de l'ensemble des nombres k, pour lesquels on est dans les cas II ou III, a une mesure nulle; il suffira toutefois d'avoir montré, pour toute valeur de λ positive < 1, que l'ensemble correspondant E_λ des nombres, pour lesquels on est dans les cas III, a une mesure nulle. En effet, quel que soit $\lambda' < \lambda$, l'ensemble des nombres pour lesquels on est, en correspondance avec la valeur λ de l'exposant, dans le cas II ou dans le cas III, est contenu, on le voit immédiatement, dans $E_{\lambda'}$.

Démontrons donc que E_λ a une mesure nulle. Indiquons par $E_\lambda(M)$ l'ensemble des nombres pour lesquels le rapport (37) n'est pas toujours inférieur au nombre positif M. $E_\lambda(M)$ tend vers E_λ quand $M \to \infty$.

Nous allons maintenant définir l'ensemble $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$: nous dirons qu'un nombre fait partie de $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ si $\frac{m}{n}$ fait partie de la succession des réduites de ce nombre et si, a étant le dénominateur partiel de son développement en fraction continue de même index que m et n, il n'est pas

$$\frac{a}{n^\lambda} < M.$$

Écrivons $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ au lieu de $\frac{m}{n}$ pour indiquer qu'il y a α réduites antécédentes $\frac{m_0}{n_0}$, $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$; soit a_α le plus petit entier tel que

$$\frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} \geqq M,$$

soit enfin $\frac{a_\alpha m_\alpha + m_{\alpha-1}}{a_\alpha n_\alpha + n_{\alpha-1}} \equiv \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$. $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ est constitué précisément par l'intervalle $\left(\frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}\right)$; $E_\lambda(M)$ est la somme des intervalles $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ lorsque $\frac{m}{n}$ prend toute valeur rationnelle de l'intervalle (0, 1); sa mesure est certainement inférieure à la somme des mesures de tous ces intervalles. Pour évaluer cette somme, considérons d'abord la somme des mesures des intervalles correspondant à une valeur donnée de n,

$$mE_\lambda\left(M, \frac{1}{n}\right) + mE_\lambda\left(M, \frac{2}{n}\right) + \ldots + mE_\lambda\left(M, \frac{n-1}{n}\right).$$

$mE\left(M, \frac{m}{n}\right)$ est donnée par

$$\left|\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} - \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right| = \frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}} < \frac{1}{n_\alpha^2 a_\alpha} \leqq \frac{1}{M}\,\frac{1}{n^{2+\lambda}};$$

la somme des mesures des $n - 1$ ensembles correspondant à la valeur donnée

n est donc plus petite que $\frac{1}{M}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$; enfin la mesure de E(M) est plus petite que

$$\frac{1}{M}\left[\frac{1}{1^{1+\lambda}}+\frac{1}{2^{1+\lambda}}+\frac{1}{3^{1+\lambda}}+\ldots\right];$$

cette expression est finie et proportionnelle à $\frac{1}{M}$; la mesure de l'ensemble E est donc égale à zéro.

Remarquons enfin que, quel que soit $\lambda < 1$, E_λ contient E. En effet, si λ'' est un nombre compris entre λ et 1, l'ensemble des nombres de l'intervalle (0, 1), tels que la succession correspondante

$$\frac{a_1}{n_1^{\lambda''}},\quad \frac{a_2}{n_2^{\lambda''}},\quad \frac{a_3}{n_3^{\lambda''}},\quad \ldots,$$

a une plus grande limite différente de zéro, est contenu dans E_λ et contient E.

E_λ tend vers E lorsque $\lambda \to 1$.

34. Nous allons maintenant démontrer l'existence de transformation 3'', c'est-à-dire de transformations de module irrationnel, qui sont caractérisées par une fonction $g(x)$ possédant une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz, et qui ne sont, toutefois, engendrées par aucune transformation infinitésimale.

Rappelons d'abord que, $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ étant les réduites du module irrationnel d'une transformation T, les transformations géométriques T_{n_α} ($\alpha = 1, 2, \ldots$) sont données, géométriquement, par les équations

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x),$$

et que les fonctions $\gamma_\alpha(x)$, alternativement positives et négatives, tendent vers zéro lorsque α croît.

