

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÊ VAN THIEM

Sur un problème d'inversion dans la théorie des fonctions méromorphes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 67 (1950), p. 51-98

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__51_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME D'INVERSION

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES

PAR M. LÊ VAN THIEM.

AVANT-PROPOS.

L'objet principal de ce travail ⁽¹⁾ est la résolution du problème d'inversion de la théorie de la distribution des valeurs dans le domaine rationnel. Le moyen utilisé est constitué par les surfaces que Ullrich a proposées et appelées surfaces à un nombre fini de bouts périodiques. Mais outre cet intérêt central, l'étude des surfaces mentionnées nous révèle aussi des vues instructives concernant l'influence de la dyssymétrie dans la structure topologique des surfaces de Riemann sur l'ordre de croissance de la fonction uniformisante $\omega = f(z)$, sur la distribution des racines de l'équation $f(z) = a$, et enfin sur le type de la surface.

Dans le Chapitre I, nous rappellerons les principaux résultats de la théorie de la distribution des valeurs de M. Nevanlinna, afin de formuler le problème d'inversion en question.

Dans le Chapitre II, nous expliquons la représentation par réseau des surfaces de Riemann à un nombre fini de points fondamentaux de ramifications, pour arriver à la définition des surfaces à bouts périodiques qui constituent le nœud de la solution du problème d'inversion posé.

Dans le Chapitre III, sera exposé brièvement la théorie des transformations quasi conformes qui vont nous servir de moyen d'investigation pour étudier la fonction uniformisante des surfaces mentionnées.

⁽¹⁾ Ce travail a été présenté comme Thèse de Doctorat d'État à la Faculté des Sciences de Paris le 2 mai 1949.

Le Chapitre IV montre comment obtenir une représentation « presque conforme » de ces surfaces sur le plan fini, c'est-à-dire une représentation quasi conforme qui, à certains points de vue, s'approche asymptotiquement de la représentation conforme dont l'existence est garantie par le théorème fondamental de Riemann.

Dans le Chapitre V, nous déterminerons à l'aide de cette représentation « presque conforme », l'ordre de la croissance de la fonction uniformisante. Nous verrons que cet ordre, contrairement aux prévisions de M. Ullrich, n'est rationnel que dans des cas exceptionnels et dépasse en général la valeur rationnelle prévue, égale à la moitié du nombre de bouts périodiques. Le rehaussement de l'ordre au-dessus de cette valeur minimale, dû à une structure en général dyssymétrique de la surface, n'est pas sans rapport avec le fait connu que la dyssymétrie favorise chez les surfaces de Riemann le type hyperbolique. Ici la conséquence de la dyssymétrie est la distribution en spirale des valeurs de la fonction uniformisante, ce qui explique pourquoi l'ordre de croissance s'élève au-dessus de la valeur minimale $\frac{m}{2}$ indiquée par le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors pour les fonctions possédant (c'est le cas de l'uniformisante des surfaces en question) m points critiques logarithmiques.

Le Chapitre VI étudie la distribution des valeurs de la fonction uniformisante au point de vue des défauts et indices. Cette étude montre que la structure périodique des surfaces partielles impose plus de conditions que M. Ullrich ne l'a prévu et prépare la solution du problème d'inversion posé.

Dans le Chapitre VII, nous abordons la solution du problème d'inversion, en indiquant comment il faut choisir les bouts périodiques pour les réunir en une surface W dont la fonction uniformisante possède les propriétés requises. Ce choix n'est pas unique et nous indiquons à la fin quels sont les bouts périodiques les plus simples qu'on pourrait prendre pour arriver au but.

Enfin, dans le dernier Chapitre VIII, nous donnons à l'aide des fonctions doublement périodiques, la solution du problème d'inversion dans le cas δ , nuls, ε , rationnels, cas non résoluble par les surfaces à bouts périodiques.

Les principaux résultats de ce travail ont été présentés au Congrès de l'A. F. A. S. à Genève et publiés dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 23, 1949.

Qu'il nous soit permis, en cet endroit, de remercier M. G. Valiron du bienveillant intérêt qu'il a toujours témoigné à nos études et recherches. Nous lui en gardons une bien vive gratitude.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

1. Soit $w = f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini $z \neq \infty$. On désigne par $n(r, a)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ dans le cercle $|z| < r$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité, et par $n_1(r, a)$ le nombre des racines multiples de la même équation, une racine multiple d'ordre k étant comptée $k - 1$ fois ⁽¹⁾. On définit alors

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a)}{t} dt, \quad N_1(r, a) = \int_0^r \frac{n_1(t, a)}{t} dt,$$

$$T(r) = \max N(r, a),$$

$$\delta(a) = 1 - \varlimsup \frac{N(r, a)}{T(r)}, \quad \varepsilon(a) = \varliminf \frac{N_1(r, a)}{T(r)}.$$

Les quantités $\delta(a)$ et $\varepsilon(a)$ s'appellent défaut et indice de la valeur a par rapport à la fonction $f(z)$. On a l'inégalité évidente

$$(1) \quad \delta(a) + \varepsilon(a) \leq 1.$$

2. Le noyau de la théorie de la distribution des valeurs est constitué par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Entre les défauts et indices d'un nombre quelconque de valeurs a_1, a_2, \dots, a_q existe la relation*

$$(2) \quad \sum_{v=1}^q \delta(a_v) + \sum_{v=1}^q \varepsilon(a_v) \leq 2.$$

Au point de vue topologique cela signifie que la surface engendrée par $f(z)$ (type parabolique) ne peut être trop fortement ramifiée, car $\delta(a_v)$ mesure pour ainsi dire la densité des points critiques transcendants sur a_v et $\varepsilon(a_v)$ celle des points de ramification algébrique.

Nous appelons *exceptionnelles*, les valeurs a pour lesquelles la somme $\delta(a) + \varepsilon(a)$ est positive : d'après (2) l'ensemble de telles valeurs est dénombrable. Il en résulte en particulier qu'on peut aussi définir $T(r)$ comme maximum de $N(r, a)$ pour tous les a appartenant à un certain voisinage c'est-

⁽¹⁾ Voir R. NEVANLINNA [1], [3]; G. VALIRON [1], [2].

à-dire à un continu : il n'est pas nécessaire de considérer tous les a du plan des w . Ceci trouve son application au Chapitre V.

3. Le problème d'inversion consiste à chercher une fonction $w = f(z)$ pour laquelle des valeurs données possèdent des défauts et indices donnés satisfaisant aux relations (1) et (2). Mais dans l'état actuel de la théorie il ne semble pas qu'on puisse attaquer ce problème dans toute sa généralité. En particulier le cas d'une infinité de valeurs exceptionnelles semble encore inaccessible. On ne connaît du reste aucune fonction avec une infinité de valeurs exceptionnelles. En ce qui concerne la somme $\sum_1^q \delta_v + \sum_1^q \varepsilon_v$, bien qu'on connaisse les exemples où elle n'atteint pas le maximum 2, la construction de telles fonctions avec une distribution donnée arbitrairement semble aussi dépasser les moyens dont on dispose actuellement. Finalement on est obligé de restreindre comme suit le problème d'inversion :

PROBLÈME D'INVERSION DE LA THÉORIE DE LA DISTRIBUTION. — *A chaque point a_v d'une suite a_1, a_2, \dots, a_q , on attache deux nombres positifs*

$$\delta_v = \delta(a_v), \quad \varepsilon_v = \varepsilon(a_v),$$

tels que

$$\delta_v + \varepsilon_v \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_1^q \delta_v + \sum_1^q \varepsilon_v = 2.$$

Construire une fonction méromorphe qui correspond à cette distribution.

4. R. Nevanlinna ⁽²⁾ a résolu ce problème dans le cas où tous les indices sont nuls : $\varepsilon_v = 0$, et les défauts δ_v rationnels, à l'aide des surfaces dites à un nombre fini de bouts logarithmiques (voir définition au Chapitre II).

Peu après, E. Ullrich ⁽³⁾ découvrit une classe de surfaces qu'il appelle surfaces à un nombre fini de bouts périodiques et qui sont les généralisations des précédentes. Il émit l'hypothèse qu'on pourrait résoudre à l'aide de ces surfaces les cas où les indices et les défauts sont rationnels. Il a prévu toutefois que, par suite de la périodicité des bouts, les indices ε_v doivent être choisis plus petits que 1. Nous verrons que cette restriction n'est pas suffisante : il faut que les sommes $\delta_v + \varepsilon_v$ elles-mêmes soient plus petites que 1 à moins que ε_v ne soit nul. Avec cette restriction le problème d'inversion de Ullrich peut alors être résolu à l'aide d'une classe très simple de surfaces à bouts périodiques.

⁽²⁾ R. NEVANLINNA [2].

⁽³⁾ E. ULLRICH [1], [2], [3].

CHAPITRE II.

SURFACES DE RIEMANN A UN NOMBRE FINI DE BOUTS PÉRIODIQUES.

5. Considérons une surface de Riemann F qui recouvre le plan des $w: w = f(z)$. Un point de ramification de la surface F correspond à une coordonnée $w = a$ bien déterminée. Mais il peut arriver que plusieurs points de ramification de F se projettent sur le même point a : nous disons que a est le point fondamental pour tous ces points de ramification. Par rapport à F , a s'appelle un point fondamental de ramification ou un *point fondamental* tout court.

Comme nous avons limité le problème d'inversion à un nombre fini de valeurs exceptionnelles : a_1, a_2, \dots, a_q , il est naturel de considérer des surfaces qui admettent ces points et seulement ces points comme points fondamentaux. Les points de la surface qui se projettent en un de ces points fondamentaux a_i peuvent être des points réguliers, ou des points critiques (algébriques ou transcendants), mais au moins l'un d'eux est point critique car autrement a_i ne sera pas considéré comme point fondamental. Il pourra nous arriver cependant de considérer des points fondamentaux apparents, sur lesquels la surface ne possède que des points réguliers.

6. *Le réseau de Speiser-Névanlinna*. — Les surfaces à un nombre fini de points fondamentaux sont susceptibles d'une représentation très commode introduite par A. Speiser et R. Nevanlinna ^(*), la représentation par *réseau* :

Soient a_1, a_2, \dots, a_q les points fondamentaux de la surface supposée étalée sur la sphère de Riemann. Par ces points nous traçons une courbe de Jordan simple fermée L qui divise la sphère en deux régions D_1 et D_2 simplement connexes. Si nous coupons la surface sur toute son épaisseur le long de L , elle se décomposera en un nombre fini ou infini d'exemplaires D_1 et D_2 . Nous considérons ces demi-feuillets D_1, D_2 comme des polygones; les points a_1, a_2, \dots, a_q en sont les sommets, et les arcs $(a_1 a_2), (a_2 a_3), (a_q a_1)$ en sont les côtés.

Les sommets d'un polygone D_v ($v = 1, 2$) sont de trois sortes :

- 1° Points de ramification d'ordre infini, autour desquels s'échangent une infinité de feuillets $D_1 + D_2$;
- 2° Points de ramification d'ordre $m - 1$ autour desquels se permutent circulairement $m(> 1)$ feuillets $D_1 + D_2$;

(*) A. SPEISER [1], R. NEVANLINNA [3].

3° Sommets apparents qui appartiennent à deux demi-feuillets seulement et sont par suite des points réguliers de la surface.

Pour représenter la surface W , on se donne un nombre (fini ou infini) de polygones curvilignes D_v^μ ($v = 1, 2; \mu = 1, 2, 3, \dots$) topologiquement équivalents à D_v , c'est-à-dire possédant le même nombre de sommets. On place ensuite ces polygones D_v^μ à l'intérieur d'un domaine plan simplement connexe, les uns à côté des autres, de manière à couvrir ce domaine une fois et sans lacune, et de manière que deux polygones D_1^μ, D_2^μ possèdent un côté $(a_i a_{i+1})$ en commun si et seulement si les demi-feuillets D_v qui leur correspondent ont le côté image en commun. Nous obtenons de cette façon un *carrelage polygonal* qui indique comment les demi-feuillets D_v doivent être reliés entre eux pour reconstituer la surface.

Les sommets intérieurs du carrelage sont ou bien des sommets apparents appartenant à deux polygones D_v^μ seulement, ou bien des sommets d'ordre $m-1$, communs à m polygones D_1^μ et à m polygone D_2^μ . Les sommets d'ordre infini sont les points frontières du carrelage.

Nous prenons maintenant dans chaque polygone du carrelage un point intérieur ou *nœud* et relions ce nœud avec ceux des polygones voisins par q segments $S_{1,2}, S_{2,3}, \dots, S_{q,1}$ sans points communs, de sorte que $S_{v,v+1}$ traverse le côté $(a_v a_{v+1})$ pour aboutir au point nodal du polygone voisin limité à ce côté. Ainsi deux nœuds peuvent être reliés par plusieurs segments (au plus $q-1$), c'est ce qui arrive si les polygones correspondants ont plusieurs côtés en commun.

La figure obtenue, qui est la figure duale du carrelage, s'appelle le *réseau* ou l'*arbre topologique* de la surface.

Ce réseau partage le domaine plan en « *domaines élémentaires* » qui correspondent aux points de ramification (véritables ou apparents) de façon biunivoque : à un point de ramification d'ordre $m-1$ ($1 \leq m \leq \infty$) correspond un domaine élémentaire limité par $2m$ côtés. Pour $m=1$, on a un « *diangle* » : il correspond à un point régulier de la surface qui se projette en un point fondamental a_v . Pour $1 < m < \infty$, on a un vrai polygone fermé, un *domaine algébrique*. Les polygones ouverts, limités par un nombre infini de segments du réseau, s'appellent *domaines logarithmiques* de la surface.

