ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL LÉVY

Axiome de Zermelo et nombres transfinis

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 15-49

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__15_0>

AXIOME DE ZERMELO ET NOMBRES TRANSFINIS

PAR M. PAUL LÉVY.

Le présent travail comprend trois Chapitres à peu près indépendants. Il a surtout pour but de présenter la défense d'idées encore souvent discutées. Je pense qu'il contient aussi, et même dans chaque Chapitre, certaines idées nouvelles.

Dans le Chapitre I, je reviens sur la question si discutée de l'axiome de Zermelo. Cela m'a paru utile à la suite de la publication récente de deux livres dans lesquels M. Émile Borel (1), sans essayer d'expliquer comment il se fait qu'un ensemble étant donné, on ne pourrait pas sans risquer de contradiction essayer d'isoler par la pensée un de ses éléments, montre que cette manière d'opérer conduit, dans certains cas où l'on ne sait pas définir l'élément ainsi isolé, à des conséquences paradoxales, et qu'il juge inadmissibles. J'essaye de montrer que le rejet de l'axiome de Zermelo conduit à des conséquences plus paradoxales encore; pour les admettre, il faudrait presque douter de la raison humaine. Au contraire celles qui résultent de l'emploi de cet axiome ne font que troubler nos habitudes, et peuvent tout au plus nous conduire à douter de notre intuition.

J'insiste aussi sur un autre aspect de la question qui est surtout net dans les travaux de M. Brouwer. Il semble que, pour les savants qui adoptent les idées de Lebesgue, de M. Borel, ou celles de M. Brouwer, les êtres mathématiques n'aient pas d'existence propre, mais n'existent qu'en fonction des possibilités que nous avons de les découvrir. Il paraît pourtant difficile de contester qu'il existe des nombres non nommables. Or les idées que je combats ne peuvent se défendre qu'à condition de nier cette existence, ou de prétendre que ces nombres sont doués d'un pouvoir bien mystérieux, celui de mettre en défaut les règles mêmes de la logique. On ne devrait donc pas essayer de raisonner sur des objets abstraits, mais seulement sur ceux qu'on peut en quelque sorte toucher. De telles idées seraient à la rigueur compréhensibles chez un physicien. Qu'elles soient nées dans le cerveau de mathématiciens, et aient été

(1) É. BOREL, *Les paradoxes de l'infini* (édit. Albin Michel, 1945); *Éléments de la théorie des ensembles* (Gallimard, 1948).

adoptées par plusieurs des savants les plus éminents de ce temps, ne me semble pouvoir s'expliquer que par le désir, à mon avis injustifié, d'échapper à tout prix à certaines conclusions évidemment paradoxales.

Le Chapitre II est consacré à l'antinomie Richard. Mes idées sur cette antinomie n'ont pas changé depuis l'exposé que j'en ai fait en 1936 dans *Recherches philosophiques;* mais en relisant cet exposé, je crains d'avoir trop insisté sur une difficulté accessoire, relative au langage que l'on emploie, et que l'essentiel ne soit pas suffisamment en évidence. Ce que je crois essentiel, et sur quoi j'insiste ici, est le rôle que jouent dans l'explication de cette antinomie certains nombres transfinis, à chacun desquels la lumière que notre intelligence projette sur le début de l'échelle de ces nombres s'affaiblit, pour finir par disparaître complètement.

Je montrerai ensuite comment les bornes du connaissable, ou, plus précisément, du nommable, se retrouvent dans d'autres domaines. Ainsi, dans le domaine des nombres réels, aux nombres transfinis trop grands pour être nommés, se rattachent des classes bien définies de nombres qui ne sont pas individuellement nommables.

Le Chapitre III est consacré à un théorème de M. Denjoy, qui est peut-être le résultat le plus important obtenu depuis dix ans sur les nombres transfinis (1). Il montre que n'importe quel nombre transfini de la seconde classe peut être défini, sans récurrence transfinie, par la donnée d'une suite S de nombres entiers, choisie dans un certain ensemble C′ de telles suites.

Naturellement ce théorème ne recule pas les bornes de l'inconnaissable, puisqu'on ne peut nommer que certaines des suites S de l'ensemble C′. Il ne permet pas non plus de résoudre le problème du continu, parce que l'ensemble C′ se décompose en classes E ayant chacune la puissance du continu, et qu'à toutes les suites d'une même classe E correspond un même nombre transfini.

Après avoir rappelé l'énoncé et la démonstration du théorème de M. Denjoy, je présenterai quelques remarques sur la possibilité d'établir une correspondance biunivoque entre les suites S qui appartiennent à l'ensemble C′ et les points x d'un segment. Une telle correspondance permettrait de considérer un nombre transfini qui soit fonction de x, l'ensemble des valeurs de cette fonction comprenant tous les nombres transfinis de la seconde classe. Mais, si l'on cherche une solution de ce problème qui évite certains inconvénients de celle que donne le théorème général de Cantor, et qui soit pratiquement utilisable, il semble qu'on retombe nécessairement sur les difficultés du transfini, que le théorème de M. Denjoy a précisément pour objet d'éviter. On peut donc se demander si ce théorème, très important théoriquement, est pratiquement utilisable.

---

(1) A. Denjoy, *L'Énumération transfinie* (Gauthier-Villars, 1946), p. 151 et suiv., et surtout p. 203 à 206.

CHAPITRE I.

L'Axiome de Zermelo.

1. *L'apparition en analyse des éléments non nommables.* — Quelle que soit la nature des éléments d'un ensemble infini, il est bien clair qu'il en existe au plus une infinité dénombrable qu'on puisse *nommer*, c'est-à-dire distinguer des autres par une définition exprimable en un nombre fini de mots. La découverte de l'existence d'ensembles non dénombrables devait donc nécessairement conduire à la conclusion qu'il existe des éléments *innommables*. Il sera utile pour la suite de rappeler brièvement deux théorèmes d'où résulte cette existence, avec des démonstrations un peu différentes de celles qu'on donne en général.

1° Rappelons d'abord, en considérant des suites au lieu de fonctions, le premier théorème fondamental de Paul Dubois Reymond. Soient

$$(S_\nu) \qquad a_{\nu,1}, \quad a_{\nu,2}, \quad \ldots, \quad a_{\nu,n}, \quad \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

une infinité de suites d'entiers positifs croissants. Il existe une suite plus rapidement croissante que toutes les suites S_ν; tel est le cas de celle dont le terme général est

$$(1) \qquad b_n = a_{1,n} + a_{2,n} + \ldots + a_{n,n},$$

puisque, pour $n > \nu$, on a $b_n > a_{\nu,n}$.

Naturellement, le résultat subsiste pour les suites de nombres positifs non entiers, et aussi pour les fonctions positives. Ainsi, si les $f_\nu(x)$ sont tous positifs, la fonction

$$(2) \qquad g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \theta f_{n+1}(x),$$

où $x = n + \theta$, n étant la partie entière de x, est, pour x assez grand, supérieure à n'importe quelle fonction $f_\nu(x)$.

Retenons surtout cette conséquence : qu'il s'agisse de fonctions ou de suites, *il en existe qu'on ne peut pas espérer nommer, parce qu'elles croissent trop rapidement.*

On pourrait, à propos de ce premier résultat, soulever des objections analogues à celles qui constituent l'antinomie Richard. Comme le Chapitre II a pour objet l'étude et l'explication de cette antinomie, nous n'insisterons pas ici sur cette question.

2° Rappelons maintenant le théorème de Cantor d'après lequel le continu n'est pas dénombrable. Considérons un nombre x et sa représentation décimale.

Pour chacun des dix chiffres, considérons la suite des rangs qu'il occupe dans cette représentation. Si une de ces suites est infinie et trop rapidement croissante pour être nommable, il est évident que x n'est pas non plus nommable.

Ainsi : *il existe une classe de nombres qui ne sont pas nommables parce que leurs représentations décimales font intervenir des suites trop rapidement croissantes.*

Des classes analogues sont liées à n'importe quel système de numération, d'autres à la théorie de l'approximation des nombres par des fractions décimales, ou rationnelles. Ainsi on peut définir une classe de nombres de Liouville qui ne sont pas nommables.

Le théorème de Cantor résulte immédiatement de ces remarques. Utilisons pour le montrer la numération dyadique qui établit une correspondance biunivoque entre les nombres x de l'intervalle semi-ouvert $0 \leqq x < 1$ et les suites de chiffres 0 ou 1 comprenant une infinité de zéros, donc aussi entre ces nombres x et les suites S qui, pour chaque x, indiquent les rangs des zéros. Considérons une suite de nombres $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$; il lui correspond une suite infinie de suites S_ν. On peut alors, par la formule (1), définir une suite S plus rapidement croissante que toutes les suites S_ν; donc un x différent de tous les x_ν.

2. *L'existence des nombres innommables.* — Les êtres mathématiques innommables, et en particulier les nombres innommables, existent-ils réellement? Ne sommes-nous pas victimes d'une illusion ?

Question étrange, sans doute, mais pas plus que les objections contre l'axiome du choix que nous voulons discuter. Je pense même que là est le fond du débat.

1° Examinons d'abord une question préliminaire. Les êtres mathématiques existent-ils par eux-mêmes, ou seulement en fonction de l'esprit humain, et de notre logique humaine? L'attitude de M. Brouwer au sujet de la vérité des énoncés des théorèmes nous oblige à poser la question.

Considérons un énoncé précis; pour fixer les idées, celui du théorème de Fermat. Pour nous, il est vrai ou faux, et la somme

$$c = \sum_{3}^{\infty} \frac{1}{p^2} \int_{0}^{2\pi} \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n^p x}{n^2} \right)^3 dx$$

est nulle dans le premier cas et positive dans le second. S'il est faux, on peut vérifier qu'il est faux (quoiqu'on ne sache pas à l'avance combien de temps il faudra). S'il est vrai, il faudrait une infinité de vérifications pour s'en assurer, et rien ne prouve *a priori* que cette suite infinie puisse être remplacée par un raisonnement fini. Donc, il y a trois hypothèses possibles (pour d'autres théorèmes il y en a quatre) : le théorème est faux; il est vrai et démontrable; il est vrai et indémontrable ([1]).

Dans ce dernier cas, M. Brouwer se refuse à le considérer comme vrai, et la constante c n'est ni nulle ni positive (ni bien entendu négative).

Qu'il puisse logiquement considérer trois cas, et en déduire certaines conséquences, est incontestable. Ce que nous prétendons, c'est qu'il n'était pas nécessaire pour cela d'abandonner le langage classique. Il suffisait de parler de propositions vraies ou fausses, démontrables ou indémontrables. Le langage nouveau ne pouvait qu'apporter de la confusion, et séduire les amateurs de paradoxes. C'est ce qui a eu lieu.

On ne saurait évidemment pas prouver *a priori* que le théorème de Fermat ne peut être que vrai ou faux. Cela est évident, et rien ne saurait persuader celui qui nie l'évidence. Faisons toutefois une remarque : imaginons un être qui puisse accélérer sa pensée, de manière à effectuer en un temps $\frac{1}{n^2}$ la $n^{\text{ième}}$ des vérifications nécessaires pour savoir si ce théorème est vrai ou faux. Au bout d'un temps fini il saurait à quoi s'en tenir. Si le théorème est vrai, il peut rester indémontrable pour nous, qui n'avons pas le pouvoir surnaturel de dilater le temps. Mais comment douter de la vérité d'un théorème que cet être imaginaire (qui nous servira plusieurs fois dans la suite) aurait reconnu exact ([2])?

Si, quittant le domaine des propositions, nous revenons à celui des êtres mathématiques tels que nombres, fonctions, éléments d'un ensemble, il semble bien que les objections inexplicables de certains mathématiciens contre l'axiome de Zermelo trahissent un état d'esprit analogue à celui de M. Brouwer. Pour nous il n'y a rien de paradoxal à ce que nous ne puissions pas nommer tous les éléments d'un ensemble infini non dénombrable; ce ne l'est pas plus que l'impossibilité où nous sommes d'achever l'énumération d'un ensemble dénombrable. Pour nous, les nombres innommables existent; ils sont nécessaires à notre notion du continu. Eux craignent d'être victimes d'une illusion. Essayons d'examiner la question avec eux.

2° Mentionnons d'abord notre idée intuitive du continu, homogène, invariant par une translation. Il faut bien avouer que, s'il n'y avait que cette notion intuitive, on pourrait se demander si elle n'est pas illusoire. Si en effet on ne consi-

---

([1]) Je rappelle à ce sujet une remarque que j'ai faite en 1926 : il y a contradiction à supposer qu'on puisse démontrer qu'on est dans ce dernier cas. Si en effet le théorème est faux, cela ne saurait être indémontrable. Si donc il est impossible de résoudre la question de savoir s'il est vrai ou faux, on ne démontrera jamais cette impossibilité.

