J. DIXMIER

Les anneaux d'opérateurs de classe finie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 209-261
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__209_0>

LES ANNEAUX D'OPÉRATEURS DE CLASSE FINIE

PAR M. J. DIXMIER.

Introduction.

Soit M un facteur de classe finie (¹) dans un espace hilbertien complexe. M est un espace vectoriel complexe. F. J. Murray et J. von Neumann ont montré ([3] et [4]) qu'il existait une fonctionnelle linéaire T(A) sur M, possédant les propriétés caractéristiques suivantes :

$$\mathrm{T}(\mathbf{1}) = 1, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{A}^*) = \overline{\mathrm{T}(\mathrm{A})}, \qquad \mathrm{T}(\mathrm{AB}) = \mathrm{T}(\mathrm{BA});$$
$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) \geqq 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{A} \text{ est self-adjoint positif.}$$

Soit T′ la restriction de T à l'ensemble des opérateurs self-adjoints de M, qui est un espace vectoriel réel. T′ est encore une fonctionnelle linéaire, qui possède les propriétés caractéristiques suivantes :

$$\mathrm{T}'(\mathbf{1}) = 1, \qquad \mathrm{T}'(\mathrm{UAU}^{-1}) = \mathrm{T}'(\mathrm{A}) \quad \text{si} \quad \mathrm{U} \in \mathrm{M} \text{ est unitaire;}$$
$$\mathrm{T}'(\mathrm{A}) \geqq 0 \quad \text{si} \quad \mathrm{A} \geqq 0.$$

Il est très facile de passer d'un groupe de propriétés à l'autre.

Les propriétés de T′ sont analogues aux propriétés de la moyenne d'une fonction continue réelle sur un groupe compact G. Soit en effet L l'ensemble de ces fonctions, qui est un espace vectoriel réel. La moyenne d'un élément de L est une fonctionnelle linéaire $\mu(f)$ sur L qui possède les propriétés caractéristiques suivantes [6] :

$$\mu(\mathbf{1}) = 1, \qquad \mu(f_s) = \mu(f) \quad \text{si} \quad f \in \mathrm{L} \quad \text{et} \quad f_s(x) = f(s^{-1}x) \qquad (x \in \mathrm{G}, s \in \mathrm{G});$$
$$\mu(f) \geqq 0 \quad \text{si} \quad f \geqq 0.$$

Or, la fonction constante égale pour tout $x \in \mathrm{G}$ à $\mu(f)$ peut, on le sait, être

(¹) Pour la terminologie, *cf.* le Chapitre consacré aux notations. Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

approchée uniformément par des fonctions de l'ensemble convexe engendré dans L par les f_s (²). Nous avons étudié le problème analogue pour les facteurs de classe finie : l'opérateur T(A)**1** peut-il être approché uniformément par des opérateurs de l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1} ? La réponse est, on le verra, positive.

Mais cette propriété de μ sert en réalité, dans la théorie de von Neumann, de définition et même de procédé de construction. Nous avons donc essayé de définir la trace par une méthode analogue, sans supposer connue son existence. Ceci est d'autant plus indiqué que la construction de la trace utilisée dans [3] et [4] est indirecte : on construit d'abord la trace d'opérateurs particuliers, à savoir les projecteurs; ceci reviendrait, dans le cas des groupes compacts, à construire d'abord la moyenne des fonctions caractéristiques, c'est-à-dire la mesure des ensembles.

En développant les démonstrations, nous avons constaté qu'elles s'appliquaient, non seulement aux facteurs de classe finie, mais à une classe beaucoup plus générale d'anneaux d'opérateurs que nous avons appelés anneaux de classe finie. Seulement, l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1} permet d'approcher uniformément, non plus un multiple scalaire de **1**, mais un opérateur du centre de M. La trace d'un opérateur de M, dans la théorie généralisée, est donc un opérateur du centre de M. Dans le cas des facteurs, le centre de M se compose des multiples scalaires de **1**, de sorte qu'on peut identifier la trace à un scalaire, et l'on retrouve la théorie classique. La trace généralisée possède les mêmes propriétés algébriques que la trace ordinaire.

Nous avons mis en évidence (au Chapitre I) les hypothèses abstraites qui permettent d'obtenir simplement l'existence, l'unicité et les propriétés caractéristiques de la trace. Dans le cas des anneaux d'opérateurs, toutes les hypothèses sont vérifiées trivialement, sauf deux, qui sont, par contre, difficiles

---

(²) Voici un autre exemple de propriétés du même type, à propos encore d'un groupe compact G et de la famille L. Nous utilisons ici, dans un cas très particulier, des résultats de R. Godement cf. *Analyse harmonique dans les groupes centraux*. I. *Fonctions centrales et caractères*, (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 225, 1947, p. 19-21). II. *Formule d'inversion de Fourier*, (*ibid.*, p. 221-223). Si $f \in L$, définissons $f^{\natural} \in L$ par $f^{\natural}(x) = \int_G f(sxs^{-1})\,ds$ où ds est la mesure de Haar sur G, choisie de telle sorte que la mesure de G soit égale à 1. L'application $f \to f^{\natural}$ est une application linéaire de L sur l'ensemble des fonctions centrales continues de G, et l'on a les propriétés suivantes : 1° $f^{\natural} = f$ si $f \in L$ est centrale; 2° $f^{\natural}$ ne change pas si l'on transforme f par un automorphisme intérieur de G; 3° $f^{\natural}$ est positive (resp. de type positif) si f est positive (resp. de type positif). [Notons aussi que $(f \star g)^{\natural} = (g \star f)^{\natural}$ si $f \star g$ désigne le produit de composition de f et g.] Or, ici encore, $f^{\natural}$ peut être approchée uniformément par des fonctions de l'ensemble convexe engendré par les fonctions

$$f_\sigma(x) = f[\sigma(x)],$$

σ automorphisme intérieur de G.

Dans des travaux non publiés, R. Godement a étudié systématiquement des *opérations* $\natural$ dans les $\star$-algèbres.

à obtenir. Il y avait avantage à les mettre nettement en évidence, car l'une d'entre elles est valable pour tous les anneaux d'opérateurs : il est possible d'approcher uniformément un opérateur du centre de M par des opérateurs de l'ensemble convexe engendré par les $UAU^{-1}(A \in M)$. Ainsi, le problème que nous posions au début est résolu affirmativement sous des hypothèses très générales.

La deuxième hypothèse à laquelle nous faisions allusion n'est valable, au contraire, que dans les anneaux d'opérateurs de classe finie. Dans les anneaux qui ne sont pas de classe finie, il est impossible de définir pour tout opérateur une trace possédant les propriétés habituelles (ce résultat généralise un résultat connu dans la théorie des facteurs). Cependant, de même que dans le cas des facteurs de classe infinie, la trace peut être alors définie pour certains opérateurs particuliers, comme nous le montrerons ultérieurement.

Dans les méthodes de démonstration, le lecteur qui connaît les articles [3] et [4] retrouvera fréquemment des procédés introduits par F. J. Murray et J. von Neumann. Cependant, ces procédés ont dû être modifiés dans plusieurs cas, et de nouvelles notions ont dû être introduites. Ces notions seront d'ailleurs probablement utiles dans l'étude des anneaux d'opérateurs quelconques.

Bien que la démonstration soit assez longue, elle est dans l'ensemble plus rapide que celle de [3] et [4], et elle conduit à un résultat plus général (mais, évidemment, nous n'avons dirigé nos efforts que vers la définition et les propriétés de la trace, alors que beaucoup d'autres questions sont envisagées dans [3] et [4]).

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans [2]. Cependant, depuis la publication de [2], nous avons débarrassé les démonstrations de l'hypothèse de la séparabilité de l'espace (alors que cette hypothèse est faite dans [3] et [4]).

Après avoir rédigé le présent mémoire, l'auteur a pris connaissance du mémoire de von Neumann [7] sur la réduction des anneaux d'opérateurs. Voici, brièvement analysées, les relations entre les deux articles.

1. Le théorème 7 est nouveau même pour les facteurs. Mais le lemme 3.7, (dont le théorème 7 se déduit facilement) peut être démontré pour les facteurs à partir des résultats de [3] (en adaptant notre méthode), puis pour les anneaux quelconques en appliquant les résultats de [7]. Ce dernier point demande cependant quelques soins, purement techniques d'ailleurs.

Le théorème 6 peut aussi être déduit du résultat correspondant pour les facteurs (qui est énoncé dans [3]) et du lemme 21 de [7].

2. Si un anneau d'opérateurs vérifie notre définition des anneaux de classe finie, le lemme 21 de [7] permet de montrer (avec les notations de [7]) que

$r - C_f$ est de σ-mesure nulle (la réciproque s'établissant facilement). Alors, la théorie complète des facteurs, le lemme 18 de [7], et quelques considérations supplémentaires, prouvent l'existence de l'opération $A \to A^\natural$ lorsqu'on se borne aux projecteurs de l'anneau. On peut, en modifiant les démonstrations de [7], obtenir l'opération $A \to A^\natural$ pour tout $A \in M$, avec les propriétés que nous indiquons (sauf toutefois peut-être les propriétés de continuité).

3. L'ensemble des mémoires [3], [4], [7], constitue naturellement une analyse beaucoup plus détaillée de la structure des anneaux d'opérateurs que celle du présent mémoire. Cependant, plusieurs de nos résultats sont nouveaux, au moins dans leur énoncé. Surtout, il paraît intéressant de les obtenir directement (notamment sans emploi de la théorie de la mesure ou des ensembles analytiques), par une méthode qui, même pour les facteurs, est plus simple que les méthodes déjà connues. Enfin, l'hypothèse de séparabilité (dont nous ne faisons pas usage) est essentielle dans certaines parties de [3], [4] et surtout de [7].

Notations et résultats préliminaires.

Nous ne précisons pas ici les notations qui sont universellement adoptées.

D'autre part, nous supposons connus du lecteur les résultats élémentaires relatifs à l'espace hilbertien. Par contre, les résultats plus spéciaux qui seront nécessaires sont tous rappelés ci-après. Tous les résultats de [3] et [4] dont nous aurons besoin seront redémontrés complètement (ainsi la connaissance de [3] et [4] n'est pas indispensable pour la compréhension du présent travail).

Soient A, B, $(A_i)_{i\in I}$ deux parties et une famille de parties d'un ensemble. $A \cup B$, $A \cap B$, $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\bigcap_{i\in I} A_i$ désignent respectivement la réunion de A et B, l'intersection de A et B, la réunion des A_i, l'intersection des A_i. $A \subset B$ signifie l'inclusion au sens large de A dans B.

L'espace hilbertien complexe considéré, sur la dimension duquel on ne fait aucune hypothèse, est désigné par H. Si $\mathcal{M}$ est une partie de H, $[\mathcal{M}]$ désigne la plus petite variété linéaire fermée contenant $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ est une variété linéaire fermée, on désigne par $P_{\mathcal{M}}$ le projecteur correspondant. Deux variétés linéaires fermées $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ sont dites compatibles si $P_{\mathcal{M}_1}$ et $P_{\mathcal{M}_2}$ sont permutables. Si A est un opérateur, on désigne par A^* son adjoint, par D_A son domaine d'existence, par Δ_A son domaine des valeurs. $\mathbf{1}$ désigne l'opérateur identique. Si $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ est une famille de variétés linéaires fermées, on désigne par $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ la plus petite variété linéaire fermée contenant les $\mathcal{M}_i$.

Un opérateur W est dit partiellement isométrique s'il existe deux variétés linéaires fermées $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ telles que $W^*W = P_{\mathcal{M}_1}$, $WW^* = P_{\mathcal{M}_2}$. $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont appelées respectivement variétés initiale et finale de W. W applique isométriquement $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{M}_2$, et $Wx = 0$ si $x \in H \ominus \mathcal{M}_1$, ces propriétés caractérisant d'ailleurs les opérateurs partiellement isométriques. W^* est partiellement isométrique et admet $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1$ comme variétés initiale et finale (*cf.* [3]).

Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ deux variétés linéaires fermées. Soient $\mathfrak{M}_{1'} = H \ominus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{2'} = H \ominus \mathfrak{M}_2$, et $m_{ij} = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{M}_j (i, j = 1, 2, 1', 2')$. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont dites en position p' si $m_{12'} = m_{1'2} = 0$. Alors, il existe une symétrie bien déterminée S de H, appelée symétrie intérieure de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, telle que $S(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$, $S(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_1$ et telle que $(Sx, x) > 0$ pour $x \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $x \neq 0$, $Sx = x$ pour $x \in m_{12}$, $Sx = -x$ pour $x \in m_{1'2'}$. Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont quelconques, $\mathfrak{M}_1 \ominus m_{12'}$ et $\mathfrak{M}_2 \ominus m_{1'2}$ sont en position p'; $\mathfrak{M}_1 \ominus (m_{12} \oplus m_{12'})$ est en position p' avec $\mathfrak{M}_2 \ominus (m_{21} \oplus m_{21'})$ et avec $\mathfrak{M}_{2'} \ominus (m_{2'1} \oplus m_{2'1'})$, ces dernières variétés étant différentes de zéro si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont non compatibles (*cf.* [1]).

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des opérateurs bornés définis dans tout l'espace H et prenant leurs valeurs dans H. $\mathcal{B}$ est une algèbre sur le corps des nombres complexes. $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ est une norme sur $\mathcal{B}$, qui définit sur $\mathcal{B}$ une topologie dite topologie uniforme, et qui fait de $\mathcal{B}$ une algèbre normée complète. On définit sur $\mathcal{B}$ une autre topologie dite topologie forte, de la manière suivante : étant donnés des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de H, on considère l'ensemble $\mathcal{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des $A \in \mathcal{B}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \|Ax_i\| \leqq 1$; l'ensemble des $\mathcal{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ constitue un système fondamental de voisinages de zéro dans $\mathcal{B}$ pour la topologie forte.

Enfin, on définit sur $\mathcal{B}$ la topologie faible de la manière suivante : étant donnés des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de H, on considère l'ensemble $\mathcal{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des $A \in \mathcal{B}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} |(Ax_i, y_i)| \leqq 1;$$

l'ensemble des $\mathcal{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ constitue un système fondamental de voisinages de zéro dans $\mathcal{B}$ pour la topologie faible (*cf.* [5]).

Toute sous-algèbre M de $\mathcal{B}$ self-adjointe et fortement fermée s'appelle anneau d'opérateurs. On considérera uniquement les anneaux d'opérateurs contenant **1**, restriction qui n'est pas essentielle. On désignera par M_S (resp. M_U, M_{PI}) l'ensemble des opérateurs self-adjoints (resp. unitaires, partiellement isométriques) de M, par M_P l'ensemble des projecteurs de M. Si $\mathfrak{M}$ est une variété linéaire fermée, on écrit $\mathfrak{M} \eta M$ si $P_{\mathfrak{M}} \in M$.

Si $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}$ contenant **1**, on désigne par $R(\mathcal{E})$ le plus petit anneau d'opérateurs contenant $\mathcal{E}$, par $\mathcal{E}'$ l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{B}$ qui permutent avec ceux de $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}'$ est un anneau d'opérateurs, et l'on a

$$R(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'' = \mathcal{E}'''' = \ldots, \qquad \mathcal{E}' = \mathcal{E}''' = \ldots;$$
$$R(M_S) = R(M_U) = R(M_P) = M.$$

On en déduit le critère suivant :

Critère. — Soit M un anneau d'opérateurs. Soit $A \in \mathcal{B}$, soit $\mathfrak{M}$ une variété linéaire fermée. Pour que $A \in M$, il faut et il suffit que $U'AU'^{-1} = A$ pour tout $U' \in M'_U$. Pour que $\mathfrak{M}\,\eta\,M$, il faut et il suffit que $U'(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$ pour tout $U' \in M'_U$ (*cf.* [5]).

Soient $\mathfrak{M}_1\,\eta\,M$, $\mathfrak{M}_2\,\eta\,M$. On écrit $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ et l'on dit que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont équivalentes s'il existe un opérateur de M_{PI} dont les variétés initiale et finale sont $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Les remarques qu'on a faites sur les opérateurs partiellement isométriques prouvent aussitôt qu'il s'agit effectivement d'une relation d'équivalence. On a $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ dès qu'il existe un $A \in M$ qui transforme isométriquement $\mathfrak{M}_1$ en $\mathfrak{M}_2$ (en effet, $AP_{\mathfrak{M}_1}$ est alors un élément de M_{PI} dont $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont les variétés initiale et finale).

Un anneau d'opérateurs s'appelle facteur si son centre se compose des multiples scalaires de $\mathbf{1}$. Un facteur est dit de classe finie si les relations $\mathfrak{M}\,\eta\,M$, $\mathfrak{M} \sim H$ entraînent $\mathfrak{M} = H$, autrement dit si les relations $U \in M$, $U^\star U = \mathbf{1}$ entraînent $UU^\star = \mathbf{1}$.

I. — Théorie générale.

Dans ce Chapitre, nous considérons un ensemble E, muni de la structure suivante :

C.1 : E *est un espace de Banach réel*, c'est-à-dire un espace vectoriel réel normé complet. La norme de x est désignée par $\|x\|$; la topologie déduite de la norme est appelée topologie forte.

C.2 : Il existe dans E un ensemble P d'éléments appelés non négatifs; la relation $x \in P$, qu'on écrit aussi $x \geqq 0$, satisfait aux hypothèses suivantes :

C.2 *a* : *Soient* $x \in P$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}$ [3], *avec* $\lambda \geqq 0$; *on a* $\lambda x \in P$.
C.2 *b* : *Soient* $x \in P$, $y \in P$; *on a* $x + y \in P$.
C.2 *c* : *Si* $x \in P$ *et* $-x \in P$, *on a* $x = 0$.
C.2 *d* : P *est fortement fermé.*

Écrivons $x \geqq y$ si $x - y \geqq 0$. Alors, on vérifie aussitôt que :

α. Soient $x \in E$, $y \in E$; si $x \geqq y$ et $y \geqq x$, on a $x = y$.
β. Soit $x \in E$; on a $x \geqq x$.
γ. Soient $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$; si $x \geqq y$ et $y \geqq z$, on a $x \geqq z$.

La relation $x \geqq y$ est donc une relation d'ordre. Cette relation possède de plus les propriétés suivantes :

δ. Soient $x \in E$, $y \in E$, $x' \in E$, $y' \in E$; si $x \geqq y$, $x' \geqq y'$, on a $x + x' \geqq y + y'$.
ε. Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$; si $x \geqq y$ et $\lambda \geqq 0$, on a $\lambda x \geqq \lambda y$.

---

(3) **R** désignera dans tout le travail l'ensemble des nombres réels.

Faisons encore l'hypothèse suivante :

C.2 *e* : *Il existe dans* E *un élément unité, noté* $\mathbf{1}$, *tel que* $\|\mathbf{1}\| = 1$, *et tel que, pour* $x \in E$, *les relations*

$$\|x\| \leqq 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{1} \geqq x \geqq -\mathbf{1}$$

soient équivalentes.

C.3 : *Il existe un groupe* G *d'applications linéaires biunivoques et isométriques de* E *sur* E. Si $s \in G$ et $x \in E$, on désignera par sx le transformé de x par s.

On suppose :

C.3 *a* : $s\mathbf{1} = \mathbf{1}$ *pour tout* $s \in G$.
C.3 *b* : *Soient* $a \in P$, $s \in G$; *on a* $sx \in P$.

Soit E_0 l'ensemble des $x \in E$ tels que $sx = x$ pour $s \in G$. Il est immédiat que E_0 est un sous-espace vectoriel fortement fermé de E, avec $\mathbf{1} \in E_0$.

D'autre part, si $x \geqq y$ et $s \in G$, on a aussitôt $sx \geqq sy$.

Définition. 1.1. — *Soit* $x \in E$. *On désigne par* K_x *l'ensemble convexe fortement fermé engendré par les* sx, *c'est-à-dire l'ensemble des éléments* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x$ $\left(s_i \in G,\ \lambda_i \in \mathbf{R},\ \lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ *et de leurs limites fortes.*

Théorème 1. — $K_x \cap E_0$ *est non vide lorsque* E *vérifie l'hypothèse suivante :*

C.4 : *Pour tout* $x \in E$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe :*

des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *de* G;

des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de* $\mathbf{R}$, *avec* $\lambda_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$;

un élément $y \in E_0$, *tels que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \right\| \leqq \varepsilon.$$

Démonstration. — Remarquons que, si $y \in E_0$ et $x \in E$, on a aussitôt $K_{y+x} = y + K_x$ (ensemble des éléments $y + t$, où $t \in K_x$). D'autre part, K_x est contenu dans la boule de centre O et de rayon $\|x\|$. Enfin, K_x est invariant par les automorphismes de G, donc $y \in K_x$ entraîne $K_y \subset K_x$.

Ceci posé, on peut, d'après C.4, construire par récurrence une suite de couples (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ avec les propriétés suivantes :

(1) $$x_i \in E,\ y_i \in E_0, \qquad x_1 = x, \qquad x_{i+1} \in K_{x_i};$$

(2) $$\|y_i - x_i\| \leqq 2^{-i} \qquad \text{pour} \quad i \geqq 2.$$

Soit alors $z_i = x_i - y_i$. On a

$$x_{i+1} \in K_{y_i+z_i} = y_i + K_{z_i}, \qquad \text{donc} \quad \| x_{i+1} - x_i \| \leqq \| x_i - y_i \| + \| z_i \| = 2 \| x_i - y_i \| \leqq 2^{-i+1}$$

Donc (critère de Cauchy) les x_i convergent vers un élément y qui, d'après (2), est aussi la limite des y_i et par conséquent appartient à E_0. Enfin, $x_{i+1} \in K_{x_i}$ donne $K_{x_{i+1}} \subset K_{x_i} \subset K_{x_{i-1}} \ldots \subset K_x$. Donc $x_{i+1} \in K_x$, $y \in K_x$.

Nous supposons désormais vérifiée la condition C.4.

LEMME 1.1. — *Soient $x \in E$, $y \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe :*

des éléments $x' \in K_x \cap E_0$, $y' \in K_y \cap E_0$;
des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de G;
des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{R}$, avec $\lambda_k \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, tels que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k x - x' \right\| \leqq \varepsilon, \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k y - y' \right\| \leqq \varepsilon.$$

Démonstration. — D'après le théorème 1 il existe des éléments $t_1, t_2, \ldots, t_m$ de G, des éléments $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ de $\mathbf{R}\left(\mu_i \geqq 0;\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\right)$, et un élément $x' \in K_x \cap E_0$, tels que, en posant $u = \sum_{i=1}^{m} \mu_i t_i x$, on ait

$$\| u - x' \| \leqq \varepsilon. \tag{3}$$

Soit $v = \sum_{i=1}^{m} \mu_i t_i y$. Il existe des éléments $t'_1, t'_2, \ldots, t'_p$ de G, des éléments $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_p$ de $\mathbf{R}\left(\mu'_j \geqq 0,\ \sum_{j=1}^{p} \mu'_j = 1\right)$, et un élément $y' \in K_v \cap E_0 \subset K_y \cap E_0$, avec

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \mu'_j t'_j v - y' \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \mu'_j \mu_i (t'_j t_i) y - y' \right\| \leqq \varepsilon. \tag{4}$$

D'ailleurs, (3) donne

$$\| t'_j (u - x') \| = \| t'_j u - x' \| \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \mu'_j t'_j (u - x') \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} \mu'_j t'_j u - x' \right\| \leqq \varepsilon$$

ou

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} \mu'_j \mu_i (t'_j t_i) x - x' \right\| \leqq \varepsilon. \tag{5}$$

Les $t'_j\, t_i$ sont les s_k du lemme, et les $\mu'_j\, \mu_i$ sont les λ_k.
Considérons encore la condition suivante :

C.5 : *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $\mathrm{K}_x \cap \mathrm{E}_0$ *est réduit à un point.*

Nous désignerons alors ce point par $x^\natural$. Pour l'origine de cette notation, *cf.* Note (²).