Chaque nœud du réseau représente un demi-feuillet D_1 ou D_2 de la surface, limité par la courbe fermée L : on l'indique d'ordinaire par un rond ou une croix, selon qu'il s'agit d'un demi-feuillet D_1 ou d'un demi-feuillet D_2 . De chaque nœud partent toujours q segments qui aboutissent à ν ($\nu \leq q$) nœuds voisins. A cause de l'existence des diangles, ν peut être inférieur à q . Si le nœud n'a que deux « voisins » : $\nu=2$, on dit qu'il est non ramifié. Il est dit *ramifié*, s'il a plus de deux « voisins » : $\nu \geq 3$. La façon dont les nœuds sont reliés entre eux par les segments nous indique comment les différents demi-

feuillet sont reliés entre eux dans la surface. Réciproquement, si nous nous donnons les points fondamentaux et la courbe fermée L qui les relie, le réseau détermine la surface de façon unique.

En particulier, si l'on a une représentation conforme plane de la surface, on obtient sans peine le réseau : le carrelage est formé par l'ensemble des courbes-images de L , le réseau s'en déduit aisément. Mais cela ne nous intéresse pas ici, car nous voulons justement partir des surfaces définies topologiquement pour étudier leur fonction uniformisante. Toutefois cette remarque nous permet de construire, pour fixer les idées, le réseau des surfaces engendrées par quelques fonctions usuelles. Nous indiquons dans les figures qui suivent, le carrelage en pointillé et le réseau en trait plein.

La figure 1a représente le réseau de la surface $w = z^2$. Le carrelage est composé de diangle de sommets $z = 0$ et $z = \infty$, qui sont les seuls points de ramification ici (d'ordre 1). Le réseau est un quadrilatère, dont l'intérieur et

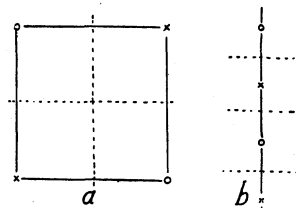


Fig. 1a et 1b.

l'extérieur sont les seuls domaines élémentaires et correspondent aux points de ramification mentionnés. On conçoit que toutes les fonctions rationnelles $R(u)$ du deuxième degré, telles que $R(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$, donnent naissance à des réseaux identiques à celui-ci. Seuls les deux points de ramification changent de place.

La figure 1b représente le réseau de la surface logarithmique $w = e^z$. Les deux domaines logarithmiques correspondent aux deux points de ramification logarithmique en $w = 0$ et $w = \infty$.

La figure 2 représente le réseau de la surface $w = \sin z$. La surface a deux points de ramification logarithmique sur le même point fondamental $w = \infty$ et

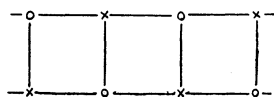


Fig. 2.

une infinité de points de ramification d'ordre 1 sur les points $+1$ et -1 . Le réseau a la forme d'une échelle.

La figure 3 représente le réseau de la surface engendrée par la fonction doublement périodique de Weierstrass $\omega = p(z)$. La surface n'a que des points de ramification algébrique d'ordre 1. Le réseau se compose de rectangles.

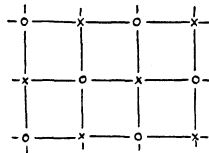


Fig. 3.

Enfin la figure 4 représente l'arbre « modulaire », c'est-à-dire le réseau de la surface engendrée par la fonction modulaire : c'est la surface de recouvrement universel du plan trois fois pointé. Contrairement aux cas précédents, cette surface est du type hyperbolique.

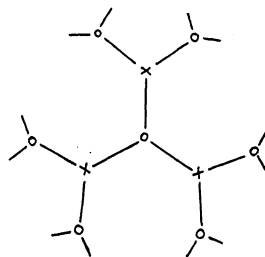


Fig. 4.

Une suite infinie de nœuds non ramifiés s'appelle d'après A. Speiser un bout logarithmique. Ainsi la surface $\omega = e^z$ se compose de deux bouts logarithmiques. En général si, abstraction faite d'un nombre fini de nœuds, le réseau se compose d'un nombre fini de tels bouts logarithmiques, la surface est dite à un nombre fini de bouts logarithmiques. La surface à un nombre fini de bouts périodiques sont les généralisations de celles-là.

7. Dans le cas d'une fonction rationnelle $R(z)$, le réseau est fermé. Ses domaines élémentaires, ses nœuds et ses segments forment sur la sphère de Riemann les faces, les sommets et les côtés d'un polyèdre, auquel nous pouvons appliquer la formule d'Euler : $K - S + E + 2 = 0$, où K , S et E représentent respectivement le nombre des côtés, des faces et des sommets.

Soit q le nombre de points fondamentaux, n le degré de $R(z)$, c'est-à-dire le nombre des racines de $R(z) = a$ et $n_1(a)$ le nombre des racines multiples, une racine d'ordre k étant comptée $k - 1$ fois. Le nombre de domaines élémentaires sur a , est alors $n - n_1(a)$. Le nombre de sommets ou nœuds est $2n$, celui des côtés ou segments est nq (car de chaque nœud partent q segments et chaque

segment aboutit à deux nœuds). Finalement on a

$$E = 2n, \quad K = nq, \quad S = \sum_{v=1}^q [n - n_1(a_v)] = nq - \sum_{v=1}^q n_1(a_v).$$

Mais la dernière somme $\sum_1^q n_1(a_v)$ est justement l'ordre total $\sum_1^q \lambda_i$ des points de ramification de la surface, de sorte que la formule d'Euler devient

$$\sum_1^q \lambda_i + 2 = 2n.$$

C'est la formule de Riemann-Hurwitz que nous aurons plus tard l'occasion d'employer.

8. *Les surfaces W à un nombre fini de bouts périodiques.* — Nous partons d'une fonction rationnelle $R(u)$ et formons la fonction méromorphe périodique

$$\omega = R(e^z).$$

L'inverse de cette fonction a deux points de ramification logarithmique ⁽⁵⁾ dont les traces sont $\omega = R(0)$ et $\omega = R(\infty)$. Si nous coupons la surface engendrée Φ_R , le long d'une courbe qui joint ces deux points de ramification logarithmique, la surface se partagera en deux demi-surfaces Φ' , que nous appelons, d'après E. Ullrich ⁽⁶⁾, bouts périodiques. Les bouts logarithmiques correspondent au cas particulier $R(u) = u$.

DÉFINITION. — *Les surfaces W à un nombre fini de bouts périodiques sont celles qui, abstraction faite d'une partie compacte appelée noyau, sont formées d'un nombre fini de bouts périodiques.*

En particulier les surfaces $\omega = R(e^z)$ appartiennent à cette classe, de même que les surfaces à un nombre fini de bouts logarithmiques. La surface $R(e^z)$ ne possède qu'un nombre fini de points fondamentaux : ce sont, en dehors des points $R(0)$ et $R(\infty)$ qui peuvent coïncider, les points fondamentaux de la surface algébrique $\omega = R(z)$. Il en résulte que les surfaces W à un nombre fini de bouts logarithmiques n'ont aussi qu'un nombre fini de points fondamentaux et sont par suite susceptibles d'être représentées par un réseau. On peut alors les caractériser de la manière suivante ⁽⁷⁾ :

⁽⁵⁾ On peut avoir $R(0) = R(\infty)$, les deux points de ramification logarithmique se projettent dans ce cas au même point fondamental.

⁽⁶⁾ E. ULLRICH [1].

⁽⁷⁾ E. ULLRICH [1].

Le réseau de W , abstraction faite d'un noyau formé d'un nombre fini de nœuds, doit présenter un nombre fini de domaines logarithmiques, séparés les uns des autres par un nombre égal de bouts périodiques de nature quelconque (fig. 6, 8 et 9).

D'après des critères de type connus ⁽⁸⁾, ces surfaces sont paraboliques. Comme nous verrons plus tard, le noyau fini n'a aucune importance dans la distribution des valeurs de la fonction uniformisante, seuls les bouts périodiques comptent. Nous allons les étudier de près.

Chaque bout périodique est la moitié d'une surface $\Phi_R : w = R(e^z)$, dont le réseau est périodique. Chaque réseau périodique se déduit du réseau de la fonction rationnelle $R(u)$ de la manière suivante ⁽⁷⁾ :

Nous dessinons sur la sphère de Riemann le réseau de $R(u)$ composé d'un nombre fini de nœuds. Si les points $R(0)$ et $R(\infty)$ n'étaient pas déjà parmi les points fondamentaux de $R(u)$, nous marquons encore par des « diangles » les points réguliers de la surface qui se projettent aux points $R(0)$ et $R(\infty)$ considérés comme points fondamentaux apparents.

Nous déformons alors topologiquement la sphère de Riemann en un cylindre, les points zéro et ∞ (pôle nord et pôle sud) allant aux deux bouts. Si l'on roule ce cylindre sur le plan des z , il imprimera sur ce plan le réseau périodique de $R(e^z)$.

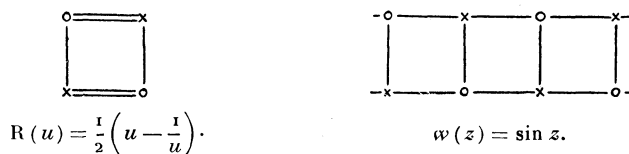


Fig. 5.

De cette façon on obtient par exemple les réseaux de e^z et de $\sin z$ à partir des réseaux de

$$R(u) = u \quad \text{et} \quad R(u) = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \quad (\text{fig. 5}).$$

9. Considérons maintenant une surface W avec m bouts périodiques. Nous désignons son réseau aussi par W . Entre deux bouts périodiques, nous avons un domaine logarithmique. Nous fixons autour du noyau un sens positif de rotation puis numérotions les bouts périodiques et les domaines logarithmiques de 1 à m , de manière que le $\nu^{\text{ième}}$ domaine logarithmique soit séparé du $(\nu+1)^{\text{ième}}$ par le $\nu^{\text{ième}}$ bout périodique (fig. 6).

Les nœuds du $\nu^{\text{ième}}$ bout qui se trouvent au bord du $\nu^{\text{ième}}$ domaine logarithmique seront dits nœuds frontières positifs de ce bout. Les nœuds frontières

⁽⁸⁾ H. WITTICH [1].

négatifs du même bout seront ceux qui sont situés au bord du $(\nu + 1)^{\text{ième}}$ domaine logarithmique. Chaque période d'un bout possède autant de nœuds que le réseau de la fonction rationnelle $R_\nu(u)$ correspondante, c'est-à-dire $2n_\nu$, si le

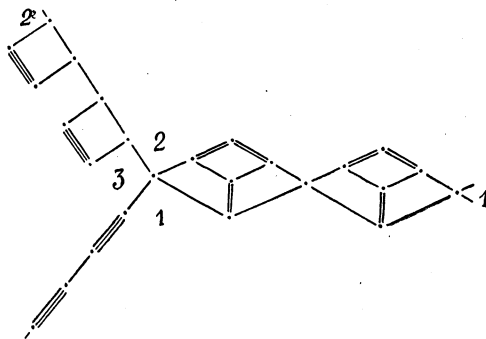


Fig. 6. — $n_1 = 3$, $d_1^+ = 1$, $d_1^- = 2$; $\Delta = 0$.

degré de R_ν est n_ν . Parmi ces $2n_\nu$ nœuds, soit $2d_\nu^+$ nœuds frontières positifs et $2d_\nu^-$ nœuds frontières négatifs (fig. 6). Les nombres d_ν^+ et d_ν^- ne sont autres que l'ordre infinitésimal de $R_\nu(u) - R_\nu(\infty)$ et $R_\nu(u) - R_\nu(0)$ au voisinage de $u = \infty$ et $u = 0$.

Par caractéristique de la surface W , nous désignons la quantité

$$\Delta = \left| \log \frac{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-} \right|.$$

Il est clair que Δ est indépendant de la numération des bouts périodiques.

10. Pour les surfaces à m bouts logarithmiques de R. Nevanlinna, l'ordre de la fonction uniformisante est $\frac{m}{2}$. H. Wittich a montré sur un exemple qu'il n'en est pas toujours ainsi pour les surfaces à m bouts périodiques ⁽⁹⁾. Au Chapitre V, nous précisons ce fait en établissant le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *La fonction uniformisante d'une surface W à m bouts périodiques et de caractéristique Δ est du type moyen de l'ordre*

$$\lambda = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right).$$

Pour $\Delta = 0$, les défauts et indices sont rationnels.

Nous appliquons le dernier résultat au problème d'inversion posé et démontrons au Chapitre VII le théorème suivant :

⁽⁹⁾ H. WITTICH [2].

THÉORÈME B. — *Sous les conditions*

$$1^{\circ} \quad \sum (\delta_v + \varepsilon_v) = 2;$$

$$2^{\circ} \quad \delta_v, \quad \varepsilon_v \quad (\text{rationnels});$$

$$3^{\circ} \quad \sum \delta_v \neq 0;$$

$$4^{\circ} \quad \delta_v + \varepsilon_v < 1 \quad \text{si } \varepsilon_v \text{ n'est pas nul};$$

on peut résoudre le problème d'inversion à l'aide des surfaces W de caractéristique nulle : $\Delta = 0$.

Nous soulignons le fait que la restriction 4° tient à la périodicité des bouts et non à la condition $\Delta = 0$.

Le cas $\sum \delta_v = 0$, $\varepsilon_v < 1$ peut être résolu à l'aide des fonctions doublement périodiques.

Finalement le théorème B est complété par le théorème suivant :

THÉORÈME C. — *On peut choisir les bouts périodiques utilisés dans le théorème B de manière que chaque bout possède trois points fondamentaux de ramification.*

Pour démontrer ces théorèmes, nous devons quitter un moment le champ des transformations conformes pour passer à une classe de transformations plus générales, les *transformations quasi conformes* utilisées par ailleurs avec succès dans le problème de type.

CHAPITRE III.

LES TRANSFORMATIONS QUASI CONFORMES.