([2]) On peut m'objecter qu'on cherche à édifier une science humaine, et refuser l'intervention d'un être surnaturel. Je répondrai que, si un homme peut découvrir une contradiction entre certains axiomes, lui le peut *a fortiori*. Or je sais qu'il n'en trouvera pas dans l'idée d'une suite infinie quelconque. Je ne le mettrai en cause que quand, humainement, je suis sûr de ce qu'il dirait.

dère, sur l'axe des x, que les translations nommables, l'ensemble des points nommables est invariant par une translation.

Mais l'analyse du continu par la numération est beaucoup plus convaincante : un nombre x compris entre zéro et un s'identifie à la suite de ses décimales. Comment douter que nous puissions considérer une suite absolument quelconque de chiffres, que cela ait un sens ?

M. Borel a fait observer que nous ne pouvons nommer une telle suite que s'il y a une loi. Cela est incontestable. Cela ne permet pas de douter que les autres suites existent. L'être surnaturel que je viens de présenter au lecteur n'aurait pas de peine à nommer n'importe laquelle de ces suites (même lui ne pourrait d'ailleurs pas venir à bout de les nommer toutes) ; c'est donc qu'elles existent.

J'avoue d'ailleurs que, si je comprends quand on parle d'une suite périodique, ou d'une loi de forme donnée, je comprends beaucoup moins bien lorsqu'on parle d'une loi quelconque. A l'idée claire de la division d'un segment en 10, puis en 100 parties égales, et ainsi de suite, et à l'idée qu'une chaîne de segments ainsi distingués et dont chacun est intérieur au précédent n'est jamais vide, mais définit un point, on substitue l'idée confuse d'un ensemble défini par un certain ensemble de lois, ensemble dont la définition même ne peut pas être achevée. Il n'y aurait pas, comme le pense M. Borel, une simplification des mathémathiques, mais une étrange complication. Mais surtout, quelle obscurité ! Si l'être surnaturel dont nous avons parlé nous présentait une suite infinie, à quoi reconnaîtrions-nous s'il y a une loi ?

3° Quoique j'aie peine à concevoir qu'on puisse réellement vouloir vider le continu de son contenu, je voudrais montrer que cette attitude conduirait à des conséquences bien plus gênantes que celles que M. Borel voudrait éviter en le faisant.

Tout d'abord, si l'on considère que les éléments nommables existent seuls, tous les ensembles sont dénombrables. La notion de puissance, au sens de Cantor, disparaît, et, si les raisonnements rappelés au n° 1 obligent à parler d'ensembles non dénombrables, il ne s'agit pas d'ensembles qui contiennent *trop d'éléments* pour qu'on puisse les dénombrer. Ce sont des ensembles qui, en un sens, devraient être considérés comme dénombrables, mais pour lesquels nous ne savons pas en un nombre fini de mots définir une loi de dénombrement. C'est ce qu'est effectivement l'ensemble des nombres nommables.

Mais les difficultés véritables apparaissent avec la théorie de la mesure. Puisqu'il n'y aurait que des ensembles dénombrables, il n'y aurait que des ensembles de mesure nulle. Que deviendrait l'intégrale de Lebesgue, base de l'Analyse moderne ? Que dirait-on en particulier de la fonction égale à zéro si x est nommable et à un dans le cas contraire ? Dirait-on qu'elle est toujours nulle, puisque x est toujours nommable, ou dirait-on, comme nous le faisons, qu'elle est presque partout égale à un ?

On voit qu'il est impossible d'accepter toutes les conséquences de l'attitude qui consiste à nier l'existence des éléments non nommables [1]. Il faut donc renoncer à cette attitude.

4° « Soit, dira-t-on ; mais ces éléments innommables sont dangereux; on ne sait pas quels pièges ils cachent». Ainsi, lorsque j'écris par exemple

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x),$$

je devrais me demander si cette formule reste vraie si x n'est pas nommable! Il ne me paraît pas possible d'en douter, puisque x est en tout cas limite de nombres nommables.

Soit, a fait observer M. Borel, mais on n'appliquera jamais cette formule qu'à des nombres nommables. Je réponds d'abord que cela n'est pas à mon sens ce qui importe; il s'agit de savoir s'il y a risque d'erreur à l'appliquer, et je prétends qu'il n'y en a pas. En outre la remarque de M. Borel, incontestable s'il s'agit d'une application individuelle de la formule écrite, n'empêche pas que, si je peux égaler les intégrales des deux membres de cette formule, c'est parce qu'elle est vraie même pour les nombres innommables. Si aucun de ces nombres ne peut intervenir individuellement, leur existence collective intervient, et joue même, comme nous venons de le voir, un rôle prépondérant dans l'intégration [2].

J'ai choisi un exemple simple, où il s'agit de fonctions continues. Si l'on introduit des fonctions discontinues, on peut concevoir une formule vraie pour les nombres rationnels et fausse pour les nombres irrationnels. Mais si je l'ai démontrée, je sais pour quels nombres je l'ai démontrée. Si je démontre une formule, quel que soit le mode de démonstration employé, je me refuse à croire que, si aucune restriction n'est imposée à x au cours de la démonstration, il y ait cependant un risque d'erreur mystérieux si l'on oublie de préciser dans les applications que x est déterminé par une loi (alors que cette loi n'est pas intervenue dans le raisonnement, et qu'on ne dit pas de quelle sorte de loi il s'agit).

Mais en fait, si l'on cherche dans les applications les plus importantes de l'axiome de Zermelo à quel moment s'appliquent les critiques de ceux qui

---

[1] Observons qu'il faudrait même renoncer à la Géométrie analytique. Pour définir l'abscisse d'un point sur une droite, il faut en effet avoir d'abord fixé les points d'abscisses zéro et un, ce qui n'est possible qu'avec une précision limitée. Mais cette objection porte sur l'application pratique des mathématiques, et non sur la théorie.

[2] J'hésite à relever une autre observation de M. Borel : « Comment saura-t-on que x est le même dans les deux membres de la formule, si l'on ne sait pas le nommer ? ». Mais n'est-ce pas une convention qui est la base même de tous les calculs algébriques, que chaque variable y ait une signification déterminée? S'il y a une difficulté dans les applications, ce n'est pas une raison pour douter de la formule elle-même. Si d'ailleurs il s'agit de fonctions continues, la vérification peut être faite avec une précision aussi grande qu'on veut.

rejettent cet axiome, il ne s'agit pas de l'application d'une formule plus ou moins difficile à démontrer. C'est l'existence même du nombre x qui est mise en doute. Pourtant, je l'ai montré, l'existence collective de ces x est bien établie. Faut-il donc conclure que les savants dont je parle ont vraiment la notion « d'un ensemble qui existe mais dont les éléments n'existent pas ? » Et si *ces éléments existent*, ne peut-on pas conclure que *chacun existe*, et qu'il ne peut pas y avoir de cause d'erreur dans le fait de passer du pluriel au singulier et de raisonner sur un élément (nommé ou non) au lieu de raisonner sur l'ensemble ?

S'il ne s'agissait pas de quelques-uns des plus éminents mathématiciens de notre temps, je n'hésiterais pas à conclure que ceux qui voient un risque d'erreur dans le fait de choisir un élément d'un ensemble pour raisonner sur lui ne pensent pas vraiment ce qu'ils disent. Je conçois à la rigueur une certaine inquiétude en présence d'un raisonnement de type nouveau ; mais je ne peux pas concevoir que l'idée d'une collection qui ne soit pas composée d'individus, soit une idée claire pour qui que ce soit. Pour la science classique, le fait qu'un choix soit arbitraire le rend plus facile ; si on lui imposait trop de conditions, il serait peut-être impossible. Pour les savants dont je parle, c'est parce que le choix est arbitraire qu'il devient inconcevable ! « Ils trouvent la mariée trop belle », a dit M. Hadamard.

Je pense qu'il y a une explication psychologique. L'axiome de Zermelo conduit à certaines conséquences paradoxales, et c'est dans l'espoir de les éviter qu'ils ont accepté ce qui leur paraissait le moindre mal. Mais, comme nous le verrons, ces conséquences, peut-être paradoxales, sont logiquement admissibles, et leur attitude ne l'est pas.

3. *L'axiome de Zermelo*. — 1° Le mot axiome est souvent employé avec deux significations bien différentes. Dans le premier cas, il s'agit de conventions, ou de définitions, que l'on pourrait ne pas faire ; tel est le cas du fameux postulatum d'Euclide. Dans le second cas, il s'agit de règles du raisonnement, qui s'imposent à notre esprit de telle manière que, si elles conduisaient à une contradiction, il faudrait presque renoncer à penser ; tel est le cas de la règle : si A est une partie de B et que B soit une partie de C, alors A est une partie de C.

Dans le premier cas, pour chaque théorie, l'axiomatique, qui étudie la compatibilité et la dépendance ou l'indépendance des axiomes, en constitue un préliminaire essentiel ; c'est le cas pour la Géométrie non euclidienne. Dans le second cas, elle constitue un luxe, puisque l'on est assuré *a priori* de la compatibilité des axiomes, qui ne sont que des principes de la logique. Je ne voudrais pas avoir l'air de sous-estimer les travaux relatifs à ces axiomes, et en particulier le théorème de Gœdel et les travaux de Frænkel sur l'axiome de Zermelo. Mais je ne les utiliserai pas, car ils ne peuvent ni augmenter notre sentiment de l'évidence des axiomes, ni nous conduire à en douter, et mon but est de persuader le lecteur du fait que l'axiome de Zermelo s'impose à nous, et que, s'il conduisait à une contradiction, il faudrait désespérer de la raison humaine.

2° J'ai déjà insisté sur le fait qu'il en est ainsi de l'axiome : si un ensemble existe, et n'est pas vide, ses éléments existent; et cela signifie en particulier que nous pouvons (sans que cela entraîne un risque d'erreur) prendre l'un d'eux, même si l'on ne sait en nommer aucun, comme objet de notre raisonnement.

On énonce souvent l'axiome de Zermelo sous une forme plus compliquée, mais qui résulte de la précédente.

Ainsi, considérons le plus simple des raisonnements reposant sur l'axiome de Zermelo, celui par lequel on démontre l'existence d'ensembles non mesurables. On considère à cet effet l'ensemble E_0 des nombres rationnels [1]. Désignons par E n'importe lequel des ensembles déduits de E_0 par une translation (y compris l'ensemble E_0 lui-même). Tous ces ensembles sont disjoints et leur réunion constitue l'axe réel.

Supposons l'abscisse x définie mod 1. On peut alors supposer chaque E réduit à sa partie intérieure à l'intervalle semi-ouvert $(0, 1)$, sans que cela empêche de considérer les différents E comme déduits les uns des autres par des translations.

Supposons alors les points de cet intervalle rangés en un tableau à double entrée, comprenant une infinité dénombrable de colonnes, et une infinité non dénombrable de lignes, comprenant chacune les points d'un ensemble E. Si F est l'ensemble des points d'une même colonne, l'intervalle $(0, 1)$ est la réunion d'une infinité non dénombrable d'intervalles disjoints déduits de F par une translation. Cet ensemble F n'est pas mesurable (puisqu'il y a contradiction évidente à lui supposer une mesure, soit nulle, soit positive).

Que reproche-t-on à ce raisonnement? Pour nommer F, il faut évidemment supposer nommée une loi indiquant l'élément de chaque ligne qu'on choisit pour le mettre dans la colonne considérée. Or on ne sait pas (et on ne saura sans doute jamais, puisque tout porte à croire que tous les ensembles nommables sont mesurables) nommer une telle loi.

C'est ici qu'intervient l'axiome du choix. Choisissons d'abord un E, et dans cet E choisissons un élément ξ : nous avons dit que, même si nous ne savions en nommer aucun, nous avions le droit de prendre un de ces éléments comme objet de notre raisonnement. Si l'on nous a accordé ce droit, on nous accordera sans doute aussi celui de nous en servir (la subtilité de mes contradicteurs est si inconcevable que je prends mes précautions), et même de nous en servir une infinité de fois. Je suppose donc ce choix fait pour tous les E. Ils constituent

---

(1) On peut aussi prendre pour E_0 n'importe quel ensemble dénombrable, partout dense sur une droite, et tel que, s'il contient x et y, il contienne aussi $px + qy$ (p, q, entiers réels quelconques). S'il ne contient pas 1, au lieu de l'intervalle $(0, 1)$, on considérera l'intervalle $(0, a)$ ($a \in E_0$).

une infinité dénombrable, et je ne peux pas les nommer tous. Mais qu'importe? Le droit de supposer ξ choisi est admis, sans restriction, sans supposer E nommé. Je peux donc considérer l'ensemble F des ξ ; peu importe qu'il ne soit pas nommé. Il existe, et l'impossibilité de le nommer provient de l'impossibilité de le distinguer d'une infinité d'ensembles analogues, qui existent aussi, et qui forment même un ensemble ayant une puissance supérieure à celle du continu. Il y en a trop. Je me refuse à en conclure qu'il n'y en a aucun.

