

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

**Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de  
certains systèmes différentiels**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 65 (1948), p. 299-335

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1948\\_3\\_65\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65_299_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR  
L'EXISTENCE ET LA STABILITÉ  
DES  
SOLUTIONS PÉRIODIQUES  
DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

PAR M. JULES HAAG.

---

INTRODUCTION. — Dans un travail récent <sup>(1)</sup> j'ai exposé une théorie générale de la synchronisation d'un système à  $n$  degrés de liberté, en supposant que ce système constitue un oscillateur *linéaire*, c'est-à-dire que ses mouvements autonomes sont déterminés par des équations linéaires. Cette théorie reposait sur certains théorèmes concernant les équations différentielles, que j'avais préalablement établis <sup>(2)</sup>.

Or, il existe des oscillateurs *non linéaires*, c'est-à-dire dont les mouvements autonomes sont déterminés par des équations non linéaires. Parmi ces mouvements existe un mouvement périodique sinusoïdal (oscillateur *Abelé*) ou non sinusoïdal (oscillateur de *relaxation*). Je me suis proposé de reprendre la théorie générale de la synchronisation d'un système à plusieurs degrés de liberté, en m'affranchissant de l'hypothèse de la linéarité. Cela m'a nécessairement conduit à étendre les théorèmes généraux qui avaient servi de base à ma première théorie. C'est cette extension qui fait l'objet du présent Mémoire.

Je commence par étudier les systèmes différentiels *linéaires à coefficients périodiques*, d'abord sans seconds membres, puis avec seconds membres. J'utilise à cet effet ce que j'ai appelé les *décréments*, lesquels sont donnés par une équation algébrique.

---

<sup>(1)</sup> *Ann. Éc. Norm.*, (3), 64, p. 285 à 338.

<sup>(2)</sup> *Bull. Soc. math.*, (27), 70, p. 155 à 172; (2), 71, p. 1 à 14.

Je considère ensuite un système *non linéaire*, admettant une solution périodique connue. Je détermine les *solutions qui tendent asymptotiquement vers cette solution périodique*, ce qui me conduit aux *conditions de stabilité* de cette dernière.

J'ajoute ensuite aux seconds membres des équations précédentes des *fonctions perturbatrices* périodiques, précédées d'un facteur  $\lambda$ , positif et arbitrairement petit. Je démontre que si  $\lambda$  est assez petit, *le système perturbé admet une solution périodique*. Sa *stabilité* est déterminée par une équation algébrique d'ordre  $n$ , dont toutes les racines doivent avoir leur partie réelle négative.

Je considère ensuite un système analogue au précédent, mais dont la période autonome dépend d'un paramètre. *La période propre étant supposée assez voisine de la période des fonctions perturbatrices*, je démontre *l'existence d'un certain nombre de solutions admettant la seconde de ces périodes*.

J'examine ensuite le cas des *systèmes couplés*.

Dans le cas où l'intégrale générale du système non perturbé est périodique, on peut, par *variation des constantes*, se ramener au cas particulier étudié dans les Mémoires précités.

Dans un prochain travail, j'appliquerai ceci au problème général de la synchronisation.

#### 1. *Système linéaire et homogène.* — Soit le système

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^m p_{ij}(t)x_j \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

où les  $p_{ij}(t)$  sont des fonctions de période  $T$ , finies et continues <sup>(1)</sup> dans l'intervalle  $(0, T)$ . Dans un précédent travail (*loc. cit.*), j'ai étudié les solutions qui sont multipliées par un facteur constant  $S$  quand  $t$  augmente de  $T$ . Ce facteur  $S$  est donné par une équation algébrique de degré  $m$ . Dans le travail en question, j'ai supposé que les racines de cette équation étaient toutes distinctes. Mais, nous rencontrerons, dans ce qui va suivre, des cas de racines multiples. Nous allons donc reprendre la question dans toute sa généralité.

2. Soit  $\theta_j^i(t)$  un système de solutions fondamentales, l'indice  $j$  caractérisant chacune de ces solutions. L'intégrale générale est

$$(2) \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^m a_j \theta_j^i(t).$$

---

<sup>(1)</sup> On pourrait supposer qu'il existe des discontinuités finies pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles de  $t$ .

Cherchons une solution vérifiant l'identité

$$(3) \quad x_i(t + T) \equiv Sx_i(t).$$

Il faut et il suffit que l'on ait  $x_i(T) = Sx_i(0)$ , soit

$$(4) \quad \sum_{i=1}^m a_j [\theta_i^j(T) - S\theta_i^j(0)] = 0.$$

On doit donc avoir

$$(5) \quad D(S) \equiv \|\theta_1^1(T) - S\theta_1^1(0) \theta_1^2(T) - S\theta_1^2(0) \dots \theta_1^m(T) - S\theta_1^m(0)\| = 0.$$

Cette équation sera appelée *l'équation en S* du système (1).

3. On peut *la former directement*, sans qu'il soit nécessaire de connaître l'intégrale générale du système.

Supposons que l'on ait, pour une solution particulière,  $x_i(T) = Sx_i(0)$ . En intégrant (1) de 0 à T et posant  $x_i(0) = a_i$ , on obtient

$$(S - 1)a_i = \sum_j \int_0^T p_{ij}(t) x_j(t) dt.$$

Posons

$$\int_0^t p_{ij}(t) dt = q_{ij}^0(t).$$

En intégrant par parties et tenant compte de (1), il vient

$$(S - 1)a_i = S \left[ \sum_j a_j q_{ij}^0(T) \right] - \sum_i \sum_k \int_0^T q_{ik}^0(t) p_{kj}(t) x_j(t) dt.$$

Posons

$$\int_0^t \left[ \sum_k q_{ik}^0(t) p_{kj}(t) \right] dt = q_{ij}^1(t).$$

En répétant l'opération précédente, il vient

$$(S - 1)a_i = S \sum_j a_j [q_{ij}(T) - q_{ij}^1(T)] + \sum_k \sum_j \int_0^T q_{ik}^1(t) p_{kj}(t) x_j(t) dt.$$

En continuant indéfiniment, on obtient

$$(6) \quad (S - 1)a_i = S \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} a_j \right),$$

avec

$$(7) \quad a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q_{ij}^n(T).$$

La série du second membre est *absolument convergente*. En effet, appelons  $\mu$  une limite supérieure des  $|p_{ij}(t)|$ . On a

$$|q_{ij}^0(t)| < \mu t, \quad |q_{ij}^1(t)| < \frac{m\mu^2 t^2}{2}, \quad \dots, \quad |q_{ij}^n(t)| < \frac{m^n \mu^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

D'où résulte la propriété annoncée.

L'équation en  $S$  s'obtient maintenant en annulant le déterminant du système (6).

4. Revenons au système (4), où nous remplaçons  $S$  par une racine  $S_1$  de l'équation (5). Supposons que le déterminant principal soit d'ordre  $m-p$ . La solution générale est de la forme  $a_j = \sum_{k=1}^p B_j^k b_k$ , les  $b_k$  désignant des constantes arbitraires et les  $m$  formes linéaires  $a_j$  étant linéairement indépendantes. En portant dans (2) et ordonnant par rapport aux  $b_k$ , on obtient

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^p b_k y_i^k(t),$$

les  $k$  intégrales particulières  $y_i^k(t)$  étant linéairement indépendantes (<sup>1</sup>). On peut donc leur faire jouer le rôle des  $\theta_i^k(t)$  d'indices  $k \leq p$ . On a

$$y_i^j(T) = S_1 y_i^j(0) \quad \text{pour } j \leq p.$$

Le déterminant (5) admet visiblement le facteur  $(S_1 - S)^p$ . Ce facteur étant supprimé, il reste l'équation de degré  $m-p$

$$(8) \quad \|y_i^1(0) y_i^2(0) \dots y_i^p(0) \theta_i^{p+1}(T) - S \theta_i^{p+1}(0) \dots \theta_i^m(T) - S \theta_i^m(0)\| = 0.$$

5. *Supposons qu'elle admette encore la racine  $S_1$ .* — Pour  $S = S_1$ , l'identité (3) ne peut plus être vérifiée par une solution indépendante des précédentes. Cherchons alors à vérifier une identité de la forme

$$(9) \quad x_i(t+T) = S_1 x_i(t) + \sum_{j=1}^p c_j y_i^j(t).$$

Nous posons

$$x_i(t) = \sum_{j=p+1}^m a_j \theta_i^j(t)$$

---

(<sup>1</sup>) En effet, on a  $y_i^k(t) = \sum_{j=1}^m B_j^k \theta_i^j(t)$ . Si  $\sum_{k=1}^p c_k y_i^k(t) \equiv 0$ , on a  $\sum_{k=1}^p c_k B_j^k = 0$ , ce qui est impossible, d'après l'indépendance des formes linéaires  $a_j$ .

et nous obtenons les équations

$$(10) \quad \sum_{i=p+1}^m a_j [\theta_i^j(T) - S_1 \theta_i^j(0)] - \sum_{j=1}^p c_j y_i^j(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

C'est un système linéaire et homogène par rapport aux  $m$  inconnues  $a_j, c_j$ . Son déterminant est nul, d'après (8). Mais, il n'y a plus de solution pour laquelle les  $c_j$  seraient tous nuls (n° 4).