Supposons maintenant que T soit engendrée par la transformation infinitésimale

$$\text{(2)}\qquad Xf = \xi(x)\frac{df}{dx},$$

la fonction continue $\xi(x)$ aura nécessairement partout le même signe, comme nous allons voir; nous pourrons donc supposer qu'elle est positive.

Si $\xi(x)$ était positive dans un certain intervalle et négative dans un autre, tout point du premier intervalle serait déplacé à droite par une transformation finie de paramètre positif appartenant au groupe g_1 engendré par Xf; tout point du deuxième intervalle serait au contraire déplacé à gauche. Il y aurait alors nécessairement des points invariants.

Il reste à montrer que $\xi(x)$ ne peut pas être nulle pour certaines valeurs de x. En dérivant l'équation

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1$$

par rapport à x on obtient la relation

$$g^1(x) = \frac{\xi[g(x)]}{\xi(x)};$$

si alors $\xi(x)$ était nulle en x, elle serait nulle aussi en $\xi(x)$, enfin dans tous les conséquents de x. Ces points étant denses sur C, la fonction continue $\xi(x)$ serait identiquement nulle.

$\xi(x)$ admet donc un maximum N fini et un minimum $\underline{\mathrm{N}}$ positif; le rapport entre le maximum et le minimum est donc fini.

On peut supposer qu'on obtient T^{n_α} en donnant la valeur $\delta_\alpha t$ au paramètre t dans l'équation du groupe g_1 engendré par $\mathrm{X}f$; le déplacement $\gamma_\alpha(x)$ que cette transformation induit sur un point x est celui d'un point matériel qui se trouve en x au temps 0 et qui se déplace, pendant l'intervalle de temps $\delta_\alpha t$ avec la vitesse $\xi(x)$, fonction de la place : on voit que ce déplacement est au moins égal à $\underline{\mathrm{N}}\,\delta_\alpha t$ et au plus égal à $\mathrm{N}\,\delta_\alpha t$.

Cette simple observation démontre que si, lorsque $\alpha \to \infty$, la plus grande limite du rapport entre le maximum et le minimum des valeurs absolues de $\gamma_\alpha(x)$ n'est pas bornée, T n'admet certainement pas une transformation infinitésimale qui l'engendre.

35. Soit maintenant

$$x_1 = g(x, \theta) \tag{38}$$

l'équation d'une famille ∞^1 de transformations $\mathrm{T}(\theta)$, dépendant du paramètre θ susceptible de varier dans un certain intervalle, soit $(0, 1)$.

On suppose que $g(x, \theta)$ possède une dérivée seconde par rapport à x, qui satisfait à la condition de Lipschitz, et une dérivée première continue par rapport à θ. Par la suite nous indiquerons ces dérivées de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\theta} g(x, \theta) = g^{0,1}(x, \theta); \qquad \frac{\partial}{\partial x} g(x, \theta) = g^{1,0}(x, \theta); \qquad \frac{\partial^2}{\partial^2 x} g(x, \theta) = g^{2,0}(x, \theta).$$

Nous supposons que le transformé x_1 d'un point x quelconque se déplace toujours vers la droite lorsque θ croît, c'est-à-dire que

$$g^{0,1}(x, \theta) > 0.$$

La fonction $k(\theta)$, qui donne la valeur du module des transformations de la famille, sera dans ces conditions non décroissante dans l'intervalle $(0, 1)$.

Nous voulons exclure le cas, *a priori* possible, que les transformations de la famille soient toutes irrégulières et possèdent un même module rationnel.

A une valeur irrationnelle du module, comprise entre $k(0)$ et $k(1)$, correspondra une transformation de la famille et une seulement. On a donc une infinité de la puissance du continu, de transformations régulières, correspondant aux valeurs irrationnelles du module.