Le résultat voulu est bien démontré; il y a des ensembles non mesurables, et l'impossibilité d'en nommer un est étroitement liée au fait qu'il y en a trop (elle ne *provient* pas de ce fait; elle provient du fait qu'on ne peut nommer que des ensembles susceptibles d'être obtenus par une infinité dénombrable d'opérations simples en partant de points, d'intervalles, d'aires, de volumes, etc.). Ce qui nous importe ici, c'est que, dans cette démonstration, l'axiome du choix n'est intervenu que sous la forme que nous avons discutée au n° 2.

4. *Les paradoxes liés à l'axiome de Zermelo.* — 1° Le plus étonnant de ces paradoxes est sans doute le résultat obtenu par Zermelo lui-même : le continu peut être bien ordonné.

Mais analysons la raison de notre étonnement : après avoir passé un temps plus ou moins long à définir des nombres transfinis de plus en plus grands, nous constatons qu'il faut bien nous arrêter, et que ce que nous avons fait semble inutile, tant est grande la distance qui reste à parcourir pour épuiser la seconde classe des nombres transfinis. Nous devons renoncer à nous représenter le dénombrement transfini d'un ensemble non dénombrable. Notre intuition échoue; mais il nous reste la ressource de raisonner.

Je crois que le mathématicien doit être à la fois fier et modeste. Fier, parce qu'il a foi dans sa raison; s'il aboutit à une contradiction, ce ne peut être que par l'effet d'une distraction; *il faut* arriver à découvrir sa faute, à sauver sa foi. Mais modeste parce qu'il doit se résigner à l'idée que la raison, même dans son domaine propre, celui de la science abstraite, a des bornes, et ne sait pas résoudre toutes les difficultés. *A fortiori* doit-il se résigner à constater dans certains cas l'échec de son intuition.

Dans le cas qui nous occupe, notre impuissance à compter assez loin n'est pas une raison de nier la possibilité logique de le faire. Par définition même, la formation des nombres transfinis est une construction qui ne peut pas être achevée. Il y a contradiction à supposer cette construction achevée, de sorte qu'on ne peut jamais la considérer dans son ensemble. Cela explique un paradoxe connu, dont je peux dire qu'il est le seul qui m'ait longtemps troublé.

Mais, si j'arrête la construction au moment où un ensemble donné, même non dénombrable, sera épuisé, il n'y a pas de contradiction, et, si je conviens de continuer tant que ce résultat ne sera pas atteint, il n'y a pas de contradiction.

Ce prolongement, réellement impensable, est logiquement possible, et la science abstraite doit le considérer comme possible.

J'ai longtemps hésité à considérer ce raisonnement direct comme devant entraîner là conviction. C'est dire que je ne serais pas, dans ce cas, surpris de ne pas convaincre tout le monde. Et pourtant, comment douter que je puisse (théoriquement) aller jusqu'au bout, puisque rien ne peut m'arrêter avant. C'est au fond une variante (évidemment beaucoup plus hardie, puisque l'ordination préalable n'existe pas) du raisonnement connu par lequel on démontre le théorème de Borel-Lebesgue, dans le cas linéaire.

Certains peuvent éprouver un malaise en se disant que le résultat dépend du choix des points successifs. Cela n'est pas sans raison. Si l'on nous donne un ensemble dénombrable, et que nous cherchions à en faire un dénombrement transfini, il est concevable que nous nous y prenions si maladroitement que nous aurons dépassé sans l'avoir épuisé les plus grands nombres transfinis pensables. Mais il faut bien que l'ensemble donné finisse par s'épuiser, puisqu'il est certain que rien ne peut nous arrêter avant. De même pour le continu.

M. Zermelo a fait disparaître ce malaise en supposant donnée une règle qui le dispense de choisir chaque fois. La contradiction qu'il y a à supposer qu'il faille s'arrêter avant la fin est alors certaine, puisqu'il y aurait un ensemble bien défini d'éléments que le dénombrement transfini n'atteindrait pas. Autrement, à chaque instant, l'observateur sceptique pourrait dire : vous repartez encore, mais il faudra bien vous arrêter. Je crois qu'il aurait tort, puisque rien ne nous obligera jamais à nous arrêter. Mais puisque quelqu'un peut exprimer un doute, le raisonnement indirect de Zermelo n'est pas inutile. Le doute disparaît parce que les choix sont faits d'avance, et, comme on ne sait pas à l'avance dans quels sous-ensembles de l'ensemble initial il faudra choisir, il faut bien considérer tous les sous-ensembles de cet ensemble [1].

2° J'insisterai moins longuement sur les autres paradoxes. L'existence d'ensembles non mesurables ne m'a jamais étonné. Les ensembles mesurables ne sont-ils pas toujours, à un ensemble près dont la mesure est arbitrairement petite, des réunions d'intervalles, et ne doit-on pas s'attendre à ce qu'il existe des ensembles dont des réunions d'intervalles ne permettent pas d'approcher autant que l'on veut ?

J'avoue que d'autres conséquences de l'axiome de Zermelo m'ont surpris. Je pourrais au moins en indiquer trois, découvertes par Banach et Kuratovski, par Hausdorff, par Sierpinski. M. Borel cite le résultat de Hausdorff : il existe, sur la surface de la sphère, un ensemble A, décomposable en deux sous-

[1] Du moins il le faut, si l'on veut tout tenter pour convaincre les sceptiques. Mais au fond je ne suis pas convaincu que la puissance des moyens ainsi employés soit nécessaire.

ensembles disjoints A_1 et B_1, égaux (c'est-à-dire superposables) entre eux, et égaux à A. Le même résultat pouvant s'appliquer à B_1, décomposable en A_2 et B_2, puis à B_2, et ainsi de suite, on voit que A contient une infinité d'ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots$, tous égaux à A. Cela est évidemment surprenant.

Mais si nous analysons la cause de notre étonnement, ne vient-elle pas simplement de ce que nous avons l'habitude de ne considérer que des ensembles simples, mesurables, et même faciles à mesurer, et qu'une induction sommaire nous avait conduits à juger des autres d'après ce que nous savions de ceux-là (¹).

De même qu'un bloc de marbre de Carrare contient en lui des formes insoupçonnées par l'ouvrier qui l'extrait du sol, le continu à deux ou plus de deux dimensions contient des ensembles dont nos sens grossiers ne nous permettent pas de soupçonner l'existence, et qui nous étonnent, parce que nos habitudes résultent de l'usage de ces sens imparfaits et que nous imaginons mal ce qui leur échappe. J'ai eu souvent l'occasion de m'étonner de tout ce qu'on peut découvrir dans une courbe sans tangentes. Les ensembles de Hausdorff et de Sierpinski sont plus étonnants encore. Mais on s'étonne un peu moins quand on réfléchit à la complexité de leur structure. En tout cas, il ne faut pas trop nous étonner d'être étonnés. Il ne faut surtout pas oublier que le raisonnement est là pour nous guider quand notre intuition est en défaut, ni douter du résultat d'un raisonnement revu avec soin (et d'autant plus sûrement revu avec soin par de nombreux savants que le résultat est plus paradoxal), quand ce résultat n'est contredit que par notre intuition.

5. *Autres paradoxes.* — Les paradoxes dont nous allons parler ici, ou bien sont indépendants de l'axiome de Zermelo, ou bien résultent du rejet de cet axiome.

1° Commençons par une remarque très simple, mais susceptible d'intéresser ceux qui ont des illusions sur la possibilité de prolonger la mesure de Lebesgue. Sans le raisonnement rappelé au n° 3, 2°, on pourrait penser qu'il existe une mesure, bien définie pour n'importe quel ensemble linéaire, invariante par un déplacement quelonque, et complètement additive (²). On pourrait peut-être aussi penser que, si deux ensembles sont semblables, le rapport de leurs mesures est égal au rapport de similitude, et que tout cela reste vrai pour les

---

(¹) Au fond, ce qu'on est tenté d'opposer au résultat de Hausdorff, c'est l'idée que le tout est plus grand que la partie et ne peut se réduire à elle par un déplacement. Or cette idée est fausse, même dans le cas d'ensembles dénombrables. L'ensemble des points d'une droite d'abscisses n ($n = 1, 2, \ldots$), et celui des points d'abscisses $n+1$, sont égaux, et pourtant l'un est une partie de l'autre.

(²) M. Borel, qui croyait à l'existence de cette mesure, est devenu moins affirmatif dans ses derniers Ouvrages. Mais il ne semble pas avoir au fond changé d'idée, puisqu'il voit toujours dans une conclusion qu'il juge paradoxale une raison de rejeter l'axiome de Zermelo.

courbes sur lesquelles on peut trouver des arcs deux à deux égaux ou semblables.

Or il n'y a pas besoin de l'axiome de Zermelo pour montrer qu'il ne peut en être ainsi. Il n'y a qu'à considérer la courbe de von Koch, composée de deux parties égales, et semblable à la courbe entière, le rapport de similitude k étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Le rapport des mesures de chacune des deux parties et de la courbe entière devrait donc être égal à la fois à $\frac{1}{2}$ et à $k > \frac{1}{2}$.

Dans le cas limite $k = \frac{1}{2}$, la courbe se réduit à un segment rectiligne, et le paradoxe disparaît. Pour $k = 1$, la courbe remplit une aire et la mesure que l'on pourrait définir devient une mesure superficielle. Le paradoxe disparaît aussi, ou plutôt il n'y a de paradoxe que pour ceux qui ne sont pas encore habitués à l'idée qu'une courbe puisse remplir une aire.

Pour les valeurs intermédiaires, la mesure que l'on est naturellement conduit à définir en donnant à des arcs égaux des mesures égales vérifie un principe de similitude avec un exposant compris entre 1 et 2; c'est quelque chose d'intermédiaire entre la mesure linéaire et la mesure superficielle.

On peut rattacher ces remarques aux idées de M. Appert, qui, le premier (je crois), a défini une infinité de mesures, non additives, qui sont des généralisations de la mesure extérieure de Lebesgue pour les ensembles linéaires. La courbe de von Koch constitue peut-être le meilleur champ d'application pour ces idées. Pour chaque valeur de k, la mesure que nous venons de définir est une des mesures de M. Appert.

2° Désignons par E_0, soit l'ensemble des nombres $x = h + k\alpha$ (α irrationnel donné; h, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), soit, comme au n° 3, 2°, l'ensemble des nombres rationnels, et par E n'importe quel ensemble déduit de E_0 par une translation. Trois cas sont possibles. Si E contient un nombre a donné, il peut être dénombré sans difficulté. Si E ne peut pas être nommé, le mathématicien qui nie l'existence des éléments innommables écartera toute difficulté, puisque, pour lui, cet ensemble n'existe pas. Mais que dira-t-il dans le troisième cas, celui où E peut être nommé sans qu'on sache en nommer un élément ? Si l'on ne sait pas nommer un premier élément de E, on ne sait *a fortiori* pas le dénombrer, et notre contradicteur qui ne croit à l'existence que de ce qui est nommable, dira qu'il n'est pas dénombrable, à moins qu'il ne préfère dire qu'il est vide. Un ensemble obtenu par translation d'un ensemble dénombrable pourrait donc être, ou bien vide, ou bien non dénombrable.

Il est vrai que ce troisième cas n'existe sans doute pas. Mais peut-on considérer comme une démonstration de sa non-existence le fait que son existence embarrasserait notre contradicteur ?

Que de difficultés s'ajoutent ainsi à celle qui consiste à dire que l'ensemble des éléments nommables ne doit pas être considéré comme dénombrable puisqu'il y a contradiction à le supposer dénombré. N'est-il pas plus simple de parler comme tout le monde, et de distinguer ce qui existe de ce qui peut être nommé ?

Je pense que mes contradicteurs seront plus embarrassés encore par l'exemple suivant, qui m'a été indiqué par M. L. Schwartz.

3° Les ensembles E_0 et E restant définis comme ci-dessus, que peut-on dire de la puissance de l'ensemble dont chaque E est un élément ? Pour nous il n'y a pas de difficulté; il a la puissance du continu. Plus généralement, si nous avons un ensemble d'ensembles E disjoints et non vides, on ne peut qu'augmenter sa puissance, si on la change, en remplaçant chaque E par ses éléments, c'est-à-dire en remplaçant un élément par plusieurs ou même une infinité. C'est presque un axiome. Pourtant, si l'on rejette l'axiome de Zermelo, on va se trouver en présence d'un dilemme embarrassant.