Prenons une solution quelconque, que nous appelons  $y_i^{p+1}(t)$ . Comme on peut toujours faire une substitution linéaire sur les  $y_i^j(t)$  d'indice  $j \leq p$ , nous pouvons supposer  $c_j = 0$  pour  $j < p$  et  $c_p = 1$ . Nous avons ainsi

$$y_i^{p+1}(t+T) = S_1 y_i^{p+1}(t) + y_i^p(t).$$

La solution  $y_i^{p+1}(t)$  peut être substituée à  $\theta_i^{p+1}(t)$ ; moyennant quoi l'équation (8) devient, en supprimant le facteur  $S_1 - S$ ,

$$\| y_i^1(0) \dots y_i^{p+1}(0) \theta_i^{p+2}(T) - S \theta_i^{p+2}(0) \dots \theta_i^m(T) - S \theta_i^m(0) \| = 0.$$

Si elle admet encore la racine  $S_1$ , nous répétons les opérations précédentes et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne la solution  $y_i^q(t)$ .

La racine  $S_1$  est multiple d'ordre  $q$  et l'on a les identités

$$(11) \quad \begin{cases} y_i^j(t+T) = S_1 y_i^j(t) & \text{pour } 1 \leq j \leq p; \\ y_i^j(t+T) = S_1 y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t) & \text{pour } p+1 \leq j \leq q. \end{cases}$$

6. Les  $\theta_i^j(t)$  d'indice  $j \leq q$  sont maintenant remplacés par les  $y_i^j(t)$ . L'équation (5), divisée par  $(S_1 - S)^q$ , a la forme (8), où  $p$  est remplacé par  $q$ . Elle n'admet plus la racine  $S_1$ .

Soit  $S_2$  une de ses racines. Pour  $S = S_2$ , le système (4) devient

$$(S_1 - S_2) \left[ \sum_{j=1}^q a_j y_i^j(0) \right] + \sum_{j=p+1}^q a_j y_i^{j-1}(0) + \sum_{i=q+1}^m a_j [\theta_i^j(T) - S_2 \theta_i^j(0)] = 0.$$

Il n'admet aucune solution pour laquelle les  $a_j$  d'indice  $j > q$  seraient tous nuls, car, s'il en était ainsi, les  $y_i^j(0)$  d'indice  $j \leq q$  ne seraient pas linéairement indépendants. Si le déterminant principal est d'ordre  $m - r$ , il admet  $r$  solutions linéairement indépendantes, auxquelles correspondent  $r$  solutions  $y_i^j(t)$ , d'indice  $j = q+1, q+2, \dots, q+r$ , linéairement indépendantes et que nous substituons aux  $\theta_i^j(t)$  de même indice  $j$ .

L'équation (5), divisée par  $(S_1 - S)^q (S_2 - S)^r$ , prend la forme (8),  $p$  étant remplacé par  $q+r$ . Si elle admet encore la racine  $S_2$ , nous cherchons une solution vérifiant (9), où  $S_1$  est remplacé par  $S_2$  et où l'indice  $j$  varie de  $q+1$  à  $q+r$ . Nous posons

$$x_i(t) = \sum_h a_h \theta_i^h(t),$$

l'indice  $h$  prenant toutes les valeurs autres que  $q+1, q+2, \dots, q+r$ . En raisonnant comme au n° 5, nous obtenons un nouveau groupe de solutions vérifiant des identités de la forme (11),  $S_1$  étant remplacé par  $S_2$ ,  $p$  par  $p'=q+r$  et  $q$  par  $q' \geq p'$ . Et ainsi de suite.

7. En résumé, nous avons obtenu un système fondamental  $y_i^j(t)$  constitué par un certain nombre de groupes correspondant aux racines distinctes de l'équation en  $S$ . Les fonctions de chaque groupe se répartissent en deux classes. Les fonctions de la première classe vérifient l'identité

$$(12) \quad y_i^j(t+T) = S_j y_i^j(t).$$

Les fonctions de la deuxième classe vérifient l'identité

$$(13) \quad y_i^j(t+T) = S_j y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t).$$

Elles sont rangées dans un ordre déterminé. Nous appellerons rang  $r_j$  d'une telle fonction son numéro d'ordre compté à partir de la fonction de plus petit indice et rang complémentaire  $r'_j$  la différence entre ce rang et le nombre  $\omega_j$  des fonctions de la seconde classe, lequel sera appelé le nombre caractéristique du groupe.

Le nombre total des fonctions d'un groupe égale l'ordre de multiplicité de la racine correspondante de l'équation en  $S$ .

Si le nombre caractéristique est nul, c'est-à-dire si la seconde classe n'existe pas, nous dirons que le groupe est un groupe simple.

Si  $S_j$  est racine simple, il n'y a qu'une fonction dans le groupe; elle est de première classe; le groupe est simple.

Les  $S_j$  seront appelés les *décroissements*. Nous poserons

$$(14) \quad |S_j| = \sigma_j, \quad \alpha_j = \frac{1}{T} \log \sigma_j.$$

Les  $\alpha_j$  seront les *décroissements logarithmiques*.

Nous poserons aussi

$$(15) \quad H(t) = \| y_1^j(t) y_2^j(t) \dots y_m^j(t) \|$$

et nous supposons  $H(0) = 1$ . On sait que

$$(16) \quad H(t) = e^{\Delta(t)}, \quad \Delta(t) = \sum_{i=1}^m \int_0^t p_{ii}(t) dt.$$

Nous appellerons  $H_i^j(t)$  le quotient par  $H(t)$  du mineur correspondant à l'élément  $y_i^j$ . Ces  $H_i^j(t)$  vérifient le système différentiel

$$(17) \quad \frac{dH_i}{dt} = - \sum_{k=1}^m p_{ki}(t) H_k.$$

En effet, on a, pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\sum_{i=1}^m H_i y_i^j = 0 \text{ ou } 1.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^m \frac{dH_i}{dt} y_i^j + \sum_i \sum_k H_i p_{ik} y_k^j = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^m y_i^j \left( \frac{dH_i}{dt} + \sum_k p_{ki} H_k \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Le déterminant  $\|y_i^j\|$  étant  $\neq 0$ , on en déduit (17).

8. *Identités diverses.* — Si, dans le déterminant  $H(t)$ , on remplace  $t$  par  $t + T$ , chaque élément  $y_i^j(t)$  est remplacé par  $S_j y_i^j(t)$  ou par  $S_j y_i^j(t) + y_i^{j-1}(t)$ . On peut manifestement, sans changer  $H(t)$ , laisser tomber successivement, en procédant de gauche à droite, les termes tels que  $y_i^{j-1}(t)$ . On en déduit que  $\frac{H(t+T)}{H(t)}$  égale le produit des racines  $S_j$ , chacune étant répétée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. D'après (16), on conclut que le produit des racines de l'équation en  $S$  vaut  $e^{\Delta(T)}$ , ce qui est d'ailleurs évident sur l'équation (5).

9. Des formules (12) et (13), on peut tirer l'expression générale de  $y_i^j(t + nT)$ ,  $n$  désignant un entier quelconque. On a, pour le premier groupe par exemple,

$$(18) \quad \begin{cases} y_i^j(t + nT) = S_1^n y_i^j(t), & \text{si } 1 \leq j \leq p, \\ y_i^j(t + nT) = \sum_{k=0}^{j-p} C_n^k S_1^{n-k} y_i^{j-k}(t), & \text{si } p \leq j \leq q. \end{cases}$$

Dans la deuxième formule,  $C_n^k$  est un coefficient du binôme; il doit être remplacé par zéro si  $k > n$ , par 1 si  $k = 0$  ou  $n$ .