Nous allons voir, au contraire, que, si la famille (38) est *arbitraire*, toutes les transformations de module rationnel sont irrégulières. Soit $\frac{m}{n}$ un nombre rationnel compris entre $k(0)$ et $k(1)$; considérons les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des transformations de la famille et faisons croître par continuité le paramètre θ à partir de 0. Puisque $\frac{m}{n} > k(0)$, d'abord tout point x effectuera, par les puissances $n^{\text{ièmes}}$ considérées, moins de m tours complets de C, jusqu'à ce qu'on parvienne, en correspondance avec une certaine valeur θ' du paramètre, à une première transformation (38) de module $\frac{m}{n}$: il y aura alors au moins un point $\bar{x}$ qui effectuera exactement m tours de C. Il en sera de même des $n-1$ homologues de $\bar{x}$, mais on voit bien que, la famille étant arbitraire, il n'y a pas de raison pour que tout autre point effectue m tours de C : un point quelconque effectuera donc moins de m tours.

Si l'on fait croître encore θ, le point $\bar{x}$ effectuera plus de m tours, mais il y aura d'autres points qui effectueront exactement m tours, jusqu'à ce qu'on arrive à une certaine valeur θ'' de θ, en correspondance avec laquelle il y aura des points particuliers qui effectueront m tours exactement, pendant que tout autre point effectuera plus de m tours de C. Toutes les transformations correspondantes (38) ont le même module rationnel $\frac{m}{n}$; elles sont évidemment irrégulières.

Les transformations qui possèdent un même module rationnel sont donc celles qui correspondent à des valeurs de θ appartenant à un certain intervalle fermé. Aux différents nombres rationnels compris entre $k(0)$ et $k(1)$ correspond une infinité d'intervalles fermés extérieurs entre eux; à l'ensemble des transformations régulières, de module irrationnel, correspond un ensemble parfait discontinu, privé des extrémités de ses intervalles contigus.

36. Soit maintenant

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_\alpha, \quad \ldots,$$

une succession de nombres positifs, dont la plus grande limite n'est pas bornée.

Considérons un nombre rationnel compris entre $k(0)$ et $k(1)$, que nous représentons par

$$\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$$

pour indiquer qu'en le développant en fraction continue on obtient α réduites antécédentes $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$; supposons, par exemple, qu'il soit $\frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}} > \frac{m_\alpha}{n_\alpha}$.

Les transformations de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ sont celles d'un certain intervalle fermé $(\theta'_\alpha, \theta''_\alpha)$.

Représentons par

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x, \theta)$$

les transformations (géométriques) $T^{n_\alpha}(\theta)$ dans le voisinage de θ''_α. $\gamma_\alpha(x, \theta''_\alpha)$ est positive ou nulle; pour

$$\theta > \theta''_\alpha.$$

$\gamma_\alpha(x, \theta)$ est positive; on peut donc définir un intervalle ouvert

$$(\theta''_\alpha, \theta^\star_\alpha),$$

situé à droite de θ''_α, dans lequel le rapport entre le maximum et le minimum de $\gamma_\alpha(x, \theta)$ est plus grand que r_α.

Choisissons un entier a_α assez grand pour que les transformations de module

$$\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} = \frac{m_{\alpha-1} + a_\alpha m_\alpha}{n_{\alpha-1} + a_\alpha n_\alpha}$$

correspondent à un intervalle fermé $(\theta'_{\alpha+1}, \theta''_{\alpha+1})$, intérieur à $(\theta''_\alpha, \theta^\star_\alpha)$.

Représentons par

$$x_{n_{\alpha+1}} = x + \gamma_{\alpha+1}(x, \theta)$$

les transformations (géométriques) $T^{n_{\alpha+1}}(\theta)$ dans le voisinage de $\theta'_{\alpha+1}$. La fonction $\gamma_{\alpha+1}(x, \theta'_{\alpha+1})$ est négative ou nulle; pour

$$\theta < \theta'_{\alpha+1},$$

la fonction $\gamma_{\alpha+1}(x, \theta)$ est négative; on peut donc définir un intervalle ouvert

$$(\theta^\star_{\alpha+1}, \theta'_{\alpha+1}),$$

situé à gauche de $\theta'_{\alpha+1}$ et intérieur à $(\theta''_\alpha, \theta^\star_\alpha)$, dans lequel le rapport entre le maximum et le minimum absolus de $\gamma_{\alpha+1}(x, \theta)$ est plus grand que $r_{\alpha+1}$.