11. Un domaine des $z = x + iy$ est appliqué de façon biunivoque sur un domaine des $w = u + iv$, par une transformation

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y),$$

supposée continuellement différentiable, sauf peut-être en des points et des lignes isolés. Un cercle infinitésimal devient une ellipse infinitésimale, dont le rapport des axes est

$$D = D_{w/z} = \max \left| \frac{dw}{dz} \right| : \min \left| \frac{dw}{dz} \right| = K + \sqrt{K^2 - 1},$$

avec

$$K = \frac{1}{2} \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{|u_x v_y - v_x u_y|}.$$

$D_{w/z}$ s'appelle le *coefficient de dilatation* de la transformation au point z . On vérifie facilement que $D_{w/z}$ possède les propriétés suivantes :

$$(3) \quad \begin{aligned} D_{w/z} &\geq 1 && (\equiv 1 \text{ seulement pour les transf. conformes}); \\ D_{w/z} &= D_{z/w}; \\ D_{w/z} &\leq D_{w/s} D_{s/z} && (\equiv D_{s/z}, \text{ si } D_{w/s} \equiv 1). \end{aligned}$$

La parenthèse exprime le fait que le coefficient de dilatation est invariant par rapport aux transformations conformes. Enfin, soient $d\sigma_z$ et $d\sigma_w$ les éléments de surface des plans des z et des w . En utilisant l'égalité

$$\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} = \max \left| \frac{dw}{dz} \right| \cdot \min \left| \frac{dw}{dz} \right|,$$

on établit aisément la double inégalité

$$\frac{1}{D} \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} \leq \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \leq D \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z},$$

qui remplace l'égalité $\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z}$ des transformations conformes.

12. Une telle transformation est dite *quasi conforme*, si le coefficient de dilatation reste inférieur à un nombre fixe. L'importance de ces transformations dans le problème de type des surfaces de Riemann résulte du théorème suivant ⁽¹⁰⁾ :

THÉORÈME 1. — *Si l'on a une application biunivoque du cercle unité $|z| < 1$ sur le plan fini $w \neq \infty$, alors nécessairement l'intégrale*

$$\int_{|z| < 1} D_{w/z} d\sigma_z$$

diverge.

En particulier, $D_{w/z}$ ne peut être borné. Il s'ensuit, en tenant compte de (3), que le type d'une surface de Riemann est invariant par une transformation quasi conforme ⁽¹¹⁾.

Mais ces transformations peuvent parfois être utilisées pour étudier la distribution des valeurs de la fonction uniformisante, dans le cas parabolique. On a le théorème suivant ⁽¹²⁾ :

THÉORÈME 2. — *Le plan fini des z étant appliqué sur le plan fini des w , si l'intégrale*

$$(4) \quad \int (D_{w/z} - 1) \frac{d\sigma_z}{|z|^2}$$

⁽¹⁰⁾ O. TEICHMÜLLER [1], LE VAN-THIEM [1].

⁽¹¹⁾ M. LAWRENTIEFF [1].

⁽¹²⁾ O. TEICHMÜLLER [1].

converge, alors il existe une constante γ telle que

$$|\omega(z)| = \gamma |z| [1 + \varepsilon(z)],$$

où $\varepsilon(z)$, pour $z \rightarrow \infty$, tend uniformément vers zéro.

Nous appelons une telle transformation *presque conforme*. D'une façon générale, nous pouvons parler d'une application presque conforme d'une surface de Riemann du type parabolique sur le plan fini des z , si l'intégrale ci-dessus converge.

13. Supposons maintenant qu'une surface parabolique W est appliquée, d'une part *conformément* sur le plan des ζ , ($\zeta = \rho e^{i\theta}$), d'autre part *presque conformément* sur le plan des z , ($z = re^{i\varphi}$), il en résulte une application presque conforme du plan des ζ sur le plan des z . Un cercle $|z| = r = \text{const.}$ est transformé en une courbe

$$\rho = \gamma r [1 + \varepsilon(r, \theta)],$$

ou, à une homothétie près,

$$(5) \quad \rho = r [1 + \varepsilon(r, \theta)],$$

où $\varepsilon(r, \theta)$ tend uniformément vers zéro, pour $r \rightarrow \infty$.

Marquons alors les images d'un point donné de la surface aussi bien dans le plan des z que dans le plan des ζ . Le nombre de ces points-images sera, d'après (5), asymptotiquement le même dans le cercle $|z| < r$ ou dans le cercle $|\zeta| < r$. Il en résulte qu'on peut évaluer les quantités $N(r, a)$, $N_1(r, a)$ et $T(r)$ aussi bien dans le plan des z que dans le plan des ζ .

Notre prochain objectif est donc d'obtenir une application plane et presque conforme des surfaces étudiées au Chapitre II.

CHAPITRE IV.

UNE APPLICATION PLANE ET QUASI CONFORME DES SURFACES A m BOUTS PÉRIODIQUES.

14. Soit W une surface de recouvrement du plan des ω , avec m bouts périodiques Φ'_ν ($\nu = 1, 2, \dots, m$).

Nous commençons par séparer chaque bout Φ'_ν du noyau, en le coupant le long d'une courbe C_ν reliant les deux points de ramification logarithmique correspondants. Pour simplifier les calculs futurs, nous choisissons C_ν , de sorte qu'elle se termine en des points critiques par un segment de droite de longueur supérieure à un nombre fixe δ (fig. 7).

Nous complétons la demi-surface Φ' , ainsi extraite en une surface Φ_R

$$w(z) = R(e^z),$$

puis nous appliquons conformément cette surface sur le plan des z , ($z = x + iy = re^{i\varphi}$). La courbe C_v devient une courbe Γ possédant deux

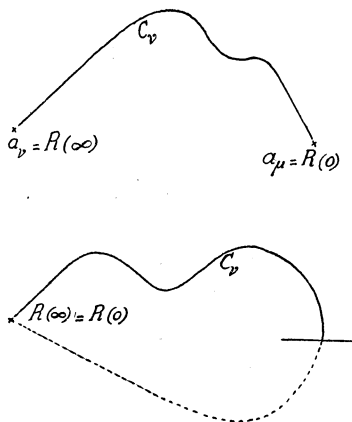


Fig. 7.

branches asymptotiques ⁽¹³⁾ dirigées respectivement dans la direction positive et négative de l'axe des x (fig. 8).

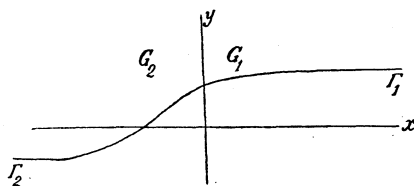


Fig. 8. — $G = G_1 + G_2$, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Nous pouvons supposer que l'image de la demi-surface Φ' soit le domaine situé au-dessus de la courbe Γ . L'axe des y divise G en deux parties, G_1 à droite et G_2 à gauche. Soient Γ_1 et Γ_2 les parties correspondantes de Γ . Ceci suppose que Γ ne rencontre l'axe des y qu'en un point, ce qu'on peut toujours obtenir par un choix convenable de la courbe C . Du reste cette précaution est même inutile puisque nous nous intéressons seulement à ce qui se passe en dehors d'un cercle fini.

15. Nous voulons maintenant, par une transformation quasi conforme spéciale, appliquer G_1 sur le premier quadrant du plan des $\zeta = \xi + i\eta$

$$\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

⁽¹³⁾ Ceci résulte de l'équation (6) écrite plus loin.

Γ_1 est l'image d'un arc de la coupure C , qui se termine par un segment rectiligne en un point de ramification logarithmique a_v . Par une transformation linéaire, renvoyons a_v à l'infini, de manière que le segment rectiligne devienne l'axe positif réel des w . On a alors entre w et z une relation de la forme

$$(6) \quad w(z) = R_v(e^z) = \frac{a^n e^{nz} + \dots + a_0}{b_{(n-d+)} e^{(n-d+)z} + \dots + b_0} \quad [a_n, b_{(n-d+)} \neq 0].$$

Par la condition $0 \leq \mathcal{I}z = y < 2\pi$, nous fixons une branche de la fonction inverse et l'arc Γ_1 est, abstraction faite d'une partie finie au début, défini par l'équation

$$(7) \quad \arg w(z) = 0.$$

L'arc Γ_1 est bien asymptote à la droite

$$y = -\frac{1}{d^+} \arg \frac{a_n}{b_{(n-d+)}}.$$

Sur elle, l'argument φ de z est, pour r suffisamment grand, une fonction biunivoque de r

$$\varphi = \varphi^*(r) \rightarrow 0.$$

Si nous posons alors

$$(8) \quad \rho = \frac{1}{d^+} \log |w(z)|,$$

à chaque point M de la courbe, extérieur à un cercle de rayon suffisamment grand, correspondra de façon biunivoque une valeur bien déterminée de ρ , qui sera par suite aussi une fonction biunivoque de r ⁽¹⁴⁾

$$\rho = \rho(r, \varphi) = \rho^*(r) \rightarrow r.$$

Nous définissons alors l'application quasi conforme en question par

$$(9) \quad \begin{cases} \rho = r - \frac{r - \rho^*(r)}{\varphi^*(r) - \frac{\pi}{2}} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right), \\ 0 = \varphi - \frac{\varphi^*(r)}{\varphi^*(r) - \frac{\pi}{2}} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right). \end{cases}$$

En utilisant les équations (6) et (7), on vérifie aisément que l'intégrale

$$(10) \quad \iint_{\substack{\xi \geq 0 \\ \eta \geq 0}} (D_{z/\xi} - 1) \frac{d\xi d\eta}{|\xi|^2}$$

converge ⁽¹⁵⁾.

⁽¹⁴⁾ $d^+ \rho$ n'est autre que la distance logarithmique du point courant M au point de ramification logarithmique a_v correspondant. Cette signification géométrique de ρ est importante pour les raccordements ultérieurs.

⁽¹⁵⁾ Ceci a son explication naturelle dans le fait que la transformation (9) se rapproche à l'infini asymptotiquement de l'identité.

Par la transformation (9) le domaine G_1 devient le premier quadrant $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Un point d'ordonnée y sur l'axe positif des y a pour image un point d'ordonnée égale $\eta = y$ de l'axe positif des η . A un point sur Γ_1 de paramètre ρ [voir (8)] correspond un point d'abscisse $\xi = \rho$ de l'axe positif des ξ .

De la même façon nous appliquons le domaine G_2 quasi conformément sur le deuxième quadrant $\xi \leq 0$, $\eta \geq 0$. Puis nous raccordons les deux quadrants le long de l'axe positif des η , en un demi-plan H . Sur l'axe négatif des ξ nous avons au lieu de (8) la relation

$$(11) \quad \rho = \frac{1}{d^-} \log |\omega(z)|,$$

où d^- et $\omega(z)$ se rapportent à l'autre point de ramification logarithmique du bout périodique Φ'_v considéré.

Pour simplifier l'écriture nous avons supprimé les indices dans les calculs précédents : en réalité, il fallait lire, dans les formules (6), (11), z_v , x_v , y_v , r_v , φ_v , ζ_v , ξ_v , η_v , ρ_v , θ_v , d_v^+ , d_v^- au lieu de z , x , y , ..., d^- . C'est ce que nous faisons désormais.

16. Nous appliquons de cette manière quasi conformément chaque bout périodique Φ'_v ($v = 1, 2, \dots, m$) sur un demi-plan H_v . Les coupures C_v sont supposées choisies de telle sorte que les bouts périodiques, abstraction faite d'un noyau fini compact, forment la surface entière (fig. 9).

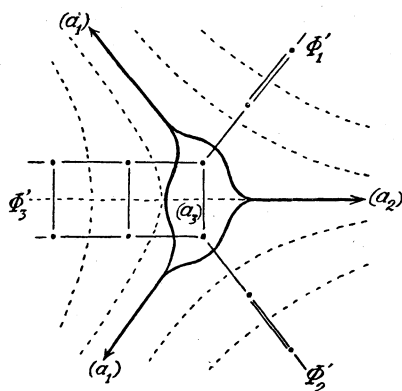


Fig. 9.

Nous représentons alors chaque demi-plan H_v sur un domaine angulaire H'_v d'ouverture $\frac{2\pi}{m}$ par la transformation conforme

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} r' = \left(\frac{d_1^+ d_2^+ \dots d_v^+}{d_1^- d_2^- \dots d_{v-1}^-} \right)^{\frac{2}{m}} \rho_v, \\ \varphi' = \frac{2}{m} \theta_v + (v-1) \frac{2\pi}{m}, \end{array} \right.$$

avec

$$\zeta_\nu = \rho_\nu e^{i\theta_\nu}, \quad z' = r' e^{i\varphi'} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m).$$

Il en résulte une application de la surface W sur le plan des z' : elle est, d'après (8) et (11), partout continue, sauf sur la coupure $\varphi' = 0$. A un point $x' = r'$ du bord supérieur correspond un point

$$(13) \quad x^- = \left(\frac{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-} \right)^{\frac{2}{m}} r' = e^{\frac{2\varepsilon\Delta}{m}} r',$$

du bord inférieur, ε étant égal à $+1$ ou -1 , selon que la parenthèse ci-dessus est plus grande ou plus petite que l'unité.

Si à ce plan des z' coupé le long du rayon $\varphi' = 0$, nous appliquons la transformation

$$(14) \quad z' = z^{1 + \frac{\varepsilon\Delta}{m\pi}} \begin{cases} r' > 1, & 0 < \varphi' < 2\pi, \\ r > e^{\frac{2\varepsilon\Delta}{m}}, & \frac{\varepsilon\Delta \log r}{m\pi} < \varphi < 2\pi + \frac{\varepsilon\Delta \log r}{m\pi}, \end{cases}$$

alors au couple de points $z' = r'$ et $z' = e^{\frac{2\varepsilon\Delta}{m}} r'$ liés par la relation (13) correspond au seul point $z = r$.

La transformation (14) est singulière à l'origine, aussi avons-nous exclu le cercle-unité du plan des z' . Mais ceci ne joue aucun rôle dans l'application des théorèmes 1 et 2 du Chapitre III.