La première formule est évidente d'après (12). Pour démontrer la seconde, il suffit de vérifier la formule de récurrence obtenue en remplaçant  $t$  par  $t + (n-1)T$  dans la formule (13), ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{i-p} (C_n^k - C_{n-1}^k - C_{n-1}^{k-1}) S_1^{n-k} y_i^{j-k}(t) = 0.$$

Pour  $n > k$ , la parenthèse est nulle, d'après une formule élémentaire bien connue. Pour  $n = k$ , le deuxième terme de la parenthèse est nul, les deux autres valent un. Pour  $n < k$ , les trois termes sont nuls.



## 10. On a l'identité

$$\sum_{j=1}^m H_i^j(t+nT) y_i^j(t+nT) = \sum_{j=1}^m H_i^j(t) y_i^j(t).$$

En utilisant les formules (18), on obtient, pour le premier groupe,

$$\sum_{j=1}^p H_i^j(t+nT) S_1^n y_i^j(t) + \sum_{j=p+1}^q H_i^j(t+nT) \left[ \sum_{k=0}^{j-p} C_n^k S_1^{n-k} y_i^{j-k}(t) \right] = \sum_{j=1}^q H_i^j(t) y_i^j(t).$$

Comme les  $H_i^j$  sont indépendants des  $y_i^j$ , ceci doit avoir lieu quels que soient les  $y_i^j(t)$ . On en déduit les formules suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} H_i^j(t+nT) = \frac{H_i^j(t)}{S_1^n}, & \text{si } 1 \leq j \leq p-1, \\ H_i^j(t+nT) = \sum_{k=0}^{q-j} C_{n+k-1}^k \frac{H_i^{j+k}(t)}{S_1^{n+k}} (-1)^k, & \text{si } p \leq j \leq q. \end{cases}$$

Pour les vérifier, substituons dans l'identité ci-dessus. Les termes  $\sum_{j=1}^{p-1} H_i^j y_i^j$  disparaissent immédiatement et il reste

$$\sum_{j=p}^q \left[ \sum_{k=0}^{q-j} C_{n+k-1}^k (-1)^k \frac{H_i^{j+k}}{S_1^{n+k}} \right] \left[ \sum_{h=0}^{j-p} C_n^h S_1^{n-h} y_i^{j-h} \right] = \sum_{r=p}^q H_i^r y_i^r$$

ou

$$\sum_{i=p}^q \sum_{k=0}^{q-j} \sum_{h=0}^{j-p} C_{n+k-1}^k C_n^h (-1)^k S_1^{n-h-k} H_i^{j+k} y_i^{j-h} = \sum_{r=p}^q H_i^r y_i^r.$$

Posons, au premier membre,  $j+k=s$  et  $j-h=r$ ; il vient

$$\sum_{i=p}^q \sum_{s=j}^q \sum_{r=p}^j C_{n+s-j-1}^{s-j} C_n^{j-r} (-1)^{s-j} S_1^{r-s} H_i^s y_i^r = \sum_{r=p}^q H_i^r y_i^r.$$

Si  $s > r$ , le coefficient de  $H_i^s y_i^r$  doit être nul, soit, en remarquant que  $p \leq r \leq j \leq s \leq q$ ,

$$\sum_{i=r}^s C_{n+s-j-1}^{s-j} C_n^{j-r} (-1)^{s-j} = 0.$$

Pour  $s=r$ , on doit avoir

$$\sum_{i=r}^r C_{n+r-j-1}^{r-j} C_n^{j-r} (-1)^{r-j} = 1.$$

Dans cette dernière formule, on a nécessairement  $j=r$  et la vérification est évidente. La première s'écrit, en posant  $s=r=u>0$ ,

$$\sum_{k=0}^u C_{n+k-1}^k C_n^{u-k} (-1)^k = 0.$$

On la vérifie en annulant le coefficient de  $x^u$  dans le produit des deux développements

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k (-1)^k x^k, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^{u-k} x^{u-k}.$$

11. Posons  $t=nT+\theta$ ,  $0 \leq \theta < T$ . Les formules (18) et (19) nous montrent que, pour  $t$  infiniment grand, on a *asymptotiquement*, avec la notation (14),

$$(20) \quad \begin{cases} |y_i^j(t)| = \frac{e^{\alpha_j t} t^{r_j}}{T_{r_j}(r_j)!} |y_i^{j-r_j}(\theta)| e^{-(\theta+r_j T)\alpha_j} \leq M e^{\alpha_j t} t^{r_j}, \\ |H_i^j(t)| = \frac{e^{-\alpha_j t} t^{r_j'}}{T_{r_j'}(r_j')!} |H_i^{j+r_j'}(\theta)| e^{(\theta-r_j' T)\alpha_j} \leq M' e^{-\alpha_j t} t^{r_j'}. \end{cases}$$

Dans ces formules,  $r_j$  et  $r_j'$  doivent être remplacés par zéro, si  $r_j < 0$ ;  $M$  et  $M'$  ont une signification évidente.

12. *Système linéaire non homogène.* — Considérons le système

$$(21) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^m p_{ij}(t) x_j + f_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

où les  $f_i$  sont des fonctions continues. Son intégrale générale est

$$(22) \quad x_i(t) = \sum_{i=1}^m y_i^j(t) Y_j(t),$$

avec

$$(23) \quad Y_j(t) = a_j + A_j(t, f)$$

et

$$(24) \quad A_j(t, f) = \sum_{k=1}^m \int_0^t H_k^j(t) f_k(t) dt.$$

De (22) on déduit

$$(25) \quad Y_j(t) = \sum_{i=1}^m H_i^j(t) x_i(t).$$

13. *Conditions d'existence d'une solution périodique.* — Si les  $x_i(t)$  admettent la période  $T$ , les équations (21) montrent que les  $f_i(t)$  admettent aussi cette période.

Réciproquement, si les  $f_i(t)$  admettent la période  $T$ , pour que la solution (22) admette aussi cette période, il faut et il suffit que l'on ait  $x_i(T) = x_i(0)$  ou, d'après (22), (23) et (11),

$$\sum_{j=1}^{p-1} [a_j(S_1 - 1) + S_1 A_j(T)] y_j^i(0) + \sum_{j=p}^{q-1} [a_j(S_1 - 1) + S_1 A_j(T) + a_{j+1} + A_{j+1}(T)] y_j^i(0) + [a_q(S_1 - 1) + S_1 A_q(T)] y_q^i(0) + \dots = 0, (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ces équations constituent un système linéaire et homogène par rapport aux crochets. Le déterminant est  $H(0) = 1$ ; donc, tous les crochets doivent être nuls. D'où l'on tire, en supposant  $S_1 \neq 1$ ,

$$(26) \quad \begin{cases} a_j = \frac{S_1}{1 - S_1} A_j(T) & \text{pour } 1 \leq j \leq p-1 \text{ et } j = q, \\ a_j = \frac{S_1 A_j(T) + a_{j+1} + A_{j+1}(T)}{1 - S_1} & \text{pour } p \leq j \leq q-1 \end{cases}$$

et les formules analogues dans tous les groupes.

On en conclut que si aucun décrement n'est égal à un, il y a une solution périodique et une seule.

Si  $S_1 = 1$ , il faut, pour le premier groupe,

$$(27) \quad A_j(T) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p-1 \text{ et } j = q,$$

$$(28) \quad a_j = -A_j(T) - A_{j-1}(T) \quad \text{pour } p+1 \leq j \leq q.$$

Les  $f_i(t)$  doivent vérifier les  $p$  conditions (27) et l'on a alors une infinité de solutions périodiques, dépendant des  $p$  constantes arbitraires  $a_1, a_2, \dots, a_p$

$$(29) \quad x_i = \sum_{\alpha=1}^p a_\alpha y_i^\alpha(t) + B_i(t, f).$$

Les  $B_i(t, f)$  sont des fonctions déterminées, résultant de ce qui précède. Observons que les  $f_k$  interviennent linéairement dans ces fonctions; on a donc

$$(30) \quad B_i(t, f) - B_i(t, f') = B_i(t, f - f').$$

De plus, si  $|f_k| < \bar{f}$  quel que soit  $k$ , on a

$$(31) \quad |B_i(t, f)| < A \bar{f},$$

$A$  désignant une constante positive déterminée, égale, à un facteur constant près, au maximum des  $|y_j^i(t) H_k^j(t)|$  pour  $0 \leq t \leq T$ .