Supposons que E_0 soit l'ensemble des nombres rationnels. Désignant par $[u]$ la partie entière de u, posons

$$f(\alpha)=\sum_1^\infty \frac{[n^\alpha]}{n!}.$$

Si $0<\alpha<\beta<1$, $f(\beta)-f(\alpha)$ est un nombre positif irrationnel, puisqu'il est de la forme $\sum \frac{c_n}{n!}$, avec $0\leqq c_n<n-1$, et $c_n>0$ pour n assez grand. Donc $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ne peuvent pas appartenir à un même ensemble E, et à chaque α correspond un ensemble E, celui qui contient $f(\alpha)$, qui est différent de tous les autres. On a ainsi établi une correspondance entre α et certains des E. L'ensemble des E a donc *au moins* la puissance du continu.

Alors deux éventualités sont possibles. On peut, ou on ne peut pas, établir une correspondance entre l'ensemble de tous les E et tout ou partie du continu.

Dans le premier cas, il faut conclure que la puissance de l'ensemble des E est supérieure à celle du continu. Et pourtant, en remplaçant chaque E, non par un élément, mais par une infinité, on obtient le continu.

Dans le second cas, je n'ai pour ma part aucune difficulté à dire que : l'ensemble des E a la puissance du continu, bien que je ne sache pas nommer une correspondance entre les E et les points d'un segment. Mais celui qui rejette l'axiome de Zermelo n'a pas le droit de raisonner ainsi. S'il existe une correspondance biunivoque entre les E et les points d'un certain sous-ensemble d'un segment, cela veut dire pour lui qu'il peut en nommer une (et pourtant je crois bien qu'il serait incapable de le faire). D'après le théorème de Cantor il peut alors nommer une correspondance biunivoque entre un E quelconque et un x quelconque du segment $(0, 1)$.

Soit alors $U_\alpha E$ la réunion des E qui correspondent à des x du segment $(0, \alpha)$.

Comme cet ensemble est invariant par une translation de longueur rationnelle, il faut, s'il est mesurable, que lui-même, ou son complément, soit de mesure nulle. Si l'on ne considère que la partie de $U_\alpha E$ intérieure au segment $(0, 1)$, sa mesure, qui est égale à 0 pour $\alpha = 0$ et à 1 pour $\alpha = 1$, ne peut qu'augmenter. Elle varie donc brusquement de 0 à 1, pour une valeur β de α, et à ce moment on a un ensemble E à la fois dénombrable et de mesure positive.

On ne peut échapper à cette contradiction qu'en supposant $U_\alpha E$ non mesurable, au moins dans un certain intervalle ouvert (α', α''); en choisissant un α dans cet intervalle, par exemple son milieu, on aurait ainsi nommé un ensemble non mesurable.

Pourtant je ne pense pas que personne arrive à le faire. Mais on ne peut rejeter l'axiome de Zermelo qu'en affirmant qu'on peut le faire, ou bien en se rejetant sur l'autre alternative du dilemme, qui aboutit à un résultat plus paradoxal encore.

6. *Remarque finale.* — Je terminerai ce Chapitre par une remarque destinée à ceux qui hésiteraient à avoir une opinion par eux-mêmes, ou qui n'oseraient pas discuter une idée soutenue par des savants tels que Lebesgue, Émile Borel, Brouwer, Lusin. C'est que les partisans de l'axiome de Zermelo sont tous absolument d'accord, prouvent le mouvement en marchant, appliquent cet axiome, et n'ont encore jamais rencontré de contradiction. Il n'en est pas de même de leurs contradicteurs. Et cela ne me surprend pas, car, à partir du moment où l'on doute de la raison humaine, on ne sait pas où l'on peut trouver un point fixe. S'il n'y a qu'une logique, le scepticisme a beaucoup de formes différentes.

Nul n'a, je crois, poussé le scepticisme plus loin que N. Lusin, que j'ai entendu (vers 1930) soutenir qu'on ne devait pas parler de la trois millième décimale du nombre π; c'était pour lui « des mots dépourvus de sens ». Sauf dans ce cas, il s'agit sans doute d'une nouvelle manifestation de la peur de l'infini, qui s'est manifestée d'abord avec Zénon d'Elée, dont les objections nous font sourire aujourd'hui, puis de nouveau à l'époque de Leibniz, dont certains contemporains n'admettaient pas les principes du calcul différentiel et intégral. Les nouvelles formes de l'infini devaient sans doute fatalement ressusciter la peur de l'infini sous de nouvelles formes; mais je pense que, sans les paradoxes qu'elles entraînaient, cette peur n'aurait pas atteint les hommes que je viens de nommer.

Ce qui caractérisait Lebesgue était, comme pour Lusin, un extrême scepticisme. Il était sceptique quand on lui parlait d'ensembles non mesurables. Il l'eût été bien plus si on lui avait affirmé que tous les ensembles étaient mesurables, au moins grâce à une extension convenable de la mesure. M. Borel, qui semble avoir au début partagé le scepticisme de Lebesgue, a depuis affirmé la possibilité de cette extension. J'imagine d'autre part qu'il hésiterait à écrire, comme l'a fait Lebesgue en 1905, que le raisonnement à l'aide duquel on prouve que tout ensemble infini est au moins dénombrable ne lui paraît pas satisfaisant.

Cette phrase ne pouvait sans doute être écrite que par Lebesgue. Il faut évidemment y voir un peu d'humour, mais elle contient sûrement une idée cachée, et cette idée ne peut être que la suivante : il n'est pas certain que dans tout ensemble infini nommé je sache nommer une suite infinie. Mais pourquoi ne pas le dire explicitement? Pourquoi ne pas parler comme tout le monde? Je m'arrêterai sur cette remarque, sans insister davantage sur les autres différences qu'on peut relever entre les conceptions des savants que j'ai déjà nommés, ou encore de M. de la Vallée Poussin, qui, dans son livre sur l'intégrale de Lebesgue, évite d'employer l'axiome de Zermelo, sans dire explicitement qu'il ne le tient pas pour exact.

CHAPITRE II.

L'Antinomie Richard.

7. *Énoncé de l'antinomie.* — Il y a plusieurs manières différentes, non exactement équivalentes, d'énoncer cette antinomie. Poincaré a attiré l'attention sur l'une d'elles, relative *au plus petit nombre entier qui ne puisse être défini par une phrase de moins de mille mots;* or il vient d'être défini par une phrase de dix-huit mots. Poincaré a fait remarquer que le paradoxe apparaît ainsi sans intervention de l'infini. Mais cette manière de l'énoncer introduit une difficulté parasite : qui nous dira si une phrase rédigée en style télégraphique doit être considérée comme claire, ou s'il faut une phrase plus longue pour définir correctement le nombre auquel on a pensé? Ainsi on ne peut pas considérer que le nombre minimum de mots avec lesquels on puisse définir un nombre donné soit quelque chose de bien défini.

La même difficulté parasite se présente lorsque, avec M. Émile Borel, on parle de *définir un nombre n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable des nombres définissables.* Il faut pour cela supposer cet ensemble effectivement dénombré. Il est facile de classer toutes les phrases concevables dans un ordre déterminé. Mais qui nous dira, pour chaque nombre, quelle est la première des phrases que l'on puisse considérer comme une définition claire et correcte de ce nombre ?

Pour cette raison, il nous semble qu'il convient de discuter l'antinomie Richard sous la forme relative *au plus petit nombre transfini qui ne puisse pas être défini par une phrase d'un nombre fini de mots français.* La difficulté parasite n'existe pas, car il est bien certain que, si quelqu'un nous objecte qu'une phrase de cent mots à l'aide de laquelle nous avons cru définir un nombre transfini n'est pas correcte au point de vue grammatical, nous pourrons, à l'aide d'une phrase plus longue, lui expliquer clairement de quel nombre nous avons voulu parler, et ce nombre sera réellement défini par une phrase d'un nombre fini de mots. Il ne reste donc que la difficulté essentielle : quelle signification peut-on attribuer à la phrase écrite ci-dessus en italiques, qui semble définir un nombre en quelques mots tout en affirmant qu'il ne peut pas être défini par une phrase d'un nombre fini de mots? L'objet de ce Chapitre est de répondre à cette question.

8. *Les nombres transfinis bien définis.* — Il est souvent important de distinguer entre un nombre *défini* et ce que nous appellerons un nombre *bien défini*. Ainsi le nombre des nombres algébriques figurant dans la suite de quatre nombres e, π, $\sqrt{2}$, C (C étant la constante d'Euler) est évidemment défini sans ambiguïté; mais dans l'état actuel de la science nous ne savons pas si c'est 1 ou 2; nous dirons qu'il n'est pas bien défini.

Dans le cas des nombres transfinis, il peut arriver aussi qu'une définition indirecte permette de définir (ou, si l'on préfère, nommer) des nombres transfinis dont il nous sera impossible d'avoir une idée précise. Mais nous ne les considérerons comme *bien définis* que s'ils ont été *obtenus directement* par des combinaisons *définies en un nombre fini de mots* des opérations qui servent de base à la définition des nombres transfinis : addition d'une unité, et passage à la limite (nous appelons *limite* d'une suite de nombres transfinis croissants a_n le plus petit nombre transfini supérieur à tous les a_n; ce langage peut soulever quelques objections, mais nous semble commode) (1).

Naturellement, pour gagner du temps, nous pouvons utiliser des opérations dont il est facile de vérifier qu'elles se ramènent aux précédentes. Ainsi nous pouvons employer les symboles $\alpha+\beta$, $\alpha\times\beta$ et α^β; si α et β sont bien définis, ils conduisent à des nombres bien définis.

Nous nous proposons de montrer qu'on peut parler sans ambiguïté de *l'ensemble* E *des nombres transfinis susceptibles d'être bien définis*. Nous désignerons par λ le plus petit nombre transfini supérieur à tous ceux de E; *il sera défini, mais non bien défini*.

Pour ne pas être arrêté bien avant λ dans la formation d'une suite de nombres transfinis croissants, il faut bien entendu ne pas s'attarder en chemin; ainsi, si l'on voulait énumérer tous les nombres ω^n $(n=1, 2, \ldots)$, on n'atteindrait jamais ω^ω. Personne ne sera sans doute assez maladroit pour ne pas réussir à

(1) Observons aussi que, les nombres transfinis indiquant dans toutes les applications une relation d'ordre qui n'est pas nécessairement une relation de grandeur, on comprend que M. Denjoy évite de dire que α est *plus petit* que β (ou $\beta>\alpha$), mais dise que α *précède* β. Nous utiliserons tout de même des inégalités ordinaires pour définir les relations d'ordre entre des nombres transfinis. Cela facilite le langage, et cela sans créer aucune ambiguïté.

atteindre et dépasser ω^ω. Mais il faut beaucoup d'attention pour ne pas commettre dans la suite des maladresses analogues.

Ainsi, en partant d'un nombre $\alpha \geqq \omega$, considérons l'opération $F\alpha = \alpha^\alpha$. Il est tout naturel, pour obtenir des nombres transfinis de plus en plus grands, de considérer ses itérés successifs $F^n\alpha\,(n = 1, 2, \ldots)$, puis leur limite $F^\omega\alpha$, et même, si $\alpha > \omega$, de continuer transfiniment jusqu'à $F^\alpha\alpha$ que nous désignerons maintenant par $\alpha_2 = F_2\alpha$. En partant de α_2 et de l'opération F_2, et procédant comme nous venons de le faire en partant de α et de l'opération F, nous arriverons à $\alpha_3 = F_3\alpha$, puis, en partant de α_3 et de l'opération F_3 à $\alpha_4 = F_4\alpha$, et ainsi de suite. Naturellement nous ne continuerons pas indéfiniment, mais nous considérerons le passage à la limite qui donne $F_\omega\alpha$, et irons même jusqu'à $F_\alpha\alpha$ ou même jusqu'à $F_\beta\alpha$ avec $\beta = F_\alpha\alpha$.

Il ne paraît pas nécessaire de continuer cette construction. Ce qui précède suffit pour mettre en évidence le fait suivant : ayant défini une opération, qui, appliquée à α, donne un nombre $F\alpha > \alpha$, nous ne nous contenterons pas de la répéter, mais nous en déduirons, en principe par itération, la définition de nouvelles fonctions plus rapidement croissantes, puis par des passages à la limite, des fonctions plus rapidement croissantes encore, et ainsi de suite indéfiniment, sans jamais nous attarder à répéter un procédé déjà employé, ou du moins en ne le répétant qu'un nombre fini de fois, si cela paraît utile pour mieux le définir.