Choisissons un entier $a_{\alpha+1}$ assez grand pour que les transformations de module

$$\frac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}} = \frac{m_\alpha + a_{\alpha+1} m_{\alpha+1}}{n_\alpha + a_{\alpha+1} n_{\alpha+1}}$$

correspondent à un intervalle fermé $(\theta'_{\alpha+2}, \theta''_{\alpha+2})$ intérieur à $(\theta^\star_{\alpha+1}, \theta'_{\alpha+1})$, ...

En poursuivant indéfiniment de la sorte, on arrive à définir un module irrationnel $\bar{k}$, dont les réduites sont

$$\frac{m_0}{n_0}, \quad \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \quad \ldots, \quad \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \quad \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}, \quad \frac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}}, \quad \ldots;$$

la valeur correspondante $\bar{\theta}$ du paramètre appartient aux intervalles

$$(\theta''_{\alpha}, \theta^{\star}_{\alpha}), \quad (\theta^{\star}_{\alpha+1}, \theta'_{\alpha+1}), \quad (\theta''_{\alpha+2}, \theta^{\star}_{\alpha+2}), \ldots;$$

d'après la remarque faite au paragraphe 34, la transformation $T(\bar{\theta})$ ne peut être engendrée par aucune transformation infinitésimale.

37. Nous avons vu que dans la famille (38) il n'y a pas, en général, de transformations régulières de module rationnel; les transformations irrégulières correspondent aux valeurs de θ appartenant à un ensemble constitué par une infinité d'intervalles fermés sans points communs, dont la mesure est évidemment différente de zéro. Il nous reste à considérer l'ensemble P_1, qui correspond aux transformations de module irrationnel, qui sont engendrées par une transformation infinitésimale et l'ensemble P_2, qui correspond aux transformations de module irrationnel qui, au contraire, ne sont engendrées par aucune transformation infinitésimale. *Ces ensembles ont tous les deux la puissance du continu; nous allons montrer que le premier* P_1 *a une mesure différente de zéro, et que le second* P_2 *a une mesure nulle.* Nous pourrons dire alors qu'une transformation *arbitraire* peut, ou bien (type 2) être irrégulière, ou bien (type 3′) avoir un module irrationnel et posséder une transformation infinitésimale qui l'engendre; tandis que les transformations 1 régulières de module rationnel et les transformations 3″ régulières de module irrationnel, qui ne sont pas engendrées par une transformation infinitésimale, doivent être considérées comme exceptionnelles.

Démontrons d'abord que l'*ensemble* P_1 *ne peut pas être de mesure nulle.* Considérons le plus grand nombre dérivé

$$k'(\theta)$$

de $k(\theta)$; nous allons voir que ce nombre est fini dans tout point de P_1. Soit $\bar{\theta}$ un tel point, et soit $\bar{k}$ la valeur irrationnelle correspondante du module. La transformation

$$x_1 = g(x, \bar{\theta}) \tag{39}$$

admet une transformation infinitésimale qui l'engendre, soit

$$\xi(x)\frac{df}{dx};$$

alors, par la transformation de la variable indépendante définie par

$$\frac{dx}{\xi(x)} = \frac{dy}{\bar{k}},$$

(39) est transformée (§ 3) en

$$y_1 = y + \bar{k}. \tag{40}$$

Dans le voisinage de $\bar{\theta}$ l'équation de la famille peut être représentée par

$$y_1 = y + \bar{k} + (\theta - \bar{\theta})\mathrm{H}(x, \theta), \tag{41}$$

$\mathrm{H}(x, \theta)$ étant continue. M étant un nombre plus grand que toute valeur de $\mathrm{H}(x, \theta)$, considérons la famille ∞^1 de transformations

$$y'_1 = y + \bar{k} + (\theta - \bar{\theta})\mathrm{M}, \tag{41'}$$

(41) et (41′) coïncident pour $\theta = \bar{\theta}$; pour $\theta > \bar{\theta}$, y'_1 est à droite de y_1; pour $\theta < \bar{\theta}$, y'_1 est, au contraire, à gauche de y_1. On voit par là que, pour $\theta > \bar{\theta}$, la transformation (41′) a un module plus grand que la transformation (41) correspondante, et qu'elle a un module plus petit pour $\theta < \bar{\theta}$. $k'(\bar{\theta})$ est donc plus petit que le nombre dérivé correspondant, relatif à la famille (41′), qui est évidemment égale à M. $k'(\bar{\theta})$ est donc fini.