THÉORÈME 2. — *Supposons* C.5 *vérifiée. Soient* $x \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{E}_o$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $s \in \mathrm{G}$. *On a*

$$(\alpha) \qquad y^\natural = y,$$
$$(\beta) \qquad (\lambda x)^\natural = \lambda x^\natural,$$
$$(\gamma) \qquad (x + x')^\natural = x^\natural + x'^\natural,$$
$$(\delta) \qquad (sx)^\natural = x^\natural,$$
$$(\varepsilon) \qquad x^\natural \geqq 0 \quad \text{si} \quad x \geqq 0 \quad (^4).$$

Démonstration. — Conservons les notations du lemme 1.1. α et β sont immédiats. Pour prouver γ, il suffit de remarquer que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k (x + x') - (x^\natural + x'^\natural) \right\| \leqq 2\varepsilon,$$

d'où $x^\natural + x'^\natural = (x + x')^\natural$ d'après C.5. De même, δ résulte de $\mathrm{K}_{sx} = \mathrm{K}_x$. Enfin, si $x \geqq 0$, on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k s_k x \geqq 0$, donc $x^\natural \geqq 0$ puisque P est fortement fermé.

THÉORÈME 3. — *Soit* $x \to \varphi(x)$ *une application de* E *dans* E_0 *possédant les propriétés* (α)-(ε) *du théorème* 2. *On a, moyennant* C.5 : $\varphi(x) = x^\natural$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des $s_i \in \mathrm{G}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et des $\lambda_i \in \mathbf{R}\left(1 \leqq i \leqq n,\ \lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ tels que, en posant

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - x^\natural,$$

on ait

$$\| u \| \leqq \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon.\mathbf{1} \geqq u \geqq -\varepsilon.\mathbf{1}.$$

Ceci entraîne, d'après β, γ, ε,

$$\varphi(\varepsilon.\mathbf{1}) \geqq \varphi(u) \geqq \varphi(-\varepsilon.\mathbf{1})$$

(⁴) Ajoutons que l'application $x \to x^\natural$ est continue. Car $x^\natural \in \mathrm{K}_x$, $\| x^\natural \| \leqq \| x \|$.

ou, d'après α

$$\varepsilon.\mathbf{1} \geqq \varphi(u) \geqq -\varepsilon.\mathbf{1} \quad \text{ou} \quad \|\varphi(u)\| \leqq \varepsilon.$$

Or, par α, β, γ, on a

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(s_i x) - x^\natural$$

et, d'après δ

$$\varphi(u) = \varphi(x) - x^\natural.$$

Donc $\|\varphi(x) - x^\natural\| \leqq \varepsilon$ et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\varphi(x) = x^\natural$.

Ceci posé, considérons encore la condition suivante :

C$'$.5 : *Pour tout élément x de* E, *tout élément a de* E_0, *tout système d'éléments* $s_1, s_2, \ldots, s_n$ *de* G, *tout système d'éléments* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de* $\mathbf{R}$ *avec* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, *tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x \geqq a$, *on a* $0 \geqq a$.

THÉORÈME 4. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. C.5 *est vérifiée.*
2. *Il existe une application* $x \to \varphi(x)$ *de* E *dans* E_0 *possédant les propriétés* (α)-(ε) *du théorème* 2.
3. C$'$.5 *est vérifiée.*

Démonstration. — *a.* 1 entraîne 2 : c'est le théorème 2.

b. 2 entraîne 3 : Soient

$$x \in E, \qquad a \in E_0, \qquad s_i \in G \quad (1 \leqq i \leqq n), \qquad \lambda_i \in \mathbf{R}\left(1 \leqq i \leqq n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0\right)$$

tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x \geqq a$. Si l'application φ existe, on a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(s_i x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x) = 0 \geqq \varphi(a) = a.$$

c. 3 entraîne 1 : Supposons C$'$.5 vérifiée, et soient y, y' deux éléments de $K_x \cap E_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_n$; $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{n'}$ de G, des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n'}$ de $\mathbf{R}\left(\lambda_i \geqq 0, \lambda'_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i = 1\right)$ tels que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y\right\| \leqq \varepsilon, \tag{6}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x - y'\right\| \leqq \varepsilon. \tag{6'}$$

(6) donne

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \geqq - \varepsilon . \mathbf{1},$$

(6') donne

$$(7')\qquad \varepsilon . \mathbf{1} \geqq \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x - y',$$

(7) et (7') donnent

$$\varepsilon . \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - y \geqq \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x - y' - \varepsilon . \mathbf{1}$$

ou

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x - \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i s'_i x \geqq y - y - 2\varepsilon . \mathbf{1}.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i = 1 - 1 = 0,$$

d'où, d'après C'.5

$$0 \geqq y - y' - 2\varepsilon . \mathbf{1}$$

ou

$$(9)\qquad 2\varepsilon . \mathbf{1} \geqq y - y'.$$

De même, échangeant y et y'

$$2\varepsilon . \mathbf{1} \geqq y' - y$$

ou

$$(9')\qquad y - y' \geqq - 2\varepsilon . \mathbf{1},$$

(9) et (9') donnent

$$\| y - y' \| \leqq 2\varepsilon,$$

d'où, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $y = y'$.

Notons encore le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Supposons* C.5 *vérifiée. Soit* E_1 *l'adhérence de l'ensemble des éléments de la forme* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x$, *où* $x \in E$, $s_i \in G$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. E_1 *est le sous-espace vectoriel fermé des éléments* x *tels que* $x^\natural = 0$, *et l'on a* $E_0 \cap E_1 = 0$, $E = E_0 + E_1$. *Ainsi, tout* $y \in E$ *se met, d'une seule manière, sous la forme* $y_0 + y_1$ *avec* $y_0 \in E_0$, $y_1 \in E_1$; *de plus*, $y_0 = y^\natural$, *de sorte que l'opération* $\natural$ *n'est autre que le projecteur sur* E_0 *défini par* E_0 *et* E_1.

Démonstration. — Soit E'_1 le sous-espace vectoriel fermé des éléments x tels que $x^\natural = 0$. Si $x \in E'_1 \cap E_0$, on a $x = x^\natural = 0$, donc $E'_1 \cap E_0 = 0$. Si $x \in E$, on a

$x = x^\natural + (x - x^\natural)$ et $x^\natural \in E_0$, $x - x^\natural \in E'_1$ [puisque $(x - x^\natural)^\natural = x^\natural - x^\natural = 0$], donc $E = E_0 + E'_1$. Montrons enfin que $E_1 = E'_1$. Si $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i x$ avec $s_i \in G$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, on a $y^\natural = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (s_i x)^\natural = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x^\natural = 0$, donc $y \in E'_1$, donc $E_1 \subset E'_1$. Soit maintenant $y \in E'_1$. On a $y^\natural = 0$, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des éléments $s_i \in G$, des éléments $\lambda_i \in \mathbf{R}$, avec $\lambda_i \geqq 0$, $(1 \leqq i \leqq n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tels que $\left\| y - \left(y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i y \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i y \right\| \leqq \varepsilon$. Or $1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$; donc $y \in E_1$, $E'_1 \subset E_1$.

II. — Cas des anneaux d'opérateurs.

Soit H un espace hilbertien, M un anneau d'opérateurs de H contenant $\mathbf{1}$. M est fortement fermé, donc aussi M_S. *A fortiori*, M_S est uniformément fermé. Donc M_S est un espace de Banach réel : M_S vérifie C. 1.

Soit $A \in M_S$. Nous définirons la relation $A \geqq 0$ de la façon habituelle, c'est-à-dire par la condition $(Af, f) \geqq 0$ pour tout $f \in H$. Il est classique que M_S vérifie alors C. 2, en prenant pour unité l'opérateur $\mathbf{1}$.

Soit $U \in M_U$. L'application s_U définie par $s_U(A) = UAU^{-1}$ est une application linéaire, biunivoque et isométrique de M_S sur M_S. Ces applications forment un groupe G de transformations, car, si $U \in M_U$, $U' \in M_U$, on a

$$s_U s_{U'}(A) = U(U'AU'^{-1})U^{-1} = (UU')A(UU')^{-1} = s_{UU'}(A).$$

Avec ce choix de G, M_S vérifie C. 3. Les éléments invariants par G sont les éléments de M_S qui permutent avec tout $U \in M_U$, donc forment l'ensemble

$$M_S \cap (M_U)' = M_S \cap (M_U)''' = M_S \cap M' = (M \cap M')_S.$$

Dans les quatre Chapitres suivants, nous allons chercher si M_S, toujours muni de la même structure, vérifie C. 4 et C'. 5.

III. — Démonstration de l'hypothèse C. 4.

Définition 3. 1. — *Soit* $\mathfrak{M} \eta M$. *On désignera par* $\mathfrak{M}^M$ *l'ensemble des vecteurs* Uf *où* $U \in M_U$, $f \in \mathfrak{M}$.

Lemme 3. 1. — *Soit* $\mathfrak{M} \eta M$.

α. $[\mathfrak{M}^M]$ *est la plus petite des variétés* $\mathfrak{N} \eta M \cap M'$ *contenant* $\mathfrak{M}$.

β. $[\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$ *est la variété linéaire fermée sous-tendue par les variétés* $\mathfrak{M}'$ *équivalentes à* $\mathfrak{M}$.

γ. *Si une variété* $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ *est sous-tendue par des variétés* $\mathfrak{M}'$ *équivalentes à* $\mathfrak{M}$, *on a* $\mathfrak{N} = [\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$.

Démonstration. — 1. Soit $f \in \mathfrak{M}$. On a $f = 1 . f \in \mathfrak{M}^{\mathrm{M}}$, donc $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{M}} \subset [\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$.

2. Toute variété $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ contenant $\mathfrak{M}$ contient les $\mathrm{U}f$ ($f \in \mathfrak{M}$, $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{U}}$) donc contient $[\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$. Réciproquement, $[\mathfrak{M}^{\mathrm{M}}]$ étant invariante par M_{U} et par M'_{U}, on a α.

3. Pour avoir β et γ, il suffit de remplacer M_{U} par M_{PI} dans le raisonnement précédent.

LEMME 3.2. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_2 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *étant en position* p'. *On a* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$.

Démonstration. — Soit S la symétrie intérieure de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. On a $\mathrm{S} \in \mathrm{M}$ d'après le critère de l'introduction. $\mathrm{SP}_{\mathfrak{M}_1} \in \mathrm{M}_{\mathrm{PI}}$ admet $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ pour variétés initiale et finale.

LEMME 3.3. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_2 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_1$ *et* $\mathfrak{M}_2$ *étant non orthogonales. Il existe* $\mathfrak{N}_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{N}_2 \eta \mathrm{M}$ *avec* $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1 \neq 0$, $\mathfrak{N}_2 \neq 0$, $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$.

Démonstration. — Soient $m_1 = \mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_2)$, $m_2 = \mathfrak{M}_2 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_1)$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1 \ominus m_1$, $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \ominus m_2$.

On a $\mathfrak{N}_1 \neq 0$, $\mathfrak{N}_2 \neq 0$ puisque $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont non orthogonales. $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ sont en position p', donc $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$ (lemme 3.2).

DÉFINITION 3.2. — *On appelle partition une famille non vide* $(\mathrm{E}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de projecteurs de* M_{P} *non nuls deux à deux orthogonaux. Si* $\sup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i \leqq \mathrm{E}$ (*resp.* $= \mathrm{E}$), *on dira plus précisément que les* E_i *forment une partition majorée par* E (*resp. une partition de* E).

On appellera ordre d'une partition le nombre (fini ou infini) de ses éléments. On dira que la partition est homogène si $\mathrm{E}_i \sim \mathrm{E}_j$ *pour* $i \in \mathrm{I}$, $j \in \mathrm{I}$. *On dira que deux partitions* $(\mathrm{E}_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $(\mathrm{E}'_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *sont semblables si* $\mathrm{E}_i \sim \mathrm{E}'_i$ *pour* $i \in \mathrm{I}$. *On emploiera un langage analogue pour les variétés* Δ_{E_i} *et* Δ_{E}.

LEMME 3.4. — *Soient* $(\mathrm{E}_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $(\mathrm{E}'_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *des partitions semblables de* E *et* E′ *respectivement. On a* $\mathrm{E} \sim \mathrm{E}'$. *Plus précisément, soit, pour* $i \in \mathrm{I}$, $\mathrm{U}_i \in \mathrm{M}_{\mathrm{PI}}$ *tel que* $\mathrm{U}_i^* \mathrm{U}_i = \mathrm{E}_i$, $\mathrm{U}_i \mathrm{U}_i^* = \mathrm{E}'_i$. *Il existe un* $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{PI}}$ *tel que* $\mathrm{U}^* \mathrm{U} = \mathrm{E}$, $\mathrm{U}\mathrm{U}^* = \mathrm{E}'$, *et tel que, pour* $i \in \mathrm{I}$,

$UE_i = U_i$, $U^\star E'_i = U^\star_i$ (*autrement dit*, $Uf = U_i f$ *pour* $f \in \Delta_{E_i}$, $U^\star f = U^\star_i$ *pour* $f \in \Delta_{E'_i}$) ([5]).

Démonstration. — Pour tout $f \in H$, la famille des vecteurs $(E_i f)_{i \in I}$ est à termes orthogonaux et $\sum_{i \in I} \| E_i f \|^2 < +\infty$. Donc $\sum_{i \in I} \| U_i E_i f \|^2 < +\infty$ et les $U_i E_i f$ sont deux à deux orthogonaux. On peut donc poser $Uf = \sum_{i \in I} U_i E_i f$, ce qui définit un $U \in M$ possédant, comme on le voit aisément, les propriétés du lemme.

LEMME 3.5. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta M$, $\mathfrak{M}_2 \eta M$, $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$, $\mathfrak{M}' = H \ominus \mathfrak{M} \eta M \cap M'$. *Soient* $m_1 = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}$, $m_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}$, $m'_1 = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}'$, $m'_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}'$. *Si* $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$, *on a* $m_1 \sim m_2$, $m'_1 \sim m'_2$.

Démonstration. — Soit $U \in M_{PI}$ dont les variétés initiale et finale sont $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. U est réduit par $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, donc $U(m_1) \subset m_2$, $U(m'_1) \subset m'_2$. Comme $U(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$, on a nécessairement $U(m_1) = m_2$, $U(m'_1) = m'_2$. UP_{m_1} (resp. $UP_{m'_1}$) est un élément de M_{PI} dont les variétés initiale et finale sont m_1 et m_2 (resp. m'_1 et m'_2).

THÉORÈME 6. — *Soient* $\mathfrak{M}_1 \eta M$, $\mathfrak{M}_2 \eta M$. *Il existe :*

deux variétés $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$, $\mathfrak{M}' = H \ominus \mathfrak{M} \eta M \cap M'$;

trois variétés $m_1, m_2, \overline{m}_1 \eta M$ *contenues dans* $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_1$ *orthogonale à* m_1 *et* m_2;

trois variétés $m'_1, m'_2, \overline{m}'_2 \eta M$ *contenues dans* $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'_2$ *orthogonale à* m'_1 *et* m'_2, *avec*

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = \overline{m}'_2 \oplus m'_2 \oplus m_2.$$

Démonstration. — D'après l'introduction, il existe deux variétés $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \eta M$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_2 \eta M$, avec : 1° $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $\widetilde{\mathfrak{M}}_2 \subset \mathfrak{M}_2$; 2° $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ et $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ en position p', donc (lemme 3.2) $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 \sim \widetilde{\mathfrak{M}}_2$; 3° $\mathfrak{M}_1 \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ orthogonale à $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2 \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_2$ orthogonale à $\mathfrak{M}_1$. Considérons alors les couples (Φ_1, Φ_2), où Φ_1 et Φ_2 sont des partitions semblables possédant les propriétés suivantes : 1° Φ_1 contient $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ et est majorée par $\mathfrak{M}_1$; 2° Φ_2 contient $\widetilde{\mathfrak{M}}_2$ et est majorée par $\mathfrak{M}_2$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces couples (Φ_1, Φ_2). Si (Φ_1, Φ_2) et (Φ'_1, Φ'_2) sont deux éléments de $\mathcal{E}$, la relation « $\Phi_1 \subset \Phi'_1$, $\Phi_2 \subset \Phi'_2$ » ordonne $\mathcal{E}$. Toute famille totalement ordonnée $(\Phi^r_1, \Phi^r_2)_{r \in R}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ possède une borne supérieure $\left(\bigcup_{r \in R} \Phi^r_1, \bigcup_{r \in R} \Phi^r_2\right)$. Soit (théorème de Zorn) un élément maximal de $\mathcal{E}$, $(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2)$. On a $\overline{\Phi}_1 = (\overline{\mathfrak{M}}^i_1)_{i \in \overline{I}}$, $\overline{\Phi}_2 = (\overline{\mathfrak{M}}^i_2)_{i \in \overline{I}}$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}_1 = \bigoplus_{i \in \overline{I}} \overline{\mathfrak{M}}^i_1$, $\overline{\mathfrak{M}}_2 = \bigoplus_{i \in \overline{I}} \overline{\mathfrak{M}}^i_2$. D'après

([5]) *Cf.* [3], lemme 6.1.2. Dans les chapitres III à VI, nous nous sommes constamment inspiré de [3] et [4]. Nous ne ferons que les références les plus indispensables.

le lemme 3.4, on a $\overline{\mathfrak{M}}_1 \sim \overline{\mathfrak{M}}_2$. D'autre part $\overline{\mathfrak{M}}_1 \supset \widetilde{\mathfrak{M}}_1$, $\overline{\mathfrak{M}}_2 \supset \widetilde{\mathfrak{M}}_2$. Soient $\overline{m}_1 = \mathfrak{M}_1 \ominus \overline{\mathfrak{M}}_1$, $\overline{m}'_2 = \mathfrak{M}_2 \ominus \overline{\mathfrak{M}}_2$, $\mathfrak{M} = [\overline{m}_1^{\mathrm{M}}]$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$. On a $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}'\,\eta\,\mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}$ d'après le lemme 3.1.α. Montrons que $\mathfrak{M}$ est orthogonale à $\overline{m}'_2$ et par suite que $\overline{m}'_2 \subset \mathfrak{M}'$. Si $\mathfrak{M}$ n'est pas orthogonale à $\overline{m}'_2$, certains vecteurs de $\overline{m}_1^{\mathrm{M}}$ sont non orthogonaux à $\overline{m}'_2$, donc il existe un $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{U}}$ tel que $\mathrm{U}(\overline{m}_1)$ soit non orthogonale à $\overline{m}'_2$. Alors (lemme 3.3) il existe des variétés $\overline{p}_1\,\eta\,\mathrm{M}$, $p_2\,\eta\,\mathrm{M}$, avec $\overline{p}_1 \subset \mathrm{U}(\overline{m}_1)$, $p_2 \subset \overline{m}'_2$, $\overline{p}_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $\overline{p}_1 \sim p_2$. En posant $p_1 = \mathrm{U}^{-1}(\overline{p}_1)$, on a $p_1\,\eta\,\mathrm{M}$, $p_1 \subset \overline{m}_1$, $p_1 \neq 0$, $p_1 \sim p_2$. Dans ces conditions, $(\overline{\Phi}_1 \cup \{p_1\}, \overline{\Phi}_2 \cup \{p_2\})$ est encore un élément de $\mathcal{E}$, ce qui est absurde puisque $(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2)$ est maximal. Donc on a bien $\overline{m}'_2 \subset \mathfrak{M}'$.

Posons enfin $m_1 = \overline{\mathfrak{M}}_1 \cap \mathfrak{M}$, $m_2 = \overline{\mathfrak{M}}_2 \cap \mathfrak{M}$, $m'_1 = \overline{\mathfrak{M}}_1 \cap \mathfrak{M}'$, $m'_2 = \overline{\mathfrak{M}}_2 \cap \mathfrak{M}'$. Alors :

m_1, m_2, $\overline{m}_1$ sont contenues dans $\mathfrak{M}$;

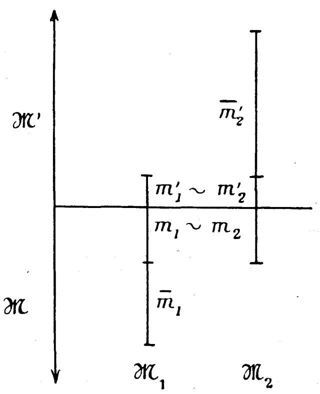
m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2$ sont contenues dans $\mathfrak{M}'$;

$\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}_1 \ominus \widetilde{\mathfrak{M}}_1$ et $m_2 \subset \mathfrak{M}_2$ sont orthogonales; $m_1 \subset \overline{\mathfrak{M}}_1$ et $\overline{m}_1$ sont orthogonales; de même $\overline{m}'_2$ est orthogonale à m'_1 et m'_2;

$\overline{\mathfrak{M}}_1 \sim \overline{\mathfrak{M}}_2$ entraîne $m_1 \sim m_2$, $m'_1 \sim m'_2$ d'après le lemme 3.5; enfin $\overline{\mathfrak{M}}_1\,\eta\,\mathrm{M}$ est compatible avec $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'\,\eta\,\mathrm{M}'$, donc $\overline{\mathfrak{M}}_1 = m_1 \oplus m'_1$, donc

$$\mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus \overline{\mathfrak{M}}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1;$$

de même, $\mathfrak{M}_2 = \overline{m}'_2 \oplus m_2 \oplus m'_2$. Le théorème est ainsi démontré. Il fournit une décomposition de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ en parties équivalentes $m_1 \oplus m'_1$ et $m_2 \oplus m'_2$, et en parties *incomparables* $\overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}$, $\overline{m}'_2 \subset \mathfrak{M}'$ (6).



Comme le théorème sera souvent utilisé dans la suite, il est peut-être bon, pour faciliter la lecture, de l'illustrer par le schéma ci-contre.

Voici maintenant quelques développements indépendants de la théorie des anneaux d'opérateurs.