Insistons bien sur la différence entre les passages à la limite utilisés dans cette construction et celui qui permettrait d'atteindre λ. Nous considérons ici, pour définir un nombre β comme limite d'une suite de nombres transfinis croissants $\alpha_n(n = 1, 2, \ldots)$, des suites définies par des formules de l'une des formes $\alpha_{n+1} = F\alpha_n$ ou $\alpha_{n+1} = F_n\alpha_n$, et, dans ce second cas, la suite infinie des opérations F_n est supposée, grâce à l'emploi d'une récurrence, définie elle-même en un nombre fini de mots. Ainsi, même si les opérations F_n sont de plus en plus compliquées, la suite des α_n, et par suite β, sont bien définies par un nombre fini de mots. Au contraire, en vertu de la définition même de λ, on ne peut obtenir ce nombre que comme limite de nombres α_n définis successivement par des phrases de plus en plus longues.

Faisons encore quelques remarques.

1° Nous avons parlé de la nécessité d'éviter des erreurs qui auraient pour résultat de nous arrêter bien avant λ, et nous n'avons donné aucune règle pour éviter effectivement ces erreurs. Nous ne pouvions pas en donner, car si nous le faisions en un nombre fini de mots, nous aurions bien défini λ en un nombre fini de mots, ce qui n'est pas possible. Cela n'empêche pas que l'ensemble E, et par suite le nombre transfini λ, soient définis sans ambiguïté. Dire en effet qu'un nombre α appartient à E, ce n'est pas dire que Jean, Pierre ou Paul arriveront à ce nombre ou le dépasseront dans des tentatives plus ou moins adroites pour construire E; c'est dire qu'il existe une construction susceptible d'être définie par une phrase d'un nombre fini de mots et qui permette d'atteindre et dépasser α; et si elle existe, on a un moyen sûr d'y arriver, fût-ce par une construction méthodique de toutes les phrases possibles.

Rappelons ce qu'est cette construction méthodique, souvent considérée par M. Émile Borel. On appelle phrase toute suite d'un nombre fini n de mots. Si N est le nombre des mots de la langue française (en éliminant si l'on veut les mots sans intérêt au point de vue mathématique et en ajoutant tous les signes de ponctuation ou symboles mathématiques qui peuvent être utiles), on écrit successivement, par ordre alphabétique dans chaque catégorie, les N phrases d'un mot, puis les N^2 phrases de deux mots, et ainsi de suite. On ne garde ensuite que celles qui *définissent bien* des nombres transfinis, et il importe peu ici qu'une phrase paraisse incorrecte ou peu claire, puisqu'elle peut être remplacée par une phrase correcte et claire que l'on trouvera à sa place dans la liste des phrases possibles.

2° Pour *bien définir* un nombre α de E, on ne peut pas faire l'économie du travail qui consiste à écrire effectivement la phrase dont nous venons de parler. Si nous parlons par exemple du plus petit nombre qui ne puisse pas être défini par une phrase de mille mots au plus, c'est un nombre peut-être *défini*, mais pas *bien défini*. Pour le considérer comme défini, il faut d'ailleurs, d'une part supposer résolues les difficultés du langage que nous avions voulu écarter, d'autre part anticiper sur l'explication de l'antinomie Richard (prise sous une forme un peu différente de celle que nous étudions),

3° Dans ce qui précède, nous nous sommes efforcés de considérer des suites très rapidement croissantes de nombres transfinis bien définis. Il reste à se demander si tous les nombres transfinis α compris entre deux termes consécutifs α_{n-1} et α_n d'une telle suite peuvent être bien définis. La réponse est affirmative, de sorte que : *tous les nombres transfinis inférieurs à λ peuvent être bien définis*.

Si en effet $\alpha < \alpha_n$, ou bien $\alpha_n = \alpha' + 1$, et $\alpha \leqq \alpha'$ ou bien α_n a été défini comme suite de nombres transfinis croissants, tous bien définis, parmi lesquels nous pouvons en trouver qui soient égaux ou supérieurs à α; soit alors α' le premier de ces nombres. De toute façon, $\alpha \leqq \alpha' < \alpha_n$, α' étant bien défini. Si $\alpha = \alpha'$, le théorème est démontré. Si $\alpha < \alpha'$, nous pouvons recommencer le raisonnement, et trouver un nombre α'', bien défini, $< \alpha'$ et $\geqq \alpha$. En recommençant encore, nous obtiendrons une suite de nombres transfinis décroissants α', α'', ..., qui ne s'arrêtera que quand l'un d'eux sera égal à α.

Or il ne peut pas exister de suite infinie de nombres transfinis décroissants; c'est donc qu'un de ces nombres est égal à α, qui est ainsi bien défini,

C. Q. F. D.

Nous appellerons avec M. Denjoy *section* $(1, \alpha)$ (de l'ensemble des nombres transfinis de la seconde classe) l'ensemble des nombres finis ou transfinis inférieurs à α. On peut alors dire : *l'ensemble* E *des nombres finis ou transfinis qui peuvent être bien définis coïncide avec la section* $(1, \lambda)$; *ou encore :* λ *est à la fois le plus petit nombre transfini qui ne puisse pas être bien défini, et le plus petit qui soit supérieur à tous ceux qui peuvent être bien définis.*

4° Nous dirons que la section $(1, \gamma)$ est *bien décrite* si nous avons, en un nombre fini de mots, défini le moyen de faire correspondre, à chaque nombre transfini inférieur à γ, une suite finie de nombres entiers ordinaires qui le définisse parfaitement, et cela de manière que l'ordre relatif de deux nombres α et β coïncide avec le classement alphabétique des suites qui leur correspondent.

Si $\gamma < \lambda$, cette description résulte du raisonnement du 3° ci-dessus, puisque chacun des nombres α', α'', ..., dont le dernier n'est autre que α, est bien défini par le rang qu'il occupe dans une certaine suite de nombres transfinis croissants. Mais il faut supposer ces suites préalablement bien définies, ce qui a lieu si $\gamma < \lambda$, mais non si $\gamma = \lambda$.

Il peut être utile de préciser l'aspect de cette description, au moins pour les sections $(1, \omega_2)$ et $(1, \omega_3)$ (en posant $\omega = \omega_1$, $\omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$). La description de la première résulte de ce que tout $\alpha < \omega_2$ est de la forme

$$\alpha = a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \omega + a_n, \tag{1}$$

de sorte qu'on peut représenter α par la suite

$$n(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2}$$

dont le premier terme indique le nombre de ceux que doit comprendre la parenthèse qui le suit; n est positif; les a_ν sont positifs ou nuls, a_1 seul étant nécessairement positif.

De même, si $\alpha < \omega^{\omega^2} = \omega_2^\omega$, on peut écrire

$$\alpha = \alpha_1 \omega_2^{n-1} + \alpha_2 \omega_2^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} \omega + \alpha_n, \tag{3}$$

chacun des α_ν étant $< \omega_2$, donc la forme

$$\alpha_\nu = a_{\nu,1} \omega^{p_\nu - 1} + \ldots + a_{\nu, p_\nu - 1} \omega + a_{\nu, p_\nu},$$

de sorte que α peut être représenté par la suite

$$n[p_1(a_{1,1}, \ldots, a_{1,p_1}), \ldots, p_n(a_{n,1}, \ldots, a_{n,p_n})]. \tag{4}$$

Pour décrire la section $(1, \omega^{\omega^N})$, il faudra superposer des parenthèses ou crochets de N espèces différentes, chaque crochet étant précédé d'un nombre qui indique combien il doit contenir de crochets de l'espèce suivante (et, pour les parenthèses ou crochets de la dernière espèce, combien il doit finalement contenir de termes). Enfin, pour décrire la section $(1, \omega_3)$, la convention qui précède suffit, à cela près que N n'est pas connu d'avance et doit être écrit en tête de la formule.

Il n'est pas difficile de dépasser ω_3; on aura alors des structures plus compliquées, dans lesquelles les nombres dont chacun indique combien il y a à sa droite de crochets superposés sont eux-mêmes intérieurs à d'autres crochets.

Le caractère alphabétique de la représentation ainsi obtenue est bien évident sur les formules (1) et (2). Précisons que le classement alphabétique, que nous considérons ici avec M. Denjoy, est différent de celui de M. E. Borel mentionné plus haut, puisque c'est un classement transfini. La liste finie des mots du dictionnaire est ici remplacée par la suite infinie des nombres entiers (> 0, ou $\geqq 0$, suivant les cas). En outre, la longueur des suites considérées n'intervient pas ici *a priori*; c'est du premier nombre écrit que dépend en première approximation le classement de la suite considérée; cette différence disparaît d'ailleurs si l'on convient de faire précéder chaque phrase de M. Borel par un chiffre indiquant le nombre de ses mots.

Remarquons enfin que le caractère alphabétique du classement n'est obtenu que dans une section donnée d'avance. Ainsi, la suite (2), qui représente le nombre $\alpha < \omega_2$ défini par la formule (1), doit être remplacée par

$$1[n(a_1, a_2, \ldots, a_n)],$$

si l'on veut considérer le même nombre α comme appartenant à la section $(1, \omega_2^\omega)$.

9. *Le prolongement de l'ensemble* E. — Il est bien clair que, λ étant défini, on peut définir de nouveaux nombres transfinis. Pour l'étude de ces nombres, il peut être utile d'employer le même langage que dans la théorie des corps algébriques, quand on étend un corps par l'adjonction de nouveaux éléments. Nous pourrons ainsi définir un nouvel ensemble E_2, défini par l'adjonction de λ; il comprendra tous les nombres qui peuvent être bien définis, non au sens du n° 8, mais grâce à cette adjonction. Ils seront des fonctions bien définies de λ.

Si la structure de l'ensemble E est d'une complication impossible à concevoir, E_2 est d'une structure plus compliquée encore. La seule section $(\lambda, 2\lambda)$ de E_2 est évidemment à elle seule identique à E; les puissances finies de λ, puis celles d'exposant ω limitent des sections de structures plus compliquées encore, et sont encore bien éloignées de $F\lambda = \lambda^\lambda$. Pourtant, en parlant de ce nombre, nous n'avons sans doute fait que marquer dans la formation de E_2 une première étape analogue à celle que constitue la définition de $F\omega = \omega^\omega$ dans la formation de E, et, si l'on considère la formation de l'itérée $F^\omega\omega$ comme la deuxième étape dans la description de E, l'étape correspondante dans la description de E_2 consistera dans la formation, non de $F^\omega\lambda$, mais de $F^\lambda\lambda$; et ainsi de suite.

Après E_2, on peut continuer encore, définir le plus petit nombre transfini supérieur à tous ceux de E_2, et considérer l'ensemble E_3 des nombres transfinis bien définis en fonction de λ et de ce nouveau nombre λ_2. Et ainsi de suite. On introduira $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_\omega, \ldots$, puis enfin λ_λ. L'opération qui consiste à passer de α à λ_α nous permet de faire des bonds prodigieux dans la définition de nombres transfinis de plus en plus grands; nous considérerons à nouveau ses itérées d'ordre $2, 3, \ldots, \omega, \ldots, \alpha$; et ainsi de suite.

Mais il faut bien nous arrêter. Même en continuant pendant des centaines de pages, nous ne pourrions pas préciser l'idée forcément vague d'un certain ensemble E' qui comprend tous les E_α dont nous venons de parler.

Au sujet de cet ensemble, nous pouvons seulement observer que, comme n'importe lequel des E_α, s'il comprend un nombre transfini, il comprend tous les nombres plus petits. Il constitue une section commençante de l'ensemble des nombres transfinis de la deuxième classe, et le plus petit nombre transfini ne lui appartenant pas, que nous désignerons par μ, est supérieur à tous ceux qui lui appartiennent.

Observons aussi que, comme pour λ, ou n'importe lequel des λ_α, on peut appliquer à μ ce principe : en avançant vers l'infini on ne s'en approche pas.

On sait que ce principe peut être appliqué aux nombres transfinis de plusieurs manières différentes. La plus simple repose sur la notion d'accessibilité par l'addition. Un nombre est *accessible par l'addition* s'il peut être représenté par la somme de deux nombres plus petits. Il existe des nombres non accessibles par addition : ce sont tous ceux qui sont de la forme $\alpha \times \omega$ ou qui peuvent être définis comme limites de nombres de cette forme [1]. Dans le cas de la multiplication, un nombre tel que $2\omega + 5$, qui a le caractère d'un nombre premier, ne peut pas être représenté par le produit de deux nombres plus petits. Il nous paraît préférable d'appeler *nombres non accessibles par multiplication*, en excluant ces nombres premiers, ceux qui ne peuvent pas être *égalés ou dépassés* par le carré d'un nombre plus petit (ni par suite par le produit de deux nombres plus petits que lui, puisque ce produit est égalé ou dépassé par le carré du plus grand des deux). Ce sont alors les nombres de la forme β^ω, et ceux qui peuvent être définis comme limites de nombre de cette forme.