38. Considérons maintenant l'ensemble des valeurs irrationnelles du module qui ne satisfont pas à la condition (3) : c'est (§ 33) un ensemble de mesure nulle et il en est évidemment de même de l'ensemble qu'on obtient en lui adjoignant toutes les valeurs rationnelles de l'intervalle $[k(0), k(1)]$. On peut donc enfermer ce second ensemble dans un ensemble ouvert O de mesure ε très petite. L'ensemble complémentaire F a une mesure différente de zéro,

$$\varphi = k(1) - k(0) - \varepsilon.$$

L'ensemble O se compose d'une infinité d'intervalles ouverts : considérons l'ensemble des valeurs de θ, telles que les transformations correspondantes de la famille (38) aient un module appartenant à l'un déterminé de ces intervalles; cet ensemble est lui-même un intervalle ouvert. Alors l'ensemble O′ des valeurs de θ telles que les transformations correspondantes de la famille aient un module appartenant à O est lui aussi un ensemble ouvert. L'ensemble complémentaire F′ est compris évidemment dans P_1; si l'on admettait que P_1 avait une mesure nulle, F′ aurait lui aussi une mesure nulle.

On obtient F′ en enlevant à l'intervalle (0, 1) les intervalles ouverts qui composent O′; ces intervalles peuvent être ordonnés par ordre de grandeur. Si l'on commence à enlever à (0, 1) le premier, le second, le troisième, etc., des intervalles ouverts de O′, on obtient des ensembles qui tendent vers F′ et qui sont composés de deux, trois, quatre, etc., intervalles fermés. La mesure de ces ensembles tend vers 0; au contraire, la variation totale de la fonction $k(\theta)$ dans chacun des ensembles se maintient au moins égale à φ.

Il y a nécessairement un premier ensemble composé d'intervalles fermés de mesure totale plus petite que $\frac{1}{10}$; alors, dans l'un au moins, I_1, des intervalles fermés, qui le composent, le rapport de la variation de $k(\theta)$ à l'ampleur de l'intervalle est plus grand que 10φ. On peut répéter sur I_1 le raisonnement qu'on a fait sur l'intervalle $(0, 1)$; on parvient à un deuxième intervalle fermé I_2, appartenant à I_1 et tel que le rapport de la variation de $k(\theta)$ en I_2 à l'ampleur de I_2 est plus grand que 100φ.

En poursuivant de la même façon, on arrive à construire une succession d'intervalles fermés dont l'ampleur tend vers zéro,

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \ldots, \quad I_n, \quad \ldots,$$

chacun appartenant au précédent, tels que le rapport de la variation de $k(\theta)$ en I_n à l'ampleur de I_n est plus grand que $10^n\varphi$.

Il y a un point $\bar{\theta}$, qui fait partie de tous ces intervalles; ce point appartient évidemment à F', donc aussi à P_1. On voit bien que, dans ce point, le plus grand nombre dérivé $k'(\theta)$ ne peut pas être fini, et nous avons vu, au contraire, que le plus grand nombre dérivé est fini en tout point de P_1.

L'hypothèse que P_1 a une mesure nulle aboutit donc à une contradiction.

39. *Au contraire, l'ensemble* P_2 *des valeurs de* θ *correspondant à des transformations de module irrationnel, qui ne sont pas engendrées par des transformations infinitésimales, a une mesure nulle.*

Si θ appartient à P_2, $k(\theta)$ appartient nécessairement à l'ensemble E des valeurs du module, qui ne satisfont pas à la condition (3). Si la mesure de P_2 n'était pas nulle, il en serait de même de la mesure de l'ensemble E' des valeurs de θ telles que $k(\theta)$ appartient à E, ou encore, λ étant un nombre positif quelconque plus petit que 1, de la mesure de l'ensemble E'_λ des valeurs de θ telles que $k(\theta)$ appartient à E_λ (§. 33). La mesure de l'ensemble $E'_\lambda(M)$ des valeurs de θ telles que $k(\theta)$ n'est pas rationnel et appartient à $E_\lambda(M)$ resterait donc, pour $M \to \infty$, toujours supérieure à une quantité positive donnée. Soit, enfin, $E'_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ l'intervalle composé par les valeurs θ telles que $k(\theta)$ appartienne à l'intervalle *ouvert* $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$; la somme des mesures des intervalles $E'_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$, lorsque $\frac{m}{n}$ prend toute valeur rationnelle de l'intervalle $\big(k(0), k(1)\big)$, resterait, pour $M \to \infty$, toujours supérieure à une quantité positive donnée. Or, cela n'est pas possible; en effet, la somme correspondante des intervalles $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ tend vers zéro (§ 33), et nous allons montrer que le rapport