DÉFINITION 3.3. — *Soit* A *un opérateur self-adjoint borné. Soit* $\mathrm{E} = \mathrm{P}_{\mathrm{V}} \neq 0$ *un projecteur réduisant* A. *On pose*

$$m_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) = m_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \inf_{x \in \mathrm{V},\, \|x\|=1} (\mathrm{A}x, x); \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \sup_{x \in \mathrm{V},\, \|x\|=1} (\mathrm{A}x, x);$$
$$\omega_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) = \omega_{\mathrm{E}}(\mathrm{A}) = \mathrm{M}_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) - m_{\mathrm{V}}(\mathrm{A}) \geqq 0.$$

ω jouera le rôle d'une *oscillation*.

---

(6) Dans le cas d'un facteur, on a nécessairement $\mathfrak{M} = 0$ ou $\mathfrak{M}' = 0$, et l'on retrouve le théorème de comparabilité de [3] (lemme 6.2.3).

DÉFINITION 3.4. — *Soit* A *un opérateur self-adjoint borné. Soit* $\Phi = (E_i)_{i\in I}$ *une famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux réduisant* A. *On pose*

$$\omega(\Phi, A) = \sup_{i\in I} \omega_{E_i}(A).$$

On a évidemment

$$\omega(\Phi, A) \leq \omega_H(A).$$

LEMME 3.6. — *Soit* A *un opérateur self-adjoint borné. Soit* $\Phi = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ *une famille de projecteurs non nuls deux à deux orthogonaux, réduisant* A, *avec* $\sum_{i=1}^{n} E_i = \mathbf{1}$. *On peut trouver des nombres réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tels que*

$$\left\| A - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i \right\| \leq \frac{1}{2}\omega(\Phi, A).$$

Démonstration. — Posons

$$\lambda_i = \frac{1}{2}\Big[M_{E_i}(A) + m_{E_i}(A)\Big].$$

Alors, on a évidemment, pour $f \in \Delta_{E_i}$,

$$-\frac{1}{2}(f, f)\omega_{E_i}(A) \leq ((A - \lambda_i E_i)f, f) \leq \frac{1}{2}(f, f)\omega_{E_i}(A).$$

Soit $f \in H$. On a $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$, avec $f_i = E_i f$. D'où, comme les E_i réduisent A

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(f, f)\,\omega(\Phi, A) &\leq -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f_i, f_i)\,\omega_{E_i}(A) \leq \sum_{i=1}^{n}((AE_i - \lambda_i E_i)f_i, f_i) \\ &= \left(\left(A - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i E_i\right)f, f\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(f_i, f_i)\,\omega_{E_i}(A) \leq \frac{1}{2}(f, f)\,\omega(\Phi, A),\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Ceci posé, revenons à la théorie des anneaux d'opérateurs.

LEMME 3.7. — *Soit* $A \in M_S$, *et soit* $\mathfrak{N}\,\eta\, M \cap M'$, $\mathfrak{N} \neq 0$. *Si* $\omega_{\mathfrak{N}}(A) \neq 0$, *on peut trouver* $\overline{\mathfrak{N}}\,\eta\, M \cap M'$, $\overline{\mathfrak{N}}'\,\eta\, M \cap M'$, $(\overline{\mathfrak{N}} \neq 0,\ \overline{\mathfrak{N}}' \neq 0)$ *orthogonales complémentaires dans* $\mathfrak{N}$, *et un* $U \in M_U$, *de façon que*

$$\omega_{\overline{\mathfrak{N}}}\left(\frac{1}{2}(A + UAU^{-1})\right) \leq \frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}}(A),$$

$$\omega_{\overline{\mathfrak{N}}'}\left(\frac{1}{2}(A + UAU^{-1})\right) \leq \frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}}(A).$$

Démonstration. — Soit $\lambda_{\mathfrak{N}}(A) = \frac{1}{2}[m_{\mathfrak{N}}(A) + M_{\mathfrak{N}}(A)]$. D'après la théorie spectrale, il existe deux variétés linéaires fermées $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ [différentes de o parce que $m_{\mathfrak{N}}(A) \neq M_{\mathfrak{N}}(A)$] orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}$, et telles que

$$m_{\mathfrak{M}_1}(A) = m_{\mathfrak{N}}(A), \qquad M_{\mathfrak{M}_1}(A) \leqq \lambda_{\mathfrak{N}}(A),$$
$$m_{\mathfrak{M}_2}(A) \geqq \lambda_{\mathfrak{N}}(A), \qquad M_{\mathfrak{M}_2}(A) = M_{\mathfrak{N}}(A),$$

avec d'ailleurs : $\mathfrak{M}_1 \eta M$, $\mathfrak{M}_2 \eta M$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, en observant que $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$ et $\mathfrak{M}' \eta M \cap M'$ $(\mathfrak{M}' = H \ominus \mathfrak{M})$;

trois variétés orthogonales m_1, m_2, $\overline{m}_1 \eta M$ contenues dans $\mathfrak{M}$;

trois variétés orthogonales m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2 \eta M$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, avec

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = \overline{m}'_2 \oplus m_2 \oplus m'_2.$$

Posons

$$\overline{\mathfrak{N}} = m_1 \oplus m_2 \oplus \overline{m}_1, \qquad \overline{\mathfrak{N}}' = m'_1 \oplus m'_2 \oplus \overline{m}'_2.$$

$\overline{\mathfrak{N}}$ et $\overline{\mathfrak{N}}'$ sont contenues respectivement dans $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}$ et orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}$ (puisque $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont complémentaires dans $\mathfrak{N}$), donc identiques à $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{N}$. Par suite $\overline{\mathfrak{N}} \eta M \cap M'$, $\overline{\mathfrak{N}}' \eta M \cap M'$.

Soient $V \in M_{PI}$ (resp. $V' \in M_{PI}$) dont les variétés initiales et finales sont m_1 et m_2 (resp. m'_1 et m'_2). Nous définissons un $U \in M_U$, en posant

$$Uf = Vf \quad \text{pour} \quad f \in m_1; \qquad Uf = V^* f \quad \text{pour} \quad f \in m_2;$$
$$Uf = V' f \quad \text{pour} \quad f \in m'_1; \qquad Uf = V'^* f \quad \text{pour} \quad f \in m'_2;$$
$$Uf = f \quad \text{pour} \quad f \in H \ominus (m_1 \oplus m_2 \oplus m'_1 \oplus m'_2).$$

U est réduit par $\overline{\mathfrak{N}}$ et $\overline{\mathfrak{N}}'$. Montrons que $\overline{\mathfrak{N}}$, $\overline{\mathfrak{N}}'$, U, ainsi définis, possèdent les propriétés du lemme, et par exemple que

$$\omega_{\overline{\mathfrak{N}}}\left(\frac{1}{2}(A + UAU^{-1})\right) \leqq \frac{3}{4} \omega_{\mathfrak{N}}(A).$$

Pour cela, nous remarquons que

$$m_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_1} + P_{m_2} + P_{\overline{m}_1}) \leqq AP_{\overline{\mathfrak{N}}} \leqq \lambda_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_1} + P_{\overline{m}_1}) + M_{\mathfrak{N}}(A) P_{m_2},$$

d'où, comme $U(\overline{m}_1) = \overline{m}_1$, $U(m_1) = m_2$, $U(m_2) = m_1$:

$$m_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_2} + P_{m_1} + P_{\overline{m}_1}) \leqq (UAU^{-1}) P_{\overline{\mathfrak{N}}} \leqq \lambda_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_2} + P_{\overline{m}_1}) + M_{\mathfrak{N}}(A) P_{m_1}.$$

En ajoutant membre à membre

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{N}}(A)(P_{m_2} + P_{m_1} + P_{\overline{m}_1}) &\leqq \frac{1}{2}(UAU^{-1} + A) P_{\overline{\mathfrak{N}}} \\ &\leqq \lambda_{\mathfrak{N}}(A) P_{\overline{m}_1} + \frac{1}{2}\big(\lambda_{\mathfrak{N}}(A) + M_{\mathfrak{N}}(A)\big)(P_{m_1} + P_{m_2}) \\ &\leqq \frac{1}{2}\big(\lambda_{\mathfrak{N}}(A) + M_{\mathfrak{N}}(A)\big)(P_{m_1} + P_{m_2} + P_{\overline{m}_1}). \end{aligned}$$

Donc

$$\omega_{\overline{\mathfrak{N}}}\left(\frac{1}{2}(A+UAU^{-1})\right)\leqq\frac{1}{2}\left(\lambda_{\mathfrak{N}}(A)+M_{\mathfrak{N}}(A)\right)-m_{\mathfrak{N}}(A)=\frac{3}{4}M_{\mathfrak{N}}(A)-\frac{3}{4}m_{\mathfrak{N}}(A)=\frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}}(A).$$

Lemme 3.8. — *Soit* $A\in M_S$ *et soit* Φ *une partition finie de* $\mathbf{1}$ *dont les éléments appartiennent à* $M\cap M'$. *On peut trouver une partition finie* Φ' *de* $\mathbf{1}$ *appartenant à* $M\cap M'$ *et un* $U\in M_U$ *tels que*

$$\omega\left(\Phi', \frac{1}{2}(A+UAU^{-1})\right)\leqq\frac{3}{4}\omega(\Phi, A).$$

Démonstration. — Soit $\Phi=(\mathfrak{N}_i)_{1\leq i\leq n}$. Pour chaque i tel que $\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)\neq 0$, nous déterminons, par le lemme 3.7, des variétés $\mathfrak{M}_i\,\eta\, M\cap M'$, $\mathfrak{M}'_i\,\eta\, M\cap M'$ ($\mathfrak{M}_i\neq 0$, $\mathfrak{M}'_i\neq 0$) orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}_i$ et un $U_i\in M_U$ tels que

$$\omega_{\mathfrak{M}_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right)\leqq\frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)\leqq\frac{3}{4}\omega(\Phi, A),$$
$$\omega_{\mathfrak{M}'_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right)\leqq\frac{3}{4}\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)\leqq\frac{3}{4}\omega(\Phi, A).$$

Si $\omega_{\mathfrak{N}_i}(A)=0$, posons

$$\mathfrak{M}_i=\mathfrak{N}_i,\qquad U_i=1.$$

Soit $U=\sum_{i=1}^{n}U_iP_{\mathfrak{N}_i}\in M_U$, et soit Φ' la partition constituée par les $\mathfrak{M}_i$ et les $\mathfrak{M}'_i$. On a aussitôt

$$\omega\left(\Phi', \frac{1}{2}(A+UAU^{-1})\right)=\max_{1\leq i\leq n}\left[\omega_{\mathfrak{M}_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right), \omega_{\mathfrak{M}'_i}\left(\frac{1}{2}(A+U_iAU_i^{-1})\right)\right]\leqq\frac{3}{4}\omega(\Phi, A).$$

Théorème 7. — *Soit* $A\in M_S$, *et* $\varepsilon>0$. *Il existe des* $U_i\in M_U$ $(1\leqq i\leqq 2^n)$ *et un* $B\in(M\cap M')_S$ *tels que*

$$\left\|2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n}U_iAU_i^{-1}-B\right\|<\varepsilon.$$

Si $A\in M$, *le théorème subsiste à ceci près que* B *n'est plus nécessairement self-adjoint.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le théorème pour $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^p\omega_H(A)$ (p, entier $\geqq 0$). Comme $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^p\omega_H(A)\to 0$ quand $p\to\infty$, le théorème sera bien vrai pour tout $\varepsilon>0$.

Pour cela, d'après le lemme 3.6, il suffit de prouver qu'on peut trouver, pour tout p, une partition Φ finie de $\mathbf{1}$ dont les éléments appartiennent à $M\cap M'$ et des $U_i\in M_U$ $(1\leqq i\leqq 2^n)$ tels que

$$\omega\left(\Phi, 2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n}U_iAU_i^{-1}\right)\leqq\left(\frac{3}{4}\right)^p\omega_H(A). \tag{10}$$

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, par récurrence sur p. Pour $p=0$, c'est évident, en prenant Φ réduite à l'élément **1**, et $n=0$, $U_1=1$. Supposons donc (10) réalisée pour l'entier p. Alors, d'après le lemme 3.8, on peut trouver une partition Φ' finie de **1** dont les éléments appartiennent à $M \cap M'$ et un $U \in M_U$ tels que

$$\omega\left[\Phi', \frac{1}{2}\left(2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1} + 2^{-n} U\left(\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1}\right)U^{-1}\right)\right]$$
$$\leq \frac{3}{4}\,\omega\left(\Phi, 2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1}\right) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{p+1} \omega_{\mathrm{II}}(A)$$

et il suffit alors de remarquer que

$$\frac{1}{2}\left[2^{-n}\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1} + 2^{-n} U\left(\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1}\right)U^{-1}\right]$$
$$= 2^{-(n+1)}\left[\sum_{i=1}^{2^n} U_i A U_i^{-1} + \sum_{i=1}^{2^n} (UU_i) A (UU_i)^{-1}\right].$$

Si maintenant $A \in M$, il suffit d'écrire $A = B + iC$, avec $B \in M_S$, $C \in M_S$, et d'appliquer le lemme 1.1.

Ainsi, M_S vérifie C.4, quel que soit l'anneau d'opérateurs M contenant 1. Les recherches concernant C'.5 vont nous demander plus d'efforts.

Avant de les commencer, explicitons une conséquence immédiate de nos résultats :

Si $A \in M$, l'ensemble convexe uniformément fermé K_A engendré par les UAU^{-1} a une intersection non vide avec $M \cap M'$.

Les remarques qui suivent ont été suggérées à l'auteur par R. Godement. On pourrait définir les anneaux de classe finie comme les anneaux M pour lesquels M_S vérifie C'.5, ou encore pour lesquels $K_A \cap M \cap M'$ se réduit à un point lorsque $A \in M_S$. Alors on passerait immédiatement aux théorèmes 10 (sauf les propriétés 5β et 7), 11, 12, 13 du Chapitre VII, qui sont les résultats principaux de ce travail. Il est à noter que c'est cette définition qu'on utilise pour caractériser dans les applications les anneaux de classe finie (*cf.* des travaux à paraître de R. Godement). Cependant, il resterait à montrer que, pour les facteurs, ceci équivaut à la définition de [3] des facteurs de classe finie. Il importe aussi de pouvoir démontrer la propriété 5β du théorème 10, et les théorèmes du Chapitre VIII. Aussi, nous allons adopter une définition des anneaux de classe finie qui généralise directement celle de [3].

IV. — Définitions et lemmes préparatoires.

DÉFINITION 4.1. — M *sera dit de classe finie si les hypothèses* $\mathfrak{M}\,\eta\,M$, $\mathfrak{M}\sim H$ *entraînent* $\mathfrak{M}=H$, *c'est-à-dire si les hypothèses* $A\in M$, $AA^*=1$ *entraînent* $A^*A=1$.

Dans toute la suite, M désigne un anneau de classe finie. Mais il est facile de voir que plusieurs des lemmes qui suivent sont indépendants de cette hypothèse.

Les facteurs de classe finie et les anneaux abéliens sont des exemples typiques d'anneaux de classe finie.

LEMME 4.1. — *Soient* $\mathfrak{M}\,\eta\,M$, $\mathfrak{N}\,\eta\,M$, *avec* $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}$. *On a* $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$.

Démonstration. — On a

$$\mathfrak{M}\oplus(H\ominus\mathfrak{N})\sim\mathfrak{N}\oplus(H\ominus\mathfrak{N})=H,\qquad\text{donc}\quad\mathfrak{M}\oplus(H\ominus\mathfrak{N})=H,\qquad\mathfrak{M}=\mathfrak{N}.$$

LEMME 4.2. — *Toute partition homogène est finie.*

Démonstration. — Supposons une partition homogène infinie $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots)$. Soient $\mathfrak{M}=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}'=\bigoplus_{i=2}^{\infty}\mathfrak{M}_i$. On a $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{M}'$ (lemme 3.4) d'où $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'$ (lemme 4.1) d'où $\mathfrak{M}_1=0$, ce qui est absurde.

LEMME 4.3. — *Soit* $\mathfrak{M}\,\eta\,M$. *Soient* $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$, $(\mathfrak{M}'_i)_{1\leq i\leq p}$ *deux partitions homogènes de* $\mathfrak{M}$ *avec* $\mathfrak{M}_1\sim\mathfrak{M}'_1$. *On a* $n=p$.

Démonstration. — Soit par exemple $n\leq p$. On a (lemme 3.4)

$$\mathfrak{M}=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{M}_i\sim\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{M}'_i\subset\mathfrak{M},$$

d'où (lemme 4.1)

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{M}'_i=\mathfrak{M}=\bigoplus_{i=1}^{p}\mathfrak{M}'_i.$$

Comme $\mathfrak{M}'_p\neq 0$, $n=p$.

DÉFINITION 4.2. — *Soit* $\mathfrak{M}\,\eta\,M$. *On dira que* $\mathfrak{M}$ *est simple s'il existe une variété* $\mathfrak{N}\,\eta\,M\cap M'$ *et une partition homogène* $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ *de* $\mathfrak{N}$ *telle que* $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}$ (*ce qui impose* $\mathfrak{M}\neq 0$).

LEMME 4.4. — *Soit* $\mathfrak{M}\,\eta\,M$ *une variété simple. L'entier n de la définition* 4.2 *est bien déterminé par* $\mathfrak{M}$. *De même, la variété* $\mathfrak{N}$ *de la définition* 4.2 *est bien déterminée par* $\mathfrak{M}$ *et n'est autre que* $[\mathfrak{M}^M]$.

Démonstration. — Le lemme 3.1.γ entraîne aussitôt que $\mathfrak{N}=[\mathfrak{M}^M]$. L'énoncé relatif à l'entier n résulte immédiatement du lemme 4.3.

Nous pouvons alors poser la définition suivante :

DÉFINITION 4.3. — *Soit* $\mathcal{M}\eta M$ *une variété simple. L'entier n de la définition* 4.2 *sera appelé ordre de* $\mathcal{M}$. *L'opérateur* $\frac{1}{n}P_{\mathcal{N}}$, *qui appartient à* $M \cap M'$, *sera noté* $T(\mathcal{M})$.

LEMME 4.5. — *Soit* $\mathcal{M}\eta M$ *une variété simple d'ordre n. Soit* $\mathcal{N}\eta M\cap M'$. *Si* $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}\neq 0$, $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$ *est une variété simple d'ordre n.*

Démonstration. — Soit $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n)$ une partition homogène de $[\mathcal{M}^M]$, avec $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$. D'après le lemme 3.5, les $\mathcal{M}_i\cap\mathcal{N}$ forment une partition homogène de $[\mathcal{M}^M]\cap\mathcal{N}\eta M\cap M'$. D'où le lemme.

DÉFINITION 4.4. — *Soit* $\mathcal{M}\eta M$. *On dira que* $\mathcal{M}$ *est irréductible si* $\mathcal{M}\neq 0$ *et s'il n'existe aucune partition homogène d'ordre* 2 *majorée par* $\mathcal{M}$ (7).

LEMME 4.6. — *Soient* $\mathcal{M}\eta M$, $\mathcal{N}\eta M$, *avec* $\mathcal{M}\sim\mathcal{N}$. *Si* $\mathcal{M}$ *est irréductible,* $\mathcal{N}$ *est irréductible.*

Démonstration. — S'il existe une partition $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ majorée par $\mathcal{N}$, avec $\mathcal{N}_1\sim\mathcal{N}_2$, posons $\mathcal{M}_1 = U(\mathcal{N}_1)$, $\mathcal{M}_2 = U(\mathcal{N}_2)$, $U\in M_{p_1}$ admettant $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ comme variétés initiale et finale. $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est une partition homogène majorée par $\mathcal{M}$.

LEMME 4.7. — *Soit* $\mathcal{M}\eta M$ *une variété irréductible. Soient* $A\in M$, $B\in M$ *deux opérateurs réduits par* $\mathcal{M}$. *Les parties induites par* A *et* B *dans* $\mathcal{M}$ *sont permutables.*

Démonstration. — Comme tout opérateur de M réduit par $\mathcal{M}$ est une combinaison linéaire d'opérateurs de M_S réduits par $\mathcal{M}$, il suffit de prouver le lemme quand A et B sont self-adjoints. Deux opérateurs self-adjoints sont permutables si et seulement si leurs projecteurs spectraux sont permutables ; on peut donc se borner au cas où A et B sont des projecteurs. Or, supposons qu'il existe des variétés $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2\eta M$, contenues dans $\mathcal{M}$, non compatibles. Alors, d'après l'introduction, il existe des variétés $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}'_1$, $\mathcal{N}_2\eta M$, avec $\mathcal{N}_1\subset\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}'_1\subset\mathcal{M}\ominus\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_2\subset\mathcal{M}_2$ telles que $\mathcal{N}_2$ soit en position p' avec $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}'_1$, et telles que $\mathcal{N}_1\neq 0$, $\mathcal{N}'_1\neq 0$, $\mathcal{N}_2\neq 0$. D'où $\mathcal{N}_1\sim\mathcal{N}_2\sim\mathcal{N}'_1$, de sorte que $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}'_1)$ est une partition homogène majorée par $\mathcal{M}$. D'où absurdité.

LEMME 4.8. — *Soit* $\mathcal{M}\eta M$ *une variété irréductible. Soient* $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\eta M$ *deux variétés orthogonales contenues dans* $\mathcal{M}$. $[\mathcal{M}_1^M]$ *et* $[\mathcal{M}_2^M]$ *sont orthogonales.*

(7) Dans le cas d'un facteur, on peut montrer que cette notion coïncide avec celle de variété minimale de [3].

Démonstration. — Supposons $\mathcal{M}_1^{\mathrm{M}}$ et $\mathcal{M}_2^{\mathrm{M}}$ non orthogonales. Alors il existe $U_1 \in M_U$, $U_2 \in M_U$ tels que $U_1(\mathcal{M}_1)$ et $U_2(\mathcal{M}_2)$ soient non orthogonales. On peut donc trouver $\mathcal{N}'_1 \subset U_1(\mathcal{M}_1)$, $\mathcal{N}'_2 \subset U_2(\mathcal{M}_2)$ avec $\mathcal{N}'_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathcal{N}'_2 \eta \mathrm{M}$, $\mathcal{N}'_1 \sim \mathcal{N}'_2$, $\mathcal{N}'_1 \neq 0$, $\mathcal{N}'_2 \neq 0$. Soient $\mathcal{N}_1 = U_1^{-1}(\mathcal{N}'_1)$, $\mathcal{N}_2 = U_2^{-1}(\mathcal{N}'_2)$. On a $\mathcal{N}_1 \neq 0$, $\mathcal{N}_2 \neq 0$, $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}'_1 \sim \mathcal{N}'_2 \sim \mathcal{N}_2$, et $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{M}_2$ sont orthogonales. Donc $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ est une partition homogène majorée par $\mathcal{M}$, ce qui est absurde.