14. Solutions tendant vers zéro pour  $t = +\infty$ . — Supposons que l'on ait, quels que soient  $k$  et  $t > 0$ ,

$$(32) \quad |f_k(t)| < C e^{2\beta t},$$

où  $C$  désigne une constante positive et  $\beta = h\alpha$ ,  $0 < h < \frac{1}{2}$ ,  $\alpha$  désignant le plus grand des  $\alpha_j$  négatifs.

Convenons de numérotter les solutions fondamentales  $y_i^j(t)$  de telle manière que l'on ait

$$(33) \quad \alpha_j < 0 \quad \text{pour } j \leq p, \quad \alpha_j \geq 0 \quad \text{pour } j > p.$$

D'après (20), on a, pour  $j \leq p$ ,

$$(34) \quad |A_j(t)| < m M' C \int_0^t e^{(2\beta - \alpha_j)t} t^{r_j'} dt.$$

Si  $j > p$ , l'intégrale  $A_j(+\infty)$  a un sens et l'on a

$$(35) \quad |A_j(+\infty) - A_j(t)| < m M' C \int_t^{+\infty} e^{(2\beta - \alpha_j)t} t^{r_j'} dt.$$

15. Cela posé, choisissons arbitrairement les  $p$  constantes  $b_1, b_2, \dots, b_p$ , de module  $< \rho$ . Puis, prenons

$$(36) \quad a_j = b_j \quad \text{si } j \leq p, \quad a_j = -A_j(+\infty) \quad \text{si } j > p.$$

Des formules (22), (23) et des inégalités (34), (35), on déduit

$$(37) \quad |x_i(t)| e^{-\beta t} < M \rho \left[ \sum_{j=1}^p e^{(\alpha_j - \beta)t} t^{r_j} \right] + m M M' C \left[ \sum_{j=1}^p X_j + \sum_{j=p+1}^m X_j' \right],$$

en posant

$$(38) \quad \begin{cases} X_j = e^{(\alpha_j - \beta)t} t^{r_j} \int_0^t e^{(2\beta - \alpha_j)t} t^{r_j'} dt & \text{pour } j \leq p, \\ X_j' = e^{(\alpha_j - \beta)t} t^{r_j} \int_t^{+\infty} e^{(2\beta - \alpha_j)t} t^{r_j'} dt & \text{pour } j > p. \end{cases}$$

Pour  $j \leq p$ , on a  $\alpha_j - \beta \leq \alpha(1 - h) < 0$ . Le maximum de  $e^{(\alpha_j - \beta)t} t^{r_j}$ , pour  $0 < t < +\infty$ , est

$$(39) \quad M_j = \frac{e^{-r_j} r_j^{r_j}}{(\beta - \alpha_j)^{r_j}}.$$

Posons ensuite

$$(40) \quad N_j = \max \text{ de } X_j, \quad N_j' = \max \text{ de } X_j'.$$

Ces maxima sont *finis*. En effet, pour  $j \leq p$ , on a

$$2\beta - \alpha_j \geq \alpha(2h - 1) > 0.$$

Pour  $t = +\infty$ , la valeur asymptotique de  $X_j$  est  $\frac{e^{\beta t} t^{\omega_j}}{2\beta - \alpha_j}$ , dont la limite est zéro. Pour  $j > p$ , on a  $2\beta - \alpha_j < 0$ ; la valeur asymptotique de  $X_j'$  est  $\frac{e^{\beta t} t^{\omega_j}}{\alpha_j - 2\beta}$ , dont la limite est encore zéro.

Il résulte de tout ceci que l'on a, quel que soit  $t > 0$ ,

$$(41) \quad |x_i(t)| < (\rho P + CP') e^{\beta t},$$

avec

$$(42) \quad P = M \left( \sum_{j=1}^p M_j \right), \quad P' = m M M' \left( \sum_{j=1}^p N_j + \sum_{j=p+1}^m N'_j \right).$$

On en conclut que *la solution considérée tend vers zéro pour  $t = +\infty$* . Elle dépend des  $p$  constantes arbitraires  $b_j$ . Nous la désignerons par la notation  $x_i(t) = \Phi_i(f, b)$ . On a évidemment

$$(43) \quad \Phi_i(f, b) - \Phi_i(g, b) = \Phi_i(f - g, 0).$$

16. Les constantes  $M_j, N_j, N'_j$  dépendent uniquement des nombres entiers  $r_j, r'_j$ , des décroissements logarithmiques  $\alpha_j$  et du choix de la constante  $h$ . Si tous les décroissements sont éloignés de  $un$ , ces constantes ont évidemment une valeur finie. Mais, nous rencontrerons plus loin le cas où certains décroissements ont un module  $< 1$  et infiniment voisin de  $un$ . Examinons l'ordre de grandeur de  $P$  et de  $P'$  dans cette hypothèse.

Posons  $\alpha = -\lambda$ ,  $\lambda$  étant infiniment voisin de  $+0$ . Si  $\sigma_j$  est infiniment voisin de  $un$  et si  $j \leq p$ , on a

$$\alpha_j = -k\lambda, \quad k \geq 1.$$

La formule (39) montre immédiatement que  $M_j = O(\lambda^{-r_j})$ . Comme  $r_j \leq \omega_j$ , il s'ensuit que si  $\omega$  désigne le plus grand des  $\omega_j$  correspondant à des décroissements ayant un module  $< 1$  et en différant par  $O(\lambda)$ , on a

$$(44) \quad P = O(\lambda^{-\omega}).$$

Cherchons l'ordre de grandeur de  $N_j$ , dans la même hypothèse que ci-dessus. Posons

$$(2\beta - \alpha_j)t = (k - 2h)\lambda t = x \quad \text{et} \quad \frac{k - h}{k - 2h} = n.$$

On a

$$N_j = [(k - 2h)\lambda]^{-\omega_j - 1} \times e^{-nx} x^{r_j} \int_0^x e^x x^{r'_j} dx.$$

Le rapport  $n$  étant  $> 1$ , la fonction de  $x$  constituée par le second facteur tend vers zéro pour  $x = +\infty$ . Elle admet donc un maximum fini et l'on a

$$N_j = O(\lambda^{-\omega_j - 1}).$$

Supposons maintenant  $\alpha_j = k\lambda$  et posons

$$(\alpha_j - 2\beta)t = (k + 2h)\lambda t = x \quad \text{et} \quad \frac{k + h}{k + 2h} = n.$$

On a

$$X'_j = [(k + 2h)\lambda]^{-\omega_j-1} \times e^{nx} x^{r_j} \int_x^{+\infty} e^{-x} x^{r'_j} dx.$$

Le rapport  $n$  étant  $< 1$ , la fonction de  $x$  constituée par le second facteur tend vers zéro pour  $x = +\infty$ . Elle admet donc un maximum fini et l'on a

$$N'_j = O(\lambda^{-\omega_j-1}).$$

Il résulte de cette discussion que si l'on appelle  $\omega'$  le plus grand des  $\omega_j$  correspondant à des décrets ayant un module  $\geq 1$  et en différenciant par  $o(\lambda)$ , on a

$$(45) \quad P' = O(\lambda^{-\omega'-1}).$$

Dans le cas où les groupes correspondant à des décrets ayant un module différent de un par  $o(\lambda)$  sont tous des groupes simples, on a

$$(46) \quad P = O(1), \quad P' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

17. *Système non linéaire.* — Considérons le système

$$(47) \quad \frac{dz_i}{dt} = f_i(z, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- 1° Les fonctions  $f_i$  admettent la période  $T$  par rapport à  $t$ .
- 2° Le système admet une solution  $Z_i(t)$  de période  $T$ .
- 3° Dans le domaine  $(D)$  défini par

$$(48) \quad |z_i - Z_i(t)| < R,$$

et quel que soit  $t$ , les  $f_i$ , considérés comme fonctions des  $z_j$ , sont continus et admettent des dérivées premières et secondes continues  $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ ,  $f_{ijk} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial z_j \partial z_k}$ .

Toutes ces fonctions et dérivées sont également continues par rapport à  $t$ .