On peut de même considérer les nombres non accessibles par l'opération $F\alpha = \alpha^\alpha$; ils ne peuvent alors pas non plus être atteints ou dépassés par l'opération α^β, s'ils ne sont pas déjà atteints ou dépassés par le plus grand des

---

(1) Précisons bien que, quand nous écrivons $\alpha \times \beta$, c'est le second facteur qui est le multiplicateur; le contraire a lieu lorsque nous écrivons 2ω ou $n\omega$, sans expliciter le signe de multiplication.

Voir sur cette question : A. Denjoy, *L'énumération transfinie* (Gauthier-Villars, 1946), p. 103. Nous appelons *accessibles par l'addition* les nombres que M. Denjoy appelle *indécomposables*.

nombres α et β. Ce sont les nombres de la forme $F^{\omega}\alpha$, ou les limites de nombres de cette forme.

La même remarque s'applique à n'importe laquelle des opérations considérées au n° 8 pour définir des nombres transfinis de plus en plus grands. Il existe des nombres non accessibles par ces opérations, et il en est de même de λ, qui est limite de tels nombres; il n'est accessible par aucune de ces opérations.

Désignons alors par α n'importe quel nombre transfini $< \lambda$, et par G une quelconque des opérations considérées au n° 2. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les nombres déduits de α par l'opération G itérée $\beta_1, \beta_2, \ldots$ fois. La suite des α_n ne tend vers λ que si la suite des β_n tend vers λ. Les efforts que nous avons pu faire pour nous approcher de λ en définissant des nombres α très grands et des fonctions G rapidement croissantes n'auront servi à rien. Nous avons cru nous rapprocher de λ, et faciliter le reste du parcours en marchant à pas de géant. Pourtant les étapes $G_\beta\alpha$ qui restent à franchir ($\beta = 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1, \ldots$) avant d'atteindre λ constitueront encore un ensemble isomorphe de l'ensemble E tout entier.

Les mêmes remarques s'appliquent à n'importe lequel des E_α, et à E'.

10. *Explication de l'antinomie.* — Il nous sera commode de recourir à nouveau à un interlocuteur doué du pouvoir surnaturel d'accélérer sa pensée, et d'achever en un temps fini une suite infinie de raisonnements. Supposons-le aussi doué d'une vue infiniment fine. Il pourra alors imaginer un nombre transfini ρ de la seconde classe supérieure à tous ceux que nous pouvons concevoir, et marquer sur une droite un ensemble de points qui sera l'image de la section $(1, \rho)$.

Supposons qu'à cet interlocuteur nous parlions de l'ensemble E'' de tous les nombres transfinis définissables, du plus petit nombre ν qui ne lui appartienne pas, et du plus petit nombre transfini ν' supérieur à tous ceux de E''.

Précisons d'abord que E'' ne coïncide peut-être pas avec E'. Les nombres transfinis appartenant à E' ont été supposés définis par des constructions directes. Rien ne prouve que par des procédés indirects, dont certains seront mentionnés dans la suite, il ne soit pas possible de nommer des nombres supérieurs à tous ceux de E'. Cela ne semble guère probable; mais dans le doute, nous devons supposer que E'' peut différer de E', et, au sujet des nombres μ, ν, ν', nous ne pouvons pas exclure l'hypothèse $\mu < \nu < \nu'$.

Si donc nous parlons de E'' à notre interlocuteur supposé, il nous rappellera d'abord la remarque de Poincaré. Pour former cet ensemble, il faut imaginer le classement alphabétique (au sens de M. Borel) de toutes les phrases susceptibles de définir des nombres transfinis. Or, parmi ces phrases, on rencontrera celle qui définit E''; il faudra bien l'écarter, puisque E'' n'est pas encore formé; il faut la considérer comme dépourvue de sens.

Soit, répondrai-je; mais après avoir formé E'', je pourrai revenir à cette phrase et parler des nombres ν et ν'.

Peut-être, me dira-t-il : Mais savez-vous de quoi vous parlez? Il faut éliminer, bien entendu, en même temps que la phrase que nous venons de mentionner, toutes celles qui impliquent une idée analogue, toutes celles qui impliquent la construction préalable de E''. Ainsi, indépendamment des nombres transfinis susceptibles d'être définis autrement que par des constructions directes, considérez-vous qu'il faille vous arrêter à λ ou à μ?

Je répondrai, non sans hésitation, que E'' doit comprendre, non seulement E, mais E'. Je n'avais pas, en effet, en définissant E', pensé au classement alphabétique de toutes les définitions possibles. Ce classement m'apparaît comme un procédé ingénieux pour repartir encore une fois au delà de la limite qui me semblait définitive.

Quoi qu'il en soit, j'insisterai sur le fait que je peux repartir, et que je n'ai obtenu qu'une première partie E''_1 de l'ensemble que je voulais définir. A partir du premier nombre ν_1 n'appartenant pas à E''_1, je peux continuer à compter, $\nu_1 + 1$, $\nu_1 + 2$, et ainsi de suite. Répétant à peu près ce que j'ai dit déjà à propos des nombres $\lambda, \lambda_2, \ldots$, je parlerai de nombres $\nu_2, \nu_3, \ldots$, définis successivement par les admissions successives de phrases d'abord écartées. Pendant une année entière, je lui expliquerai comment je peux toujours définir de nouveaux nombres. Mais il faudra bien m'arrêter. Alors je conclurai : « Vous avez compris ce que je veux dire. Imaginez que je continue indéfiniment. A la fin des siècles, j'aurai défini E'', et l'antinomie réapparaît, puisque je peux vous parler de nombres ν et ν' n'appartenant pas à E''. »

Non, me répondra mon interlocuteur, elle ne réapparaît pas, car la réponse de Poincaré est toujours valable. Vous avez parlé pendant un an pour définir un ensemble. Le discours que vous avez tenu n'est qu'une des phrases qu'il faut examiner pour la formation de E'', que vous écartez provisoirement, et à laquelle vous donnez un sens après coup. Vous imaginez une suite de nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots$, qui ne sont que de mauvaises estimations de ν. La nécessité où vous êtes de les définir successivement vous fait comprendre que la brève phrase « le plus petit nombre transfini non définisable » n'a par elle-même aucun sens, et qu'il me faut une définition précise pour savoir de quoi vous parlez. Vos nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ne peuvent être réellement définis que par des phrases de plus en plus longues, et leur limite ν n'est réellement définissable que par une phrase d'une infinité de mots. Il importe peu que je puisse réellement concevoir ce nombre ν, et le nombre ν', et que vous ne le puissiez pas. Ce qui importe, c'est de constater que, une infinité de mots étant effectivement nécessaires pour le définir, il n'y a pas de contradiction à supposer que l'on continue à compter au delà de l'ensemble E''. Mais tout cela ne nous rapproche pas de l'ensemble de tous les nombres de la seconde classe, que je suis aussi bien que vous incapable de me représenter.

Mon interlocuteur à intelligence surhumaine saurait sans doute si E″ est ou non une section de l'ensemble des nombres transfinis de la seconde classe, et si ν et ν' sont égaux ou différents. Mais je ne peux pas sur ce point savoir ce qu'il me dirait.

Comme conclusion, je ne prétends pas avoir fait disparaître cette inquiétude, cette insatisfaction de l'esprit, que Zénon d'Élée ressentait en présence de l'infini, et que, trop habitués à l'infini pour bien comprendre les doutes du sophiste, nous ressentons encore devant le transfini. Mais j'espère avoir montré qu'il n'y a pas de contradiction; il ne pouvait pas y en avoir.

11. *Remarques diverses sur les éléments innommables.* — On peut appliquer des principes analogues à ceux qui précèdent aux autres formes de l'antinomie Richard. Ainsi les résultats rappelés au n° 1 semblent donner le moyen de nommer une fonction plus rapidement croissante que toute fonction nommable, et un nombre n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable des nombres nommables. Ces définitions sont illusoires, et nous pourrions répéter ce qui a été dit à propos de l'antinomie Richard. Mais il semble préférable de montrer qu'il y a un lien entre ces différentes questions.

1° Le plus évident de ces liens est celui qui existe entre la suite des nombres transfinis et une suite convenablement formée de fonctions de plus en plus rapidement croissantes. On fait en général correspondre au nombre transfini

$$\alpha = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = \mathrm{P}(\omega) + a_n,$$

la fonction

$$f_\alpha(x) = e^{\mathrm{P}(x)}x^{a_n},$$

et l'on peut convenir que, si une fonction $f(x)$ correspond ainsi à un nombre transfini α, $e^{f(x)}$ correspondra à e^α. Mais ces conventions simples sont en défaut quand il s'agit de définir ce qu'on appellera la fonction exponentielle itérée ω fois. On appliquera alors la formule (2) du Chapitre I, ou une formule analogue.

On peut ainsi, sans ambiguïté, faire correspondre une fonction déterminée à chaque nombre α de l'ensemble E défini au n° 8. Mais ensuite se présente une difficulté dont nous pouvons donner une idée en observant que ω peut être défini comme limite, soit de la suite 1, 2, ..., soit d'une suite d'entiers $n_1, n_2, \ldots$, qu'on peut supposer rapidement croissants. Si l'on convient que $f_n(x) = x^n$ (pour tout n fini), et qu'on définisse $f_\omega(x)$ par la formule (2), on obtient, non e^x, mais dans le premier cas une fonction qui croît à peu près comme x^x (pour x entier elle est équivalente à x^x), et dans le second cas une fonction dont la croissance est arbitrairement rapide. Sans doute cette conclusion est-elle un peu illusoire, puisqu'on ne peut prendre pour la suite des n_h qu'une suite déjà nommée. Mais cette remarque montre que, si le nombre λ défini comme le plus petit nombre transfini supérieur à tous ceux de E, quoique non susceptible d'être bien connu, est nommé sans ambiguïté, il n'en est pas de même de la fonction $f_\lambda(x)$ qui devrait lui correspondre. Il faudrait pour la définir avoir nommé une suite de nombres transfinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ tendant vers λ, et, par définition de λ, cela n'est pas possible.

L'application transfinie de la formule (2) ne permet donc de définir $f_\alpha(x)$ que si $\alpha < \lambda$.

Peut-être est-il possible d'obtenir par des procédés indirects des fonctions encore plus rapidement croissantes. Ainsi, ne sachant pas si le nombre π est normal pour la numération décimale, nous pouvons supposer que les zéros se raréfient de plus en plus dans la suite des décimales de ce nombre, et qu'une fonction $f(x)$, égale pour $x = n$ entier au rang du $n^{\text{ième}}$ zéro et variant linéairement dans chaque intervalle $(n, n+1)$, croisse plus vite que n'importe quelle fonction $f_\alpha(x)$ $(\alpha < \lambda)$. S'il n'en est pas ainsi, peut-être en sera-t-il ainsi pour d'autres constantes faciles à définir, ou pour d'autres systèmes de numération.

Quoique, en raison du fait que λ dépasse déjà infiniment tous les nombres transfinis pratiquement pensables, il semble très peu probable qu'il en soit ainsi, c'est une circonstance qu'il faut provisoirement considérer comme logiquement possible, et il n'est pas non plus impossible qu'on puisse déduire d'une telle fonction la définition d'un nombre transfini supérieur à λ, et même aux nombres que j'ai appelés μ et ν. Ce serait une de ces définitions indirectes, prévues au n° 10 et qui nous ont obligés à distinguer ν et ν'. Mais il est probable que $\nu' = \nu = \mu$.

Malgré ces difficultés, l'impossibilité où nous sommes de nommer des fonctions de croissances arbitrairement rapides, tient au fait qu'elles sont (au moins pour l'esprit surhumain dont nous avons parlé) liées à des nombres transfinis trop grands pour être nommés.

2° Le problème est le même pour les fonctions lentement croissantes, qu'on peut considérer comme inverses des précédentes. Il y en a qui sont trop lentement croissantes pour pouvoir être nommées; nous les appellerons fonctions $\varphi(x)$. A toute fonction nommée $f(x)$ correspond alors une classe de fonctions $f(x)\,\varphi(x)$ qui ne peuvent pas être nommées.