Définition 4.5. — *Une variété $\mathcal{M}$ sera dite homogène si $\mathcal{M} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ et s'il existe une partition homogène $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathcal{M}$, l'une des variétés $\mathcal{M}_i$ (donc, d'après le lemme 4.6, toutes les variétés $\mathcal{M}_i$) étant irréductibles. Autrement dit (lemme 4.4), $\mathcal{M}$ est homogène s'il existe une variété irréductible simple $\mathcal{N}$ telle que $\mathcal{M} = [\mathcal{N}^{\mathrm{M}}]$.*

Lemme 4.9. — *Toute variété irréductible contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}_1$ une variété irréductible. Considérons des variétés $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \ldots$, choisies successivement de telle sorte que, pour chaque entier n, $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit une partition homogène. D'après le lemme 4.2 la suite $(\mathcal{M}_i)$ ne peut être infinie. Donc il existe un entier p et une partition homogène $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq p}$ avec la propriété suivante : $\mathcal{M}_0 = \mathrm{H} \ominus (\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_p)$ ne contient aucune variété équivalente à $\mathcal{M}_1$.

Appliquons alors le théorème 6 à $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ en observant que $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathcal{M} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathcal{M}' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}' (\mathcal{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathcal{M})$;

trois variétés m_1, m_0, $\overline{m}_1 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathcal{M}$, deux à deux orthogonales;

trois variétés m'_1, m'_0, $\overline{m}'_0 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathcal{M}'$, deux à deux orthogonales, avec

$$m_1 \sim m_0, \qquad m'_1 \sim m'_0, \qquad \mathcal{M}_1 = \overline{m}_1 \oplus m_1 \oplus m'_1, \qquad \mathcal{M}_0 = \overline{m}'_0 \oplus m'_0 \oplus m_0.$$

Supposons $\overline{m}_1 = 0$. Alors, $\mathcal{M}_1 = m_1 \oplus m'_1 \sim m_0 \oplus m'_0 \subset \mathcal{M}_0$, contrairement à notre hypothèse. Donc $\overline{m}_1 \neq 0$.

Puisque $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_i$, il existe des variétés m_i, $\overline{m}_i$, orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}$, avec $m_i \sim m_1$, $\overline{m}_i \sim \overline{m}_1$ et $(\overline{m}_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une partition homogène. Chaque $\overline{m}_i$ est irréductible puisque $\overline{m}_1 \subset \mathcal{M}_1$ est irréductible. On va montrer que $\bigoplus_{1 \leq i \leq p} \overline{m}_i \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, de sorte que $\overline{m}_1$ sera la variété irréductible simple du lemme.

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_p, \mathcal{M}_0$ sont orthogonales, sous-tendent H, et sont compatibles avec $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$; donc $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_p$; $m_1, m_2, \ldots, m_p, m_0$ sont orthogonales et sous-tendent $\mathcal{M}$. D'autre part, $[\overline{m}_1^{\mathrm{M}}] \subset \mathcal{M}$ et $[m_1^{\mathrm{M}}] \subset \mathcal{M}$ sont orthogonales (lemme 4.8) et contiennent respectivement $\overline{m}_1 \oplus \overline{m}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{m}_p$ et $m_1 \oplus m_2 \oplus \ldots \oplus m_p \oplus m_0$. Donc

$$\overline{m}_1 \oplus \overline{m}_2 \oplus \ldots \oplus \overline{m}_p = [\overline{m}_1^{\mathrm{M}}] \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'.$$

Ce lemme va nous donner une décomposition de l'espace H qui permettra de dissocier le problème fondamental en problèmes partiels. Cette décomposition sera établie au lemme 4.11. Auparavant, notons encore pour plus tard le

Lemme 4.10. — *Si* H *est homogène, toute variété* $\mathfrak{M}_0 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_0 \neq 0$, *contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition homogène de H, chaque $\mathfrak{M}_i$ étant irréductible. Soit $\mathfrak{M}_0 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M}_0 \neq 0$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_1$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_0, $\overline{m}_0$, $m_1 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_0$ orthogonale à m_0 et m_1;

trois variétés m'_0, m'_1, $\overline{m}'_1$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'_1$ orthogonale à m'_0 et m'_1, avec

$$m_0 \sim m_1, \qquad m'_0 \sim m'_1, \qquad \mathfrak{M}_0 = m_0 \oplus \overline{m}_0 \oplus m'_0, \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus m'_1 \oplus \overline{m}'_1.$$

Si $m_0 \oplus m'_0 = 0$, on a $m_1 \oplus m'_1 = 0$, donc $\mathfrak{M}_0 = \overline{m}_0 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 = \overline{m}'_1 \subset \mathfrak{M}'$. Mais $\mathfrak{M}_0 \neq 0$ entraîne $\mathfrak{M} \neq 0$, d'où $\mathfrak{M}' \neq \mathrm{H}$, ce qui est contradictoire avec $[\mathfrak{M}_1^{\mathrm{M}}] = \mathrm{H}$. Donc $m_0 \oplus m'_0 \neq 0$. Mais alors, comme $m_0 \oplus m'_0 \sim m_1 \oplus m'_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_0 \oplus m'_0$ est irréductible. Il suffit enfin d'appliquer le lemme 4.9.

Lemme 4.11. — *S'il existe des variétés irréductibles, il existe une partition* $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *avec les propriétés suivantes :*

a. *Chaque* $\mathfrak{M}_i$ *est homogène;*

b. $\mathfrak{M} = \mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i \right)$ *ne contient aucune variété irréductible.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble, non vide, d'après l'hypothèse, des partitions $\Phi = (\mathfrak{N}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ dont chaque élément est homogène. Étant donnés deux éléments de $\mathcal{E}$, Φ et Φ', la relation $\Phi \subset \Phi'$ ordonne $\mathcal{E}$. Il est immédiat que le théorème de Zorn est applicable. Soit donc $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un élément maxima de $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{M} = \mathrm{H} \ominus \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i \right)$ et raisonnons dans l'espace $\mathfrak{M}$ dans lequel M induit un anneau d'opérateurs de classe finie d'après le lemme 4.1. Si $\mathfrak{M}$ contenait une variété irréductible, $\mathfrak{M}$ contiendrait (lemme 4.9) une variété irréductible simple donc une variété homogène, de sorte que Φ ne serait pas maximal. D'où le lemme.

Enfin, les deux lemmes suivants nous seront aussi utiles.

LEMME 4.12. — *Soient* $\mathfrak{N}_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{N}_2 \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{N} \eta \mathrm{M}$ *avec* $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2$. *On a*

$$\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_2.$$

Démonstration. — Soient $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_2$. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_1, m_2, $\overline{m}_1 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_1$ orthogonale à m_1 et m_2;

trois variétés m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2 \eta \mathrm{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'_2$ orthogonale à m'_1 et m'_2, avec

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}_2 = m_2 \oplus m'_2 \oplus \overline{m}'_2.$$

Posons

$$\begin{aligned} n_1 &= \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}, & n'_1 &= \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}'; \\ n_2 &= \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M}, & n'_2 &= \mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{M}'; \\ n &= \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}, & n' &= \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'; \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.5, on a $n_1 \sim n_2$, $n'_1 \sim n'_2$.

$\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{N}_1$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N}$. Donc

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M} = m_1 \oplus \overline{m}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M} = n_1$$

sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} = n$, $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}' = m'_1$ et $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}' = n'_1$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}' = n'$. De même, m_2 et n_2 sont orthogonales complémentaires dans n, $m'_2 \oplus \overline{m}'_2$ et n'_2 sont orthogonales complémentaires dans n'. Alors

$$n = m_2 \oplus n_2 \sim m_1 \oplus n_1 = n \ominus \overline{m}_1$$

d'où (lemme 4.1) $\overline{m}_1 = 0$. De même, $\overline{m}'_2 = 0$. Donc

$$\mathfrak{M}_2 = m_2 \oplus m'_2 \sim m_1 \oplus m'_1 = \mathfrak{M}_1.$$

LEMME 4.13. — *Soit* $\mathrm{A} \in (\mathrm{M} \cap \mathrm{M}')_s$. *Si, pour toute* $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, *on a* $m_{\mathfrak{M}}(\mathrm{A}) \leqq 0$, *on a* $\mathrm{A} \leqq 0$.

Démonstration. — Si l'on n'avait pas $\mathrm{A} \leqq 0$, il existerait une variété spectrale $\mathfrak{M}$ de A telle que $m_{\mathfrak{M}}(\mathrm{A}) > 0$. Or $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$. D'où contradiction.

Ces lemmes étant établis, reprenons les notations du lemme 4.11. Pour établir la validité de C'.5, il suffit de raisonner dans chaque espace $\mathfrak{M}_i$ et dans l'espace $\mathfrak{M}$. Autrement dit, on peut supposer que H est homogène ou que H ne contient aucune variété irréductible. Nous allons envisager ces deux cas aux Chapitres V et VI.

V. — Cas où H est homogène.

THÉORÈME 8. — *Si* H *est homogène,* M *vérifie* C'.5.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n)$ une partition homogène de H, chaque $\mathcal{M}_i$ étant irréductible. Soit $W_i \in M_{PI}$, les variétés initiale et finale de W_i étant $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Soit $g \in \mathcal{M}_1$, avec $\|g\| = 1$, et soit $g_i = W_i g$.

Soient $A \in M_S$, $U_j (1 \leqq j \leqq p)$ des éléments de M_U, $\lambda_j (1 \leqq j \leqq p)$ des éléments de $\mathbf{R}$ avec $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 0$. Supposons $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j A U_j^{-1} \geqq A'$ avec un $A' \in (M \cap M')_S$. Il faut prouver que $A' \leqq 0$.

1. Supposons $A \geqq 0$. Alors, $A = B^2$, avec $B \in M_S$. Soient $U \in M_U$, et $C = UB$. Soit $C_{ij} = W_j^* C W_i$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} (A g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (B^2 g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} \| B g_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| C g_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| C W_i g \|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \| P_{\mathcal{M}_j} C W_i g \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \| W_j^* C W_i g \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (C_{ij}^* C_{ij} g, g);$$

$$\sum_{i=1}^{n} (U A U^{-1} g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (U B B U^* g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (C C^* g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} \| C^* g_i \|^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \| W_j^* C^* W_i g \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \| C_{ji}^* g \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (C_{ji} C_{ji}^* g, g).$$

Or C_{ij} et C_{ij}^* sont réduits par $\mathcal{M}_1$ irréductible, donc (lemme 4.7) : $C_{ji} C_{ji}^* g = C_{ji}^* C_{ji} g$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} (A g_i, g_i) = \sum_{i=1}^{n} (U A U^{-1} g_i, g_i).$$

Par suite

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j A U_j^{-1} \right) g_i, g_i \right] \geqq \sum_{i=1}^{n} \big(m(A') g_i, g_i \big) = n m(A').$$

Donc $m(A') \leqq 0$.

2. Supposons $A \in M_S$ quelconque. On a $A + h \geqq 0$ pour un $h \in \mathbf{R}$ bien choisi. Or

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j (A + h) U_j^{-1} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j A U_j^{-1} \geqq A'$$

et, d'après la première partie de la démonstration, on peut encore conclure $m(A') \leqq 0$.

On peut répéter ce raisonnement dans toute variété $\mathcal{M} \,\eta\, M \cap M'$, le lemme 4.13 prouve alors notre théorème.

VI. — Cas où H ne contient aucune variété irréductible.

Dans ce Chapitre, M désigne un anneau de classe finie sans variétés irréductibles.

Définition 6.1. — *Soit* $\mathcal{M} \,\eta\, M$. *On dira que* $\mathcal{M}$ *est une variété fondamentale (ou que* $P_{\mathcal{M}}$ *est un projecteur fondamental) si* $\mathcal{M}$ *est une variété simple d'ordre* 2^n *(n entier), autrement dit s'il existe une variété* $\mathcal{N} \,\eta\, M \cap M'$ *et une partition homogène finie* $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq 2^n}$ *de* $\mathcal{N}$ *telle que* $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$. *On désignera par* M_P^f *l'ensemble des projecteurs fondamentaux de* M. *On écrira* $\mathcal{M} \,\eta\, M^f$ *si* $P_{\mathcal{M}} \in M_P^f$. *Une partition sera dite fondamentale si tous ses éléments sont fondamentaux.*

Lemme 6.1. — *Soit* $\mathcal{M} \,\eta\, M$, $\mathcal{M} \neq 0$. *Il existe une partition homogène d'ordre* 2 *de* $\mathcal{M}$.

Demonstration. — Disons que deux partitions semblables $\Phi = (\mathcal{M}_i)_{i \in I}$, $\Phi' = (\mathcal{M}'_i)_{i \in I}$ majorées par $\mathcal{M}$ sont orthogonales si $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}'_j$ sont orthogonales pour $i \in I$, $j \in I$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples (Φ, Φ') de partitions semblables orthogonales majorées par $\mathcal{M}$. Étant donnés deux éléments de $\mathcal{E}$, (Φ, Φ') et (Φ_1, Φ'_1), la relation « $\Phi \subset \Phi_1$ et $\Phi' \subset \Phi'_1$ » ordonne $\mathcal{E}$. Toute sous-famille $(\Phi_r, \Phi'_r)_{r \in R}$ totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ possède une borne supérieure, à savoir l'élément $\left(\bigcup_{r \in R} \Phi_r, \bigcup_{r \in R} \Phi'_r\right)$. Soit (théorème de Zorn) $(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}')$ un élément maximal de $\mathcal{E}$. On a $\overline{\Phi} = (\overline{\mathcal{M}}_i)_{i \in \overline{I}}$, $\overline{\Phi}' = (\overline{\mathcal{M}}'_i)_{i \in \overline{I}}$. Soit $\overline{\mathcal{M}} = \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{M}}_i$, $\overline{\mathcal{M}}' = \bigoplus_{i \in I} \overline{\mathcal{M}}'_i$. On a $\overline{\mathcal{M}} \sim \overline{\mathcal{M}}'$ (lemme 3.4), et $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}}'$ sont orthogonales. Supposons $\overline{\mathcal{M}} \oplus \overline{\mathcal{M}}' \neq \mathcal{M}$. Alors $m = \mathcal{M} \ominus (\overline{\mathcal{M}} \oplus \overline{\mathcal{M}}') \neq 0$, donc il existe une partition homogène (n, n') majorée par m. Alors, $(\overline{\Phi} \cup \{n\}, \overline{\Phi}' \cup \{n'\})$ est encore un élément de $\mathcal{E}$, ce qui est absurde puisque $(\overline{\Phi}, \overline{\Phi}')$ est maximal. Donc $\overline{\mathcal{M}} \oplus \overline{\mathcal{M}}' = \mathcal{M}$.

Lemme 6.2. — *Soit* $\mathcal{M} \,\eta\, M$, $\mathcal{M} \neq 0$. *Il existe, pour tout entier n, une partition homogène d'ordre* 2^n *de* $\mathcal{M}$.

Démonstration. — Raisonnant par récurrence, supposons qu'il existe une partition homogène, $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}$, de $\mathcal{M}$. Soit (lemme 6.1) $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ une partition homogène de $\mathcal{M}_1$. Comme $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_i$, on voit aussitôt qu'il existe une partition homogène $(\mathcal{N}_{2i-1}, \mathcal{N}_{2i})$ de $\mathcal{M}_i$, avec $\mathcal{N}_1 \sim \mathcal{N}_2 \sim \mathcal{N}_{2i-1} \sim \mathcal{N}_{2i}$. La famille $(\mathcal{N}_i)_{1\leq i\leq 2^n}$ est une partition homogène de $\mathcal{M}$.

LEMME 6.3. — α. *Soit* $\mathcal{M}_1 \eta M^f$ *et soit* $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_1$. *On a* $\mathcal{M}_2 \eta M^f$ *et* $T(\mathcal{M}_2) = T(\mathcal{M}_1)$.

β. *Soient* $\mathcal{M}_1 \eta M^f$, $\mathcal{M}_2 \eta M^f$. $T(\mathcal{M}_1) = T(\mathcal{M}_2)$ *entraîne* $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$.

Démonstration. — 1. Soit $(\mathcal{M}_1^i)_{1\leq i\leq 2^n}$ une partition homogène de $\mathcal{N} \eta M \cap M'$, avec $\mathcal{M}_1^1 = \mathcal{M}_1$. Soit $\mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_1$. On a $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{N}$ (lemme 3.1.β) et $\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}_2 \sim \mathcal{N} \ominus \mathcal{M}_1$ (lemme 4.12). Donc il existe une partition $(\mathcal{M}_2^i)_{2\leq i\leq 2^n}$ de $\mathcal{N} \ominus \mathcal{M}_2$ avec $\mathcal{M}_2^i \sim \mathcal{M}_1^i$ pour $2 \leqq i \leqq 2^n$. Alors, en posant $\mathcal{M}_2^1 = \mathcal{M}_2$, le système $(\mathcal{M}_2^i)_{1\leq i\leq 2^n}$ est une partition homogène d'ordre 2^n de $\mathcal{N}$. D'où α.

2. Soient $(\mathcal{M}_1^i)_{1\leq i\leq 2^n}$ et $(\mathcal{M}_2^i)_{1\leq i\leq 2^n}$ deux partitions homogènes de $\mathcal{N} \eta M \cap M'$, avec $\mathcal{M}_1^1 = \mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2^1 = \mathcal{M}_2$. Appliquons le théorème 6 à $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Il existe :

deux variétés $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}' \eta M \cap M'$, $\mathcal{M}' = H \ominus \mathcal{M}$;

trois variétés m_1, m_2, $\overline{m}_1 \eta M$ contenues dans $\mathcal{M}$, $\overline{m}_1$ orthogonale à m_1 et m_2;

trois variétés m'_1, m'_2, $\overline{m}'_2 \eta M$ contenues dans $\mathcal{M}'$, $\overline{m}'_2$ orthogonale à m'_1 et m'_2, telles que

$$m_1 \sim m_2, \qquad m'_1 \sim m'_2, \qquad \mathcal{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1, \qquad \mathcal{M}_2 = m_2 \oplus m'_2 \oplus \overline{m}'_2.$$

Comme $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_1^i$, on a $\mathcal{M}_1^i = m_1^i \oplus \overline{m}_1^i \oplus m_1'^i$, m_1^i, $\overline{m}_1^i$, $m_1'^i$ étant deux à deux orthogonales, avec $m_1^i \oplus \overline{m}_1^i \subset \mathcal{M}$, $m_1'^i \subset \mathcal{M}'$, $m_1^i \sim m_1$, $\overline{m}_1^i \sim \overline{m}_1$, $m_1'^i \sim m'_1$. De même, on a $\mathcal{M}_2^i = m_2^i \oplus m_2'^i \oplus \overline{m}_2'^i$, m_2^i, $m_2'^i$, $\overline{m}_2'^i$ étant deux à deux orthogonales, avec $m_2^i \subset \mathcal{M}$, $m_2'^i \oplus \overline{m}_2'^i \subset \mathcal{M}'$, $m_2^i \sim m_2$, $m_2'^i \sim m'_2$, $\overline{m}_2'^i \sim \overline{m}'_2$.

Puisque les $\mathcal{M}_1^i$, compatibles avec $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, forment une partition de $\mathcal{N}$, les $\mathcal{M}_1^i \cap \mathcal{M} = m_1^i \oplus \overline{m}_1^i$ forment une partition de $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$. De même, les m_2^i forment une partition de $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$. On a $m_2^i \sim m_1^i$, donc (lemme 3.4) $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} \sim \bigoplus_{i=1}^{2^n} m_1^i \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{M}$, d'où, par le lemme 4.1, $\overline{m}_1^i = 0$. De même $\overline{m}_2'^i = 0$. Donc $\mathcal{M}_1 = m_1 \oplus m'_1 \sim m_2 \oplus m'_2 = \mathcal{M}_2$. D'où β.

LEMME 6.4. — *Soit* $\mathcal{M}_1 \eta M$, $\mathcal{M}_1 \neq 0$. *Il existe une variété fondamentale contenue dans* $\mathcal{M}_1$.

Supposons que $\mathcal{M}_1$ ne contienne aucune variété fondamentale.

Construisons successivement des variétés $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, ... de telle sorte que, pour chaque entier n, $(\mathcal{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ soit une partition homogène. D'après le lemme 4.2, cette construction ne peut se poursuivre indéfiniment, donc il existe un entier m, et une partition homogène $(\mathcal{M}_i)_{1\leq i\leq m}$, avec la propriété suivante :

$\mathcal{M}_0 = H \ominus \left(\bigoplus_{1\leq i\leq m} \mathcal{M}_i\right)$ ne contient aucune variété équivalente a $\mathcal{M}_1$.

Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_0$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \eta\, \mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$, avec $\mathfrak{M}' = \mathbf{H} \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_1, $\overline{m}_1$, $m_0 \eta\, \mathbf{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}$ avec $\overline{m}_1$ orthogonale à m_1 et m_0;

trois variétés m'_1, m'_0, $\overline{m}'_0 \eta\, \mathbf{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}'$ avec $\overline{m}'_0$ orthogonale à m'_1 et m'_0,

avec

$$m_1 \sim m_0, \qquad m'_1 \sim m'_0 \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1 \qquad \mathfrak{M}_0 = m_0 \oplus m'_0 \oplus \overline{m}'_0.$$

Comme $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_i$ pour $1 \leq i \leq n$, on a $\mathfrak{M}_i = m_i \oplus \overline{m}_i \oplus m'_i$, m_i, $\overline{m}_i$, m'_i étant deux à deux orthogonales, avec $m_i \sim m_1$, $\overline{m}_i \sim \overline{m}_1$, $m'_i \sim m'_1$, donc $m_i \subset \mathfrak{M}$, $\overline{m}_i \subset \mathfrak{M}$, $m'_i \subset \mathfrak{M}'$. Puisque $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ sont orthogonales et sous-tendent H, $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n, \overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_n$, sont orthogonales et sous-tendent $\mathfrak{M}$. D'ailleurs, $\mathfrak{M} \neq 0$, car $\mathfrak{M} = 0$ entrainerait

$$\mathfrak{M}_1 = m'_1 \sim m'_0 \subset \mathfrak{M}_0$$

contrairement aux propriétés de $\mathfrak{M}_0$.

Puisque $m_1 \oplus \overline{m}_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_1 \oplus \overline{m}_1$ ne contient aucune variété fondamentale. Changeant de notations, nous allons faire jouer à $\mathfrak{M}$ le rôle de H et à $m_1 \oplus \overline{m}_1$ le rôle de $\mathfrak{M}_1$. Nous avons alors la situation suivante :

$\mathfrak{M}_1 \neq 0$ ne contient aucune variété fondamentale. Il existe une partition homogène $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $\mathfrak{M}_0 = \mathbf{H} \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \right)$ soit équivalente a une variété contenue dans $\mathfrak{M}_1$.