17. La représentation (quasi conforme) de la surface W sur le plan du z est, par conséquent, continue en dehors d'un certain cercle. Nous voulons montrer qu'elle est presque conforme dans le sens du théorème 2, Chapitre III. Étant donné l'invariance du coefficient de dilatation par rapport aux transformations conformes [voir (3)], on a

$$D_{w/z} = D_{z/\zeta_\nu},$$

car les transformations $w \rightarrow z_\nu$, $\zeta_\nu \rightarrow z'$ et $z' \rightarrow z$ sont conformes. Nous pouvons par suite écrire

$$\begin{aligned} \int (D_{w/z} - 1) \frac{d\sigma_z}{|z|^2} &= \int (D_{w/z} - 1) \left| \frac{d \log z}{d \log z'} \right|^2 \frac{d\sigma_{z'}}{|z'|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right)^{-1} \int (D_{w/z} - 1) \frac{d\sigma_{z'}}{|z'|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^m \iint_{\Pi_\nu} (D_{z_\nu/\zeta_\nu} - 1) \left| \frac{d \log z'}{d \log \zeta_\nu} \right|^2 \frac{d\zeta_\nu d\eta_\nu}{|\zeta_\nu|^2} \\ &= \frac{4}{m^2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^m \iint_{\Pi_\nu} (D_{z_\nu/\zeta_\nu} - 1) \frac{d\zeta_\nu d\eta_\nu}{|z|^2} < \infty. \end{aligned}$$

Les dernières intégrales sous le signe de sommation sont en effet, d'après (10)

convergentes. D'après les théorèmes 1 et 2 (Chap. III) nous pouvons conclure que la surface W est de type parabolique et évaluer les quantités $N(r, a)$, $N_1(r, a)$, $T(r)$ de la fonction uniformisante dans le plan des z , son image presque conforme.

CHAPITRE V.

ORDRE DE CROISSANCE DE LA FONCTION UNIFORMISANTE $\omega(z)$.

18. L'ordre de croissance λ de la fonction $\omega(z)$ est défini par

$$\lambda = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

A un cercle $|z| = r$ du plan des z , correspond dans le plan des z' d'après (14) un arc de spirale situé entre les cercles

$$(15) \quad |z'| = r^\alpha \quad \text{et} \quad |z'| = e^{\frac{\varepsilon \Delta}{m\pi}} r^\alpha,$$

avec

$$\alpha = 1 + \frac{\Delta^2}{m^2 \pi^2}.$$

De l'autre côté, à un cercle $|z'| = r'$ correspondent, selon (12), m demi-cercles des m demi-plans H_ν ($\nu = 1, \dots, m$) dont le rayon est

$$(16) \quad |\zeta_\nu| = \rho_\nu = \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{\nu-1}^-}{d_1^+ d_2^+ \dots d_\nu^+} r'^{\frac{m}{2}}.$$

A un cercle $|\zeta_\nu| = \rho_\nu$ correspond de nouveau dans le plan des z_ν ⁽¹⁶⁾, image conforme de la surface $R_\nu(e^z)$ d'après (9), une courbe qui se confond asymptotiquement avec le cercle $|z_\nu| = \rho_\nu$. Pour les fonctions périodiques $\omega = R_\nu(e^{z_\nu})$ la fonction caractéristique $T_\nu(r)$ est asymptotiquement égale à

$$T_\nu(r) \cong \frac{n_\nu}{\pi} r.$$

Autrement dit le nombre de points images d'un point $\omega = a$ contenus dans le cercle $|z_\nu| \leq r_\nu \cong \rho_\nu$ est en général, c'est-à-dire sauf pour un nombre fini de valeurs a , asymptotiquement égal à $\frac{n_\nu}{\pi} r$, où n_ν est le degré de R_ν . Donc en général on a pour la fonction uniformisante $\omega(z)$ des surfaces W

$$(17) \quad B r^{\frac{m}{2}\alpha} < n(r, a) < A r^{\frac{m}{2}\alpha},$$

⁽¹⁶⁾ Nous avons supprimé plus haut, dans les nos 14 et 15 les indices ν pour ne pas encombrer l'écriture.

où les constantes A et B ne dépendent que des quantités n , d_1^+ , d_1^- , m et Δ . Par intégration on obtient

$$(18) \quad \frac{2}{m\alpha} B r^{\frac{m}{2}\alpha} < N(r, \alpha) < \frac{2}{m\alpha} A r^{\frac{m}{2}\alpha}.$$

Comme ceci vaut pour presque tous les α , on a aussi

$$\frac{2}{m\alpha} B r^{\frac{m}{2}\alpha} < T(r) < \frac{2}{m\alpha} A r^{\frac{m}{2}\alpha},$$

d'où nous concluons que

THÉOREME A. — *La fonction uniformisante d'une surface W à m bouts périodiques et de caractéristique Δ est du type moyen de l'ordre*

$$(19) \quad \lambda = \frac{m}{2}\alpha = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2\pi^2} \right).$$

Il sera démontré plus tard que dans le cas $\Delta = 0$, défauts et indices sont rationnels.

19. Nous comprenons maintenant pourquoi l'ordre de la fonction uniformisante des surfaces à m bouts périodiques peut dépasser la valeur $\frac{m}{2}$ que possède toujours l'ordre de l'uniformisante des surfaces à m bouts logarithmiques (fig. 10).

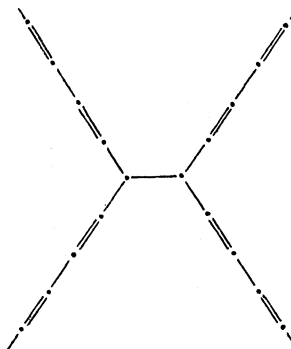


Fig. 10.

Dans ce dernier cas, on a en effet

$$d_1^+ = d_1^- = \dots = d_m^+ = d_m^- = 1,$$

et la caractéristique Δ est toujours nulle

$$\Delta = 0, \quad \lambda = \frac{m}{2}.$$

Une autre classe de surfaces à bouts périodiques où la caractéristique est toujours nulle, est celle des surfaces périodiques $R(e^z)$ caractérisée en particulier par

$$m = 2, \quad d_1^+ = d_2^- = d_1, \quad d_1^- = d_2^+ = d_2,$$

de sorte que l'on a

$$\Delta = 0, \quad \lambda = 1 \quad (\text{fig. 11}).$$



Fig. 11. — Surface W : $d_1 = 1, \quad d_2 = 2, \quad n = 2$.

Si nous remplaçons une moitié du réseau de $R(e^z)$ par sa symétrique comme l'indique la figure 12, nous obtenons une autre surface W' avec ⁽¹⁷⁾,

$$m = 2, \quad d_1^+ = d_2^+ = d_1, \quad d_1^- = d_2^- = d_2$$

et par suite

$$\Delta = \left| \log \frac{d_1^2}{d_2^2} \right|, \quad \lambda = 1 + \left(\frac{\log d_1 - \log d_2}{\pi} \right)^2.$$

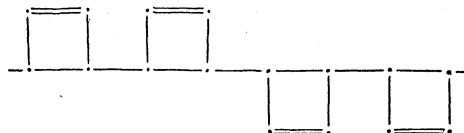


Fig. 12. — Surface W' .

Ici l'ordre s'est rehaussé, parce que nous avons détruit certaine symétrie axiale de la surface. En général nous pouvons dire que l'élévation de l'ordre au delà de la valeur minimale $\frac{m}{2}$ est causée par une structure dyssymétrique de la surface (au point de vue de la symétrie axiale).

Les racines de $\omega(z) = a$ sont partagées en groupes de manière que les points d'un groupe se répartissent asymptotiquement le long d'une spirale

$$r = e^{\frac{m\pi}{\Delta}(\varphi - \varphi_0)} \quad (\text{fig. 13}).$$

La courbure K au point $z = r$ de la courbe est d'autant plus forte que Δ est plus grand

$$K = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{m^2 \pi^2}{\Delta^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette distribution en spirales logarithmiques nous rappellent les considé-

⁽¹⁷⁾ H. WITTICH, [2]. Nous appelons une telle opération une antisymétrisation.

rations sur lesquelles A. Denjoy ⁽¹⁸⁾ s'est appuyé pour émettre l'hypothèse, démontrée plus tard par L. Ahlfors, que si une fonction entière possède m chemins asymptotiques différentes, son ordre est supérieur ou égal à $\frac{m}{2}$.

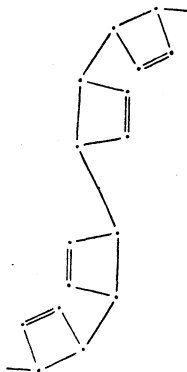


Fig. 13.

Supposons en plus que ces m chemins soient asymptotiquement des spirales

$$r = e^{M(\varphi - \varphi_0)} \quad (\nu = 1, 2, \dots, m),$$

alors en utilisant des transformations analogues à (14) nous pouvons préciser que l'ordre est supérieur à

$$\frac{m}{2}(1 + M^{-2}).$$

20. Enfin, nous allons montrer sur un exemple que ce rehaussement de l'ordre par la dyssymétrie est en étroite relation avec le fait bien connu que l'introduction d'une dyssymétrie dans la structure topologique d'une surface peut provoquer le passage du type parabolique au type hyperbolique ⁽¹⁹⁾.

Considérons pour cela le réseau des surfaces de la famille

$$W_n: R(e^z) = \left(1 + \frac{e^z}{n}\right)^n,$$

réseau formé d'une chaîne de domaines algébriques d'ordre n , attachés à la frontière d'un domaine logarithmique (fig. 11, pour $n = 2$). Ici on a

$$d_1 = 1, \quad d_2 = n.$$

Par « antisymétrisation » nous obtenons une surface W'_n avec $m = 2$, $\Delta = \log n^2$ (fig. 12 et 13). L'ordre de la fonction uniformisante est, d'après (19),

$$\lambda = 1 + \left(\frac{\log n}{\pi}\right)^2.$$

⁽¹⁸⁾ A. DENJOY [1], L. AHFORS [2].

⁽¹⁹⁾ P. J. MYRBERG [1], C. BLANC [1].

Tant que n (c'est-à-dire aussi l'ordre λ) reste fini, la surface W'_n appartient au type parabolique. Mais à la limite

$$n \rightarrow \infty, \quad R(e^z) \rightarrow e^{e^z}, \quad W_n \rightarrow W_\infty,$$

la surface « antisymétrique » W'_∞ devient hyperbolique, bien que la surface W_∞

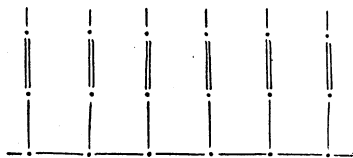


Fig. 14. — Surface $W_\infty : e^{e^z}$.

soit parabolique (fig. 14 et 15). La démonstration se fait comme pour n fini, seulement à la place de (14), on aura une transformation de la forme

$$z = f(z'),$$

où $|z|$ tend vers une valeur finie R , quand $|z'|$ augmente indéfiniment ⁽²⁰⁾. Les spirales considérées plus haut se rapprochent maintenant asymptotiquement du cercle $|z| = R$ (fig. 15).

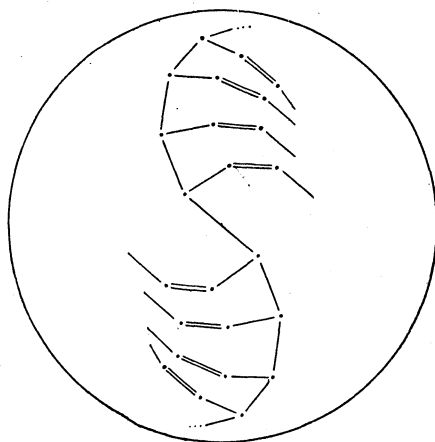


Fig. 15. — Surface W'_∞ .

Ainsi la distribution en spirale explique ici comme plus haut l'influence de la dyssymétrie sur l'uniformisation de la surface. En même temps nous voyons que l'importance revient plutôt à la symétrie axiale. C'est elle qui empêche dans

⁽²⁰⁾ C. BLANC [1].

les exemples cités la distribution en spirale, dont la conséquence est, soit le rehaussement de l'ordre de croissance de l'uniformisante, soit le passage au type hyperbolique. Évidemment dans les exemples intervient encore la périodicité, qui a le même effet que la symétrie axiale. Mais il est facile de fabriquer des exemples où le premier facteur (périodicité) est éliminé, pour mettre en évidence le rôle du dernier.

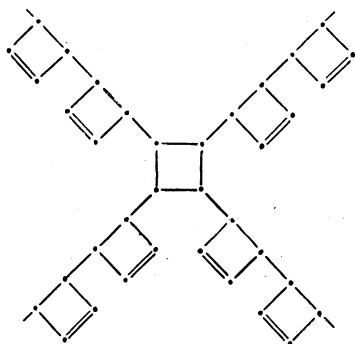


Fig. 16 a.

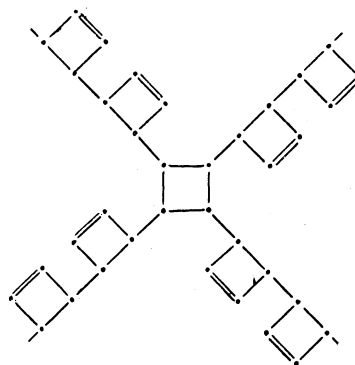


Fig. 16 b.

Ainsi, bien que le réseau 16 b se déduise du réseau 16 a simplement par la substitution d'une symétrie centrale à une symétrie axiale, l'ordre de l'uniformisante de 16 b est $1 + \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2$ fois plus grand que celui de l'uniformisante

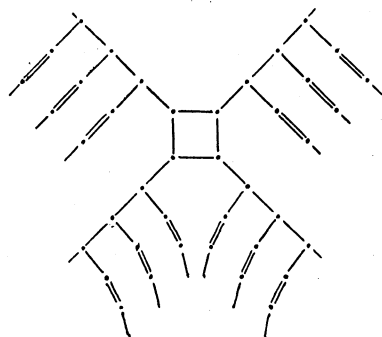


Fig. 17 a.