Nous appellerons  $p_{ij}(t)$  et  $p_{ijk}(t)$  les fonctions périodiques obtenues en remplaçant les  $z$  par les  $Z(t)$  dans  $f_{ij}$  et  $f_{ijk}$ . Le système (1) sera dit *système linéaire associé* au système (47).

Pour faciliter le langage, nous ferons jouer à  $t$  le rôle du temps et nous considérerons les  $z_i$  comme les coordonnées cartésiennes d'un point  $(z)$  de l'espace à  $m$  dimensions. La courbe décrite par ce point quand les  $z_i$  vérifient (47) et que  $t$  croît de 0 à  $+\infty$  sera dite une *trajectoire du système* (47).

Appelons  $(z_0)$  la position de  $(z)$  pour  $t = 0$  et domaine  $(D_0)$  le domaine défini par

$$(49) \quad |z_i(0) - Z_i(0)| < R_0.$$

Nous dirons que la solution  $(Z)$  est *stable* si l'on peut choisir  $R_0$  assez petit pour que, *quelle que soit la position de  $(z_0)$  dans  $(D_0)$* , les différences  $z_i(t) - Z_i(t)$  vérifient (48) quel que soit  $t > 0$  et tendent vers zéro pour  $t = +\infty$ .

#### 18. Posons

$$(50) \quad z_i = Z_i(t) + x_i, \quad F_i(x, t) = f_i(Z + x, t) - f_i(Z, t) - \sum p_{ij}(t) x_j.$$

Les équations (47) s'écrivent

$$(51) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum p_{ij}(t) x_j + F_i(x, t).$$

Si les points  $(z)$  et  $(z')$  appartiennent au domaine  $(D)$ , on a, en vertu des hypothèses faites au n° 17,

$$(52) \quad |F_i(x, t)| < KR^2, \quad |F_i(x, t) - F_i(x', t)| < K'R \left[ \sum_j |x_j - x'_j| \right],$$

$K$  et  $K'$  désignant des constantes positives proportionnelles au maximum des modules des dérivées secondes  $f_{ijk}$  dans le domaine  $(D)$ .

19. *Solutions tendant vers la solution périodique pour  $t = +\infty$ .* — Adoptons, pour le système associé, les notations du n° 14, de sorte que  $p$  désignera le nombre des *décroissements* ayant un module  $< 1$ , chacun d'eux étant répété un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Choisissons arbitrairement les constantes  $b_1, b_2, \dots, b_p$ , de module  $< \rho$ . Nous allons leur faire correspondre une solution du système (47) par la méthode des *approximations successives*.

Soit  $x_i^n(t)$  la  $n^{\text{ième}}$  approximation. Posons  $F_i(x^n, t) = F_i^n(t)$ . Nous déterminons nos approximations successives par les formules

$$(53) \quad x_i^n(t) = \Phi_i(F^{n-1}, b), \quad x_i^0 = \Phi_i(0, b)$$

avec la notation du n° 15.

20. Nous allons démontrer que l'on a, quel que soit  $n$ ,

$$(54) \quad |x_i^n(t)| < \rho B_n e^{\beta t}, \quad \rho B_n < R,$$

les  $B_n$  désignant des constantes positives provisoirement indéterminées et  $\beta$  le nombre introduit au n° 14.

D'après (41), on peut prendre  $B_0 = P$ .

Admettons maintenant l'inégalité (54) au rang  $n - 1$ . D'après (52), on a

$$|F_i^{n-1}(t)| < K\rho^2 B_{n-1}^2 e^{2\beta t}.$$

Cette inégalité est de la forme (32), avec  $C = K\rho^2 B_{n-1}^2$ . On a donc, d'après (41),

$$|x_i^n(t)| < (\rho P + P'K\rho^2 B_{n-1}^2) e^{\beta t},$$

et l'on peut prendre

$$(55) \quad B_n = P + Q\rho B_{n-1}^2, \quad Q = P'K.$$

Si  $B_n$  tend vers une limite  $B$ , pour  $n = +\infty$ , cette limite est donnée par l'équation du second degré

$$(56) \quad \varphi(B) \equiv Q\rho B^2 - B + P = 0,$$

laquelle a des racines si

$$(57) \quad \rho < \frac{1}{4PQ}.$$

Je dis que  $B_n > B_{n-1}$ . Ceci revient à  $\varphi(B_{n-1}) > 0$ . Cette condition est manifestement remplie pour  $n = 1$ . Admettons  $B_n > B_{n-1}$  et démontrons  $B_{n+1} > B_n$ , soit, d'après (55),

$$P + Q\rho B_n^2 > P + Q\rho B_{n-1}^2,$$

ce qui résulte de  $B_n > B_{n-1}$ .

Ceci nous apprend du même coup que  $B_n$  est extérieur aux racines de (56).

Je dis que  $B_n$  est inférieur à la plus petite racine. Il suffit de démontrer que  $B_n < \frac{1}{2Q\rho}$ . Pour  $n = 0$ , ceci revient à  $\rho < \frac{1}{2PQ}$ , conséquence de (57). Admettons la propriété pour  $B_n$ . On a

$$B_{n+1} = P + Q\rho B_n^2 < P + \frac{Q\rho}{4Q^2\rho^2} = P + \frac{1}{4Q\rho} < \frac{1}{2Q\rho},$$

d'après (57). Donc, la propriété est vérifiée pour  $B_{n+1}$ .

Il résulte de ce raisonnement que  $B_n$  tend, en croissant, vers la plus petite racine  $B$  de l'équation (56). On en conclut que l'on, à quel que soit  $n$ ,

$$(58) \quad |x_i^n(t)| < \rho B e^{\beta t}.$$

Reste à vérifier  $\rho B < R$ . Pour cela, il suffit que  $\varphi\left(\frac{R}{\rho}\right) < 0$ , soit

$$(59) \quad \rho < \frac{R(1 - QR)}{P},$$

ce qui exige

$$(60) \quad R < \frac{1}{Q}.$$

Si cette dernière condition n'est pas remplie,  $\frac{R}{\rho}$  est  $> \frac{1}{\rho Q}$ , c'est-à-dire plus grand que la somme des racines de l'équation (56), donc *a fortiori* plus grand que la plus petite racine  $B$ .

21. Occupons-nous maintenant de la *convergence des approximations*. Posons

$$u_i^n(t) = x_i^n(t) - x_i^{n-1}(t),$$



et admettons que l'on ait, quel que soit  $t$ ,

$$(61) \quad |u_i^n(t)| < U_n e^{\beta t},$$

$U_n$  désignant une constante positive. D'après l'identité (43), on a

$$u_i^{n+1} = \Phi_i(F^n - F^{n-1}, 0).$$

Or, la deuxième inégalité (52) nous donne, en tenant compte de (58) et (61),

$$|F_k^n(t) - F_k^{n-1}(t)| < mK'B\rho U_n e^{2\beta t}.$$

Cette inégalité est de la forme (32), avec  $C = mK'B\rho U_n$ . On a donc, d'après (41),

$$|u_i^{n+1}(t)| < mP'K'B\rho U_n e^{\beta t},$$

et l'on peut prendre

$$U_{n+1} = mP'K'B\rho U_n.$$

Les séries  $u_i^n(t)$  sont absolument et uniformément convergentes si  $B < \frac{1}{mP'K'\rho}$ .

Il suffit pour cela que  $\varphi\left(\frac{1}{mP'K'\rho}\right)$  soit  $< 0$ , ce qui exige

$$(62) \quad \rho < \frac{mP'K' - Q}{Pm^2P^{1/2}K^{1/2}},$$

sous réserve que

$$(63) \quad Q < mP'K'.$$

Si cette dernière inégalité n'est pas vérifiée,  $\frac{1}{mP'K'\rho}$  est  $> \frac{1}{Q\rho}$ , c'est-à-dire que la somme des racines de (56), donc *a fortiori* plus grand que la plus petite racine B.

22. En définitive, si  $\rho$  est assez petit pour que les inégalités (57) et éventuellement (59) et (62) soient toutes vérifiées, les fonctions  $x_i^n(t)$  tendent uniformément, pour  $n = \infty$ , vers des fonctions déterminées  $x_i(t)$ . Ces fonctions vérifient le système (51). En effet, la différence  $F_i(x, t) - F_i(x^n, t)$  tend uniformément vers zéro, d'après la deuxième inégalité (52). Donc, la dérivée  $\frac{dx_i^n}{dt}$  tend uniformément vers  $\sum_i p_{ij}(t)x_j + F_i(x, t)$ . Il en résulte que cette limite est la dérivée  $\frac{dx_i}{dt}$ . Donc, l'équation (51) est vérifiée.