Soit $(\mathfrak{M}^i)_{1 \leq i \leq 2^p}$ une partition homogène de H telleque $2^p > n+1$ (lemme 6.2). Cette partition est fondamentale. Appliquons le théorème 6 à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}^1$. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \eta\, \mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$, $\mathfrak{M}' = \mathbf{H} \ominus \mathfrak{M}$;

trois variétés m_1, $\overline{m}_1$, $m^1 \eta\, \mathbf{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}$, $\overline{m}_1$ orthogonal à m_1 et m^1;

trois variétés m'_1, m'^1, $\overline{m}'^1 \eta\, \mathbf{M}$ contenues dans $\mathfrak{M}'$, $\overline{m}'^1$ orthogonale à m'_1 et m'^1,

avec

$$m_1 \sim m^1, \qquad m'_1 \sim m'^1 \qquad \mathfrak{M}_1 = m_1 \oplus \overline{m}_1 \oplus m'_1, \qquad \mathfrak{M}^1 = m^1 \oplus m'^1 \oplus \overline{m}'^1.$$

Les $\mathfrak{M}^i$ sont orthogonales et sous-tendent H, donc les $m^i = \mathfrak{M}^i \cap \mathfrak{M}$ sont orthogonales et sous-tendent $\mathfrak{M}$. Si $m^i \neq 0$, les m^i sont donc fondamentales, ce qui est absurde puisque $m^i \sim m^1 \sim m_1 \subset \mathfrak{M}_1$. Donc $m^i = 0$ et par suite $\mathfrak{M} = 0$. Alors

$$\mathfrak{M}_1 = m'_1 \sim m'^1 \subset \mathfrak{M}^1.$$

Puisque chaque $\mathcal{M}_i$, pour $0 \leqq i \leqq n$, est équivalente à $\mathcal{M}_1$ ou a une variété contenue dans $\mathcal{M}_1$, on en déduit que $\mathcal{M}_i$ est équivalente, pour $0 \leqq i \leqq n$, a une variété contenue dans $\mathcal{M}^{i+1}$, donc que $H = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathcal{M}_i$ est équivalente a une variété contenue dans $\bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{M}^i \neq H$ ce qui est absurde.

Le lemme précédent montre au fond l'existence *d'un nombre suffisamment grand* de variétés fondamentales.

Toutes les démonstrations qui viennent sont maintenant orientées vers la démonstration du lemme 6.13.

LEMME 6.5. — *Soient* $\mathcal{M} \eta M'$, $\mathcal{M}' \eta M'$, $\mathcal{N} \eta M \cap M'$, *avec* $T(\mathcal{M}) = 2^{-p} P_{\mathcal{N}}$, $T(\mathcal{M}') = 2^{-q} P_{\mathcal{N}}$, *et* $q \geqq p$. *Il existe une partition homogène* $(\mathcal{M}_i)_{1 \leqq i \leqq 2^{q-p}}$ de $\mathcal{M}$, *avec* $\mathcal{M}_i \sim \mathcal{M}'$ $(1 \leqq i \leqq 2^{q-p})$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{M}'_i)_{1 \leqq i \leqq 2^q}$ une partition homogène de $\mathcal{N}$, avec $\mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}'$. Posons, pour $1 \leqq j \leqq 2^p$:

$$\mathcal{M}''_j = \bigoplus_{r=(j-1)2^{q-p}+1}^{j.2^{q-p}} \mathcal{M}'_r.$$

D'après le lemme 3.4, $\mathcal{M}''_j \sim \mathcal{M}''_1$ pour $1 \leqq j \leqq 2^p$. Donc les $\mathcal{M}''_j$ forment une partition homogène d'ordre 2^p de $\mathcal{N}$, de sorte que $T(\mathcal{M}''_1) = 2^{-p} P_{\mathcal{N}} = T(\mathcal{M})$. Donc (lemme 6.3.β), $\mathcal{M}''_1 \sim \mathcal{M}$. La partition de $\mathcal{M}''_1$ en variétés $\mathcal{M}'_r$ fournit la partition cherchée de $\mathcal{M}$.

LEMME 6.6. — *Soient* $\mathcal{M}_1 \eta M$, $\mathcal{M}_2 \eta M$, ..., $\mathcal{M}_n \eta M$. *Il existe des variétés orthogonales* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ..., $\mathcal{L}_\omega \eta M \cap M'$ *sous-tendant* H, *telles que, en posant*, $\mathcal{M}_{i,\alpha} = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L}_\alpha$ *on ait*

$$\mathcal{M}_{i,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathcal{M}^{M}_{i,\alpha}] = \mathcal{L}_\alpha \qquad (1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq \alpha \leqq \omega).$$

Démonstration. — Le lemme est immédiat si l'entier n est égal à 1 [il suffit de prendre $\mathcal{L}_1 = [\mathcal{M}^{M}_1]$, $\mathcal{L}_2 = H \ominus \mathcal{L}_1$]. Supposons-le démontré pour l'entier n et démontrons-le pour l'entier $n+1$. Soient donc $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, ..., $\mathcal{M}_{n+1} \eta M'$. Il existe des variétées orthogonales $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ..., $\mathcal{L}_\omega \eta M \cap M'$ sous-tendant H, telles que, en posant

$$\mathcal{M}_{i,\alpha} = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L}_\alpha \qquad (1 \leqq i \leqq n+1,\ 1 \leqq \alpha \leqq \omega),$$

on ait

$$\mathcal{M}_{i,\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad [\mathcal{M}^{M}_{i,\alpha}] = \mathcal{L}_\alpha \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

On a $\mathcal{L}^1_\alpha = [\mathcal{M}^{M}_{n+1,\alpha}] \subset \mathcal{L}_\alpha$. Soit $\mathcal{L}^2_\alpha = \mathcal{L}_\alpha \ominus \mathcal{L}^1_\alpha$. On a $\mathcal{M}_{n+1,\alpha} \cap \mathcal{L}^2_\alpha = 0$. D'ailleurs $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L}^r_\alpha = 0$ ou $[(\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L}^r_\alpha)^{M}] = \mathcal{L}^r_\alpha$ pour $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq \alpha \leqq \omega$, $r = 1, 2$. D'où le lemme pour l'entier $n+1$.

Lemme 6.7. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition fondamentale de $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathrm{M}$. Soit $(\mathfrak{N}_j)_{1\leq j\leq p}$ une partition fondamentale majorée par $\mathfrak{M}$ ou une famille vide. Soit $\mathfrak{N}\,\eta\,\mathrm{M}^f$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{p}\mathrm{T}(\mathfrak{N}_j)+\mathrm{T}(\mathfrak{N})\leqq\sum_{i=1}^{n}\mathrm{T}(\mathfrak{M}_i).$$

Alors il existe une $\mathfrak{N}_{p+1}\sim\mathfrak{N}$ telle que $(\mathfrak{N}_j)_{1\leq j\leq p+1}$ soit une partition majorée par $\mathfrak{M}$.

Démonstration. — 1. Supposons d'abord qu'il existe une variété $\mathfrak{Q}\,\eta\,\mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ telle que $\mathrm{T}(\mathfrak{M}_i)=2^{-r_i}\mathrm{P}_{\mathfrak{Q}}$, $\mathrm{T}(\mathfrak{N}_j)=2^{-s_j}\mathrm{P}_{\mathfrak{Q}}$, $\mathrm{T}(\mathfrak{N})=2^{-s}\mathrm{P}_{\mathfrak{Q}}$, r_i, s_j, s étant des entiers. Soit q un entier supérieur aux r_i, aux s_j et à s, et soit $\mathfrak{T}\,\eta\,\mathrm{M}^f$ telle que $\mathrm{T}(\mathfrak{T})=2^{-q}\mathrm{P}_{\mathfrak{Q}}$ (lemme 6.2). Soient $(\mathfrak{M}_i^\lambda)_{1\leq\lambda\leq 2^{q-r_i}}$, $(\mathfrak{N}_j^\mu)_{1\leq\mu\leq 2^{q-s_j}}$, $(\mathfrak{N}^\nu)_{1\leq\nu\leq 2^{q-s}}$ des partitions de $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_j$, $\mathfrak{N}$, avec $\mathfrak{M}_i^\lambda\sim\mathfrak{N}_j^\mu\sim\mathfrak{N}^\nu\sim\mathfrak{T}$ pour $1\leqq i\leqq n$, $1\leqq\lambda\leqq 2^{q-r_i}$, $1\leqq j\leqq p\ldots$ (lemme 6.5). $(\mathfrak{M}_i^\lambda)_{1\leq i\leq n,\,1\leq\lambda\leq 2^{q-r_i}}$ est une partition fondamentale homogène de $\mathfrak{M}$, d'ordre $\sum_{i=1}^{n}2^{q-r_i}$. $(\mathfrak{N}_j^\mu)_{1\leq j\leq p,\,1\leq\mu\leq 2^{q-s_j}}$ est une partition fondamentale homogène majorée par $\mathfrak{M}$, d'ordre $\sum_{j=1}^{p}2^{q-s_j}$. L'hypothèse du lemme s'écrit

$$\sum_{i=1}^{p}2^{-s_j}+2^{-s}\leqq\sum_{i=1}^{n}2^{-r_i}$$

ou

$$(\star)\qquad \sum_{i=1}^{p}2^{q-s_j}+2^{q-s}\leqq\sum_{i=1}^{n}2^{q-r_i}.$$

Choisissons, dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des $\mathfrak{M}_i^\lambda$, un sous-ensemble $\mathcal{E}_1$ de $\sum_{j=1}^{p}2^{q-s_j}$ éléments. D'après le lemme 3.4, la variété qu'ils sous-tendent est équivalente à $\overline{\mathfrak{N}}=\bigoplus_{j=1}^{p}\mathfrak{N}_j$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}$ la variété sous-tendue par les éléments de $\mathcal{E}-\mathcal{E}_1$. On a (lemme 4.12)

$$\overline{\mathfrak{M}}\sim\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{N}}$$

Donc il existe une partition $(\mathfrak{N}'_\nu)_{1\leq\nu\leq m}$ de $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{N}}$, m étant le nombre d'éléments de $\mathcal{E}-\mathcal{E}_1$, avec $\mathfrak{N}'_\nu\sim\mathfrak{M}_i^\lambda(1\leqq\nu\leqq m)$. Or l'inégalité $(\star)$ prouve que $m\geqq 2^{q-s}$. Remarquant que $\mathfrak{N}'_\nu\sim\mathfrak{N}^\nu$ pour $1\leqq\nu\leqq 2^{q-s}$, on voit que $\mathfrak{N}\sim\bigoplus_{\nu=1}^{2^{q-s}}\mathfrak{N}'_\nu$. Donc $\bigoplus_{\nu=1}^{2^{q-s}}\mathfrak{N}'_\nu$ est la variété $\mathfrak{N}_{p+1}$ du lemme.

2. Envisageons maintenant le cas général. Il existe (lemme 6.6) un nombre fini de variétés orthogonales, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_\omega\,\eta\,\mathrm{M}\cap\mathrm{M}'$ telles que, en posant

$$\mathfrak{M}_{i,\alpha}=\mathfrak{M}_i\cap\mathcal{L}_\alpha,\qquad \mathfrak{N}_{j,\alpha}=\mathfrak{N}_j\cap\mathcal{L}_\alpha,\qquad \mathfrak{N}_\alpha=\mathfrak{N}\cap\mathcal{L}_\alpha$$

on ait

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{i,\alpha} &= 0 \quad \text{ou} \quad [\mathcal{M}_{i,\alpha}^{\mathrm{M}}] = \mathcal{L}_\alpha,\\
\mathcal{N}_{i,\alpha} &= 0 \quad \text{ou} \quad [\mathcal{N}_{i,\alpha}^{\mathrm{M}}] = \mathcal{L}_\alpha,\\
\mathcal{N}_{\alpha} &= 0 \quad \text{ou} \quad [\mathcal{N}_{\alpha}^{\mathrm{M}}] = \mathcal{L}_\alpha.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathcal{M}_{i,\alpha}) &= 0 \quad \text{ou} \quad 2^{-r_{i,\alpha}}\mathrm{P}_{\mathcal{L}_\alpha},\\
\mathrm{T}(\mathcal{N}_{j,\alpha}) &= 0 \quad \text{ou} \quad 2^{-s_{j,\alpha}}\mathrm{P}_{\mathcal{L}_\alpha},\\
\mathrm{T}(\mathcal{N}_{\alpha}) &= 0 \quad \text{ou} \quad 2^{-s_{\alpha}}\mathrm{P}_{\mathcal{L}_\alpha},
\end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^{p}\mathrm{T}(\mathcal{N}_{j,\alpha}) + \mathrm{T}(\mathcal{N}_\alpha) \leqq \sum_{i=1}^{n}\mathrm{T}(\mathcal{M}_{i,\alpha}).$$

D'après la première partie de la démonstration, et raisonnant dans l'espace $\mathcal{L}_\alpha$, il existe une variété $\mathcal{N}_{p+1,\alpha} \sim \mathcal{N}_\alpha$ telle que $(\mathcal{N}_{j,\alpha})_{1\leq j\leq p+1}$ soit une partition majorée par $\mathcal{M}_\alpha$, si $\mathcal{N}_\alpha \neq 0$. Il suffit alors de poser

$$\mathcal{N}_{p+1} = \bigoplus_{\alpha=1}^{\omega}\mathcal{N}_{p+1,\alpha}.$$

Lemme 6.8. — *Soient* $\mathcal{M}_1 \eta \mathrm{M}$, $\mathcal{M}_2 \eta \mathrm{M}$, $\ldots$, $\mathcal{M}_n \eta \mathrm{M}$, $\mathcal{M} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ *des variétés telles que* $[\mathcal{M}_i^{\mathrm{M}}] = \mathcal{M}$ *pour* $1 \leqq i \leqq n$, *avec* $\mathcal{M} \neq 0$. *Soit* $\mathcal{M}_{n+1} \eta \mathrm{M}$ *une variété telle que* $\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M} \neq 0$. *Alors il existe une variété* $\mathcal{M}' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, *contenue dans* $\mathcal{M}$, *avec* $\mathcal{M}' \neq 0$, *et telle que, en posant* $\mathcal{M}'_i = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}'$, *on ait* $[\mathcal{M}_i'^{\mathrm{M}}] = \mathcal{M}'$ *pour* $1 \leqq i \leqq n+1$.

Démonstration. — Posons

$$\mathcal{M}' = [(\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M})^{\mathrm{M}}], \text{ et } \mathcal{M}'_i = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}' \quad (1 \leqq i \leqq n+1).$$

On a $\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, donc (lemme 3.1.$\alpha$) $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. D'autre part, $\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M} \neq 0$ entraine $\mathcal{M}' \neq 0$.

Montrons que $[\mathcal{M}_{n+1}'^{\mathrm{M}}] = \mathcal{M}'$. $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ donne $\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M}$ d'autre part, $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M}$ donne $\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M}' \supset \mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M}$. Donc

$$\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M} = \mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M}' = \mathcal{M}'_{n+1}.$$

Donc $[\mathcal{M}_{n+1}'^{\mathrm{M}}] = [(\mathcal{M}_{n+1} \cap \mathcal{M})^{\mathrm{M}}] = \mathcal{M}'$.

Montrons enfin que $[\mathcal{M}_i'^{\mathrm{M}}] = \mathcal{M}'$ pour $1 \leqq i \leqq n$. On a $\mathcal{M}'_i \subset \mathcal{M}'$ donc (lemme 3.1.α) $[\mathcal{M}_i'^{\mathrm{M}}] \subset \mathcal{M}'$. Si l'on avait $[\mathcal{M}_i'^{\mathrm{M}}] \neq \mathcal{M}'$, on aurait

$$(\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}') \oplus [\mathcal{M}_i'^{\mathrm{M}}] \neq \mathcal{M},$$

et, comme $(\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}') \oplus [\mathcal{M}_i'^{\mathrm{M}}] \supset \mathcal{M}_i$, il y aurait contradiction puisque $\mathcal{M}$ est la plus petite variété contenant $\mathcal{M}_i$ telle que $\mathcal{M} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$.

LEMME 6.9. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale dont tous les éléments sont d'ordre strictement inférieur à un entier n. Il existe une variété $\mathfrak{N}\,\eta\,M\cap M'$ telle que $\mathfrak{N}\neq 0$ et $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}_i = 0$ sauf pour un nombre fini de variétés $\mathfrak{M}_i$*

Démonstration. — Soit $i_1\in I$, et soit $\mathfrak{N}_1 = [\mathfrak{M}_{i_1}^M]$. Si $\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{M}_i = 0$ pour $i\in I$, $i\neq i_1$, le lemme est démontré. Sinon, $\mathfrak{N}_1\cap\mathfrak{M}_{i_2}\neq 0$ pour un $i_2\in I$. Alors (lemme 6.8) il existe une $\mathfrak{N}_2\,\eta\,M\cap M'$, avec $\mathfrak{N}_2\subset\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2\neq 0$, telle que

$$[(\mathfrak{N}_2\cap\mathfrak{M}_{i_1})^M] = [(\mathfrak{N}_2\cap\mathfrak{M}_{i_2})^M] = \mathfrak{N}_2.$$

Si $\mathfrak{N}_2\cap\mathfrak{M}_i = 0$ pour $i\in I$, $i\neq i_1$, $i\neq i_2$, le lemme est démontré, etc. Supposant qu'aucune des variétés $\mathfrak{N}_j$ successivement construites ne puisse jouer le rôle de la variété $\mathfrak{N}$ du lemme, nous allons aboutir à une contradiction. Posons

$$m_i = \mathfrak{N}_n\cap\mathfrak{M}_i.$$

On a

$$[m_{i_1}^M] = [m_{i_2}^M] = \ldots = [m_{i_n}^M] = \mathfrak{N}_n\neq 0,$$

de sorte que les m_{i_s} forment une partition d'ordre n majorée par $\mathfrak{N}_n$. D'autre part, d'après le lemme 4.5, chaque variété m_{i_s} est une variété fondamentale d'ordre strictement inférieur à n. Soit 2^p l'ordre maximum des m_{i_s}, et supposons par exemple que m_{i_1} soit d'ordre $2^p(2^p<n)$. Il existe une partition homogène d'ordre 2^p de $[m_{i_1}^M] = \mathfrak{N}_n$, soit $(m'_j)_{1\leq j\leq 2^p}$, avec $m'_1 = m_{i_1}$. D'après le lemme 6.5, on a $m'_j\sim m''_j\subset m_{i_j}$ pour $1\leq j\leq 2^p$, donc (lemme 3.4) :

$$\mathfrak{N}_n = \bigoplus_{j=1}^{2^p} m'_j \sim \bigoplus_{j=1}^{2^p} m''_j \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_n.$$

D'où absurdité.

LEMME 6.10. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale dont tous les éléments sont d'ordre inférieur à un entier fixé. Il existe une partition $(\mathfrak{L}_j)_{j\in J}$ de H, avec $\mathfrak{L}_j\,\eta\,M\cap M'$ telle que, pour tout $j\in J$, on a $\mathfrak{L}_j\cap\mathfrak{M}_i = 0$ sauf pour un nombre fini de variétés $\mathfrak{M}_i$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des partitions $\Phi = (\mathfrak{L}'_k)_{k\in K}$, avec $\mathfrak{L}'_k\,\eta\,M\cap M'$, telles que, pour tout $k\in K$, on ait $\mathfrak{L}'_k\cap\mathfrak{M}_i = 0$ sauf pour un nombre fini de variétés $\mathfrak{M}_i$. Étant donnés deux éléments Φ, Φ', de $\mathcal{E}$, la relation $\Phi\subset\Phi'$ ordonne $\mathcal{E}$ et le théorème de Zorn est applicable.

Soit $(\mathfrak{L}_j)_{j\in J}$ un élément maximal de $\mathcal{E}$. Soit $\mathfrak{L} = H\ominus\left(\bigoplus_{j\in J}\mathfrak{L}_j\right)$. Si $\mathfrak{L}\neq 0$, on peut appliquer dans l'espace $\mathfrak{L}$ le lemme 6.9, d'où absurdité puisque $(\mathfrak{L}_j)_{j\in J}$ est maximal. Donc $\mathfrak{L} = 0$, et les $\mathfrak{L}_j$ forment une partition de H. D'où le lemme.

LEMME 6.11. — *Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale. $\sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)$ existe, et même on a*

$$\sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)\leq 1.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que, pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{j \in J} T(\mathcal{M}_j) \leqq 1$. Autrement dit, nous pouvons désormais supposer I fini.

Soient alors (lemme 6.6) $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_\omega \eta M \cap M'$ des variétés deux à deux orthogonales sous-tendant H telles que, en posant $\mathcal{M}_{i,\alpha} = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L}_\alpha$ on ait $\mathcal{M}_{i,\alpha} = 0$ ou $[\mathcal{M}_{i,\alpha}^{M}] = \mathcal{L}_\alpha$. Les $\mathcal{M}_{i,\alpha} \neq 0$ forment une partition fondamentale dans $\mathcal{L}_\alpha$ (lemme 4.5), et, raisonnant dans l'espace $\mathcal{L}_\alpha$, on voit qu'il suffit de prouver le lemme quand $T(\mathcal{M}_i) = 2^{-n_i} . \mathbf{1}$ pour $i \in I$. Soit alors n un entier supérieur aux n_i et $(\mathcal{N}_j)_{1 \leq j \leq 2^n}$ une partition homogène d'ordre 2^n de H. D'après le lemme 6.5, il existe une partition d'ordre 2^{n-n_i} de $\mathcal{M}_i$ par des variétés équivalentes aux $\mathcal{N}_j$, et l'ensemble de ces variétés forme donc une partition, soit $(\mathcal{N}'_j)$, d'ordre $\sum_{i \in I} 2^{n-n_i}$ dont toutes les variétés sont équivalentes aux $\mathcal{N}_j$. Si l'on avait $\sum_{i \in I} 2^{n-n_i} > 2^n$ on aurait

$$H = \bigoplus_{j=1}^{2^n} \mathcal{N}_j \sim \bigoplus_{j=1}^{2^n} \mathcal{N}'_j \neq H,$$

d'où absurdité. Donc

$$\sum_{i \in I} 2^{n-n_i} \leqq 2^n \quad \text{ou} \quad \sum_{i \in I} 2^{-n_i} \leqq 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME 6.12. — *Soient* $A \in (M \cap M')_S$, $B \in (M \cap M')_S$. *Si l'on a* $A > B$, *il existe une variété* $\mathcal{M} \eta M^f$ *telle que* $A \geqq B + T(\mathcal{M})$.

Démonstration. — Puisque $A - B > 0$, il existe une variété $\mathcal{N} \eta M \cap M'$ telle que $m_{\mathcal{N}}(A - B) > 0$. Soit p un entier tel que $2^{-p} < m_{\mathcal{N}}(A - B)$. Soit (lemme 6.2) $\mathcal{M} \eta M^f$ telle que $T(\mathcal{M}) = 2^{-p} P_{\mathcal{N}}$. $\mathcal{M}$ répond aux conditions du lemme.