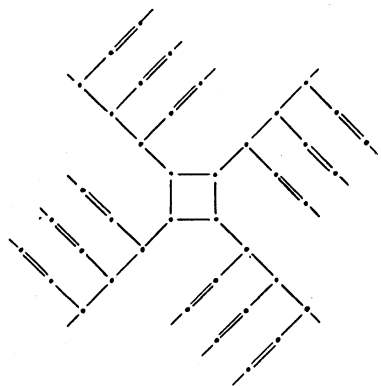


Fig. 17 b.

de 16 a, Il en est de même pour les surfaces 17 a et 17 b qui sont, l'une parabolique, l'autre hyperbolique.

CHAPITRE VI.

DÉFAUTS ET INDICES DANS LE CAS $\Delta = 0$.

21. Nous voulons établir dans ce chapitre quelques propositions concernant la fonction uniformisante $w(z)$ dans le cas $\Delta = 0$, dont nous aurons besoin pour la résolution du problème d'inversion.

La relation (14) s'écrit ici $z' = z$ et à un cercle $|z| \leq r$ correspondent d'après (16) m demi-cercles

$$|\zeta_i| \leq \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{i-1}^-}{d_1^+ d_2^+ \dots d_i^+} r^{\frac{m}{2}} \quad (i = 1, \dots, m),$$

des m demi-plans H_i

$$\zeta_i = \xi_i + i\eta_i, \quad \eta_i \geq 0.$$

Il s'ensuit que les doubles inégalités (17) et (18) du chapitre précédent peuvent être remplacées par des égalités asymptotiques⁽²¹⁾

$$n(r, a) \cong Br^{\frac{m}{2}\alpha},$$

$$N(r, a) \cong Br^{\frac{m}{2}\alpha}.$$

En particulier le rapport $\frac{n(r, a)}{N(r, a)} = \frac{m\alpha}{2}$ est indépendant aussi bien du rayon r que de la valeur a . Par suite, pour calculer $\delta(a)$ et $\varepsilon(a)$, nous pouvons considérer les quantités $n(r, a)$, $n_1(r, a)$ à la place de $N(r, a)$, $N_1(r, a)$.

Si l'on désigne alors par $\delta^i(a)$, $\varepsilon^i(a)$ les défauts et indices de a relativement à $R_i(e^z)$, on aura relativement à $w(z)$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta(a) = \frac{n_1 \frac{1}{d_1^+} \delta^1(a) + \dots + n_m \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+} \delta^m(a)}{n_1 \frac{1}{d_1^+} + \dots + n_m \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+}}, \\ \varepsilon(a) = \frac{n_1 \frac{1}{d_1^+} \varepsilon^1(a) + \dots + n_m \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+} \varepsilon^m(a)}{n_1 \frac{1}{d_1^+} + \dots + n_m \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^+ d_2^+ \dots d_m^+}}. \end{array} \right.$$

On peut obtenir les quantités δ^i et ε^i relatives à la fonction périodique $R_i(e^z)$ en calculant les défauts et indices « relatifs » à chaque période, ce que l'on peut faire en étudiant le réseau de la surface fermée engendrée par la fonction rationnelle $R_i(u)$.

(21) Il en résulte qu'on peut préciser que pour $\Delta = 0$ la fonction caractéristique est à croissance régulière (voir G. VALIRON [2]).

Le degré de R_i est n_i . A un point fondamental ⁽²²⁾ a_v , correspondent, dans la surface fermée $R_i(u)$, un certain nombre de points réguliers ou critiques algébriques. Un tel point apporte une contribution au défaut ou à l'indice de a_v selon qu'il devient ou non un point critique logarithmique quand on passe de $R_i(u)$ à $R_i(e^z)$. Le premier cas se présente seulement pour $a_v = R_i(\infty)$ ou $R_i(0)$ et nous avons appelé l'ordre ⁽²³⁾ du point considéré $d_i^+ - 1$ ou $d_i^- - 1$: l'apport au défaut $\delta^i(a_v)$ est alors $\frac{d_i^\pm}{n_i}$. Dans le second cas l'apport à l'indice $\varepsilon^i(a_v)$ est égal à l'ordre divisé par n_i , de sorte que si nous appelons e_v la somme des ordres (ou l'ordre total) des points de la seconde espèce, nous aurons

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon^i(a_v) = \frac{e_v}{n_i}, & \delta^i(a_v) = 0 & \text{si } a_v \neq R(\infty) \text{ et } R(0), \\ \varepsilon^i(a_v) = \frac{e_v}{n_i}, & \delta^i(a_v) = \frac{d_i^+}{n_i} & \text{si } a_v = R(\infty) \neq R(0), \\ \varepsilon^i(a_v) = \frac{e_v}{n_i}, & \delta^i(a_v) = \frac{d_i^-}{n_i} & \text{si } a_v = R(0) \neq R(\infty), \\ \varepsilon^i(a_v) = \frac{e_v}{n_i}, & \delta^i(a_v) = \frac{d_i^+ + d_i^-}{n_i} & \text{si } a_v = R(\infty) = R(0). \end{array} \right.$$

22. En particulier les δ^i et ε^i sont rationnels. D'après (20) il en est de même pour δ et ε ; c'est le complément au théorème A.

Si nous écrivons $\delta^i(a_v)$ sous la forme $\delta^i(a_v) = \frac{d_v}{n_i}$, la différence $n_i - (d_v + e_v)$ est égale au nombre des points de ramification sur a_v qui apportent une contribution à e_v : donc elle ne s'annule que si e_v est nul. Il s'ensuit que la somme $\delta^i(a_v) + \varepsilon^i(a_v)$ est inférieure à 1, si $\varepsilon^i(a_v)$ est positif. D'après (20) ceci vaut aussi pour la somme $\delta(a_v) + \varepsilon(a_v)$:

$$(22) \quad \delta(a_v) + \varepsilon(a_v) \leq 1, \quad < 1 \text{ si } \varepsilon(a_v) \neq 0.$$

Si l'on fait la somme pour tous les a_v on a

$$\sum_{v=1} \delta^i(a_v) + \sum_v \varepsilon^i(a_v) = \frac{\sum_v e_v + d_i^+ + d_i^-}{n_i} = \frac{2n_i}{n_i} = 2,$$

car la somme $\sum_v e_v + d_i^+ + d_i^-$ n'est autre que la somme des ordres de tous les points de ramification de la surface plus 2, ce qui fait bien $2n_i$ d'après la relation de Riemann-Hurwitz. On conclut, comme plus haut, la même chose

⁽²²⁾ Point fondamental par rapport à $w(z)$. Mais a_v peut être pour $R_i(u)$ seulement un point fondamental apparent, sur lequel $R_i(u)$ n'a que des points réguliers.

⁽²³⁾ L'ordre de multiplicité est défini de manière qu'un point régulier soit d'ordre nul. Il est égal à l'ordre infinitésimal diminué d'une unité.

pour δ et ε

$$(23) \quad \sum_{\nu=1}^q \delta(a_\nu) + \sum_{\nu=1}^q \varepsilon(a_\nu) = 2.$$

Nous écrivons finalement la relation évidente

$$(24) \quad \sum_{\nu} \delta(a_\nu) \neq 0.$$

Par la démonstration du théorème B, nous montrerons que les nombres rationnels

$$\delta_\nu = \delta(a_\nu), \quad \varepsilon_\nu = \varepsilon(a_\nu) \quad (\nu = 1, \dots, q)$$

ne sont pas reliés entre eux par aucune autre relation que (22), (23) et (24).

23. Si l'on a, pour tous les bouts périodiques Φ_i de la surface W ,

$$d_i^+ = d_i^- = d_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

alors la condition $\Delta = 0$ est automatiquement remplie et les formules (20) se simplifient en devenant

$$(25) \quad \begin{cases} \delta(a) = \frac{l_1 \delta^1(a) + \dots + l_m \delta^m(a)}{l_1 + \dots + l_m}, \\ \varepsilon(a) = \frac{l_1 \varepsilon^1(a) + \dots + l_m \varepsilon^m(a)}{l_1 + \dots + l_m}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(26) \quad l_i = \frac{n_i}{d_i},$$

et l_i ne dépend que du bout considéré. Nous disons que le bout est de caractéristique nulle et appelons l_i sa longueur réduite. Il n'est pas possible de résoudre le problème d'inversion posé rien qu'avec de tels bouts, mais les formules (25) peuvent être généralisées au moyen de la notion de « surfaces de composition ».

Surfaces de composition. — Soit W_1 et W_2 deux surfaces de caractéristique nulle possédant chacune un point de ramification logarithmique sur le même point fondamental a . Nous coupons chacune d'elles le long d'une ligne partant du point de ramification en question pour aboutir à un point intérieur de la surface, et telle que la trace sur le plan des w soit la même dans les deux cas.

Si nous relions alors les bords libres en croix, nous obtenons une surface W qui est aussi de caractéristique nulle : nous disons que W_1 et W_2 sont associables et écrivons

$$W = W_1 + W_2.$$

Pour chaque surface partielle W_i et par rapport au point de ramification loga-

rithmique mis en évidence, nous pouvons définir, par analogie avec (26), une longueur réduite L_i

$$L_i = \left(n_1 \frac{1}{d_1^+} + \dots + n_m \frac{d_1^+ \dots d_{m-1}^+}{d_1^+ \dots d_m^+} \right)_i \quad (i = 1, 2).$$

A cause de $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, L_i ne dépend pas du sens de rotation choisi pour la numération des bouts.

Si $\delta^1(a)$, $\varepsilon^1(a)$ et $\delta^2(a)$, $\varepsilon^2(a)$ sont respectivement les défauts et indices de W_1 et de W_2 , on aura, d'après (20), par rapport à W ,

$$(27) \quad \delta(a) = \frac{L_1 \delta^1(a) + L_2 \delta^2(a)}{L_1 + L_2}, \quad \varepsilon(a) = \frac{L_1 \varepsilon^1(a) + L_2 \varepsilon^2(a)}{L_1 + L_2}.$$

Les longueurs réduites s'ajoutent par composition ⁽²⁴⁾ : $L = L_1 + L_2$.

De la même manière une surface W peut être formée par la composition de plusieurs surfaces W_1, W_2, \dots , toutes de caractéristique nulle. Mais il faut bien comprendre qu'il s'agit là d'une composition successive, c'est-à-dire qu'on forme d'abord $W_1 + W_2$, puis $(W_1 + W_2) + W_3$, et ainsi de suite. Il n'est pas nécessaire que les W_i soient deux à deux « associables », c'est-à-dire possèdent des points de ramification logarithmique sur un même point fondamental, mais il faut seulement que W_i soit « associable » avec $(W_1 + W_2 + \dots + W_{i-1})$. On a ici, comme généralisation de (27),

$$(28) \quad \delta(a) = \frac{\sum L_i \delta^i(a)}{\sum L_i}, \quad \varepsilon(a) = \frac{\sum L_i \varepsilon^i(a)}{\sum L_i},$$

où $\delta(a)$ et $\varepsilon(a)$ sont les défauts et indices de la surface de composition au point a , et $\delta^i(a)$, $\varepsilon^i(a)$ ceux des surfaces partielles.

Comme surfaces partielles W_1, W_2, \dots , nous prendrons les surfaces périodiques $R(e^z)$ ou celles qui se composent de telles surfaces périodiques. Toutes ces surfaces sont de caractéristique nulle.

24. Voici un problème que nous aurons constamment à résoudre dans le chapitre suivant :

PROBLÈME. — *Étant donné deux surfaces « associables » W_1 et W_2 de longueurs réduites L_1 et L_2 , il s'agit de construire deux autres surfaces « associables » W'_1 et W'_2 satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° W'_1 et W'_2 possèdent respectivement les mêmes défauts et indices que W_1 et W_2 ;

⁽²⁴⁾ Cela à cause de $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, c'est ce qui fait l'intérêt de la composition de surfaces de caractéristique nulle.

2° Les longueurs réduites L'_1 et L'_2 de W'_1 et W'_2 sont dans un rapport (rationnel) donné.

Solution. — Soit

$$L_1 = \frac{N_1}{D_1}, \quad L_2 = \frac{N_2}{D_2}, \quad \frac{L'_1}{L'_2} = \frac{N'_1}{N'_2},$$

où D_i, N_i, N'_i sont des entiers, nous prenons alors pour W'_1 une surface qui se compose de $N'_1 N_2 D_1$ exemplaires W_1 et pour W'_2 une surface qui se compose de $N'_2 N_1 D_2$ exemplaires W_2 . D'après (28), défauts et indices n'ont pas changé, et les longueurs réduites sont

$$\begin{aligned} L'_1 &= (N'_1 N_2 D_1) L_1 = N'_1 N_2 N_1, \\ L'_2 &= (N'_2 N_1 D_2) L_2 = N'_2 N_1 N_2; \end{aligned}$$

elles sont bien dans le rapport donné.

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME D'INVERSION POSÉ.

25. Nous voulons construire une surface W de caractéristique nulle, qui corresponde au schéma suivant, dont la signification est évidente

$$(29) \quad \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_v & \dots & a_q \\ \partial_1 & \dots & \partial_v & \dots & \partial_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_v & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & \partial_v & \dots & \partial_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_v & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix},$$

où les nombres rationnels ∂_v et ε_v satisfont aux conditions (22), (23) et (24)

$$\partial_v + \varepsilon_v \leq 1, \quad < 1 \quad \text{si } \varepsilon_v \neq 0, \quad \sum_{v=1}^q (\partial_v + \varepsilon_v) = 2, \quad \sum \partial_v \neq 0.$$

Elles exigent en particulier que, à l'exception du cas $\partial_1 = \partial_2 = 1$ résolu par une transformée homographique de e^z , nous ayons $q \geq 3$, ce que nous supposons désormais.