$$\frac{m E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)}{m E'_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)}$$

ne peut pas devenir infiniment petit. Il est donc impossible que la mesure de P_2 soit différente de zéro.

40. Supposons qu'il y ait a_α réduites antécédentes à $\frac{m}{n}$; écrivons $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ à la place de $\frac{m}{n}$. Supposons, de plus, que $E_\lambda\left(M, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right)$ soit, par exemple, à gauche de $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$.

Soit θ'_α l'extrême droite de $E'_\lambda\left(M, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right)$, c'est-à-dire la plus petite valeur de θ telle que $k(\theta'_\alpha) = \frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; soit $\bar\theta$ un point arbitraire de $E'_\lambda\left(M, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right)$, tel que $k(\bar\theta)$ soit irrationnel; il suffit de montrer que le rapport

$$\frac{\frac{m_\alpha}{n_\alpha} - k(\bar\theta)}{\theta'_\alpha - \bar\theta} \tag{42}$$

ne peut pas devenir infiniment petit.

$T^{n_\alpha}(\theta'_\alpha)$ laisse invariants certains points de C et transforme tous les autres en des points situés à leur gauche; $T^{n_\alpha}(\bar\theta)$ transforme tout point de C en un point situé à sa gauche. $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ étant une des réduites du module $k(\bar\theta)$ de $T(\bar\theta)$, aucun point transformé de x par une puissance de $T(\bar\theta)$ d'exposant plus petit que n_α ne peut tomber entre x et son transformé par $T^{n_\alpha}(\bar\theta)$.

Posons

$$T(\theta'_\alpha) = \tau T(\bar\theta), \tag{43}$$

τ est une transformation très petite, qui induit sur le point d'abscisse $g(x, \bar\theta)$ un déplacement, dont la partie principale est donnée par

$$g^{0,1}(x, \bar\theta)(\theta'_\alpha - \bar\theta).$$

La fonction $g^{0,1}(x, \theta)$ étant continue et positive, elle a un minimum positif; le déplacement induit par τ est donc partout de l'ordre de $(\theta'_\alpha - \bar\theta)$ et le module de τ est par conséquent lui aussi de l'ordre de $(\theta'_\alpha - \bar\theta)$.

On tire de (43)

$$T^{n_\alpha}(\theta'_\alpha) = [\tau T(\bar\theta)]^{n_\alpha} = \left[\prod_0^{n_\alpha - 1}{}_s T^s(\bar\theta)\,\tau\,T^{-s}(\bar\theta)\right] T^{n_\alpha}(\bar\theta);$$

on déduit de là que le produit des transformations transformées de τ par les puissances successives de $T(\bar\theta)$

$$\prod_0^{n_\alpha - 1}{}_s T^s(\bar\theta)\,\tau\,T^{-s}(\bar\theta) = T^{n_\alpha}(\theta'_\alpha)\,T^{-n_\alpha}(\bar\theta), \tag{44}$$

porte $g_{n_\alpha}(x, \bar\theta)$ en $g_{n_\alpha}(x, \theta'_\alpha)$, c'est-à-dire en un point de l'intervalle $(x, g_{n_\alpha}(x, \bar\theta))$.