Nous avons formé une solution du système (51) qui, d'après (58), tend vers zéro pour  $t = +\infty$ . En remontant aux  $z_i$  par les formules (50), nous obtenons une solution du système (47) qui tend vers la solution périodique (Z) pour  $t = +\infty$ , quelles que soient les  $p$  constantes arbitraires  $b_i$ , pourvu qu'elles soient assez petites.

Pour ces solutions, on a  $a_j = b_j$  si  $j \leq p$ ; si  $j > p$ ,  $a_j$  est la limite de  $-A_j(F^n)$  pour  $n = \infty$ ; c'est une fonction déterminée des  $b_j$ . La position initiale du point

( $z$ ) étant donnée, d'après (22), par les formules

$$z_i(0) = Z_i(0) + \sum_{j=1}^p b_j y_j^i(0) + \sum_{j=p+1}^m a_j y_j^i(0),$$

on voit que l'ensemble ( $D'_0$ ) de ces points constitue une *multiplicité à  $p$  dimensions*, que nous appellerons *domaine restreint de stabilité*. La question se pose de savoir s'il existe d'autres solutions que les précédentes tendant vers la solution périodique pour  $t = +\infty$ . Cela est probablement impossible; mais je n'ai pu en donner une démonstration rigoureuse.

23. *Condition de stabilité.* — Pour que la solution ( $Z$ ) soit stable, il faut et il suffit que le domaine ( $D'_0$ ) soit un domaine ( $D_0$ ) à  $m$  dimensions, c'est-à-dire que l'on ait  $p = m$ . Donc,

THÉORÈME. — *La condition suffisante et probablement nécessaire de stabilité est que tous les décrets aient un module  $< 1$ .*

Le domaine ( $D_0$ ) est un domaine *linéaire*, dont chaque point est à coup sûr le point de départ d'une trajectoire tendant vers la trajectoire périodique. Mais, le véritable domaine de stabilité ( $\Delta_0$ ) est plus étendu. Il comprend certainement ( $D_0$ ); mais, nous ne connaissons pas sa frontière exacte.

Dans le cas particulier où le module maximum des décrets est de la forme  $1 - \lambda$ ,  $\lambda$  étant infiniment petit positif, on a  $\alpha = O(\lambda)$ ; les constantes  $P'$  et  $Q$  sont infiniment grandes. D'après (57),  $\rho$  est infiniment petit. Donc, si le module maximum des décrets de module  $< 1$  est infiniment voisin de un, le domaine restreint de stabilité ( $D'_0$ ) est infiniment petit dans toutes ses dimensions.

Faisant toujours l'hypothèse précédente, supposons que les groupes correspondant aux décrets de module infiniment voisin de un soient tous des groupes simples. D'après (46), la constante  $P$  est finie et  $P' = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ . Supposons maintenant que les fonctions  $f_i$  du n° 17 soient multipliées par  $\lambda$ ; de sorte que les constantes  $K$  et  $K'$  de (52) valent  $O(\lambda)$ . La constante  $Q$  du n° 20 est finie, donc aussi les seconds membres de (57), (59) et (60). Il en est de même de  $P'K'$ , donc du second membre de (62). On en conclut que, dans ce cas, le domaine de stabilité reste fini quand  $\lambda$  tend vers zéro.

24. *Cas où il existe une infinité de solutions périodiques.* — Supposons que le système (47) admette une infinité de solutions périodiques  $Z_i(t, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  dépendant des paramètres  $\mu_h$ , en nombre  $n \leq m$ . Nous supposons que les fonctions  $Z_i$  sont indépendantes, c'est-à-dire que  $n$  quelconques d'entre elles ne sont liées par aucune relation indépendante des  $\mu_i$  et vérifiée quel que soit  $t$ . Ceci revient à dire qu'aucun des jacobiens formés avec les  $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_h}$  n'est identiquement nul.

On a

$$\frac{\partial Z_i}{\partial t} = f_i(Z, t).$$

Dérivons par rapport à  $\mu_h$  :

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial \mu_h \partial t} = \sum_{j=1}^m f_{ij}(Z, t) \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_h}.$$

Ceci exprime que les fonctions  $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_h}$  vérifient le système linéaire associé. Celui-ci admet donc  $n$  solutions périodiques. Ces solutions sont linéairement indépendantes, sauf peut-être pour certaines valeurs exceptionnelles des  $\mu_h$ . En effet, si elles ne l'étaient pas, tous les jacobiens ci-dessus mentionnés seraient identiquement nuls, contrairement à l'hypothèse.

On en conclut (n° 7) que l'équation en  $S$  admet la racine  $S = 1$  comme racine multiple d'ordre  $n$  au moins.

Donnons aux  $\mu_h$  des valeurs numériques déterminées et supposons que, pour ces valeurs, le nombre des  $\sigma_i < 1$  soit  $p$ . Comme il y a au moins  $n$  décroissements égaux à  $un$ , on a nécessairement  $p \leq m - n$ . Vous savons (n° 22) qu'il existe un domaine restreint de stabilité ( $D_0$ ) à  $p$  dimensions, tel que toute solution issue d'un point de ce domaine tende, pour  $t = +\infty$ , vers la solution périodique envisagée.

Faisons maintenant varier arbitrairement les  $\mu_h$  à l'intérieur des limites pour lesquelles les hypothèses précédentes sont valables. Le domaine ( $D_0$ ) engendre alors un domaine ( $D_0$ ) à  $n + p$  dimensions. Par tout point  $M_0$  de ce domaine passe un domaine ( $D_0$ ) et un seul <sup>(1)</sup>, auquel correspondent des valeurs déterminées des  $\mu_h$  et par conséquent une solution périodique déterminée ( $Z$ ) du système (47). Soit  $P_0$  la position du point ( $Z$ ) pour  $t = 0$ . Si l'on fait partir, au temps zéro,  $M$  de  $M_0$  et  $P$  de  $P_0$ , la distance  $MP$  tend vers zéro pour  $t = +\infty$ . Par conséquent, la solution issue de tout point de ( $D_0$ ) tend vers une solution périodique.

Pour que ( $D_0$ ) soit un domaine à  $m$  dimensions, il faut et il suffit que l'on ait  $p = m - n$ . Nous dirons alors que le faisceau des solutions périodiques est stable et que ( $D_0$ ) est son domaine de stabilité. On a donc le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que le décroissement  $S = 1$  soit racine multiple d'ordre  $n$  de l'équation en  $S$  et que les autres décroissements aient un module  $< 1$ .

25. Cas où les fonctions  $f_i$  sont indépendantes de  $t$ . — Dans ce cas, s'il existe une solution périodique  $Z_i(t)$ , il en existe une infinité  $Z_i(t + \mu)$ ,  $\mu$  désignant une constante arbitraire. Quand on fait varier  $\mu$ , la trajectoire fermée correspon-

<sup>(1)</sup> Si le champ de variation des  $\mu_h$  est assez restreint.

dante reste fixe; mais le point de départ  $P_0$ , de coordonnées  $Z_i(\mu)$ , varie sur cette trajectoire.

On se trouve dans un cas particulier du cas examiné au n° 24, la solution périodique du système associé étant  $Z_i(t + \mu)$ . Pour que la trajectoire soit stable, il faut et il suffit que les  $m - 1$  décrets autres que un aient un module  $< 1$ .

26. *Introduction des fonctions perturbatrices.* — Considérons maintenant le système

$$(64) \quad \frac{dz_i}{dt} = f_i(z, t) + \lambda g_i(z, t).$$

Les fonctions  $f_i$  sont les mêmes qu'au n° 17 et seront appelées *fonctions principales*. Le facteur  $\lambda$  est un facteur positif *arbitrairement petit*. Les fonctions  $g_i$  seront appelées les *fonctions perturbatrices*. Le système obtenu pour  $\lambda = 0$  sera appelé le *système principal*. Nous supposons, comme au n° 24, qu'il admet une *solution périodique principale*  $Z(t, \mu)$ , dépendant des  $n$  paramètres  $\mu_\alpha$ . Nous admettons que cette solution est stable <sup>(1)</sup>. Il s'ensuit (n° 24) que la racine  $S = 1$  est racine multiple d'ordre  $n$  de l'équation en  $S$  et que les autres décrets ont un module  $< 1$ . Les solutions fondamentales du système associé étant toujours désignées par la notation  $y_i^j(t)$ , convenons que  $y_i^\alpha(t) = \frac{\partial Z_i}{\partial \mu_\alpha}$  pour  $1 \leq \alpha \leq n$ . Nous appellerons  $Y$  une limite supérieure des  $|y_i^j(t)|$  pour  $0 \leq t \leq T$ .