Nous appelons un tel schéma un schéma de Ullrich. Si l'on peut construire la surface W correspondante, nous disons que le schéma est résoluble.

Toutes les matrices à deux lignes telles que (29) ne sont pas nécessairement des schémas de Ullrich, mais, si (29) est un schéma de Ullrich avec plus d'un ∂_v non nul, alors les schémas suivants sont aussi des schémas de Ullrich :

$$(30) \quad \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & \partial_v + \varepsilon_v & \dots & \partial_q \\ \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix},$$

$$(31) \quad \begin{pmatrix} \partial_1 & \dots & 0 & \dots & \partial_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \partial_v + \varepsilon_v & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}.$$

En effet, on vérifie facilement que les conditions (22), (23) et (24) sont remplies par chacun des schémas (30) et (31).

26. On a alors le lemme suivant :

LEMME. — Si les schémas (30) et (31) sont résolubles, alors le schéma (29) l'est aussi.

Démonstration. — Nous résolvons (30) et (31) respectivement par les surfaces W_1 et W_2 . D'après le n° 24 nous pouvons en déduire deux surfaces W'_1 et W'_2 qui résolvent aussi (30) et (31) et dont les longueurs réduites L'_1 et L'_2 (par rapport à un point de ramification logarithmique commun) sont dans le rapport $\delta_v : \varepsilon_v$. Par la réunion de W'_1 et W'_2 nous obtenons d'après (27) une surface W qui résout (29).
C. Q. F. D.

Nous exprimons symboliquement le fait en écrivant

$$(32) \quad (\delta_v + \varepsilon_v) \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_v & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_v & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \delta_v \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_v + \varepsilon_v & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} + \varepsilon_v \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \delta_v + \varepsilon_v & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}.$$

D'après ce lemme nous pouvons ramener le schéma général de proche en proche à une « combinaison linéaire » de schémas des deux sortes suivantes :

- a. Schémas avec un seul δ_v , non nul ;
- b. schémas dont chaque colonne contient un seul élément différent de zéro, soit δ_v , soit ε_v .

Les premiers schémas sont étudiés au n° 27 sous le nom de *schémas fondamentaux* de première espèce (33).

Les derniers schémas peuvent être caractérisés par la condition

$$\sum_{v=1}^q \delta_v \varepsilon_v = 0.$$

Ils s'appellent pour cette raison *schémas orthogonaux* (n° 28).

27. *Schémas fondamentaux*. — Ce sont les schémas qui correspondent aux fonctions périodiques $R(e^z)$.

Si l'on a $R(0) = R(\infty) = a_1$, on n'a qu'une valeur déficiente a_1 et le schéma de la distribution s'appelle schéma fondamental de première espèce

$$(33) \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} \quad (1^{\text{re}} \text{ espèce}).$$

Si l'on a $a_1 = R(0) \neq a_2 = R(\infty)$, il y a deux valeurs déficientes a_1 et a_2 .

Le schéma correspondant s'appelle schéma fondamental de seconde espèce

$$(34) \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} \quad (2^{\text{e}} \text{ espèce}).$$

La résolution de ces deux sortes de schémas est un problème algébrique. Si n est un dénominateur commun pour les nombres rationnels δ_v et ε_v , les schémas (33) et (34) peuvent s'écrire sous les formes

$$(35) \quad \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \frac{e_2}{n} & \frac{e_3}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & \frac{d_2}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \frac{e_2}{n} & \frac{e_3}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix},$$

où les nombres d_v et e_v sont entiers.

D'après (21) nous avons à construire une fonction rationnelle $R(u)$ de degré n , qui possède des points de ramification seulement sur les points fondamentaux a_1, a_2, \dots, a_q et d'après la répartition suivante :

1° Pour les schémas de première espèce :

Sur a_1 , un point de ramification $u^+ = \infty$ d'ordre $d^+ - 1$ et un point de ramification $u^- = 0$, d'ordre $d^- - 1$, avec $d^+ + d^- = d_1$; l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_1 .

Sur a_v ($v \geq 2$), l'ordre total des points de ramification est égal à e_v .

2° Pour les schémas de deuxième espèce :

Sur a_1 , un point de ramification $u_1 = \infty$ d'ordre $d_1 - 1$; l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_1 .

Sur a_2 , un point de ramification $u_2 = 0$, d'ordre $d_2 - 1$; l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_2 .

Sur a_v ($v \geq 3$), l'ordre total des points de ramification est égal à e_v .

Moyennant les relations (22) et (23), qui s'écrivent avec d_v et e_v ,

$$d_v + e_v \leq n, \quad < n \quad \text{si } e_v \neq 0; \quad \sum (d_v + e_v) = 2n,$$

ces deux problèmes sont résolubles : la première exprime que l'ordre total des points de ramification sur un point fondamental a_v est inférieur au degré de $R(u)$, la deuxième exprime la relation de Riemann-Hurwitz. La résolution peut s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. Mais nous allons donner en appendice ⁽²⁵⁾ une solution combinatoire en construisant directement le réseau de $R(u)$.

⁽²⁵⁾ Voir Appendices II et III.

Avec la fonction rationnelle $R(u)$ ainsi obtenue, nous formons la fonction méromorphe $R(e^z)$ qui, d'après (21), résout bien les schémas (33) et (34).

Une fois que les schémas fondamentaux sont résolus, la résolution du schéma général se ramène à un système d'équations diophantiennes. Mais la solution de ce système doit satisfaire à des conditions tellement compliquées, qu'on pourrait à peine s'en sortir et nous préférons ici la méthode combinatoire.

28. *Schémas orthogonaux.* — On peut, en modifiant l'ordre des points a_v s'il le faut, écrire un schéma orthogonal sous la forme

$$(36) \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{v+1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & \dots & \frac{d_v}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{e_{v+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix}.$$

Pour $v \leq 2$, nous avons un schéma fondamental, déjà résolu. Soit alors $v \geq 3$. Nous choisissons d'abord le dénominateur commun tel que la somme $d_1 + \dots + d_v$ soit paire et définissons le nombre d par

$$d_1 + d_2 + \dots + d_v = 2d \leq 2n.$$

Nous résolvons d'abord les schémas fondamentaux (de deuxième espèce) suivants :

$$(37) \quad \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_{v+1} & \dots & a_q \\ \frac{d}{n} & \frac{d}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_{v+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{n} & \frac{d}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_{v+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix}$$

pour toutes les combinaisons $i, j = 1, 2, \dots, v$.

La résolution de ces schémas fondamentaux d'après la méthode exposée au numéro précédent, fournit des bouts périodiques Φ'_{ij} de caractéristique nulle et tous de même longueur réduite [voir n° 23, formule (26)]

$$l_{ij} = \frac{n}{d}.$$

Nous construisons, d'après le n° 23, avec les bouts Φ'_{ij} , une surface W à $2d$ bouts périodiques telle que parmi les $2d$ points de ramifications logarithmiques de la surface, il y ait, sur le point fondamental a_i , exactement d_i tels points ($i = 1, 2, \dots, v$). Chacun de ces d_i points apporte au défaut de a_i une contribution égale à $\frac{d}{dn} = \frac{1}{n}$, si bien que le défaut total de a_i atteint la valeur voulue $\frac{d_i}{n} = \delta_i$. D'autre part, l'indice de a_k ($k < v$) par rapport aux Φ'_{ij} est toujours ε_k , de sorte que par rapport à W , on a aussi $\varepsilon(a_k) = \varepsilon_k$. Donc la surface W résout bien le schéma orthogonal (37).

On remarque que pour $\nu = q$, tous les ε sont nuls et l'on a le schéma résolu par M. Nevanlinna. Ce qui précède généralise justement la méthode qu'il a employée.

Avec les schémas fondamentaux et les schémas orthogonaux, nous avons résolu tous les schémas (29) et nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME B. — *Sous les conditions :*

$$\begin{aligned} 1^\circ & \sum_{\nu=1}^q \delta_\nu + \sum_1^q \varepsilon_\nu = 2; \\ 2^\circ & \delta_\nu, \varepsilon_\nu \text{ rationnels}; \\ 3^\circ & \sum_1^q \delta_\nu \neq 0; \\ 4^\circ & \delta_\nu + \varepsilon_\nu \leq 1, \quad < 1 \text{ si } \varepsilon_\nu \neq 0; \end{aligned}$$

on peut résoudre le problème d'inversion à l'aide des surfaces W à un nombre fini de bouts périodiques et de caractéristique Δ nulle.

29. On peut se demander quel est le plus petit nombre m de bouts périodiques dont on a besoin pour résoudre un schéma donné. Ce sera pour q fixe une fonction $m(\delta_i, \varepsilon_i)$ des nombres δ_i et ε_i .

De toute façon, si la méthode exposée a été commode pour démontrer la possibilité de résoudre le problème d'inversion posé, le procédé suivant donne plus rapidement la solution et nécessite un moins grand nombre de bouts périodiques.

Dans le schéma général (29)

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix},$$

considérons les ε_ν pour lesquels δ_ν est non nul. S'il le faut, nous changeons l'ordre des a_ν , de manière que ces ε_ν soient les r premiers indices rangés par ordre décroissant

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_r & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_r & \varepsilon_{r+1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix},$$

avec

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_r, \quad r \leq q.$$

Pour $r \leq 2$, nous avons un schéma fondamental. Soit alors $r \geq 3$. Si pour tout $\nu \leq r$, l'inégalité

$$(38) \quad \varepsilon_\nu + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^q \delta_\mu < 1$$

est vérifiée, nous pouvons encore appliquer la méthode utilisée pour résoudre les schémas orthogonaux, en considérant les schémas

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j & a_{r+1} & \dots & a_q \\ \delta & \delta & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_i & \varepsilon_j & \varepsilon_{r+1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{2} \sum_1^r \delta_\mu,$$

pour toutes les combinaisons $i, j = 1, 2, \dots, r$. Un schéma tel que toutes les inégalités (38) soient vérifiées, s'appelle un schéma quasi orthogonal et se résout moyennant $2d = d_1 + d_2 + \dots + d_r$ bouts périodiques avec les notations du n° 28.

Si pour un et un seul indice, ε_1 par exemple, on a

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum_q^1 \delta_\mu \geq 1,$$

nous décomposons d'abord le schéma correspondant en deux schémas quasi orthogonaux d'après la formule

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 - \varepsilon_2) \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \begin{pmatrix} 0 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_1 + \delta_1 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} + \delta_1 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \delta_1 - \varepsilon_2 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

La signification d'une telle formule a été expliquée à la fin du n° 26 (32). On vérifie aisément à l'aide des relations

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_r, \quad \varepsilon_1 + \delta_2 < 1, \quad \varepsilon_1 + \delta_1 + \varepsilon_2 + \delta_2 < 2,$$

que les deux schémas du deuxième membre sont bien quasi orthogonaux.

Finalement, supposons qu'on ait pour deux indices, ε_1 et ε_2 par exemple, les inégalités

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum_1^q \delta_\mu \geq 1, \quad \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sum_1^q \delta_\mu \geq 1.$$

Ceci entraîne, à cause de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sum \delta_\mu \leq 2$,

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum \delta_\mu = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sum \delta_\mu = 1, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_q = 0,$$

autrement dit notre schéma se réduit à

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici l'orthogonalisation (n° 28) devient nécessaire et se fait en deux étapes.

Cette méthode nous donne en outre un renseignement sur la question posée : le nombre minimum m de bouts à prendre, qui est égal à 1 dans le cas où il y a au plus deux δ , non nuls, dépend en général essentiellement du plus petit

dénominateur commun n des nombres δ_v , ε_v et de la somme $d_1 + \dots + d_q$ correspondante.

30. D'un point de vue opposé, on peut aussi se poser une question : quels sont les bouts périodiques les plus simples qu'on pourrait prendre pour résoudre le schéma général sans se soucier du nombre m de ces bouts.

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier cette question pour les schémas suivants :

$$(39) \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_q \\ \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_q \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}.$$

Nous supposons, dans les deux cas, $q > 3$. Nous pouvons alors ramener le premier schéma à une « combinaison linéaire » de schémas de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_i & a_j \\ \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q),$$

pour tous les couples $i, j = 2, 3, \dots, q$. De même nous pouvons ramener le second schéma à une combinaison de schémas

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_i & a_j \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_q),$$

pour $i, j = 3, 4, \dots, q$. La méthode est la même que dans la résolution des schémas orthogonaux (n° 28). Finalement, si nous comptons encore les cas $q \leq 3$, la résolution des schémas (39) se ramène à celle des trois schémas suivants :

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Montrons que le dernier schéma se laisse encore ramener aux deux premiers. Nous distinguons pour cela trois cas :

1° $2\varepsilon < 1$. — Nous écrivons simplement

$$2 \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

2° $2\varepsilon \geq 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. — On aura alors $2\delta \leq 1$ et par suite $2\delta^2 \leq \frac{1}{2}$, si bien qu'on peut écrire

$$(2 + 2\delta) \begin{pmatrix} \delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta^2 & 1 - \delta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta^2 & 1 - \delta^2 \end{pmatrix} + 2\delta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3° $2\varepsilon \geq 1$, $\delta_1 > \delta_2$. — On a toujours $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$, de sorte qu'on peut faire la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_2) \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = & \delta_1^2 \begin{pmatrix} \delta_1 + \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\ & + \delta_2^2 \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 + \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\ & + 2\delta_1\delta_2 \begin{pmatrix} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} & \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui nous ramène au cas 2°.