LEMME 6.13. — *Soient* $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$, $(\mathcal{M}'_j)_{j \in J}$ *deux partitions fondamentales telles que* $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{M}_i = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{M}'_j$. *On a*

$$\sum_{i \in I} T(\mathcal{M}_i) = \sum_{j \in J} T(\mathcal{M}'_j).$$

Démonstration. — On va montrer que, pour toute partie finie J′ de J, on a

$$\sum_{j \in J'} T(\mathcal{M}'_j) \leqq \sum_{i \in I} T(\mathcal{M}_i).$$

Il en résultera

$$\sum_{j \in J} T(\mathcal{M}'_j) \leqq \sum_{i \in I} T(\mathcal{M}_i),$$

et, par symétrie entre les $\mathcal{M}_i$ et les $\mathcal{M}'_j$, le lemme sera démontré.

Or, si l'on n'avait pas $\sum_{j\in J'} T(\mathfrak{M}'_j) \leqq \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)$ on aurait, pour une variété $\mathcal{L} \eta M \cap M'$,

$$m_{\mathcal{L}}\left[\sum_{j\in J'} T(\mathfrak{M}'_j) - \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)\right] > 0.$$

Raisonnant dans l'espace $\mathcal{L}$ que nous appelons désormais H par changement de notations, on voit que nous sommes ramenés à prouver ceci :

Soient $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition fondamentale, et $(\mathfrak{M}'_1, \mathfrak{M}'_2, \ldots, \mathfrak{M}'_n)$ une partition fondamentale majorée par $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$. L'inégalité $\sum_{j=1}^{n} T(\mathfrak{M}'_j) > \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i)$ est impossible.

Or, supposons cette inégalité vérifiée. D'après le lemme 6.12, il existe une variété $\mathfrak{M}_0 \eta M'$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} T(\mathfrak{M}'_j) \geqq T(\mathfrak{M}_0) + \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i).$$

Nous allons voir que ceci entraîne l'existence d'une partition $(\mathfrak{N}_i)_{i\in I\cup\{0\}}$ majorée par $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{M}'_j$ telle que $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{M}_i$ pour $i \in I \cup \{0\}$, d'où l'on déduira, par le lemme 3.4

$$\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i \sim \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_0 \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i \subset \bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{M}'_j \subset \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i,$$

d'où absurdité par le lemme 4.1.

Tout revient donc à construire les $\mathfrak{N}_i$ moyennant l'hypothèse

$$\sum_{j=1}^{n} T(\mathfrak{M}'_j) \geqq T(\mathfrak{M}_0) + \sum_{i\in I} T(\mathfrak{M}_i).$$

Considérons, dans l'ensemble des $\mathfrak{M}_i (i \in I \cup \{0\})$ les variétés d'ordre 2^n. Désignons-les par $\mathfrak{M}_k^{(n)} (k \in K_n)$. Supposons construites des variétés $\mathfrak{N}_k^{(1)} (k \in K_1)$, $\mathfrak{N}_k^{(2)} (k \in K_2)$, $\ldots$, $\mathfrak{N}_k^{(r)} (k \in K_r)$, avec $\mathfrak{N}_k^{(s)} \sim \mathfrak{M}_k^{(s)}$ pour $k \in K_s (s = 1, 2, \ldots, r)$, ces variétés formant une partition majorée par $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{M}'_j$. Montrons qu'on peut construire des variétés $\mathfrak{N}_k^{(r+1)} (k \in K_{r+1})$, avec $\mathfrak{N}_k^{(r+1)} \sim \mathfrak{M}_k^{(r+1)}$ de façon que les $\mathfrak{N}_k^{(1)} (k \in K_1)$, $\mathfrak{N}_k^{(2)} (k \in K_2)$, $\ldots$, $\mathfrak{N}_k^{(r+1)} (k \in K_{r+1})$ forment une partition majorée par $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathfrak{M}'_j$. On pourra alors construire les variétés $\mathfrak{N}_i$ par récurrence.

Or, les variétés $\mathfrak{M}_k^{(n)}$, où $n \leqq r+1$, sont d'ordre borné, et, en exceptant éventuellement $\mathfrak{M}_0$, forment une partition. On peut donc appliquer le lemme 6.10. Raisonnant dans chaque variété $\mathfrak{T}_j$ de ce lemme, on voit que, en changeant de notations, on est ramené à prouver ceci :

Soit $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n)$ une partition fondamentale. Soit $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots, \mathcal{N}_p)$ une partition fondamentale majorée par $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$. Soient $\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2, \ldots, \mathcal{N}'_r$ des variétés fondamentales. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}(\mathcal{M}_i) \geqq \sum_{j=1}^{p} \mathrm{T}(\mathcal{N}_j) + \sum_{k=1}^{r} \mathrm{T}(\mathcal{N}'_k),$$

il existe des variétés $\mathcal{N}''_1, \mathcal{N}''_2, \ldots, \mathcal{N}''_r$, avec $\mathcal{N}''_k \sim \mathcal{N}'_k$ pour $1 \leqq k \leqq r$, et telles que l'ensemble des $\mathcal{N}_i$ et des $\mathcal{N}''_k$ forme une partition majorée par $\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{M}_i$.

Or, ce résultat se déduit aussitôt du lemme 6.7 par récurrence.

Ceci posé, introduisons les définitions suivantes (inspirées par celles de [4])([8]).

DÉFINITION 6.3. — *Soit* $g \in \mathrm{H}$, *avec* $\|g\| = 1$. *Soient* $\theta \in \mathbf{R}$, $\mathcal{M}\,\eta\,\mathrm{M}'$, $\mathcal{N}\,\eta\,\mathrm{M}$. *On écrira* $\mathcal{M} \leqq_g \theta$ (*resp.* $\geqq_g$, $<_g$, $>_g$) *si* $(\mathcal{P}_{\mathcal{M}} g, g) \leqq \theta(\mathrm{T}(\mathcal{M})g, g)$ (*resp.* $\geqq, <, >$). *On écrira* $\mathcal{N} \leqq_{g,p} \theta$ (*resp.* $\geqq_{g,p}$, $<_{g,p}$, $>_{g,p}$) *si* $\mathcal{N} \neq 0$ *et si, pour toute* $\mathcal{M}_1\,\eta\,\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$, *on a* $\mathcal{M}_1 \leqq_g \theta$ (*resp.* $\geqq_g$, $<_g$, $>_g$).

LEMME 6.14. — *Soit* $(\mathcal{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une partition fondamentale de* $\mathcal{M}\,\eta\,\mathrm{M}'$, *avec* $\mathcal{M}_i >_g \theta$ (*resp.* $<_g$) *pour* $i \in \mathrm{I}$. *On a* $\mathcal{M} >_g \theta$ (*resp.* $<_g$).

Démonstration. — Les vecteurs $\mathrm{P}_{\mathcal{M}_i} g$ sont deux à deux orthogonaux et ont pour somme $\mathrm{P}_{\mathcal{M}} g$, donc

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{M}} g, g) = \sum_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{P}_{\mathcal{M}_i} g, g).$$

D'autre part (lemme 6.13)

$$(\mathrm{T}(\mathcal{M})g, g) = \sum_{i\in \mathrm{I}} (\mathrm{T}(\mathcal{M}_i)g, g).$$

Si $(\mathrm{P}_{\mathcal{M}_i} g, g) > \theta(\mathrm{T}(\mathcal{M}_i)g, g)$ pour $i \in \mathrm{I}$, on en déduit donc

$$(\mathrm{P}_{\mathcal{M}} g, g) > \theta(\mathrm{T}(\mathcal{M})g, g).$$

C'est la seule utilisation que nous ferons du lemme 6.13.

LEMME 6.15. — *Soit* $\mathcal{M}\,\eta\,\mathrm{M}'$ *avec* $\mathcal{M} \leqq_g \theta$ (*resp.* $\geqq_g$). *Il existe une* $\mathcal{N}\,\eta\,\mathrm{M}'$ *avec* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N} \leqq_{g,p} \theta$ (*resp.* $\geqq_{g,p}$).

Démonstration. — Soit par exemple $\mathcal{M} \leqq_g \theta$, et supposons qu'il n'existe aucune $\mathcal{M}'\,\eta\,\mathrm{M}$ telle que $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}' \leqq_{g,p} \theta$. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des

---

([8]) La définition 6.3, les lemmes 6.14, 6.15, 6.16, 6.19 sont à rapprocher de la définition 1.2.1, des lemmes 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.1, 1.4.3 de [4].

partitions fondamentales $\Phi=(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ majorées par $\mathfrak{M}$ telles que $\mathfrak{M}_i >_g \theta$ pour $i\in I$. Si $\Phi_1\in\mathcal{E}$, $\Phi_2\in\mathcal{E}$ la relation $\Phi_1\subset\Phi_2$ ordonne $\mathcal{E}$, et le théorème de Zorn est applicable. Soit donc $\overline{\Phi}=(\overline{\mathfrak{M}}_i)_{i\in\overline{I}}$ un élément maximal de $\mathcal{E}$. Soit $\overline{\mathfrak{M}}=\bigoplus_{i\in\overline{I}}\overline{\mathfrak{M}}_i$. Si $\overline{\mathfrak{M}}\neq\mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}\neq 0$, et, par hypothèse, on n'a pas $\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}\leqq_{g,p}\theta$, donc il existe une $m\,\eta\,M^f$ avec $m\subset\mathfrak{M}\ominus\overline{\mathfrak{M}}$ et $m>_g\theta$. Alors $\overline{\Phi}\cup\{m\}$ est encore un élément de $\mathcal{E}$, ce qui est absurde. Donc $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}$. Mais alors (lemme 6.14) $\mathfrak{M}_i>_g\theta$ entraîne $\mathfrak{M}>_g\theta$, d'où contradiction.

Donc il existe une variété $\mathfrak{M}'\,\eta\,M$, avec $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'\leqq_{g,p}\theta$. Soit $\mathfrak{N}\,\eta\,M^f$ avec $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}'$ (lemme 6.4). On a évidemment $\mathfrak{N}\leqq_{g,p}\theta$.

LEMME 6.16. — *Soient $\mathfrak{M}\,\eta\,M\cap M'$, $\mathfrak{M}\neq 0$ et $g\in H$, $\|g\|=1$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une variété $\mathfrak{M}_\varepsilon\,\eta\,M^f$ et un nombre λ $(1\leqq\lambda<+\infty)$ avec $\mathfrak{M}_\varepsilon\subset\mathfrak{M}$, $\lambda\leqq_{g,p}\mathfrak{M}_\varepsilon\leqq_{g,p}\lambda+\varepsilon$.*

Démonstration. — On a $P_{\mathfrak{M}}=T(\mathfrak{M})$, donc $\mathfrak{M}\geqq_g 1$. Donc (lemme 6.15) il existe une variété $\mathfrak{M}'\,\eta\,M^f$ avec $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'\geqq_{g,p}1$. Si $T(\mathfrak{M}')g=0$, on a $P_{\mathfrak{M}'}g=0$ et le lemme est trivial avec $\mathfrak{M}_\varepsilon=\mathfrak{M}'$ et $\lambda\geqq 1$ quelconque. Si $T(\mathfrak{M}')g\neq 0$, la borne supérieure $\lambda(\geqq 1)$ des θ tels que $\mathfrak{M}'\geqq_{g,p}\theta$ est finie. On vérifie aussitôt que $\mathfrak{M}'\geqq_{g,p}\lambda$. Il existe une variété $\mathfrak{M}'_\varepsilon\,\eta\,M^f$ avec $\mathfrak{M}'_\varepsilon\subset\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}'_\varepsilon\leqq_g\lambda+\varepsilon$. Donc (lemme 6.15) il existe une variété $\mathfrak{M}_\varepsilon\,\eta\,M^f$, avec $\mathfrak{M}_\varepsilon\subset\mathfrak{M}'_\varepsilon$ et $\mathfrak{M}_\varepsilon\leqq_{g,p}\lambda+\varepsilon$. Comme $\mathfrak{M}_\varepsilon\subset\mathfrak{M}'$, on a évidemment $\mathfrak{M}_\varepsilon\geqq_{g,p}\lambda$.

LEMME 6.17. — *Soit $g\in H$ avec $\|g\|=1$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une variété $\mathfrak{M}_\varepsilon\,\eta\,M^f$ et un nombre λ $(1\leqq\lambda<+\infty)$ tels que*

α. $\lambda\leqq_{g,p}\mathfrak{M}_\varepsilon\leqq_{g,p}\lambda+\varepsilon$;

β. $P_{\mathfrak{M}_\varepsilon}g\neq 0$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}\,\eta\,M\cap M'$, $\mathfrak{M}\neq 0$, possédant la propriété suivante : pour un certain $\varepsilon_0>0$, il est impossible de trouver une variété fondamentale $\mathfrak{M}_{\varepsilon_0}\subset\mathfrak{M}$ et un nombre λ $(1\leqq\lambda<+\infty)$ avec

$$\lambda\leqq_{g,p}\mathfrak{M}_{\varepsilon_0}\leqq_{g,p}\lambda+\varepsilon_0,\qquad P_{\mathfrak{M}_{\varepsilon_0}}g\neq 0.$$

Soit $\mathfrak{M}'\,\eta\,M\cap M'$, avec $\mathfrak{M}'\neq 0$, $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$. Appliquant le lemme 6.16 à $\mathfrak{M}'$, on détermine une variété fondamentale $\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}$ et un nombre λ $(1\leqq\lambda<+\infty)$, avec $\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}\subset\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$, $\lambda\leqq_{g,p}\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}\leqq_{g,p}\lambda+\varepsilon_0$. D'après l'hypothèse faite sur $\mathfrak{M}$, on a donc $P_{\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}}g=0$. Mais alors

$$0=(P_{\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0}}g,\,g)\geqq\lambda(T(\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0})g,\,g),\qquad \text{d'où}\qquad (T(\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0})g,\,g)=0.$$

On a d'ailleurs

$$T(\mathfrak{M}'_{\varepsilon_0})=2^{-q}P_{\mathfrak{M}''},$$

avec un entier q et une variété $\mathfrak{M}'' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, $\mathfrak{M}'' \neq 0$, $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$. Donc

$$(\mathrm{P}_{\mathfrak{M}''}g, g) = 0, \qquad \mathrm{P}_{\mathfrak{M}''}g = 0.$$

2. Ainsi, quelle que soit $\mathfrak{M}' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ avec $\mathfrak{M}' \neq 0$, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, on peut trouver une $\mathfrak{M}'' \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ avec $\mathfrak{M}'' \neq 0$, $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$, $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}''}g = 0$. Considérons alors les partitions $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ majorées par $\mathfrak{M}$ dont les éléments appartiennent à $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ telles que $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}g = 0$ pour $i \in \mathrm{I}$. Soit $\mathcal{E}$ leur ensemble. Si $\Phi \in \mathcal{E}$, $\Phi' \in \mathcal{E}$, la relation $\Phi \subset \Phi'$ ordonne $\mathcal{E}$, et le théorème de Zorn est applicable. Soit donc $\overline{\Phi} = (\overline{\mathfrak{M}}_i)_{i \in \overline{\mathrm{I}}}$ un élément maximal de $\mathcal{E}$, et $\overline{\mathfrak{M}} = \bigoplus_{i \in \overline{\mathrm{I}}} \overline{\mathfrak{M}}_i$. Si $\overline{\mathfrak{M}} \neq \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M} \ominus \overline{\mathfrak{M}} \neq 0$, donc il existe une $m \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$, avec $m \neq 0$, $m \subset \mathfrak{M} \ominus \overline{\mathfrak{M}}$ et $\mathrm{P}_m g = 0$. Alors $\overline{\Phi} \cup \{m\}$ est un élément de $\mathcal{E}$, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in \overline{\mathrm{I}}} \overline{\mathfrak{M}}_i$. Alors, $\mathrm{P}_{\overline{\mathfrak{M}}_i}g = 0$ pour $i \in \overline{\mathrm{I}}$ entraîne $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}g = 0$.

3. On a $\mathrm{P}_{\mathrm{H}}g = g \neq 0$. Donc H ne peut avoir la propriété admise pour $\mathfrak{M}$ au début de la démonstration. Ceci prouve le lemme.

Après cette étude des variétés $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$, nous revenons enfin à l'étude des opérateurs de M.

Lemme 6.18. — *Soient* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_s$, et $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M} \neq 0$, *avec* $\mathrm{A} \geqq 0$, $\mathrm{AP}_{\mathfrak{M}} = \mathrm{P}_{\mathfrak{M}}\mathrm{A} = \mathrm{A}$. *Pour tout voisinage fort* $\mathfrak{U}$ *de* 0 *dans* M, *il existe des nombres strictement positifs* $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ *et une partition fondamentale* $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ *majorée par* $\mathfrak{M}$ *tels que*

$$\mathrm{A} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i} \in \mathfrak{U}.$$

Démonstration. — 1. Soit $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M} \neq 0$. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des partitions fondamentales majorées par $\mathfrak{M}$. Si $\Phi_1 \in \mathcal{E}$, $\Phi_2 \in \mathcal{E}$, la relation $\Phi_1 \subset \Phi_2$ ordonne $\mathcal{E}$, et le théorème de Zorn est applicable. Soit $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un élément maximal de $\mathcal{E}$, et soit $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i$. Si $\overline{\mathfrak{M}} \neq \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M} \ominus \overline{\mathfrak{M}} \neq 0$, donc (lemme 6.4), il existe une variété $m \eta \mathrm{M}^f$ avec $m \subset \mathfrak{M} \ominus \overline{\mathfrak{M}}$. Alors $\Phi \cup \{m\} \in \mathcal{E}$, ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i$, donc $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}}$ adhère fortement à l'ensemble des $\sum_{i \in \mathrm{J}} \mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}$, où J est une partie finie quelconque de I.

2. Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_s$ et $\mathfrak{M} \eta \mathrm{M}$, $\mathfrak{M} \neq 0$, avec $\mathrm{A} \geqq 0$, $\mathrm{AP}_{\mathfrak{M}} = \mathrm{P}_{\mathfrak{M}}\mathrm{A} = \mathrm{A}$, et soit $\mathfrak{U}$ un voisinage convexe fort de zéro. On peut trouver des nombres strictement positifs λ_i et une partition $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ majorée par $\mathfrak{M}$ tels que $\mathrm{A} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i} \in \frac{1}{2}\mathfrak{U}$ (on pourrait même supposer $\left\| \mathrm{A} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i} \right\|$ arbitrairement petit, les $\mathrm{P}_{\mathfrak{M}_i}$ étant

des projecteurs spectraux de $A\Big)$. Puis, pour chaque i, la première partie de la démonstration permet de trouver une partition fondamentale $(\mathcal{M}_{ij})_{1\leq j\leq n_i}$ majorée par $\mathcal{M}_i$, avec

$$P_{\mathcal{M}_i}-\sum_{j=1}^{n_i}P_{\mathcal{M}_{ij}}\in\frac{1}{2}(n\lambda_i)^{-1}\mathcal{U}.$$

Alors

$$A-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\lambda_i P_{\mathcal{M}_{ij}}\in\mathcal{U}.$$

Lemme 6.19. — *Soit* $A\in M$ *tel que* $AP_{\mathcal{M}_\varepsilon}=P_{\mathcal{M}_\varepsilon}A=A$ (*notations du lemme* 6.17). *On a*

$$\|Ag\|^2\leq(1+\varepsilon)\|A^\star g\|^2.$$

Démonstration. — On a $A=UB$, avec $B\in M_S$, $U\in M_{PI}$, et

$$U^\star U=E,\qquad UU^\star=E',\qquad E\leq P_{\mathcal{M}_\varepsilon},\qquad E'\leq P_{\mathcal{M}_\varepsilon};$$
$$BE=EB=B,\qquad \text{d'où}\qquad B^2E=EB^2=B^2.$$

On a

$$A^\star A=BU^\star UB=BEB=B^2,$$
$$AA^\star=UB^2U^\star.$$

Soit $\mathcal{U}$ le voisinage fort de zéro composé des opérateurs T tels que $\|Tg\|\leq\varepsilon_1$, $\|TU^\star g\|\leq\varepsilon_1$, ε_1 étant un nombre strictement positif. Soit (lemme 6.18) une partition fondamentale $(\mathcal{M}_i)_{1\leq i\leq n}$ majorée par Δ_E, donc par $\mathcal{M}_\varepsilon$, telle que

$$B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathcal{M}_i}\in\mathcal{U},$$

les λ_i étant des nombres positifs.

On a

$$\|Ag\|^2=(Ag,Ag)=(A^\star Ag,g)=(B^2g,g)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(P_{\mathcal{M}_i}g,g)+\eta$$

avec

$$|\eta|=\left|\left(\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathcal{M}_i}\right)g,g\right)\right|\leq\left\|\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathcal{M}_i}\right)g\right\|\leq\varepsilon_1.$$

$$\|A^\star g\|^2=(A^\star g,A^\star g)=(AA^\star g,g)=(UB^2U^\star g,g)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(UP_{\mathcal{M}_i}U^\star g,g)+\eta'$$

avec

$$|\eta'|=\left|\left(U\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathcal{M}_i}\right)U^\star g,g\right)\right|\leq\left\|\left(B^2-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_{\mathcal{M}_i}\right)U^\star g\right\|\leq\varepsilon_1.$$

U transforme isométriquement Δ_E en $\Delta_{E'}$, donc $\mathfrak{M}_i$ en $U(\mathfrak{M}_i)$. Donc $UP_{\mathfrak{M}_i}U^* \in M_P^f$, et $UP_{\mathfrak{M}_i}U^* \leqq E' \leqq P_{\mathfrak{M}_\varepsilon}$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Par suite

$$(P_{\mathfrak{M}_i}g, g) \leqq (\lambda+\varepsilon)(T(\mathfrak{M}_i)g, g) = (\lambda+\varepsilon)\big(T(U(\mathfrak{M}_i))g, g\big)$$
$$\leqq \lambda^{-1}(\lambda+\varepsilon)\big(P_{U(\mathfrak{M}_i)}g, g\big) \leqq (1+\varepsilon)\big(UP_{\mathfrak{M}_i}U^*g, g\big).$$

Donc

$$\|Ag\|^2 \leqq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(UP_{\mathfrak{M}_i}U^*g, g) + |\eta| = (1+\varepsilon)(\|A^*g\|^2 - \eta') + |\eta|$$
$$\leqq (1+\varepsilon)\|A^*g\|^2 + \varepsilon_1 + (1+\varepsilon)\varepsilon_1,$$

d'où, comme $\varepsilon_1 > 0$ est arbitraire

$$\|Ag\|^2 < (1+\varepsilon)\|A^*g\|^2.$$

Lemme 6.20. — *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des vecteurs unitaires $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n}$, tels que, pour tout $A \in M_S$, avec $A \geqq 0$, et tout $U \in M_U$, on ait*

$$\sum_{i=1}^{2^n}(Ag_i, g_i) \leqq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{2^n}(UAU^{-1}g_i, g_i).$$

Démonstration. — Soit $g \in H$, avec $\|g\| = 1$. Soit (lemme 6.17) $\mathfrak{M}_\varepsilon \eta M^f$ et un nombre $\lambda (1 \leqq \lambda < +\infty)$, tels que $\lambda \leqq_{g,p} \mathfrak{M}_\varepsilon \leqq_{g,p} \lambda + \varepsilon$ et $P_{\mathfrak{M}_\varepsilon}g \neq 0$.