Si $f(x)$ dépend d'une manière continue d'un paramètre, le résultat subsiste même si ce paramètre a une valeur non nommable. Supposons par exemple $f(x) = x^\alpha$. Si α n'est pas nommable, non seulement $f(x)\,\varphi(x)$ ne l'est pas, mais il en est de même de $f(x)\,\psi(x)$, en désignant par $\psi(x)$ une fonction quelconque telle que

$$\log\psi(x) = o\,(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

Si en effet $f(x)\psi(x)$ était nommable, α serait défini par

$$\log[f(x)\psi(x)] \sim \alpha \log x,$$

et serait nommable. Il existe donc des classes de fonctions dépendant d'un paramètre (et même d'un nombre arbitrairement grand de paramètres) et dont on peut affirmer qu'elles ne contiennent aucun élément nommable.

On peut aussi définir des fonctions non nommables, et pour lesquelles ce caractère provient, non de leur mode de croissance moyen, mais de l'irrégularité de leur croissance; tel sera le cas des fonctions de la forme

$$\int [f(x) + g(x)\sin^2\varphi(x)]\,dx, \tag{5}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions régulièrement croissantes.

Tous les résultats qui précèdent s'étendent sans difficultés aux suites, et en particulier aux suites de nombres entiers. Naturellement, une telle suite ne pourra être lentement croissante que si elle n'est pas strictement croissante. Elle comprendra p_1 termes égaux à 1, p_2 termes égaux à 2, et ainsi de suite, la suite des p_h étant rapidement croissante.

3° Considérons maintenant le segment (0, 1). Étant donnée une suite de nombres x_n ($n = 1, 2, \ldots$) de ce segment, on sait nommer un nombre x_ω différent de tous les x_n. Quel que soit le procédé employé, sa répétition transfinie permet de nommer une infinité de nouveaux nombres x_α. Tant que $\alpha < \lambda$, il n'y a pas de difficulté, puisqu'on sait effectivement ranger en une suite infinie tous les β de la section $(1, \alpha)$, et par suite tous les x_β; on saura donc définir x_α. Mais x_λ ne peut pas être considéré comme défini, et c'est ce qui résout l'antinomie Richard sous la forme considérée par M. Borel.

Parmi les différentes méthodes pour la définition de x_ω, nous avons choisi celle indiquée au n° 1, parce qu'elle permet de caractériser de nombreuses classes de nombres innommables. En effet, chaque système de numération fait correspondre à chaque nombre x plusieurs suites d'entiers croissants, et il suffit qu'une de ces suites soit trop rapidement croissante pour être nommable, ou soit innommable pour une autre raison, pour que x soit aussi innommable. On peut ainsi caractériser une infinité, et même une infinité non dénombrable, de classes de nombres innommables.

Pourtant il semble bien que l'ensemble de toutes ces classes soit de mesure nulle, de sorte qu'un nombre choisi au hasard, qui a évidemment une probabilité égale à un de ne pas être nommable, ait la même probabilité de n'appartenir à aucune de ces classes. En tout cas, il en est ainsi de celles qui sont caractérisées par une croissance trop rapide d'une des suites auxiliaires; elles ne contiennent en effet aucun nombre absolument normal, et un nombre choisi au hasard est presque sûrement absolument normal.

D'autres classes de nombres innommables peuvent être définies à l'aide d'une formule du type (5). Mais ici encore on peut observer que pour un nombre choisi au hasard, la suite des décimales a des oscillations plus irrégulières que celles qu'implique une formule de ce genre.

D'autre part, on peut aisément nommer des nombres pour lesquels la suite des décimales a quelques-uns des caractères que réaliserait le hasard; sans doute est-ce le cas du nombre π. Dans la représentation décimale d'un tel nombre, modifions suivant une loi donnée (par exemple en remplaçant 0 par 1, 1 par 2, ..., 9 par 0) les décimales dont les rangs appartiennent à une suite donnée S. Nommer le nombre obtenu x, c'est nommer S. A la classe C des suites S trop rapidement croissantes pour être nommables correspond ainsi une classe K des nombres non nommables, bien différente de celles définies d'abord, en ce sens que la suite de leurs décimales conserve les principaux caractères d'une suite de chiffres choisis au hasard.

Finalement, il existe bien des manières de définir des classes K de nombres compris entre 0 et 1, et même des ensembles non dénombrables de classes K, ne contenant aucun élément nommable, et telles que pour chacune il y ait correspondance biunivoque entre ses éléments et les suites S de C. Mais il ne semble pas possible, même en introduisant d'autres méthodes pour définir des classes d'éléments non nommables, qu'on échappe à la conclusion indiquée tout à l'heure : un nombre choisi au hasard, non seulement n'a aucune chance d'être nommable, mais n'a aucune chance d'appartenir à une classe nommable d'éléments innommables ([1]).

CHAPITRE III.

Remarques sur un théorème de M. Denjoy.

11. *Rappel du théorème de M. Denjoy.* — Considérons une suite S d'entiers positifs p_n ($n=1, 2, \ldots$), vérifiant la condition $p_n \leq n$. Désignons par C l'ensemble des suites S. D'après le théorème de M. Denjoy : *on peut définir dans* C *une infinité de classes disjointes* E, *ayant chacune la puissance du continu, et telles qu'il y ait correspondance biunivoque entre les* E *appartenant à un certain sous-ensemble* C′ *de* C *et les nombres transfinis de la seconde classe.*

([1]) L'ensemble E de toutes les classes nommables K d'éléments innommables est invariant par l'addition d'un nombre rationnel quelconque. Il paraît bien difficile d'envisager qu'il soit non mesurable, ou bien mesurable et de mesure un; il faut donc conclure qu'il est de mesure nulle.

Bien entendu, nous excluons toute définition qui, par exemple, reviendrait à prendre pour K la classe de tous les éléments innommables; il s'agit de classes définies par des propriétés précises qui fassent comprendre pourquoi leurs éléments sont innommables. Un nombre choisi au hasard est innommable, sans qu'on sache pour quelle raison particulière il l'est.

D'ailleurs C et C′ ont la même puissance, qui est celle du continu, de sorte qu'on peut aussi établir une correspondance biunivoque entre les classes E considérées et les points d'un segment. Le n° 12 sera consacré à cette question, mais plus pour en montrer les difficultés que pour la résoudre réellement.

Nous désignerons par e un ensemble dénombrable de points d'une droite D. Si deux ensembles e et e' sont *isomorphes*, c'est-à-dire qu'on puisse établir entre leurs points une correspondance biunivoque n'altérant pas l'ordre des points sur la droite D, nous dirons qu'ils appartiennent à une même classe (e).

L'ensemble e supposé dénombré donne une suite s de points A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, tous distincts. Comme pour e, nous pouvons définir des classes (s) de suites s, caractérisées chacune par les conditions qui définissent l'ordre relatif des différents points A_n. Comme une permutation quelconque de la suite des A_n ne change pas l'ensemble e qu'elle représente, chaque ensemble e est représenté par une infinité de suites s, dont l'ensemble a la puissance du continu. De même, chaque classe (e) correspond à un ensemble de classes (s) ayant la puissance du continu.

Or, pour définir une classe (s), il n'y a qu'à se donner, pour chaque A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, un nombre p_n qui indique sa situation par rapport aux points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Nous verrons dans un instant qu'il y a intérêt, pour numéroter les n intervalles séparés par ces points, à ne pas adopter l'ordre qui paraît d'abord naturel (de gauche à droite sur D). Quoi qu'il en soit, p_n aura n valeurs possibles, $1, 2, \ldots, n$, de sorte que : il y a correspondance biunivoque entre les classes (s) et les suites S définies tout à l'heure, et par suite aussi entre les classes (e) et certaines classes E de suites S, deux à deux disjointes, et dont chacune a la puissance du continu.

Or il y a évidemment aussi correspondance biunivoque entre les nombres transfinis de la seconde classe et celles des classes (e) dont les ensembles e sont bien ordonnés, donc aussi entre ces nombres transfinis, et celles des classes E qui correspondent à ces classes (e). Leur réunion ne forme qu'un sous-ensemble C′ de C.

Le théorème énoncé est ainsi démontré. Il y a évidemment intérêt à préciser la condition qui caractérise les suites S appartenant à C′, et auxquelles correspondent par suite des nombres transfinis de la deuxième classe.

A cet effet, au sujet de la numérotation laissée tout à l'heure arbitraire, nous ferons la convention suivante : $p_n = n$ signifiera que A_n est à droite de tous les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$; $p_n = \nu < n$ signifiera que A_n est immédiatement à gauche du point A_ν.

Nous appellerons *chaîne* une suite croissante de valeurs n_h $(h = 1, 2, \ldots)$ de n telles que

$$p_{n_{h+1}} = n_h,$$

de sorte que le point $A_{n_{h+1}}$ sera toujours à gauche de A_{n_h}.

Montrons alors, avec M. Denjoy, que : *pour que la suite* S *appartienne à* C′, *il faut et il suffit qu'il n'y ait pas de chaîne infinie*.

Cette condition est évidemment nécessaire : s'il y avait une chaîne infinie, elle donnerait une suite infinie de points A_n dont chacun serait à gauche du précédent, et l'ensemble de tous les A_n ne serait pas bien ordonné.

Inversement, si l'on peut trouver une suite infinie s de points B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ appartenant à l'ensemble des A_n et tels que chacun soit à gauche du précédent, en dénombrant les A_n, en désignant par B'_1 le premier point, appartenant ou non à s, qui laisse à sa gauche certains points de s (donc une infinité), par B'_2 le premier qui, laissant encore à sa gauche des points de s, soit à gauche de B'_1, et ainsi de suite, on est sûr de pouvoir continuer indéfiniment, puisque immédiatement à gauche de chaque B'_h il reste toujours une infinité de B_ν non encore dénombrés, et les indices des points B'_h formeront une chaîne infinie. Le théorème est ainsi démontré.

Il est à peine besoin de faire observer que, malgré son grand intérêt, ce théorème ne recule pas les bornes de l'inconnaissable. Si l'on se trouve avoir nommé une suite vérifiant la condition précédente et qu'on en déduise un nombre transfini très grand, cela constituera une définition indirecte de ce nombre. Nous avons déjà prévu cette possibilité en distinguant les limites ν et ν'. D'après la définition même de ν', ce nombre, s'il atteint ou dépasse ν, ne saurait dépasser ν'. D'ailleurs λ, μ, ν dépassent déjà tellement tout ce qui est humainement convenable, qu'on ne voit *a priori* aucune raison de penser qu'une définition indirecte pourrait donner par hasard un nombre transfini égal ou supérieur à ν; à première vue, il semble plutôt probable que $\nu = \nu'$.

12. *Étude de l'ensemble* C′. — 1° Chaque classe E a évidemment la puissance du continu. Il y a en effet autant d'éléments dans une telle classe qu'il y a de manières de dénombrer un ensemble dénombrable; or, d'une de ces manières, rien qu'en choisissant une suite arbitraire d'entiers croissants h_ν, et en intervertissant, pour chaque h_ν les éléments de rangs $2h_\nu - 1$ et $2h_\nu$, on déduit une infinité d'autres ayant la puissance du continu. D'autre part, chaque E est un sous-ensemble de C′, qui est lui-même un sous-ensemble de C, qui a la puissance du continu. Donc chaque E, et aussi C′, ont la puissance du continu.

Un théorème général de G. Cantor donne alors le moyen d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de E (ou de C′) et les points d'un segment. Mais cette méthode détournée est à beaucoup de points de vue assez peu satisfaisante. A des suites ayant au début un grand nombre d'éléments communs ne correspondront pas en général des points voisins d'un segment, comme cela a lieu pour les modes de correspondance entre les points d'un segment, et certaines suites qui constituent les systèmes de numération.

Nous nous proposons de chercher si l'on peut, dans une certaine mesure, remédier à cet inconvénient. Cela est facile pour chaque classe E. Il semble au contraire qu'en essayant d'obtenir pour l'ensemble C' un résultat analogue, on ne puisse pas éviter de retomber sur les difficultés du transfini.

2° Nous allons d'abord présenter quelques remarques sur les *classes de suites définies par des conditions de récurrence.*

Nous considérerons des suites $\mathcal{S}$ d'éléments $e_1, e_2, \ldots,$ choisis dans un ensemble dénombrable $\mathcal{E}$. Une classe $\mathcal{C}$ de telles suites sera définie par une condition de récurrence si elle est définie par une succession de conditions de la forme $e_n \in \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n$ étant un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$, dont la définition peut dépendre d'une manière quelconque de $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$. Nous supposons essentiellement toute autre condition exclue. Ainsi la classe des suites contenant une infinité de fois chaque élément de $\mathcal{E}$ ne peut pas être définie par des conditions de récurrence (bien que certains sous-ensembles de cette classe puissent l'être).