Nous pouvons ainsi énoncer le complément suivant au théorème B :

THÉORÈME C. — *Pour résoudre le problème d'inversion posé, on peut n'utiliser que des bouts périodiques qui sont ramifiés seulement sur $q = 3$ points fondamentaux et qui correspondent aux schémas suivants dits schémas élémentaires :*

$$(41) \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Évidemment, on ne peut abaisser davantage le nombre q des points fondamentaux, car les seuls bouts à deux points fondamentaux sont les bouts logarithmiques.

30. Si nous étions partis de ce résultat, nous aurions pu simplifier la démonstration du théorème B, c'est-à-dire de la possibilité de résoudre le problème d'inversion, en ramenant d'abord, par une transformation linéaire, les trois points fondamentaux a_1, a_2, a_3 sur une même droite, avant de représenter les bouts périodiques sur un demi-plan. Nous choisissons alors comme courbe C un segment de droite joignant les deux points de ramification logarithmique du bout périodique, et la courbe Γ , son image, sera aussi, par raison de symétrie, une droite, de sorte que les domaines G_1 et G_2 sont eux-mêmes déjà des quadrants [n° 14, (fig. 4)].

D'un autre côté nous aurions, au lieu des schémas fondamentaux (33) et (34), seulement à résoudre les schémas (41), ce qui conduit à un problème algébrique fort simple : il s'agit de construire une fonction rationnelle, qui possède au plus cinq points de ramification répartis sur trois points fondamentaux. Ceci peut se simplifier encore.

Nous allons montrer que le problème d'inversion posé peut se ramener finalement à la construction de fonctions rationnelles $R(u)$, avec trois points de ramification.

Il en est déjà ainsi pour le second des schémas (41). Pour le premier, nous

le décomposons de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (d_1 + e_1 - 1) \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} &= (d_1 + e_1 - 1) \begin{pmatrix} \frac{2d_1}{2n} & 0 & 0 \\ \frac{2e_1}{2n} & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n} \end{pmatrix} \\
 &= (d_1 - 1) \begin{pmatrix} \frac{(2d_1 + 2e_1 - 1) + 1}{2n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n} \end{pmatrix} \\
 &\quad + e_1 \begin{pmatrix} \frac{1+1}{2n} & 0 & 0 \\ \frac{2d_1 + 2e_1 - 2}{2n} & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nous avons bien encore pour $R(e^z)$, quatre points de ramification dans l'avant-dernier schéma ($d^- = 1$) et cinq points de ramification pour le dernier ($d^+ = d^- = 1$); mais on a, dans les deux cas, seulement trois points de ramification pour la fonction rationnelle $R(u)$: un point de ramification logarithmique dans le premier cas, et deux points de ramification logarithmique dans le second cas proviennent des points réguliers de $R(u)$.

C. Q. F. D.

31. Nous avons donc à résoudre seulement le problème suivant :

PROBLÈME. — *Construire une fonction rationnelle R qui, sur chaque point a_ν ($\nu = 1, 2, 3$), possède un point de ramification d'ordre λ_ν .*

Évidemment les λ_ν donnés ne peuvent être tout à fait arbitraires. D'abord leur somme doit être paire, puisqu'on doit avoir $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2n - 2$, où n est le degré de R . Puis il faut alors que chaque λ_ν soit au plus égal à $n - 1$, ce qui entraîne que chaque λ_ν doit être au plus égal à la somme des deux autres (inégalité des triangles) :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \text{ paire, } \lambda_\alpha \leq \lambda_\beta + \lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

Solution. — Nous résolvons ce problème en construisant le réseau $R(u)$. Nous dessinons d'abord dans le plan des u un polygone de $2\lambda_1 + 2$ sommets et côtés (fig. 18). L'extérieur de ce polygone doit représenter le domaine algébrique (a_1). Nous numérotons alors les sommets de 1 jusqu'à $2\lambda_1 + 2$ et relierons le premier sommet avec le $(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2)^{\text{ième}}$ ⁽²⁶⁾ par une suite de $\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1$ nœuds reliés par $\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 + 1$ segments. Le polygone primitif est ainsi divisé en deux polygones, l'un à $2\lambda_2 + 2$ sommets, l'autre

(26) D'après ce qui précède, $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + 2 = 2n - \lambda_3$ est un nombre pair positif, de même que $\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1$.

à $2\lambda_3 + 2$ sommets. Ces polygones doivent représenter les domaines algébriques (a_2) et (a_3) . Pour obtenir le complexe voulu, il reste à compléter la figure par des « diangles » représentant les points réguliers sur a_1 , a_2 et a_3 .

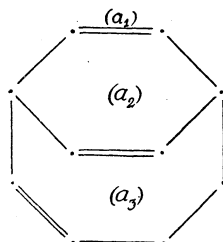


Fig. 18 : $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

On voit que la solution est unique.

32. Nous avons résolu le problème d'inversion sous certaines conditions. Nous voulons maintenant étudier, pour chacune d'elles, la possibilité de s'en affranchir :

a. $q < \infty$. — Comme nous avons dit dans l'Introduction, le problème d'inversion pour une infinité de valeurs exceptionnelles a , semble encore inaccessible avec les moyens actuels. En particulier, cela nous oblige à quitter le champ des surfaces à un nombre fini de points fondamentaux, c'est-à-dire la représentation commode par réseau, si nous voulons nous en tenir à la méthode géométrique. Aucune des fonctions connues ne présente une infinité de défauts et d'indices. On connaît des fonctions telles que

$$w(z) = \int_0^z e^{et} dt,$$

qui présente une infinité de valeurs asymptotiques finies ⁽²⁷⁾. Mais leurs défauts sont nuls par raison de symétrie. On pourrait espérer obtenir des défauts positifs en rendant « dyssymétrique » le noyau de l'intégrale. On part pour cela du réseau de la surface $f(z) = e^{e^z}$, ramifiée sur les points $f(z) = 0, 1$ et ∞ (fig. 14). Dans le réseau, tous les domaines logarithmiques sur le point ∞ sont équivalents. En introduisant des nœuds non ramifiés entre les deux nœuds ramifiés, situés au bord de ces domaines, on pourrait détruire cette symétrie (fig. 19). La fonction uniformisante $f_1(z)$ reste entière, son intégrale

⁽²⁷⁾ Ce sont

$$a_\nu = i \int_0^{(2\nu+1)\pi} e^{ey} dy + \int_0^\infty e^{-ex} dx \quad (\nu = 1, 2, \dots, \infty).$$

est une fonction uniforme

$$w_1(z) = \int_0^z f_1(t) dt$$

et possède aussi une infinité de valeurs asymptotiques finies, mais qui, n'étant plus « équivalentes », pourraient avoir des défauts positifs.

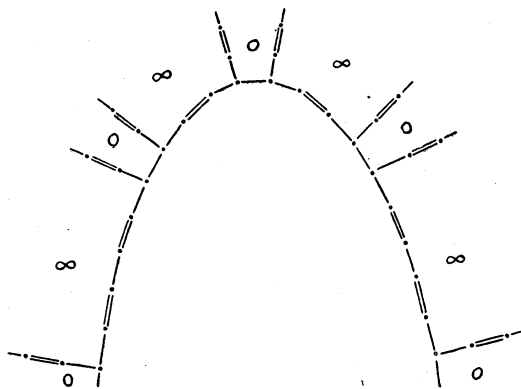


Fig. 19. — Surface $f_1(z)$.

b. $\sum (\delta_v + \varepsilon_v) = 2$. — Il résulte d'un théorème de Teichmüller, que si la surface ne possède qu'un nombre fini de points fondamentaux de ramification, la somme totale des indices et des défauts atteint la valeur totale des indices maximum 2, de sorte que le problème d'inversion dans le cas $\sum (\delta_v + \varepsilon_v) = \alpha < 2$ présente la même difficulté que dans le cas précédent : la surface doit présenter des ramifications sur une infinité de points fondamentaux. La fonction intégrale $w(z)$ précédente, pour laquelle cette somme est égale à 1, possède bien une infinité de points fondamentaux de ramification ; ce sont, entre autres, les valeurs asymptotiques $a_v (v = 1, \dots, \infty)$.

c. $\delta_v + \varepsilon_v$ ne peut, à cause de la périodicité des bouts, prendre la valeur 1, à moins que l'on ait $\delta_v = 1$ et alors $\varepsilon_v = 0$. En particulier on a toujours $\varepsilon_v < 1$.

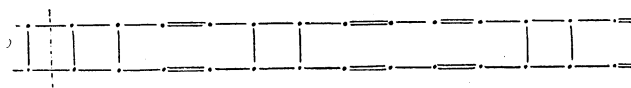


Fig. 20.

En modifiant les bouts périodiques de la manière indiquée dans la figure 20 pour obtenir des bouts pour ainsi dire pseudo-périodiques, E. Ullrich ⁽²⁸⁾ a pu

(28) E. ULLRICH [2].

réaliser des surfaces dont un point fondamental de ramification possède l'indice maximum 1. On pourrait penser à utiliser ces bouts pour étendre légèrement le problème d'inversion. Mais alors la méthode de la représentation presque conforme utilisée n'est plus applicable, car elle utilise essentiellement le fait que si $R(u)$ est infini pour u infini, on a asymptotiquement

$$\log R(e^z) \cong d^+ |z|,$$

quand z s'éloigne indéfiniment sur l'axe des x positifs. Il n'en est plus ainsi pour l'uniformisante des surfaces telles que celle de la figure 20 : ceci est en rapport avec le fait que la distribution des zéros d'une fonction sur l'axe imaginaire conditionne sa croissance sur l'axe réel.

Dans certains cas, la difficulté tient à autre chose. Ainsi, à cause de la restriction $\delta_v + \varepsilon_v < 1$, nous avons dû exclure les cas $q = 2$, avec indices positifs, tels que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce schéma, d'apparence très simple, ne peut être résolu pourtant, non seulement par les surfaces à bouts périodiques, mais non plus par les surfaces à un nombre fini de points fondamentaux. Donc nous nous heurtons ici à la difficulté rencontrée en a et b : il faut chercher la solution parmi les surfaces à un nombre infini de points fondamentaux de ramification.

d . La restriction $\sum \delta_v \neq 0$ tient à l'existence des points de ramification logarithmique. On peut la lever au moyen des fonctions doublement périodiques. C'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

LE CAS $\sum \delta_v = 0$ ET LES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

33. Considérons la fonction elliptique définie par

$$p'^2(z) = [p(z) - e_0][p(z) - e_1][p(z) - e_2][p(z) - e_3].$$

L'arbre topologique (*fig. 21*) de la surface engendrée est un réseau rectangulaire : $p(z)$ ne possède sur les quatre points fondamentaux e_i ($i = 1, 2, 3, 4$) que des points de ramification algébrique d'ordre 1 et correspond au schéma

de distribution suivant :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_0 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les défauts manquent et la somme des indices atteint le maximum 2. Dans

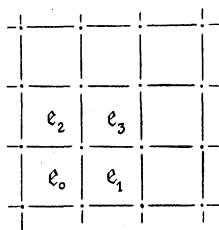


Fig. 21.

chaque parallélogramme des périodes, l'équation $p(z) = a \neq \epsilon_i$ a deux racines, β et β' .

34. Soit maintenant $R(u)$ une fonction rationnelle de degré n et a_1, \dots, a_q l'ensemble des points fondamentaux de $R(u)$ plus les points $R(\epsilon_0)$, $R(\epsilon_1)$, $R(\epsilon_2)$, $R(\epsilon_3)$ ⁽²⁹⁾ considérés comme points fondamentaux apparents, s'ils ne sont pas déjà parmi les points fondamentaux véritables. Supposons que sur a_ν ($\nu = 1, 2, \dots, q$), $R(u)$ possède des points de ramification a_ν^μ ($\mu = 1, 2, \dots, k_\nu$) d'ordre λ_ν^μ dont la somme est

$$\lambda_\nu = \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \lambda_\nu^\mu.$$

Nous avons, d'après la relation de Riemann-Hurwitz,

$$\sum_{\nu, \mu} \lambda_\nu^\mu = \sum_{\nu} \lambda_\nu = 2n - 2.$$

Formons alors la fonction elliptique paire ⁽³⁰⁾

$$\omega = R[p(z)].$$

Chaque parallélogramme des périodes de ω correspond à $2n$ feuillets, donc à $4n$ nœuds du réseau.

Sur un point $\omega = a_\nu \neq R(\epsilon_i)$, cette fonction possède dans le parallélogramme

⁽²⁹⁾ Plusieurs des points $R(\epsilon_i)$ peuvent coïncider.

⁽³⁰⁾ Toutes les fonctions elliptiques paires de mêmes périodes que $p(z)$ sont de la forme $R[p(z)]$.

des périodes des points de ramification β_v^μ et $\beta_v'^\mu$ tels que

$$p(\beta_v^\mu) = p(\beta_v'^\mu) = a_v^\mu,$$

chacun d'ordre λ_v^μ ($\mu = 1, 2, \dots, k_v$). Ce qui fait que l'indice de a_v par rapport à $R[p(z)]$ est égal à

$$\varepsilon(a_v) = \frac{\sum 2\lambda_v^\mu}{2n} = \frac{\lambda_v}{n} \quad [\alpha_v \neq R(\epsilon_i)].$$

Mais un point de ramification $a_v^\mu = \epsilon_i$ sur le point fondamental $a_v = R(\epsilon_i)$ donne naissance à un seul point de ramification d'ordre $2\lambda_v^\mu + 1$ pour $R[p(z)]$. Son apport à l'indice de a_v est donc égal à

$$\frac{2\lambda_v^\mu + 1}{2n}.$$

Finalement la somme des indices est

$$(42) \quad \sum_v \varepsilon(a_v) = \frac{\sum_v 2\lambda_v^\mu + 4}{2n} = 2.$$

Comme l'ordre total des points de ramification de $R(u)$ sur un point fondamental donné est nécessairement inférieur au degré, on a de nouveau

$$(43) \quad \varepsilon(a_v) < 1.$$

35. Soit maintenant à résoudre le schéma

$$(44) \quad \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_v & \dots & a_q \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_q & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_v & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = (\varepsilon_1 \quad \dots \quad \varepsilon_v \quad \dots \quad \varepsilon_q),$$

où les ε_v satisfont aux relations (42) et (43), ce qui exige en particulier que le nombre q des points fondamentaux soit supérieur à 2 : $q \geq 3$.