Rappelons (n° 13) que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système linéaire avec seconds membres ait une solution périodique sont  $A_j(T, f) = 0$  pour  $j \leq n$ . Si elles sont remplies, la solution périodique la plus générale est

$$(65) \quad x_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha y_i^\alpha(t) + B_i(t, f),$$

les  $c_\alpha$  désignant des constantes arbitraires.

Nous appellerons toujours domaine (D) le domaine défini par (48), lorsque les  $\mu_\alpha$  sont assujettis à rester eux-mêmes dans un certain domaine.

Nous supposons que les  $f_i$  admettent, dans (D), des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre inclus et nous appellerons  $M_p$  une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre  $p$ . De même, nous supposons que les  $g_i$  admettent, dans (D), des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre inclus et nous appellerons  $N_p$  une limite supérieure des modules des dérivées d'ordre  $p$ .

Toutes ces conventions étant admises, nous nous proposons de *chercher les solutions périodiques du système (64) voisines des solutions périodiques princi-*

(1) Cette condition n'est pas indispensable pour l'existence de la solution périodique. Mais elle l'est pour sa stabilité.

pales  $Z(t, \mu)$  et d'en reconnaître la stabilité. Nous pourrions donc, dans ce qui va suivre, supposer  $0 \leq t \leq T$ .

27. Recherche des solutions périodiques. — Posons

$$(66) \quad z_i = Z_i(t, \mu) + \lambda x_i.$$

L'équation (64) devient

$$(67) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_j p_{ij}(t) x_j + g_i(Z, t) + \lambda F_i(x, t, \lambda)$$

avec

$$(68) \quad F_i = G_i(x, t) + \lambda J_i(x, t, \lambda),$$

$$(69) \quad G_i(x, t) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk}(t) x_j x_k + \sum_j q_{ij}(t) x_j,$$

$$(70) \quad J_i = \frac{1}{\lambda^3} \left[ f_i(Z + \lambda x, t) - f_i(Z, t) - \lambda \sum_j p_{ij} x_j - \frac{\lambda^2}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk} x_j x_k \right] \\ + \frac{1}{\lambda^2} \left[ g_i(Z + \lambda x, t) - g_i(Z, t) - \lambda \sum_j q_{ij} x_j \right].$$

Les  $p_{ijk}$  et  $q_{ij}$  désignent les résultats de la substitution des  $Z$  aux  $z$  dans les dérivées partielles  $f_{ijk}$  et  $g_{ij}$ .

Imposons aux  $x_i$  de vérifier les conditions  $|x_i| < R'$ , le nombre positif  $R'$  devant être précisé ultérieurement. Les conditions (48) s'écrivent alors

$$(71) \quad \lambda R' < R.$$

De (69) on déduit

$$(72) \quad |G_i| < m R' \left( \frac{m R'}{2} M_2 + N_1 \right), \quad \left| \frac{\partial G_i}{\partial x_j} \right| < m R' M_2 + N_1.$$

De (70) on déduit

$$J_i = \frac{1}{6} \sum_j \sum_k \sum_h f_{ijkh}(Z + \lambda \theta x, t) x_h + \frac{1}{2} \sum_j \sum_h g_{ijh}(Z + \lambda \theta' x, t) x_h,$$

$\theta$  et  $\theta'$  étant compris entre zéro et un. D'où

$$(73) \quad |J_i| < m R' (M_3 + N_2).$$

Puis

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\lambda^2} \left[ f_{ij}(Z + \lambda x, t) - p_{ij} - \lambda \sum_k p_{ijk} x_k \right] + \frac{1}{\lambda} [g_{ij}(Z + \lambda x, t) - q_{ij}] \\ = \frac{1}{2} \sum_k \sum_h f_{ijkh}(Z + \lambda \theta x, t) x_h + \sum_h g_{ijh}(Z + \lambda \theta' x, t) x_h.$$

D'où

$$(74) \quad \left| \frac{\partial J_i}{\partial x_j} \right| < m R' (M_3 + N_2).$$

28. Pour que les  $z$  soient périodiques, il faut et il suffit que les  $x$  le soient, c'est-à-dire que l'on ait, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$A_i[T, g(Z, t)] + \lambda A_i(T, F) = 0.$$

Si  $\lambda$  tend vers zéro, on a, à la limite,

$$(75) \quad A_i[T, g(Z, t)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Moyennant quoi l'équation ci-dessus devient

$$(76) \quad A_i(T, F) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les équations (75) contiennent les paramètres  $\mu_\alpha$ , car il en est ainsi des  $p_{ij}$  et des  $Z$ . Nous les appellerons les *équations en  $\mu$*  et nous supposons qu'elles admettent une solution, que nous substituons aux  $\mu_\alpha$ , restés jusqu'à présent indéterminés.

29. Nous allons maintenant *construire une solution périodique* du système (67), en appliquant la méthode des *approximations successives*.

La  $p^{\text{ième}}$  approximation  $x_i^p(t)$  sera définie par la condition d'être périodique et de vérifier les équations (67) quand on y remplace les  $F_i$  par

$$F_i^{p-1}(t, \lambda) = F_i(x^{p-1}, t, \lambda) = G_i^{p-1} + \lambda J_i^{p-1}.$$

De plus, nous prenons  $x_i^0(t) = 0$ .

Supposons que les  $x_i^{p-1}(t)$  vérifient (76). Les  $x_i^p(t)$  sont donnés par (65), soit

$$(77) \quad x_i^p(t) = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^p y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t) + \lambda \theta_i^p(t),$$

en posant

$$(78) \quad \varphi_i(t) = B_i[t, g(Z, t)],$$

$$(79) \quad \theta_i^p(t) = B_i(t, F^{p-1}) = B_i(t, G^{p-1}) + \lambda B_i(t, J^{p-1}).$$

On a

$$(80) \quad |\varphi_i| < AN_0, \quad |\theta_i^p| < A m R' \left[ \frac{m R'}{2} M_2 + N_1 + \lambda(M_3 + N_2) \right] = \Theta.$$

Nous déterminons les  $n$  constantes  $c_\alpha^p$  par les conditions

$$(81) \quad A_i(T, F^p) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui sont nécessaires pour que les  $x_i^{p+1}(t)$  puissent être périodiques.

30. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$(82) \quad \xi_i^p = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha^p y_i^\alpha(t) + \varphi_i(t),$$

de sorte que  $x_i^p = \xi_i^p + \lambda \theta_i^p$ . On peut écrire

$$G_i^p = G_i(\xi^p, t) + \lambda P_i(\xi^p, \theta^p),$$

avec

$$(83) \quad P_i = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk} (\xi_j \theta_k + \xi_k \theta_j + \lambda \theta_j \theta_k) + \sum_j q_{ij} \theta_j.$$

L'équation (76) devient

$$(84) \quad A_i[T, G(\xi^p, t)] = -\lambda A_i(T, P^p + J^p) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A première vue, le premier membre semble être un polynôme du second degré en  $c_\alpha^p$ . Mais, en réalité, il n'est que du *premier degré*. Le coefficient de  $c_\alpha^p c_\beta^p$  dans  $G_i(\xi^p, t)$  est

$$K_i(t) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk}(t) y_j^\alpha(t) y_k^\beta(t) = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk}(t) \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_\alpha} \frac{\partial Z_k}{\partial \mu_\beta}.$$

Je dis que  $A_i(T, K) = 0$ .

En effet, considérons la solution périodique  $Z_i(t, \mu + \lambda \nu)$  du système principal, les  $\nu_\alpha$  désignant des constantes arbitraires. On peut écrire (67), en y remplaçant  $g_i$  par zéro et les  $x_j$  par

$$x_j = \frac{1}{\lambda} [Z_j(t, \mu + \lambda \nu) - Z_j(t, \mu)] = \sum_\alpha \frac{\partial Z_j}{\partial \mu_\alpha} \nu_\alpha + O(\lambda).$$

Avec ces  $x_j$ , les conditions (76) sont nécessairement vérifiées, quels que soient  $\lambda$  et les  $\nu_\alpha$ . Or, si  $\lambda$  tend vers zéro, le coefficient de  $\nu_\alpha \nu_\beta$  dans  $G_i$  a pour limite  $K_i(t)$ ; on a donc bien  $A_i(T, K) = 0$ , comme nous l'avons annoncé (1).