Nous supposerons exclue l'hypothèse que, pour N assez grand et certaines déterminations de $e_1, e_2, \ldots, e_N$, la suite $\mathcal{S}$ se trouve déterminée sans qu'il y ait de nouveaux choix à faire (ce qui n'exclut pas l'hypothèse qu'il puisse arriver qu'un ou plusieurs $\mathcal{E}_n$ consécutifs se réduisent à un élément).

Alors la classe $\mathcal{C}$ considérée a la puissance du continu, et il est facile d'établir, entre les suites $\mathcal{S}$ et les points du segment (0.1) une correspondance qui constitue une *numération généralisée*. Elle sera biunivoque, à cela près que les extrémités des intervalles distingués dans cette numération peuvent ne correspondre à aucune suite $\mathcal{S}$, ou, comme pour la numération ordinaire, correspondre à deux suites distinctes.

A cet effet, on divisera d'abord le segment (0, 1) en autant d'intervalles que $\mathcal{E}_1$ contient d'éléments, et l'on fera correspondre un de ces intervalles à chaque détermination possible de e_1. Chacun de ces intervalles sera ensuite subdivisé en autant d'intervalles partiels qu'il le faut pour les faire correspondre aux déterminations possibles de e_2; et ainsi de suite.

Il faut remarquer que, si les e_n sont des points d'une droite, de sorte qu'il y a entre eux une relation d'ordre, on peut s'arranger pour que cette relation ne soit pas changée si l'on passe de e_n à l'intervalle qui le représente (on remarque que cela est vrai même si $\mathcal{E}_n$ est un ensemble partout dense. Ainsi il n'y a aucune difficulté à faire correspondre aux nombres rationnels des intervalles disjoints, dont la réunion constitue un intervalle donné, de manière qu'à un nombre $x < y$ corresponde un intervalle situé à gauche de celui qui correspond à y).

Si cette condition est réalisée, la correspondance entre chaque suite $\mathcal{S}$ de la classe $\mathcal{E}$ et les points d'un segment est une correspondance alphabétique, l'ordre relatif de deux points résultant de la comparaison des suites qui leur correspondent, les suites étant classées comme les mots d'un dictionnaire.

3° Considérons maintenant l'ensemble des permutations de la suite des nombres entiers. Les permutations que nous considérons sont celles que M. Denjoy appelle *élémentaires*, c'est-à-dire celles qui transforment la suite des nombres entiers en une suite simplement infinie (et non transfinie). Une telle permutation est définie par une suite d'entiers

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots, \tag{1}$$

telle que chaque valeur entière positive p se trouve une fois et une seule dans la suite des p_n. Autrement dit, l'équation $p = p_n$ a une solution et une seule, $n = n_p$, et la suite

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots \tag{2}$$

définit la permutation inverse de la précédente.

La classe des permutations élémentaires n'est pas une classe définie par une formule de récurrence. Pour chaque valeur de n, l'ensemble $\mathcal{E}_n$ dans lequel p_n peut être choisi comprend tous les entiers positifs différents de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, et à aucun moment la condition que chaque entier p doive être effectivement choisi une fois n'intervient pour limiter ce choix; c'est une condition qu'on ne peut vérifier qu'à la fin des opérations.

Il n'en est pas de même si pour chaque valeur de p nous nous donnons une borne supérieure de n_p. Le plus simple est de se donner exactement n_p. On est alors conduit à considérer la suite

$$p_1, \quad n_1, \quad p_2, \quad n_2, \quad \ldots, \quad p_h, \quad n_h, \quad \ldots, \tag{3}$$

qui comporte des données surabondantes. En effet $p_h = k < h$, équivaut à $n_k = h$ et cette circonstance est connue avant d'arriver au choix de p_h, qui se trouve déterminé par des choix antérieurs. Si l'on n'est pas dans ce cas, p_h ne peut être que $\geqq h$, et son choix détermine un choix postérieur.

Mais on remarque, d'une part, que la suite (3) détermine la suite (1), d'autre part que la classe de ces suites est définie par des conditions de récurrence, ce qui permet d'établir simplement une correspondance du type alphabétique entre les suites du type (3) et les points d'un segment. Donc, grâce à l'adjonction des éléments auxiliaires n_h, on obtient une représentation, indirecte si l'on veut, mais plus simple que celle qui résulte du théorème de Cantor, entre les permutations élémentaires de la suite des nombres entiers et les points d'un segment.

On remarque en particulier que cette correspondance est satisfaisante au point de vue de la continuité. Quelque grand que soit h, pour $n \geqq \mathrm{N}$, N étant supérieur à la fois à h et à $n_1, n_2, \ldots, n_h$, en changeant d'une manière quelconque les termes de la suite (1) d'indices supérieurs à N, on est assuré de ne pas changer les $2h$ premiers termes de la suite (3), et par suite, si h est lui-même assez grand, de déplacer très peu le point du segment (o,1) qui correspond à cette suite.

Le problème posé est ainsi résolu pour les classes E qui contiennent les suites correspondant aux différentes manières de dénombrer un même ensemble dénombrable; ces différents dénombrements se déduisent tous par des permutations élémentaires de l'un quelconque d'entre eux.

4° Étudions maintenant la classe C'. Elle n'est manifestement pas définie par des conditions de récurrence. La condition qu'il n'y ait pas de chaîne infinie ne se traduit jamais par l'obligation d'arrêter une chaîne à un élément donné. Il n'en serait pas de même si l'on se donnait une borne supérieure k de la longueur des chaînes (c'est-à-dire du nombre de leurs éléments). Mais, quelque grand que soit k, on n'obtiendrait ainsi qu'une partie de la classe C'.

On sait qu'on appelle nombres transfinis de la première espèce ceux qui ont un antécédent immédiat. Un nombre de la seconde espèce est au contraire défini, s'il est de la seconde classe, comme limite d'une suite de nombres transfinis croissants.

Il est à peu près évident que les nombres de la seconde espèce sont caractérisés, dans la représentation de la section $(1, \alpha)$ par une suite S de la classe C', par le fait que leurs rangs n sont des points de bifurcation d'où se détachent une infinité de chaînes.

Si en effet β est de la forme $\beta'+1$, à partir du moment où β et β' auront été dénombrés, on ne trouvera plus aucun p_ν égal au rang n de β; il conduirait à placer le point A_ν entre β' et β, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si inversement l'équation $p_\nu = n$ n'a qu'un nombre fini positif ou nul de racines, il viendra un moment où p_ν ne sera plus égal à n, de sorte qu'aucun point ne sera plus placé entre A_n et celui qui est à ce moment son antécédent immédiat. Il le restera donc, et représente un nombre transfini β' tel que $\beta = \beta' + 1$.

On voit ainsi comment, un nombre transfini α étant défini par l'intermédiaire d'une suite S, on peut obtenir l'ensemble dérivé de la section $(1, \alpha)$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres β de seconde espèce et $< \alpha$. Les nombres $\alpha < \omega^2$, en particulier, sont caractérisés par le fait que leurs ensembles dérivés sont finis. Les suites S qui leur correspondent ont donc chacune un nombre fini de termes qui sont des points de bifurcation d'une infinité de chaînes. Si $k\omega < \alpha \leqq (k+1)\omega$, ce nombre est k.

En ce qui concerne la longueur des chaînes, elle est évidemment bornée si $\alpha < \omega$. Dès que $\alpha \geqq \omega$, parmi les suites S correspondant à α, il y en a qui comportent des chaînes arbitrairement longues; tel sera le cas si, quel que soit $\alpha \geqq \omega$, les entiers naturels sont rangés dans l'ordre

$$1;\quad 3,\ 2;\quad 6,\ 5,\ 4;\quad 10,\ 9,\ 8,\ 7;\quad 15,\ \ldots,\ 11;\quad 21,\ \ldots,\ 16;\quad \ldots.$$

Chaque nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ appartiendra alors à une chaîne de longueur $\geqq n$ (puisqu'il est suivi par $n-1$ autres termes). Il peut donc seulement arriver que, pour certaines des suites correspondant à un nombre transfini α, les longueurs des chaînes soient bornées. Nous allons voir qu'il en est ainsi si $\alpha < \omega^\omega$, et dans ce cas seulement.

Si en effet $\alpha < \omega^{m+1}$, on peut supposer ω^m, $2\omega^m$, $3\omega^m$, ... rangés dans l'ordre naturel, de manière que chacun soit le premier d'une chaîne. Après chaque $(p+1)\omega^n$, on rangera dans l'ordre naturel les nombres

$$p\omega^m + \omega^{m-1}, \quad p\omega^m + 2\omega^{m-1}, \quad p\omega^m + 3\omega^{m-1}, \quad \ldots,$$

de manière que chacun soit le second d'une chaîne; peu importe l'ordre relatif des nombres correspondant aux différentes valeurs de p. De même, si l'on place après chaque $p\omega^m + (q+1)\omega^{m-1}$, et dans leur ordre naturel, tous les $p\omega^m + q\omega^{m-1} + r\omega^{m-2}$ $(r=1, 2, \ldots)$, chacun sera le troisième d'une chaîne; et ainsi de suite. On voit ainsi que, si $\alpha < \omega^{m+1}$, on peut s'arranger pour limiter à $m+1$ la longueur des chaînes. Cela sera au contraire impossible si $\alpha \geqq \omega^{m+1}$, puisque ω^{m+1} doit nécessairement être suivi d'une infinité de $(p+1)\omega^m$, suivis chacun d'une infinité de $p\omega^m + (q+1)\omega^{m-1}$, et ainsi de suite. Si donc $\alpha \geqq \omega^\omega$, il ne peut exister aucune suite S correspondant à α et pour lesquelles les longueurs de toutes les chaînes soient bornées dans leur ensemble.

Pour obtenir une classe de suites S définie par des conditions de récurrence, l'idée la plus naturelle est de limiter à une valeur donnée k la longueur des chaînes. Chaque fois qu'un nombre n se trouvera être le $k^{\text{ième}}$ d'une chaîne, on saura que, pour $\nu > n$, n devra être rayé de la liste des valeurs possibles pour p_ν. C'est bien une condition de récurrence. Mais on voit à quel prix ce résultat est atteint. Les nombres transfinis définis par ces suites ne peuvent pas dépasser ω^k; quel que soit k, ils n'atteignent pas ω^ω.

On peut aller plus loin en opérant comme nous l'avons fait pour la classe des permutations élémentaires. A certains des p_n, nous adjoindrons un ou plusieurs autres éléments, p'_n, p''_n, ..., de manière à obtenir une classe de suites S′ définie par des conditions de récurrence; s'il y a correspondance biunivoque entre les S d'un certain sous-ensemble de C′, et les S′, nous saurons faire correspondre ces suites S aux points d'un segment.

Nous pouvons par exemple opérer comme suit : un entier positif k étant choisi une fois pour toutes, chaque fois que nous trouverons un nombre n qui soit le $k^{\text{ième}}$ d'une chaîne, nous adjoindrons à p_n deux entiers $p'_n \geqq k$ et p''_n ayant la signification suivante : les chaînes contenant n auront au plus p'_n éléments; cette borne supérieure p'_n sera atteinte au moins une fois, et le sera pour la première fois pour $\nu = p''_n$, c'est-à-dire que p''_n sera le $p'^{\,\text{ième}}_n$ et dernier terme d'une chaîne contenant n. Naturellement, p''_n devra être assez grand pour que ces conditions soient compatibles (il faut en tout cas que $p''_n \geqq n + p'_n - k$; mais il peut arriver que certaines des valeurs comprises entre n et $n + p'_n - k$ doivent obligatoirement, en vertu des déterminations antérieures de certains p''_h, appartenir à d'autres chaînes ne contenant pas n; la valeur minima de p''_n doit alors être augmentée).

Le lecteur vérifiera aisément que les conditions imposées à S′ sont ainsi toutes réalisées. Mais la classe des suites S qu'on peut ainsi faire correspondre aux points d'un segment n'est encore qu'un sous-ensemble de la classe C′. Nous pensons pouvoir laisser encore au lecteur le soin de vérifier que les nombres transfinis correspondant à ces suites sont tous ceux de la section $(\omega, \omega^{\omega+k-1})$, et ceux-là seulement.

On peut naturellement aller plus loin, en supposant que p'_n ne limite pas la longueur des chaînes contenant n, mais que, pour chaque chaîne atteignant la longueur p'_n, on se donne un nouveau nombre p'''_n qui la limitera. Plus on veut aller loin dans la suite des nombres transfinis, plus il faudra compliquer les méthodes. Il semble donc que, si l'on veut améliorer la solution donnée par le théorème général de Cantor pour le problème de l'établissement d'une correspondance biunivoque entre les suites S de la classe C′ et les points d'un segment, on ne puisse pas éviter de retomber dans toutes les difficultés du transfini.