Soit $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leqq i \leqq 2^n}$ une partition homogène, avec $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_\varepsilon$, de $[\mathfrak{M}_1^M]$. Il existe des $W_i \in M_{PI}$ dont les variétés initiales et finales sont $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_i$. Soit $\bar{g}_i = W_i g$. On a $A = B^2$, avec $B \in M_S$. Soit $C = UB$, et $C_{ij} = W_j^* C W_i$.

$$\sum_{i=1}^{2^n}(A\bar{g}_i, \bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}(B^2\bar{g}_i, \bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}\|B\bar{g}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\|C\bar{g}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\|CW_ig\|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|P_{\mathfrak{M}_j}CW_ig\|^2 = \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|W_j^*CW_ig\|^2 = \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|C_{ij}g\|^2.$$

De même

$$\sum_{i=1}^{2^n}(UAU^{-1}\bar{g}_i, \bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}(B^2U^*\bar{g}_i, U^*\bar{g}_i) = \sum_{i=1}^{2^n}\|BU^*\bar{g}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2^n}\|C^*\bar{g}_i\|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|W_j^*C^*W_ig\|^2 = \sum_{j=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}\|C_{ji}^*g\|^2.$$

Remarquons que $P_{\mathfrak{M}_\varepsilon}C_{ij} = C_{ij}P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} = C_{ij}$. Le lemme 6.19 donne alors

$$\sum_{i=1}^{2^n}(A\bar{g}_i, \bar{g}_i) \leqq (1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{2^n}(UAU^{-1}\bar{g}_i, \bar{g}_i).$$

On a d'ailleurs

$$\|\bar{g}_i\| = \| W_i g \| = \| P_{\mathfrak{M}_\varepsilon} g \| \neq 0.$$

Il suffit donc de poser $g_i = \|\bar{g}_i\|^{-1} \bar{g}_i$ pour avoir le lemme.

THÉORÈME 9. — *Si* H *ne contient aucune variété irréductible,* M_S *vérifie* C'.5.

Démonstration. — Soient $A \in M_S$, $B \in (M \cap M')_S$, $U_i \in M_U$ $(1 \leq i \leq r)$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leq i \leq r)$ avec $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geq B$. Il faut montrer que $B \leq 0$.

1. Supposons $0 \leq A \leq \mathbf{1}$, et montrons que, si $\mathfrak{M} \eta M \cap M'$, on a $m_{\mathfrak{M}}(B) \leq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons les vecteurs g_j $(1 \leq j \leq 2^n)$ du lemme 6.20, et posons

$$\sum_{j=1}^{2^n} (U_i A U_i^{-1} g_j, g_j) = \mu_i.$$

On a

$$0 \leq \mu_i \leq \sum_{j=1}^{2^n} (g_j, g_j) = 2^n.$$

D'autre part

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left(\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \right) g_j, g_j \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{j=1}^{2^n} (U_i A U_i^{-1} g_j, g_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i.$$

On a (lemme 6.20)

$$\mu_i \leq (1+\varepsilon)\mu_1, \qquad \mu_1 \leq (1+\varepsilon)\mu_i$$

d'où (en supposant $\varepsilon < 1$)

$$(1-\varepsilon)\mu_1 \leq \mu_i \leq (1+\varepsilon)\mu_1 \qquad \text{ou} \qquad \mu_i = \mu_1 + \eta_i$$

avec

$$|\eta_i| \leq \varepsilon \mu_1 \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Donc

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_1 + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \eta_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \eta_i \right| \leq \mu_1 \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| \right) \leq 2^n \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| \right).$$

D'autre part

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left(\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \right) g_j, g_j \right) \geq \sum_{j=1}^{2^n} (B g_j, g_j) \geq m_{\mathfrak{M}}(B) \sum_{j=1}^{2^n} (g_j, g_j) = 2^n m_{\mathfrak{M}}(B).$$

D'où

$$2^n m_{\mathfrak{M}}(B) \leq 2^n \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{r} |\lambda_i| \right).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit $m_{\mathfrak{M}}(B) \leqq 0$. D'après le lemme 4.13, on a donc $B \leqq 0$.

2. Si maintenant $A \in M_s$ ne vérifie plus $0 \leqq A \leqq \mathbf{1}$, on a $0 \leqq kA + h \leqq \mathbf{1}$ pour deux nombres réels h et $k (k > 0)$ bien choisis. On a

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i (kA + h) U_i^{-1} = k \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \geqq kB,$$

donc, d'après la première partie de la démonstration, $kB \leqq 0$, $B \leqq 0$.

VII. — L'opération $\natural$ dans les anneaux de classe finie.

Les théorèmes 7, 8, 9 permettent d'appliquer aux anneaux d'opérateurs de classe finie contenant $\mathbf{1}$ les résultats du Chapitre I.

THÉORÈME 10. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* $\mathbf{1}$. *Il existe une application* $A \rightarrow A^\natural$ *de* M *sur* $M \cap M'$ *possédant les propriétés suivantes :*

(1) *Si* $A \in M \cap M'$, $A^\natural = A$.
(2) $(\lambda A)^\natural = \lambda A^\natural$.
(3) $(A + A')^\natural = A^\natural + A'^\natural$.
(4α) $(AB)^\natural = (BA)^\natural$.
(4β) $(AB)^\natural = AB^\natural$ *si* $A \in M \cap M'$ (9).
(5α) *Si* $A \in M_s$ *et* $A \geqq 0$, *on a* $A^\natural \in M_s$ *et* $A^\natural \geqq 0$.
(5β) $A \in M_s$, $A \geqq 0$ *et* $A^\natural = 0$ *entraînent* $A = 0$.
(6) $(A^*)^\natural = (A^\natural)^*$.
(7) *Si* $\mathfrak{M} \,\eta\, M$ *est une variété simple*, $P_{\mathfrak{M}}^\natural = T(\mathfrak{M})$ (10).

Démonstration. — D'après les théorèmes 1 et 2, il existe une application $A \rightarrow A^\natural$ de M_s sur $(M \cap M')_s$ possédant les propriétés (1), (3), (5α), possédant la propriété (2) si λ est réel, et telle que, pour tout $U \in M_U$, $(UAU^{-1})^\natural = A^\natural$.

Soit maintenant $A \in M$. On a $A = B + iC$, avec $B \in M_s$, $C \in M_s$; B et C sont définis de manière unique par $A : B = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Posons

$$A^\natural = B^\natural + iC^\natural.$$

---

(9) Cette propriété m'a été indiquée par R. Godement.

(10) Par des remarques classiques, on déduit de là que :

1° Si A et B sont self-adjoints $(AB)^\natural$ est self-adjoint. Car $(AB)^{\natural *} = (AB)^{*\natural} = (BA)^\natural = (AB)^\natural$.

2° Si A et B sont self-adjoints $\geqq 0$ $(AB)^\natural$ est self-adjoint $\geqq 0$. Car $A = C^2$, $B = D^2$, avec C, D self-adjoints, donc $(AB)^\natural = (C^2D^2)^\natural = (CD^2C)^\natural$; or CD^2C est self-adjoint $\geqq 0$, car $(CD^2C)^* = CD^2C$, et $(CD^2Cf, f) = \|DCf\|^2$ pour $f \in H$.

L'application $A \to A^\natural$ est ainsi définie pour tout $A \in M$, et $A^\natural \in M \cap M'$. On vérifie alors par des calculs immédiats les propriétés (1), (2), (3), (6).

On a $UAU^{-1} = UBU^{-1} + iUCU^{-1}$ de sorte que la propriété $(UAU^{-1})^\natural = A^\natural$ reste valable pour tout $A \in M$. On en déduit

$$(AU)^\natural = [U^{-1}(UA)U]^\natural = (UA)^\natural.$$

La propriété (4α) est donc démontrée si $B \in M_U$. Il suffit donc de prouver que tout élément K de M est combinaison linéaire d'éléments de M_U, et il suffit de le vérifier pour un $K \in M_S$ tel que $-\mathbf{1} \leq K \leq \mathbf{1}$. Or, on a $K = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$, avec

$$K_1 = K + i\sqrt{1 - K^2}, \qquad K_2 = K - i\sqrt{1 - K^2},$$

et l'on vérifie aussitôt que

$$K_1 K_1^* = K_1^* K_1 = K_2 K_2^* = K_2^* K_2 = \mathbf{1},$$

de sorte que $K_1 \in M_U$, $K_2 \in M_U$.

La propriété (4β) s'établit de la manière suivante. Soit $A \in M \cap M'$, et soit $B \in M$. Nous utilisons dès maintenant le théorème 12 (qui sera établi indépendamment). Il existe des éléments $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de M_U, des éléments $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbf{R}$, avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tels que $\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i B U_i^{-1} - B^\natural \right\| \leq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$. D'où

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A B U_i^{-1} - AB^\natural \right\| = \left\| A \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i B U_i^{-1} - B^\natural \right) \right\| \leq \| A \| \varepsilon.$$

Donc $(AB)^\natural = AB^\natural$ d'après l'unicité de la trace.

Prouvons la propriété (7). Soit $\mathfrak{M} \eta M$ une variété simple, et soit $(\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition homogène de $\mathfrak{N} \eta M \cap M'$, avec $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$. Il existe des $U_i \in M_{PI}$ tels que $U_i^* U_i = P_{\mathfrak{M}}$, $U_i U_i^* = P_{\mathfrak{M}_i}$, d'où $P^\natural_{\mathfrak{M}} = P^\natural_{\mathfrak{M}_i}$. Alors

$$P^\natural_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{n}\left(P^\natural_{\mathfrak{M}_1} + P^\natural_{\mathfrak{M}_2} + \ldots + P^\natural_{\mathfrak{M}_n}\right) = \frac{1}{n}\left(P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}\right)^\natural = \frac{1}{n} P^\natural_{\mathfrak{N}} = \frac{1}{n} P_{\mathfrak{N}} = T(\mathfrak{M}).$$

Prouvons enfin la propriété (5β). Il suffit de prouver que $A \in M_S$, $A \geq 0$ et $A \neq 0$ entraînent $A^\natural \neq 0$. Or nos hypothèses entraînent, d'après la théorie spectrale, $A \geq a P_{\mathfrak{M}}$ avec $\mathfrak{M} \eta M$, $\mathfrak{M} \neq 0$, a étant un nombre strictement positif. Les lemmes 4.11, 4.10 et 6.4 prouvent qu'il existe une variété simple $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. D'où

$$A \geq a P_{\mathfrak{M}'}, \qquad A^\natural \geq a P^\natural_{\mathfrak{M}'} = a T(\mathfrak{M}') \neq 0.$$

THÉORÈME 11. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* $\mathbf{1}$. *S'il existe une application* $A \to \varphi(A)$ *de* M *dans* $M \cap M'$ *avec les propriétés* (1), (2), (3), (4α), (5α) *du théorème* 10, *on a* $\varphi(A) = A^\natural$ *pour tout* $A \in M$.

Démonstration. — Les hypothèses entraînent aussitôt que l'application φ, restreinte à M_S, possède les propriétés qui permettent l'application du théorème 3 [en particulier, la propriété (4α) entraîne que $\varphi(UAU^{-1}) = \varphi(AU^{-1}U) = \varphi(A)$ pour $A \in M_S$, $U \in M_U$]. Donc $\varphi(A) = A^\natural$ pour $A \in M_S$. D'où, si $A = B + iC \in M$, avec $B \in M_S$, $C \in M_S$:

$$\varphi(A) = \varphi(B) + i\varphi(C) = B^\natural + iC^\natural = A^\natural.$$

THÉORÈME 12. — *Soient* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* **1**, *et* $A \in M$: *l'intersection de* $M \cap M'$ *et de l'ensemble convexe uniformément fermé* K_A *engendré par les* UAU^{-1} $(U \in M_U)$ *se compose du seul opérateur* $A^\natural$.

Démonstration. — Nous savons, par le théorème 7, que $K_A \cap M \cap M'$ est non vide. Soit $A' \in K_A \cap M \cap M'$. On a, pour des $U_i \in M_U$ et des $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $\left(\lambda_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right)$ bien choisis

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A' \right\| \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A^\star U_i^{-1} - A'^\star \right\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - A' \right)^\star \right\| \leqq \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i \frac{A + A^\star}{2} U_i^{-1} - \frac{A' + A'^\star}{2} \right\| \leqq \varepsilon.$$

D'après l'unicité de la trace de $B = \frac{A + A^\star}{2}$, $C = \frac{A - A^\star}{2i}$, on en déduit

$$\frac{A' + A'^\star}{2} = B^\natural.$$

De même

$$\frac{A' - A'^\star}{2i} = C^\natural.$$

D'où

$$A' = B^\natural + iC^\natural = A^\natural.$$

THÉORÈME 13. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs de classe finie contenant* **1**. *Soit* $M^\star \subset M$ *l'adhérence* (*au sens de la norme des opérateurs*) *de l'ensemble des opérateurs* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1}$ *où* $A \in M$, $U_i \in M_U$, $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. $M^\star$ *est le sous-espace vectoriel* [11] *fermé des opérateurs de trace nulle, et l'on a*

$$M \cap M' \cap M^\star = 0, \qquad M = M^\star + (M \cap M').$$

---

[11] Noter que ce résultat, même isolé, n'est pas trivial.

Ainsi, tout $A \in M$ *se met, d'une seule manière, sous la forme* $A = A_1 + A_2$, *avec* $A_1 \in M \cap M'$, $A_2 \in M^\star$. *On a d'ailleurs* $A_1 = A^\natural$, *de sorte que l'opération* $\natural$ *n'est autre que le projecteur sur* $M \cap M'$ *défini par* $M \cap M'$ *et* $M^\star$. $M^\star$ *est aussi le sous-espace vectoriel fermé de* M *engendré par les opérateurs de la forme* $AB - BA$, *où* $A \in M$, $B \in M$.

Démonstration. — Sauf la dernière définition de $M^\star$, le théorème résulte du théorème 5, en remarquant que $M^\star$ et $M \cap M'$ sont invariants par l'application $A \to A^\star$. (D'ailleurs, la démonstration du théorème 5 peut aussi être appliquée ici mot pour mot.) Si maintenant $C = AB - BA$, où $A \in M$, $B \in M$, on a $C^\natural = (AB)^\natural - (BA)^\natural = 0$, donc $C \in M^\star$. Réciproquement, $M^\star$ est engendré par les opérateurs de la forme $AB - BA$ puisque, avec les notations du théorème,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i A U_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i U_i A U_i^{-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) U_n A U_n^{-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (U_i A U_i^{-1} - U_n A U_n^{-1}),$$

et que

$$U_i A U_i^{-1} - U_n A U_n^{-1} = (U_i U_n^{-1})(U_n A U_i^{-1}) - (U_n A U_i^{-1})(U_i U_n^{-1}).$$

Théorème 14. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs contenant* **1**. *Si* M *n'est pas de classe finie, il est impossible de définir une application* $A \to \varphi(A)$ *de* M *dans* $M \cap M'$ *possédant les propriétés* (1), (3), (4α), *du théorème* 10.

Démonstration. — M n'étant pas de classe finie, il existe une variété $\mathcal{M}_1 \eta M$ avec $\mathcal{M}_1 \sim H$ et $\mathcal{N}_1 = H \ominus \mathcal{M}_1 \neq 0$. Soit $U \in M_{PI}$ un opérateur appliquant isométriquement H sur $\mathcal{M}_1$: Soient

$$\mathcal{M}_2 = U(\mathcal{M}_1), \quad \mathcal{M}_3 = U(\mathcal{M}_2), \quad \ldots, \quad \mathcal{N}_2 = U(\mathcal{N}_1), \quad \mathcal{N}_3 = U(\mathcal{N}_2), \; \ldots.$$

$\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{N}_1$ sont orthogonales complémentaires dans H, donc $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{N}_2$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_1$, donc $\mathcal{M}_3$ et $\mathcal{N}_3$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_2$, etc. Ainsi, $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \ldots)$ est une partition homogène infinie.

Considérons les partitions homogènes qui contiennent $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \ldots$ comme éléments. Appliquant, comme nous l'avons fait souvent, le théorème de Zorn, nous obtenons une partition homogène *infinie* $(\mathcal{N}_i)_{i\in I}$ telle que, en posant $\mathcal{N}_0 = H \ominus \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{N}_i\right)$, il n'existe aucune variété équivalente à $\mathcal{N}_1$ contenue dans $\mathcal{N}_0$.

Appliquons le théorème 6 à $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_0$. Il existe :

deux variétés $\mathcal{N}, \mathcal{N}' \eta M \cap M'$, $\mathcal{N}' = H \ominus \mathcal{N}$;

trois variétés $n_1, \bar{n}_1, n_0 \eta M$ contenues dans $\mathcal{N}$, $\bar{n}_1$ orthogonale à n_1 et n_0;

trois variétés $n'_1, n'_0, \bar{n}'_0 \eta M$ contenues dans $\mathcal{N}'$, $\bar{n}'_0$ orthogonale à n'_1 et n'_0, avec

$$n_1 \sim n_0, \qquad n'_1 \sim n'_0, \qquad \mathcal{N}_1 = n_1 \oplus \bar{n}_1 \oplus n'_1, \qquad \mathcal{N}_0 = n_0 \oplus n'_0 \oplus \bar{n}'_0.$$

Si $\mathcal{N} = 0$, on a $\mathcal{N}_1 = n'_1 \sim n'_0 \subset \mathcal{N}_0$ contrairement à la propriété de $\mathcal{N}_0$. Donc $\mathcal{N} \neq 0$. Posant $\widetilde{\mathcal{N}}_i = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{N}$ pour $i = 0$ ou $i \in \mathrm{I}$, on a les propriétés suivantes : $\widetilde{\mathcal{N}}_0$ et les $\widetilde{\mathcal{N}}_i$ sont deux à deux orthogonales et sous-tendent $\mathcal{N}$; $\widetilde{\mathcal{N}}_0 = n_0 \sim n_1 \subset \widetilde{\mathcal{N}}_1$; $(\widetilde{\mathcal{N}}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une partition homogène infinie.

Soient $\widetilde{\mathcal{N}} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \widetilde{\mathcal{N}}_i$, et $n_i \subset \widetilde{\mathcal{N}}_i$, $\overline{n_i} = \widetilde{\mathcal{N}}_i \ominus n_i$, avec $n_i \sim n_1$. On a

$$\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} n_i \sim \bigoplus_{i \in \mathrm{I} \cup \{0\}} n_i$$

et

$$\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \overline{n_i} \text{ orthogonale à } \bigoplus_{i \in \mathrm{I} \cup \{0\}} n_i$$

donc (lemme 3.4) $\mathcal{N} \sim \widetilde{\mathcal{N}}$. La partition $(\widetilde{\mathcal{N}}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de $\widetilde{\mathcal{N}}$ donne finalement une partition homogène infinie $(\hat{\mathcal{N}}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de $\mathcal{N}$.

Divisons la partition $(\hat{\mathcal{N}}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ en deux partitions homogènes semblables, que nous désignerons par $(\mathcal{N}_j^1)_{j \in \mathrm{J}}$, $(\mathcal{N}_j^2)_{j \in \mathrm{J}}$. Soient

$$\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathcal{N}_j^1, \qquad \mathcal{L}_2 = \bigoplus_{i \in \mathrm{J}} \mathcal{N}_j^2.$$

On a, d'après le lemme 3.4, comme I et J sont équipotents

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{L}_2 \sim \mathcal{N}.$$

Ceci posé, admettons l'existence d'une application φ de M dans $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ avec les propriétés (1), (3), (4α), du théorème 10. Comme $\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1} = \mathrm{UU}^*$, $\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2} = \mathrm{U}^*\mathrm{U}$ avec un $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{PI}}$, on aurait

$$\varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1}) = \varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2}) = \varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1} + \mathrm{P}_{\mathcal{L}_2}) = \varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1}) + \varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_2}),$$

d'où

$$\varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_2}) = 0 = \varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{L}_1}) = \varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{N}}),$$

contrairement à la propriété

$$\varphi(\mathrm{P}_{\mathcal{N}}) = \mathrm{P}_{\mathcal{N}} \neq 0,$$

qui résulte de $\mathcal{N} \eta \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$.

THÉORÈME 15. — *Soit* M *un anneau d'opérateurs contenant* **1**. *Si* M *n'est pas de classe finie,* $\mathrm{M_S}$ *ne vérifie pas* C'.5. *Il existe des éléments* A *tels que* $\mathrm{K_A} \cap \mathrm{M} \cap \mathrm{M}'$ *ne se réduit pas à un point.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer les théorèmes 4 et 14.

VIII. — Continuité de l'opération $\natural$.

L'application $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^\natural$ est continue pour la topologie uniforme [*cf.* note (4)]. Nous allons étudier la continuité de cette application pour d'autres topologies.

LEMME 8.1. — *Si* $A \in M$, *on a*

$$A^{\natural *} A^{\natural} \leqq (A^* A)^{\natural}.$$

Démonstration. — On a

$$0 \leqq (A - A^{\natural})^*(A - A^{\natural}) = (A^* - A^{\natural *})(A - A^{\natural}) = A^*A - A^{\natural *}A - A^*A^{\natural} + A^{\natural *}A^{\natural},$$

d'où, d'après le théorème 10, et en observant que $A^{\natural} \in M \cap M'$, $A^{\natural *} \in M \cap M'$:

$$\begin{aligned} 0 &\leqq (A^*A)^{\natural} - (A^{\natural *}A)^{\natural} - (A^*A^{\natural})^{\natural} + (A^{\natural *}A^{\natural})^{\natural} \\ &= (A^*A)^{\natural} - A^{\natural *}A^{\natural} - A^{*\natural}A^{\natural} + A^{\natural *}A^{\natural} = (A^*A)^{\natural} - A^{\natural *}A^{\natural}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 16. — *Soit* M *un facteur de classe finie. L'application* $A \to A^{\natural}$ *est continue pour la topologie faible* ([12]).

Démonstration. — D'après le lemme 6.20, il existe des vecteurs unitaires $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n}$ tels que, pour tout $A \in M_S$, avec $A \geqq 0$, et tout $U \in M_U$, on ait

$$\varphi(A) \leqq 2\varphi(UAU^{-1}),$$

où l'on a posé

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{2^n} (Ag_j, g_j) \qquad [\text{notons que } \varphi(A) \geqq 0 \text{ pour } A \geqq 0].$$

Soit donc $A \in M_S$, avec $A \geqq 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et soient $U_1, U_2, \ldots, U_p$ des éléments de M_U, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des éléments de $\mathbf{R}$, avec $\lambda_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, tels que

$$A^{\natural} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i A U_i^{-1} \leqq \varepsilon.\mathbf{1}.$$

On a

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i A U_i^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(U_i A U_i^{-1}) \leqq \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right) 2\varphi(A) = 2\varphi(A)$$

et

$$\varphi(A^{\natural}) - \varphi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i U_i A U_i^{-1}\right) \leqq \varphi(\varepsilon.\mathbf{1}),$$

d'où

$$\varphi(A^{\natural}) \leqq 2\varphi(A) + \varphi(\varepsilon.\mathbf{1}),$$

et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire

$$\varphi(A^{\natural}) \leqq 2\varphi(A).$$

([12]) Ce théorème est établi dans [4], mais notre méthode est beaucoup plus rapide. Cependant, nous n'obtenons pas une expression précise de la trace comme dans [4].