La transformation très petite $T^s(\overline{\theta})\,\tau\,T^{-s}(\theta)$ a le même module que la transformation τ; elle induit sur un point $g(x^\star, \overline{\theta})$ un déplacement, dont la partie principale est donnée par

$$g^{0,1}[g_{-s}(x^\star, \overline{\theta}), \overline{\theta}]\, g_s^{1,0}[g_{-s+1}(x^\star, \overline{\theta}), \overline{\theta}](\theta'_\alpha - \overline{\theta}).$$

Lorsque $g(\overline{x}^\star, \theta)$ varie dans l'intervalle $(x, g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}))$, cette expression est multipliée par un facteur, qui est infiniment peu différent de 1 lorsque $\alpha \to \infty$ (¹); on peut donc appliquer le lemme du paragraphe 7 et l'on en déduit que le module de la transformation (44) est de l'ordre de $n(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins,

La différence entre le module de $T^{n_\alpha}(\overline{\theta})$ et m_α est donnée par le module, négatif, de la transformation

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x, \overline{\theta}); \tag{45}$$

la transformation inverse

$$x = x_{n_\alpha} - \gamma_\alpha(x, \overline{\theta}) \tag{46}$$

aura le même module que (45), au signe près. Or, nous avons déjà remarqué que la transformation (44) transforme $g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}) \equiv x_{n_\alpha}$ en un point de (x, x_{n_α}) qui donc ou bien coïncide avec x, ou bien est situé entre x_{n_α} et x; le module de la transformation (44) ne peut donc pas dépasser, en valeur absolue, celui de (46); ce dernier est donc aussi de l'ordre de $n_\alpha(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins.

Le module de $T^{n_\alpha}(\overline{\theta})$ diffère donc de m_α d'une quantité de l'ordre de $n(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins; par conséquent, le module de $T(\overline{\theta})$ diffère de $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ d'une quantité de l'ordre de $(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins; le rapport (42) ne peut donc pas devenir infiniment petit. C. Q. F. D.

41. Nous avons donc complètement démontré le théorème B : *Dans la famille* (38) *l'ensemble des valeurs de* θ, *qui correspondent à des transformations* 1, *est vide, l'ensemble, qui correspond à des transformations* 3″, *a une mesure nulle : les deux ensembles, qui correspondent aux transformations* 2 *et aux transformations* 3′, *ont tous les deux une mesure différente de zéro.*

Nous avons déjà remarqué que l'ensemble des valeurs prises par la fonction $k(\theta)$ lorsque θ varie en P_2 est contenu dans l'ensemble E des valeurs, qui ne satisfont pas à la condition (3); on pourrait peut-être tâcher de démontrer que, lorsque la famille (38) est *arbitraire*, ces deux ensembles coïncident. On aurait

---

(¹) Lorsque $g(x^\star, \overline{\theta})$ varie dans $(x, g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}))$, $g_{-s+1}(x^\star, \overline{\theta})$ varie dans $(g_{-s}(x, \overline{\theta}), g_{n_\alpha - s}(x, \overline{\theta}))$; en indiquant par x' et x'' deux points de ce dernier intervalle, il suffit alors de remarquer (§ 20) que le rapport $\dfrac{g_s^{1,0}(x', \overline{\theta})}{g_s^{1,0}(x'', \overline{\theta})}$ est infiniment peu différent de 1.

montré de cette façon que la condition (3) est réellement la moins restrictive qu'on puisse donner et l'on aurait montré en même temps qu'une transformation *arbitraire*, dont le module ne satisfait pas à la condition (3), n'est engendrée par aucune transformation infinitésimale.

NOTE.

Nous devons combler ici la lacune dans la déduction du paragraphe 18. Rappelons qu'on considérait, dans le cas I ($\alpha - \alpha' - 1$ pair), deux suites composées chacune de $\alpha - \alpha'$ intervalles : $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-\alpha'-1}$ et $B_0, B_1, \ldots, B_{\alpha-\alpha'-1}$, tels que

$$\begin{gathered}
A_0 = A_1 + A_2, \qquad A_2 = A_3 + A_4, \qquad \ldots, \\
A_{\alpha-\alpha'-5} = A_{\alpha-\alpha'-4} + A_{\alpha-\alpha'-3}, \qquad A_{\alpha-\alpha'-3} = A_{\alpha-\alpha'-2} + A_{\alpha-\alpha'-1}; \\
B_0 = B_1 + B_2, \qquad B_2 = B_3 + B_4, \qquad \ldots, \\
B_{\alpha-\alpha'-5} = B_{\alpha-\alpha'-4} + B_{\alpha-\alpha'-3}, \qquad B_{\alpha-\alpha'-3} = B_{\alpha-\alpha'-2} + B_{\alpha-\alpha'-1}.
\end{gathered}$$