Si nous écrivons

$$\varepsilon_v = \frac{2e_v}{2n},$$

avec $n \geq 4$, le schéma devient

$$\left(\frac{2e_1}{2n} \quad \dots \quad \frac{2e_v}{2n} \quad \dots \quad \frac{2e_q}{2n} \right).$$

Nous pouvons supposer que e_1 et e_2 sont les plus petits des e_v .

Nous construisons alors une fonction rationnelle $R(u)$ de degré n satisfaisant aux conditions suivantes :

1° sur a_1 et a_2 , l'ordre total des points de ramification est respectivement $e_1 - 1$ et $e_2 - 1$;

2° sur a_v ($v = 3, \dots, q$), l'ordre total des points de ramification est égal à e_v .

Ce problème algébrique est résoluble, grâce aux conditions (42) et (43). Nous donnerons en appendice ⁽³¹⁾ la méthode de construction directe du réseau de $R(u)$.

Les relations

$$e_1 + e_2 + \dots + e_q = 2n - 2,$$

$$e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_q,$$

$$q \geq 3, \quad n \geq 4$$

entraînent nécessairement

$$e_1 \leq e_2 \leq n - 2.$$

Mais comme l'équation $R(u) = a_1$ doit avoir n racines, $R(u)$ aura sur a_1 encore au moins deux points réguliers : $u = \epsilon_0$ et $u = \epsilon_1$. De même elle aura sur a_2 encore au moins deux points réguliers : $u = \epsilon_2$ et $u = \epsilon_3$.

Le schéma (44) est alors résolu par la fonction $R[p(z)]$, où $p(z)$ est la fonction elliptique définie par

$$p'^2(z) = [p(z) - \epsilon_0][p(z) - \epsilon_1][p(z) - \epsilon_2][p(z) - \epsilon_3].$$

THÉOREME. — *Le problème d'inversion dans le cas $\sum \delta_v = 0$, $\varepsilon_v < 1$ peut être résolu par les fonctions elliptiques paires $R[p(z)]$.*

La solution donnée ci-dessus est générale, mais dans des cas spéciaux, $R(u)$ peut être choisi plus simplement. En particulier, son degré n'a pas besoin de dépasser 4.

APPENDICE.

I. En différents endroits de ce travail, nous avons à construire des fonctions rationnelles $R(u)$ satisfaisant à certaines conditions. Pratiquement, on peut obtenir $R(u)$ par la méthode des coefficients indéterminés, mais il est difficile de démontrer par cette méthode que le problème est toujours possible dans le cas général. Aussi nous proposons-nous ici de résoudre le problème général par la méthode combinatoire, c'est-à-dire de construire directement le réseau de $R(u)$.

⁽³¹⁾ Voir Appendice I.

Nous commençons par le problème général suivant :

PROBLÈME. — Construire une fonction $R(u)$ telle que sur le point fondamental a , l'ordre total des points de ramification soit égal à λ_ν ,

$$(\nu = 1, \dots, q).$$

Évidemment les λ_ν doivent satisfaire à certaines conditions qui découlent de la formule de Riemann-Hurwitz ⁽³²⁾

$$(45) \quad \sum_{\nu=1}^q \lambda_\nu = 2(n-1),$$

où n est le degré de $R(u)$. Il s'ensuit d'abord que la somme des λ doit être paire. En exprimant ensuite que l'ordre total de ramification sur un point fondamental a , donné est inférieur au degré, on obtient les inégalités suivantes, dites inégalités du polygone

$$(46) \quad \lambda_i \leq \sum_{\nu \neq i} \lambda_\nu.$$

Solution. — Nous représentons les données du problème par le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_\nu & \dots & a_q \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\nu & \dots & \lambda_q \end{pmatrix},$$

où les λ_ν satisfont aux relations (45) et (46).

Au n° 31 nous avons résolu le problème dans le cas $q = 3$. Supposons qu'on ait pu le faire jusqu'à $q - 1$.

Nous construisons alors à partir des λ_ν un système de q nombres $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2, \dots, \lambda'_q$ satisfaisant aussi aux inégalités du polygone (46) et tel que

$$\lambda'_\nu \leq \lambda_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^q (\lambda_\nu - \lambda'_\nu) = 2\lambda_1 \quad \text{ou} \quad \sum_{\nu=2}^q (\lambda_\nu - \lambda'_\nu) = \lambda_1.$$

On peut obtenir un tel système par le procédé suivant : dans le système primitif on diminue d'une part λ_1 d'une unité, d'autre part un des plus grands λ restants aussi d'une unité. Sur le nouveau système on recommence la même opération, c'est-à-dire qu'on diminue d'une part $\lambda_1 - 1$ d'une unité, d'autre part un des plus grands λ restants d'une unité et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait enlevé au total $2\lambda_1$ unité à la somme totale des λ . Il est facile de voir qu'à chaque stade, le système des λ obtenus continue à satisfaire aux inégalités du polygone.

⁽³²⁾ Voir n° 7.

Avec le système des λ_v obtenus à la fin, nous résolvons le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_q \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & \lambda'_q \end{pmatrix},$$

où a_1 n'est maintenant plus qu'un point fondamental apparent. Il existe au moins un a_v tel que λ'_v soit vraiment plus petit que λ_v ,

$$\lambda'_v < \lambda_v.$$

Nous pouvons toujours supposer que c'est a_2 , en modifiant s'il le faut la courbe L qui relie les points fondamentaux a_v . Considérons alors un diangle (a_1) sur le point a_1 ⁽³³⁾. Un des deux domaines algébriques qui lui sont voisins appartient à a_2 , appelons-le (a_2) ; (a_1) et (a_2) sont séparés par un segment reliant les deux sommets (nœuds) communs (*fig. 22*). En remplaçant ce

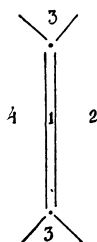


Fig. 22.

segment par une suite de $1 + 2(\lambda_2 - \lambda'_2)$ faisceaux composés alternativement de 1 et de $q - 1$ segments (*fig. 23*), nous créons un domaine algébrique de $2 + 2(\lambda_2 - \lambda'_2)$ côtés, c'est-à-dire d'ordre $\lambda_2 - \lambda'_2$ sur le point a_1 , tandis que

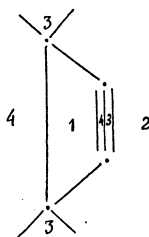


Fig. 23 : $\lambda_2 - \lambda'_2 = 1$.

l'ordre total de ramification sur a_2 s'est augmenté de $\lambda_2 - \lambda'_2$ pour atteindre la valeur donnée λ_2 . Au bord du nouveau domaine algébrique (a_1) ainsi créé, il y a sûrement un diangle (a_3) appartenant au point fondamental a_3 et qui est

⁽³³⁾ Dans les figures 22 et 23, nous désignons les domaines algébriques correspondant aux points fondamentaux a_1, a_2, a_3, a_4 par les chiffres 1, 2, 3, 4.

séparé de (a_1) par un faisceau de $q-2$ segments. Si nous remplaçons ce faisceau par une suite de $1+2$ $(\lambda_3 - \lambda'_3)$ faisceaux composés alternativement de $q-2$ et de 2 segments, (a_1) devient un domaine algébrique de $2+2$ $(\lambda_2 - \lambda'_2 + \lambda_3 - \lambda'_3)$ côtés, c'est-à-dire d'ordre $\lambda_2 - \lambda'_2 + \lambda_3 - \lambda'_3$, tandis que l'ordre total de ramification sur a_3 s'est augmenté de $\lambda_3 - \lambda'_3$ unités pour atteindre la valeur donnée λ_3 .

Nous recommençons la même chose avec a_4, a_5, \dots . Finalement, nous obtenons un réseau de degré $n = \frac{1}{2} \left(1 + \sum \lambda_v \right)$, dans lequel l'ordre total de ramification sur un point a_v ($v = 2, 3, \dots, q$) est λ_v , tandis que sur a_1 on a un seul point de ramification d'ordre positif et égal à

$$\sum_2^q (\lambda_v - \lambda'_v) = \lambda_1.$$

Le problème posé est par suite résolu.

Cette construction suffit pour résoudre le problème du n° 35 : on n'a qu'à poser

$$\lambda_1 = e_1 - 1, \quad \lambda_2 = e_2 - 1, \quad \lambda_v = e_v \quad (v \geq 3).$$

II. Pour résoudre les schémas fondamentaux de première espèce, nous avons au n° 27, à construire une fonction $R(u)$ telle que :

1° sur a_1 , se trouve un point de ramification d'ordre $d^+ - 1$; et un point de ramification d'ordre $d^- - 1$, tandis que l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_1 ;

2° sur a_v ($v \geq 2$), l'ordre total des points de ramification est égal à e_v .

Nous posons $\lambda_1 = d^+ + d^- + e_1 - 2$, $\lambda_v = e_v$ ($v \geq 2$), et déterminons comme plus haut le système des λ' avec lequel nous construisons une surface à $q-1$ points fondamentaux véritables. Puis, au lieu de partir d'un seul diangle (a_1) pour construire un point de ramification d'ordre λ_1 sur a_1 , nous construisons d'abord un point de ramification d'ordre $d^+ - 1$. Nous partons alors d'un autre diangle (a_1) que nous transformons de la même manière en un domaine algébrique d'ordre $d^- - 1$. Finalement nous construisons à partir d'un troisième diangle (a_1) un point de ramification (a_1) d'ordre e_1 . Il y a lieu, chaque fois s'il le faut, de modifier la courbe L pour pouvoir amorcer les constructions.

III. En dernier lieu nous avons pour résoudre les schémas fondamentaux de seconde espèce, à construire une fonction $R(u)$ telle que :

1° sur a_1 , se trouve un point de ramification d'ordre $d_1 - 1$, l'ordre total des autres points de ramification étant égal à e_1 ;

2° sur a_2 , se trouve un point de ramification d'ordre $d_2 - 1$, l'ordre total des autres points de ramification étant égal à e_2 ;

3° sur a_v ($v \geq 3$), l'ordre total des points de ramification étant égal à e_v .

Nous posons ici $\lambda_1 = e_1 + d_1 - 1$, $\lambda_2 = e_2 + d_2 - 1$ et, pour $v \geq 3$, $\lambda_v = e_v$, puis déterminons comme précédemment un système des λ' : $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2, \dots, \lambda'_q$. Nous résolvons le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_q \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & \lambda'_q \end{pmatrix}$$

par un réseau R' , dans lequel se trouvent, sur le point fondamental a_2 , deux domaines algébriques d'ordre positif, l'un d'ordre $d'_2 - 1$, l'autre d'ordre e'_2 , tels que

$$e'_2 + d'_2 - 1 = \lambda'_2 \leq \lambda_2, \quad d'_2 \leq d_2, \quad e'_2 \leq e_2.$$

Nous introduisons alors sur a_1 deux domaines algébriques d'ordres respectifs $d_1 - 1$ et e_1 , de telle manière que sur a_2 nous obtenions deux domaines algébriques d'ordre respectif $d'_2 - 1$ et e'_2 , et que sur a_v ($v \geq 3$) l'ordre total de ramification devienne e_v .

BIBLIOGRAPHIE.

AHLFORS (L.) :

- [1] *Ueber eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen* (*Acta Math.*, 58, 1932).

BLANC (C.) :

- [1] *Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes* (*Comment. Math. Helv.*, 9, 1937).

DENJOY (A.) :

- [1] *Sur les fonctions entières de genre fini* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 143, 1907).

LAWRENTIEFF (M.) :

- [1] *Sur une classe de représentations continues* (*C. R. Acad. Moscou*, 42, 1935).

LE VAN THIEM :

- [1] *Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flaechen* (*Comment. Math. Helv.*, 20, 1947).
 [2] *Ueber das Ueber das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre* (*Ibid.*, 23, 1949).
 [3] *Le degré de ramification d'une surface de Riemann et la croissance de la caractéristique de la fonction uniformisante* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 228, 1949).
 [4] *Un problème de type généralisé* (*Ibid.*, 228, 1949).

MYRBERG (P. J.) :

- [1] *Ueber die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Flaechen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, A 45, 1935).

NEVANLINNA (R.) :

- [1] *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).
- [2] *Ueber Riemannsche Flaechen mit endlich vielen Windungspunkten* (*Acta Math.*, 58, 1932).
- [3] *Eindeutige analytische Funktionen* (Berlin, Springer, 1936).
- [4] *Ein Satz ueber offene Riemannsche Flaechen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, 54, 1940).

SPEISER (A.) :

- [1] *Ueber Riemannsche Flaechen* (*Comment. Math. Helv.*, 2, 1930).

TEICHMUELLER (O.) :

- [1] *Untersuchung ueber konforme und quasikonforme Abbildungen* (*Deutsche Math.*, 3, 1938).
- [2] *Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes* (*Ibid.*, 2, 1937).

ULLRICH (E.) :

- [1] *Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre* (*Nachr. Ges. Wiss.*, Göttingen N. F. 1, 1936).
- [2] *Flaechenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen* (*Jahrber. Deutsche Math. Ver.*, 46, 1936).
- [3] *Flaechenbau und Wertverteilung* (9^e Cong. Math. scand., 1939).

VALIRON (G.) :

- [1] *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, Édouard Privat, 1923).
- [2] *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* (*Mém. Sc. Math.*, 2, 1925).
- [3] *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Ibid.*, 89, 1937).

WITTICH (H.) :

- [1] *Ueber die konforme Abbildung einer Klasse von Riemannscher Flaechen* (*Math. Zeits.*, 45, 1939).
- [2] *Ueber die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion* (*Ibid.*, 51, 1947).