Si maintenant $A \in M$ est quelconque, on a, en utilisant le lemme 8.1,

$$\varphi(A^{\natural *} A^{\natural}) \leqq \varphi\big((A^* A)^{\natural}\big) \leqq 2\varphi(A^* A) \qquad \text{ou} \qquad \sum_{j=1}^{2^n} \| A^{\natural} g_j \|^2 \leqq 2 \sum_{j=1}^{2^n} \| A g_j \|^2.$$

Utilisons maintenant le fait que M est un facteur. On a $A^{\natural} = t(A).\mathbf{1}$, où $t(A)$ est un nombre complexe. L'inégalité précédente donne

$$| t(A) |^2 \leqq 2^{1-n} \sum_{j=1}^{2^n} \| A g_j \|^2.$$

En particulier, $A g_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, 2^n)$ entraîne $t(A) = 0$. Le système de vecteurs $(A g_1, A g_2, \ldots, A g_{2^n})$ peut, avec des conventions classiques, être considéré comme un vecteur d'un espace hilbertien auxiliaire, sa norme étant $\left(\sum_{j=1}^{2^n} \| A g_j \|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, et l'on voit que $t(A)$ est une fonctionnelle linéaire continue de ce vecteur. Par suite, il existe un système de vecteurs, $(h_1, h_2, \ldots, h_{2^n})$ tel que

$$t(A) = \sum_{j=1}^{2^n} (A g_j, h_j),$$

ce qui démontre le théorème.

Passons au cas où M est un anneau de classe finie quelconque. Construisons d'abord un exemple.

Supposons H séparable et de dimension infinie. Soient $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ des variétés linéaires fermées, deux à deux orthogonales, sous-tendant H, et telles que la dimension de V_n soit n. Soit M^0 l'ensemble des opérateurs de $\mathcal{B}$ réduits par les V_i. M^0 est un anneau d'opérateurs, dont le centre se compose des opérateurs $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_{V_i}$ (où les λ_i sont des nombres complexes bornés quelconques). Si $A \in M^0$, désignons par $t_i(A)$ la trace (au sens élémentaire) de l'opérateur induit par A dans V_i, divisée par i. Alors, l'application

$$A \to A^{\natural} = \sum_{i=1}^{\infty} t_i(A) P_{V_i}$$

a toutes les propriétés du théorème 10, de sorte que M^0 est un anneau de classe finie.

Lemme 8.2. — *Conservons les notations précédentes, et soit f un vecteur de* H *tel que* $\| P_{V_i} f \| \neq 0$ *pour tout i. Quels que soient les vecteurs $g_1, g_2, \ldots, g_n$ de* H *et le nombre réel* C, *il existe un* $A \in M^0$ *tel que* $A g_i = 0$ *pour* $1 \leqq i \leqq n$ *et tel que* $|(A^{\natural} f, f)| \geqq C$.

Démonstration. — Il existe une variété linéaire à 1 dimension $V \subset V_{n+1}$ qui est orthogonale aux g_i. Soit k un nombre complexe. On a $kP_V g_i = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n$. D'autre part $(kP_V)^\natural = k(n+1)^{-1} P_{V_{n+1}}$, donc

$$\left|\left((kP_V)^\natural f, f\right)\right| = |k|(n+1)^{-1}(P_{V_{n+1}} f; f) = |k|(n+1)^{-1} \| P_{V_{n+1}} f \|^2$$

qui est arbitrairement grand pour k bien choisi.

LEMME 8.3. — *Soit* M *un anneau de classe finie contenant* **1**. *Soit* $\mathfrak{S}$ *l'ensemble des* $h \in$ H *qui possèdent la propriété suivante : il existe des vecteurs* $h_1, h_2, \ldots, h_r$ *(dépendant de* h*) tels que* $\| A^\natural h \|^2 \leqq \sum_{i=1}^{r} \| A h_i \|^2$. $\mathfrak{S}$ *est partout dense dans* H.

Démonstration. — Il est immédiat que $\mathfrak{S}$ est une variété linéaire. Ensuite, si $h \in \mathfrak{S}$ et si $T \in (M \cap M')'$, on a $Th \in \mathfrak{S}$. En effet

$$\| A^\natural T h \| = \| T A^\natural h \| \leqq \| T \| . \| A^\natural h \|.$$

Donc $T(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}$ pour tout $T \in (M \cap M')'$, et par suite $[\mathfrak{S}] \eta M \cap M'$. Montrons que $[\mathfrak{S}] \neq H$ est absurde. Si $[\mathfrak{S}] \neq H$, il existe dans $H \ominus [\mathfrak{S}] \neq 0$ des vecteurs unitaires $g_1, g_2, \ldots, g_{2^n}$ tels que, pour tout $A \in M_S$, avec $A \geqq 0$, et tout $U \in M_U$, on ait

$$\sum_{i=1}^{2^n} (A g_i, g_i) \leqq 2 \sum_{i=1}^{2^n} (UAU^{-1} g_i, g_i)$$

(d'après le lemme 6.20 appliqué dans l'espace $H \ominus [\mathfrak{S}] \eta M \cap M'$). D'après le début de la démonstration du théorème 16, ceci entraîne, pour tout $A \in M$:

$$\sum_{i=1}^{2^n} \| A^\natural g_i \|^2 \leqq 2 \sum_{i=1}^{2^n} \| A g_i \|^2,$$

donc $g_i \in \mathfrak{S}$, ce qui est absurde puisque $g_i \in H \ominus [\mathfrak{S}]$.

THÉORÈME 17. — *Soit* M *un anneau de classe finie contenant* **1**.

α. *L'application* $A \to A^\natural$ *n'est continue ni pour la topologie faible, ni pour la topologie forte.*

β. *L'application* $A \to A^\natural$ *restreinte à la boule* $\| A \| \leqq 1$ *est continue pour la topologie forte* ([13]).

Démonstration. — α résulte aussitôt du lemme 8.2. Prouvons β. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ des vecteurs de H. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminons des éléments $\psi_1, \psi_2, \ldots,$

([13]) L'auteur ne sait pas s'il en est de même pour la topologie faible.

ψ_p de $\mathfrak{S}$ tels que $\|\psi_i - \varphi_i\| \leqq \varepsilon$ pour $1 \leqq i \leqq p$ (lemme 8.3). Puis, pour chaque $i \leqq p$, déterminons des vecteurs $\psi_i^1, \psi_i^2, \ldots, \psi_i^{r_i}$ tels que

$$\|A^\natural \psi_i\|^2 \leqq \sum_{k=1}^{r_i} \|A\psi_i^k\|^2.$$

On a, si $\|A^\natural\| \leqq 1$, (donc si $\|A\| \leqq 1$) :

$$\|A^\natural \varphi_i\|^2 \leqq (\|A^\natural \psi_i\| + \varepsilon)^2 \leqq 2\|A^\natural \psi_i\|^2 + 2\varepsilon^2 \leqq 2\sum_{k=1}^{r_i} \|A\psi_i^k\|^2 + 2\varepsilon^2,$$

donc

$$\|A^\natural \varphi_i\| \leqq 2\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

dès que

$$\sum_{k=1}^{r_i} \|A\psi_i^k\|^2 \leqq \varepsilon^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ceci démontre le théorème.

Enfin le théorème suivant complète d'une manière remarquable le théorème 12.

Théorème 18. — *Soit* M *un anneau de classe finie, et soit* $A \in M$. *L'ensemble convexe faiblement fermé* K *engendré par les* UAU^{-1} (*où* $U \in M_U$) *rencontre* $M \cap M'$ *en un point unique* (*qui est* $A^\natural$).

Démonstration. — Soit k l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1}. On a $\|B\| \leqq \|A\|$ pour tout $B \in k$, donc pour tout B appartenant à l'adhérence forte K′ de k. Or $B^\natural = A^\natural$ pour $B \in k$, donc, d'après le théorème 17, $B^\natural = A^\natural$ pour $B \in K'$ et par suite $K' \cap M \cap M'$ se réduit à $A^\natural$. Enfin, K′, ensemble convexe fortement fermé, est aussi faiblement fermé ([14]), donc $K' = K$.

NOTE I.

Problème. — *Le théorème 7 est valable pour tout anneau d'opérateurs. Est-il encore valable pour une algèbre auto-adjointe d'opérateurs qu'on suppose seulement uniformément fermée ?*

Nous allons montrer, par un exemple, que la réponse à cette question est négative.

Soit $\mathfrak{J}$ l'ensemble des opérateurs complètement continus de H. Soient E_1

([14]) Cf. *Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace hilbertien*, à paraître aux *Annals of Mathematics*.

et $E_2 = \mathbf{1} - E_1$ deux projecteurs tels que Δ_{E_1} et Δ_{E_2} aient une infinité de dimensions (observons que $E_1 E_2 = 0$). Considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des opérateurs de la forme $C_1 E_1 + C_2 E_2 + A$, où $A \in \mathcal{J}$, et où C_1, C_2 sont deux nombres complexes quelconques.

On a

$$\lambda(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A) = \lambda C_1 E_1 + \lambda C_2 E_2 + \lambda A;$$

$$(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A) + (C'_1 E_1 + C'_2 E_2 + A') = (C_1 + C'_1) E_1 + (C_2 + C'_2) E_2 + (A + A');$$

$$\begin{aligned}(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A)(C'_1 E_1 + C'_2 E_2 + A') = {} & C_1 C'_1 E_1 + C_2 C'_2 E_2 + A(C'_1 E_1 + C'_2 E_2) \\ & + (C_1 E_1 + C_2 E_2) A' + AA';\end{aligned}$$

$$(C_1 E_1 + C_2 E_2 + A)^* = \overline{C}_1 E_1 + \overline{C}_2 E_2 + A^*,$$

avec des notations évidentes. $\mathcal{J}$ étant un idéal bilatère auto-adjoint de $\mathcal{B}$, ces formules prouvent que $\mathcal{C}$ est une algèbre auto-adjointe. Comme $\mathcal{J}$ est uniformément fermé, et comme l'espace vectoriel $\mathcal{C}/\mathcal{J}$ est de dimension finie, $\mathcal{C}$ est uniformément fermée. Enfin, $\lambda.\mathbf{1} = \lambda E_1 + \lambda E_2 \in \mathcal{C}$ pour tout nombre complexe λ.

Les seuls opérateurs permutables à tous les opérateurs de rang fini sont les opérateurs $\lambda.\mathbf{1}$. *A fortiori*, le centre de $\mathcal{C}$ se compose des seuls opérateurs $\lambda\mathbf{1}$.

Soit maintenant

$$U = C_1 E_1 + C_2 E_2 + A,$$

où $A \in \mathcal{J}$, un opérateur unitaire de $\mathcal{C}$. On a

$$\mathbf{1} = UU^* = (C_1 E_1 + C_2 E_2 + A)(\overline{C}_1 E_1 + \overline{C}_2 E_2 + A^*) = C_1 \overline{C}_1 E_1 + C_2 \overline{C}_2 E_2 + B,$$

avec $B \in \mathcal{J}$. Comme Δ_{E_1} a une infinité de dimensions, il existe un vecteur $x \in \Delta_{E_1}$, avec $\|x\| = 1$, $\|Bx\| \leq \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est quelconque. D'où

$$|1 - C_1 \overline{C}_1| = \|x - C_1 \overline{C}_1 x\| = \|UU^* x - C_1 \overline{C}_1 x\| = \|C_1 \overline{C}_1 x + Bx - C_1 \overline{C}_1 x\| = \|Bx\| \leq \varepsilon,$$

donc $C_1 \overline{C}_1 = 1$. De même, $C_2 \overline{C}_2 = 1$.

Soient alors $U_1, U_2, \ldots, U_n$ des opérateurs unitaires de $\mathcal{C}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels avec $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$; on a

$$U_i = C_1^i E_1 + C_2^i E_2 + A_i,$$

avec

$$C_1^i \overline{C}_1^i = C_2^i \overline{C}_2^i = 1, \qquad A_i \in \mathcal{J} \qquad (1 \leq i \leq n).$$

D'où

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i (E_1 - E_2) U_i^{-1} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (C_1^i E_1 + C_2^i E_2 + A_i)(E_1 - E_2)(\overline{C}_1^i E_1 + \overline{C}_2^i E_2 + A_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (C_1^i \overline{C}_1^i E_1 - C_2^i \overline{C}_2^i E_2) + B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (E_1 - E_2) + B = E_1 - E_2 + B,\end{aligned}$$

où $B \in \mathcal{J}$. Or il est impossible qu'une suite d'opérateurs de cette forme tende vers un opérateur de la forme $\lambda.\mathbf{1}$. Car supposons

$$\| E_1 - E_2 + B - \lambda.\mathbf{1} \| \leqq \varepsilon.$$

Utilisant comme plus haut le fait que Δ_{E_1} a une infinité de dimensions et que $B \in \mathcal{J}$, on en déduirait que $|1 - \lambda| \leqq \varepsilon$. Opérant de même avec Δ_{E_2}, on trouverait $|-1 - \lambda| \leqq \varepsilon$. D'où absurdité pour ε assez petit.

NOTE II.

L'OSCILLATION D'UN OPÉRATEUR.

Soit M un anneau d'opérateurs quelconque, et soit $A \in M_S$. Posons

$$\omega_M(A) = \sup_{U \in M_U} \| A - UAU^{-1} \|,$$
$$\omega'_M(A) = \inf_{\Phi} \varpi(\Phi, A),$$

où Φ parcourt l'ensemble des partitions finies de H appartenant à $M \cap M'$.

THÉORÈME A. — *a*. $0 \leqq \omega_M(A) \leqq \omega_H(A)$.

b. *Si* M *est abélien*, $\omega_M(A) = 0$.

c. *Si* M *est un facteur*, $\omega_M(A) = \omega_H(A)$ (15).

Démonstration. — *a*. $\omega_M(A) \geqq 0$ est évident. D'autre part, pour tout $U \in M_U$ et tout $x \in H$ ($\|x\| = 1$), on a

$$((A - UAU^{-1})x, x) = (Ax, x) - (AU^{-1}x, U^{-1}x),$$

donc

$$M_H(A) - m_H(A) \geqq ((A - UAU^{-1})x, x) \geqq m_H(A) - M_H(A),$$

donc

$$\| A - UAU^{-1} \| \leqq \omega_H(A)$$
$$\omega_M(A) \leqq \omega_H(A).$$

b. est immédiat.

c. Si M est un facteur, toute partition de H appartenant à $M \cap M'$ se réduit à H, donc $\omega'_M(A) = \omega_H(A)$. Or, on va voir que $\omega'_M(A) = \omega_M(A)$.

THÉORÈME B. — $\omega_M(A) = \omega'_M(A)$.

Démonstration. — 1. Soient $A \in M_S$, $U \in M_U$, et $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition finie de H appartenant à $M \cap M'$. $\mathfrak{M}_i$ réduit A et U; A et U induisent dans $\mathfrak{M}_i$

(15) Les réciproques sont aussi exactes.

des opérateurs respectivement self-adjoints et unitaires. Le théorème A, *a*, appliqué dans l'espace $\mathfrak{M}_i$, donne

$$\|(A - UAU^{-1})P_{\mathfrak{M}_i}\| \leqq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A),$$

donc

$$\|A - UAU^{-1}\| = \max_{1 \leqq i \leqq n} \|(A - UAU^{-1})P_{\mathfrak{M}_i}\| \leqq \omega(\Phi, A)$$

quel que soit $U \in M_U$. Ainsi, $\omega_M(A) \leqq \omega(\Phi, A)$ quelle que soit Φ satisfaisant aux conditions indiquées, et par suite $\omega_M(A) \leqq \omega'_M(A)$. Si $\omega'_M(A) = 0$, le théorème est démontré. Supposons donc désormais $\omega'_M(A) > 0$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon < \frac{1}{2}\omega'_M(A)$. Soit $\Phi = (\mathfrak{M}_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une partition finie de H appartenant à $M \cap M'$ telle que

$$\omega'_M(A) \leqq \omega(\Phi, A) < \omega'_M(A) + \varepsilon. \tag{1}$$

En modifiant au besoin l'ordre des $\mathfrak{M}_i$, on peut supposer

$$\omega'_M(A) \leqq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A) < \omega'_M(A) + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq p \tag{2}$$

et

$$\omega_{\mathfrak{M}_i}(A) < \omega'_M(A) \qquad \text{pour} \quad p + 1 \leqq i \leqq n \tag{3}$$

$(1 \leqq p \leqq n)$. Raisonnons dans l'espace $\mathfrak{M}_i$, où $1 \leqq i \leqq p$. Soit $\mathfrak{M}_i^1$, $\mathfrak{M}_i^2$ deux variétés linéaires fermées orthogonales, avec

$$\mathfrak{M}_i^1 \eta M, \quad \mathfrak{M}_i^2 \eta M; \quad \mathfrak{M}_i^1 \subset \mathfrak{M}_i, \ \mathfrak{M}_i^2 \subset \mathfrak{M}_i$$

et

$$M_{\mathfrak{M}_i^1}(A) \leqq m_{\mathfrak{M}_i}(A) + \varepsilon, \tag{4}$$

$$m_{\mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i^1}(A) \geqq m_{\mathfrak{M}_i}(A) + \varepsilon, \tag{5}$$

$$m_{\mathfrak{M}_i^2}(A) \geqq M_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon, \tag{6}$$

$$M_{\mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i^2}(A) \geqq M_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon; \tag{7}$$

ce qui est possible d'après la théorie spectrale, et grâce au fait que $2\varepsilon < \omega_{\mathfrak{M}_i}(A)$.

Soit $\mathfrak{N}_i = [(\mathfrak{M}_i^2)^M] \eta M \cap M'$. On a $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}_i$. Soit $\mathfrak{N}'_i = \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{N}_i$.

Supposons d'abord $\mathfrak{N}_i$ orthogonale à $\mathfrak{M}_i^1$, ceci pour $1 \leqq i \leqq p$. Alors, nous considérons les variétés

$$\mathfrak{N}_i(1 \leqq i \leqq p); \qquad \mathfrak{N}'_i(1 \leqq i \leqq p); \qquad \mathfrak{M}_i(p + 1 \leqq i \leqq n).$$

Elles forment une partition finie $\Psi = (\mathfrak{P}_j)$ de H appartenant à $M \cap M'$, et l'on va montrer que $\omega(\Psi, A) < \omega'_M(A)$, ce qui sera absurde. Il suffit de prouver que $\omega_{\mathfrak{P}_j}(A) < \omega'_M(A)$ pour toute $\mathfrak{P}_j$. Or, ceci est vrai si $\mathfrak{P}_j = \mathfrak{M}_i$ avec $p + 1 \leqq i \leqq n$ d'après (3). On a $\mathfrak{M}_i^2 \subset \mathfrak{N}_i$, donc $\mathfrak{N}'_i \subset \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_i^2$, de sorte que, d'après (7), $\omega_{\mathfrak{N}'_i}(A) \leqq \omega_{\mathfrak{M}_i}(A) - \varepsilon < \omega'_M(A)$, d'après (2), pour $1 \leqq i \leqq p$.

Enfin, $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{M}_i \ominus \mathcal{M}_i^1$ d'après notre hypothèse actuelle, donc, d'après (5), $\omega_{\mathcal{N}_i}(A) \leqq \omega_{\mathcal{M}_i}(A) - \varepsilon < \omega'_M(A)$ pour $1 \leqq i \leqq p$. L'absurdité est ainsi établie.

Donc $\mathcal{N}_i$ est non orthogonale à $\mathcal{M}_i^1$ pour un i compris entre 1 et p, soit $i = 1$ pour fixer les idées. Donc il existe un $U' \in M_U$ tel que $U'(\mathcal{M}_1^2)$ soit non orthogonale à $\mathcal{M}_1^1$. On peut donc trouver des variétés différentes de zéro et en position p', soit $\overline{\mathcal{M}}_1$ et $\overline{\mathcal{M}}'_2$, contenues respectivement dans $\mathcal{M}_1^1$ et $U'(\mathcal{M}_1^2)$, appartenant à M. Il existe alors une symétrie $S \in M$ telle que $S(\overline{\mathcal{M}}'_2) = \overline{\mathcal{M}}_1$. Soit $U = SU'$, et soit $\overline{\mathcal{M}}_2 = U'^{-1}(\overline{\mathcal{M}}'_2) \subset \mathcal{M}_1^2$. On a $U(\overline{\mathcal{M}}_2) = \overline{\mathcal{M}}_1$. $\overline{\mathcal{M}}_1 \subset \mathcal{M}_1^1$, $\overline{\mathcal{M}}_2 \subset \mathcal{M}_1^2$.

Ceci posé, soit $x \in \overline{\mathcal{M}}_2$, avec $\|x\| = 1$. On a $Ux \in \overline{\mathcal{M}}_1$. Donc

$$(Ax, x) \geqq M_{\mathcal{M}_1}(A) - \varepsilon, \qquad \text{d'après (6)},$$
$$(AUx, Ux) \leqq m_{\mathcal{M}_1}(A) + \varepsilon, \qquad \text{d'après (4)},$$

donc

$$\begin{aligned}\|U^{-1}AU - A\| \geqq -((U^{-1}AU - A)x, x) &\geqq M_{\mathcal{M}_1}(A) - \varepsilon - m_{\mathcal{M}_1}(A) - \varepsilon = \omega_{\mathcal{M}_1}(A) - 2\varepsilon \\ &\geqq \omega'_M(A) - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

A fortiori

$$\omega_M(A) \geqq \omega'_M(A) - 2\varepsilon,$$

et, comme ε est arbitraire $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\omega'_M(A)\right)$,

$$\omega_M(A) \geqq \omega'_M(A).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Dixmier, *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert* [*Revue Scientifique* (*Revue Rose*), 86, 1948, p. 387-399].

[2] J. Dixmier, *Mesure de Haar et trace d'un opérateur* (*C. R. Ac. Sc.*, Paris, 228, 1949, p. 152-154).

[3] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* (*Ann. of Math.*, 37, 1936, p. 116-229).

[4] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators*, II (*Trans. Amer. Math. Soc.*, 41, 1937, p. 208-248).

[5] J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren* (*Math. Ann.*, 102, 1929, p. 370-427).

[6] J. von Neumann, *Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen* (*Comp. Math.*, 1, 1934, p. 106-114).

[7] J. von Neumann, *On rings of operators. Reduction theory* (*Ann. of Math.*, 50, 1949, p. 401-485).