On a les relations suivantes :

$$(47)\quad \left\{ \begin{array}{lll}
\dfrac{\dfrac{f(A_1)}{m(A_1)}}{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}} = 1 + \delta_0 \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'}}, & \dfrac{\dfrac{f(A_2)}{m(A_2)}}{\dfrac{f(B_1)}{m(B_1)}} = 1 + \delta_1 \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'+1}}, & \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-4})}{m(B_{\alpha-\alpha'-4})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-4} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-4}}, & \dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2})}}{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-3} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}, & \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}, & \dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-1}, &
\end{array} \right.$$

$\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\alpha-\alpha'-1}$ étant bornés en valeur absolue, indépendamment de α; *on veut évaluer la différence entre le rapport*

$$(48)\qquad \frac{\dfrac{f(A_0)}{m(A_0)}}{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}}$$

et l'unité.

Des deux dernières relations (47) on tire respectivement

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{\left(1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\right) f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2})}} = 1, \qquad \frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{(1 + \delta_{\alpha-\alpha'-1}) f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}} = 1,$$

et de ces équations, en additionnant entre elles les troisièmes et, respectivement, les quatrièmes lignes de deux fractions, on tire

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\right)}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1.$$

On a donc

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}. \tag{49}$$

De cette relation et de l'antépénultième des (47) on tire, respectivement,

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\right)m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1,$$

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2})}{\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-3}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\right)m(A_{\alpha-\alpha'-2})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1.$$

En additionnant entre elles les premières et, respectivement, les deuxièmes lignes des deux fractions on tire

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{\left\{\begin{array}{l}m(A_{\alpha-\alpha'-3})\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\dfrac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}\right.\\ \qquad\left.+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\dfrac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-3}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\dfrac{m(A_{\alpha-\alpha'-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}\right)\end{array}\right\}}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1,$$

et de cette dernière relation on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}&=1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}\\&\quad+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}.\end{aligned}$$

Nous pouvons continuer; nous aurons, pour $2\alpha'' < \alpha - \alpha' - 1$,

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}} = 1 + (\ldots); \tag{50}$$

entre parenthèses dans le second membre on a une somme de $2\alpha'' + 1$ termes.

En combinant la relation (50) avec

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}},$$

de la même façon qu'on a déjà combiné les deux dernières relations (47) on obtient

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}} = 1 + (\ldots)\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})} + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})};$$

en combinant ensuite cette dernière relation et

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-3}}$$

de la même façon qu'on a déjà combiné la relation (49) et l'antépénultième des (47) on tire

$$\begin{aligned}\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}} = 1 + \Bigg\{\Bigg[(\ldots)&\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\\ &+ \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\Bigg]\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\\ &+ \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-3}}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{51}$$

De (51) nous pourrons déduire la valeur de

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}}$$

de la même façon que nous avons déduit le second membre de la relation (51) du second membre de la relation (50) : nous devrons additionner à l'unité la somme de l'ensemble des termes entre accolades de (51) multipliées par $\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}$ et de deux nouveaux termes.

Il est désormais facile de voir, sur la base des considérations précédentes, qu'en poursuivant on obtient pour le rapport (50) la valeur

$$1+\sum_{\alpha''}^{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha'-2)}{}_{0}\;\delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{f(B_0)}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_0)}$$

$$+\sum_{\alpha''}^{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha'-2)}{}_{0}\;\delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-3}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{f(B_0)}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(A_0)}.$$

Le rapport $\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_0)}$ est de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-2\alpha''-1}}{c_{\alpha'-1}}$; chacun des $\alpha-\alpha'-1$ termes de deux sommations du second membre est alors de l'ordre de $p^{\alpha-\alpha'}$ au plus; *la différence entre le rapport* (48) *et l'unité est de l'ordre de* $(\alpha-\alpha')p^{\alpha-\alpha'}$ *au plus*.

On pourrait arriver à une conclusion semblable dans le cas II considéré au paragraphe 18.

ERRATUM.

Article de M. Paul Lévy, *Axiome de Zermelo et nombres transfinis* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, **67**, 1950, fasc. 1).

Page 15, note (1), *intervertir les noms* Albin Michel *et* Gallimard.