(1) On peut aussi faire une vérification directe. Posons

$$\sum_{k=1}^m H_k^i p_{kjh} = P_{jh}^i.$$

Il faut prouver que  $\int_0^T \left( \sum_j \sum_h P_{jh}^i y_j^\alpha y_h^\beta \right) dt = 0$ . En dérivant  $\frac{\partial Z_k}{\partial t} = f_k$ , on a

$$\frac{\partial^2 y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta \partial t} = \frac{\partial^2 Z_k}{\partial \mu_\alpha \partial \mu_\beta \partial t} = \sum_j \sum_h p_{kjh} y_j^\alpha y_h^\beta + \sum_j p_{kj} \frac{\partial y_j^\alpha}{\partial \mu_\beta}.$$

D'où

$$X = \sum_j \sum_h P_{jh}^i y_j^\alpha y_h^\beta = \sum_k H_k^i \left( \frac{\partial^2 y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta \partial t} - \sum_j p_{kj} \frac{\partial y_j^\alpha}{\partial \mu_\beta} \right),$$

$$\int_0^T X dt = \left[ \sum_k H_k^i \frac{\partial y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta} \right]_0^T - \int_0^T \left[ \sum_k \sum_j \frac{\partial y_j^\alpha}{\partial \mu_\beta} \left( \frac{dH_k^i}{dt} + \sum_k p_{kj} H_k^i \right) \right] dt.$$

L'intégrale du second membre est nulle, d'après (17). D'autre part, les fonctions  $\frac{\partial y_k^\alpha}{\partial \mu_\beta}$  sont périodiques. D'après (19), il en est de même des  $H_k^i$ , puisque  $i \leq n$  et que le groupe correspondant à la racine  $S = 1$  est un groupe simple. Donc, le terme intégré est également nul.

31. L'équation (84) se réduit à

$$\sum_{\alpha=1}^n C_i^\alpha c_\alpha^p = \rho_i,$$

avec

$$C_i^\alpha = \sum_{h=1}^m \int_0^T H_h^i \left[ \sum_{j,k} p_{hjk} (y_j^\alpha \varphi_k + y_k^\alpha \varphi_j) + \sum_j q_{ij} y_j^\alpha \right] dt,$$

$$\rho_i = -L_i - \lambda A_i(T, P^p + J^p),$$

$$L_i = \sum_{h=1}^m \int_0^T H_h^i \left[ \sum_{j,k} p_{hjk} \varphi_j \varphi_k + \sum_j q_{ij} \varphi_j \right] dt.$$

Écartons le cas exceptionnel où le déterminant  $\|C_i^\alpha\|$  serait nul. En résolvant le système linéaire ci-dessus, nous obtenons

$$(85) \quad c_\alpha^p = \gamma_\alpha + \lambda Q_\alpha^p,$$

avec

$$\gamma_\alpha = \sum_{i=1}^n E_\alpha^i L_i, \quad Q_\alpha^p = \sum_{i=1}^n E_\alpha^i A_i(T, P^p + J^p).$$

Les  $E_\alpha^i$  sont des coefficients constants, résultant des formules de Cramer. Les  $\gamma_\alpha$  sont également des constantes connues. Quant aux  $Q_\alpha^p$ , ils contiennent les inconnues  $c_\beta^p$  par l'intermédiaire des  $x_j^p$ .

D'après (83), on a

$$\frac{\partial P_i^p}{\partial c_\beta^p} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k p_{ijk} (y_j^\beta \varphi_k + y_k^\beta \varphi_j).$$

D'où, d'après (80),

$$\left| \frac{\partial A_i(T, P^p)}{\partial c_\beta^p} \right| < A^2 m^3 M_3 YR' \left[ \frac{mR'}{2} M_2 + N_1 + \lambda(M_3 + N_2) \right].$$

Puis

$$\frac{\partial J_i^p}{\partial c_\beta^p} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial J_i}{\partial x_k} y_k^\beta.$$

D'où, d'après (74),

$$\left| \frac{\partial A_i(T, J^p)}{\partial c_\beta^p} \right| < A m^2 YR' (M_3 + N_2).$$

Si l'on appelle  $E$  le plus grand des  $|E_\alpha^i|$ , on a donc

$$(86) \quad \left| \frac{\partial Q_\alpha^p}{\partial c_\beta^p} \right| < E n A m^2 YR' \left[ A m M_3 \left( \frac{mR'}{2} M_2 + N_1 + \lambda M_3 + \lambda N_2 \right) + M_3 + N_2 \right] = Q.$$

De plus, les dérivées  $\frac{\partial Q_\alpha^p}{\partial c_\beta^p}$  sont des fonctions continues des  $c_\beta^p$ . Dès lors, on peut appliquer le *théorème des fonctions implicites* au système (84).



32. Utilisons la démonstration de ce théorème par la méthode des approximations successives <sup>(1)</sup>. Imposons aux  $c_\alpha^p$  la condition d'avoir un module  $< C$ . On a, d'après (83),

$$|P_i^p| < m^2 M_2 \Theta \left( n Y C + A N_0 + \frac{\lambda}{2} \Theta \right) + m N_1 \Theta = P.$$

En multipliant le second membre par A, on a une limite supérieure de  $|A_i(T, P^p)|$ . D'autre part, on a, d'après (73),

$$|A_i(T, J^p)| < A m R'(M_3 + N_2).$$

Donc,

$$|Q_\alpha| < n E A [P + m R'(M_3 + N_2)].$$

Appelons  $\gamma$  le plus grand des  $|\gamma_\alpha|$ ; la condition  $|c_\alpha^p| < C$  est entraînée par

$$\gamma + \lambda n E A m \left[ R'(M_3 + N_2) + m M_2 \Theta \left( n Y C + A N_0 + \frac{\lambda}{2} \Theta \right) + N_1 \Theta \right] < C$$

ou

$$(87) \quad C(1 - \lambda n^2 m^2 E A M_2 Y \Theta) > \gamma + \lambda n m E A \left[ R'(M_3 + N_2) + m M_2 \Theta \left( A N_0 + \frac{\lambda}{2} \Theta \right) + N_1 \Theta \right],$$

ce qui exige

$$(88) \quad \lambda n^2 m^2 E A M_2 Y \Theta < 1.$$

Ces conditions étant remplies, la convergence des approximations est assurée si l'on a

$$(89) \quad \lambda Q < 1.$$

Le système (85) admet alors une solution fonction continue de  $\lambda$  et telle que  $|c_\alpha^p| < C$ ; d'où  $|x_i^p| < n Y C + A N_0 + \lambda \Theta$ . La condition  $|x_i^p| < R'$  est donc assurée si l'on a

$$(90) \quad n Y C + A N_0 + \lambda \Theta < R'.$$

33. Examinons maintenant la convergence des  $x_i^p, c_\alpha^p$ . Posons

$$u_i^p = x_i^p - x_i^{p-1}, \quad v_\alpha^p = c_\alpha^p - c_\alpha^{p-1}$$

et supposons  $|u_i^p| < U_p$  et  $|v_\alpha^p| < V_p$ . On a

$$u_i^{p+1} = \sum_{\alpha=1}^n v_\alpha^{p+1} \gamma_i^\alpha(t) + \lambda (\theta_i^{p+1} - \theta_i^p).$$

Or,

$$\theta_i^{p+1} - \theta_i^p = B_i(t, F^p - F^{p-1}).$$

---

(1) Cf. VALIRON, *Théorie des fonctions*, n° 122.

Les fonctions  $F_k$  ont des dérivées premières continues par rapport aux  $x_j$ . D'après (68), (72) et (74), leurs modules sont bornés par

$$(91) \quad \alpha = mR'M_2 + N_1 + \lambda mR'(M_3 + N_2);$$

on a donc

$$|F_k^p - F_k^{p-1}| < \alpha U_p.$$

D'où

$$|\theta_i^{p+1} - \theta_i^p| < A\alpha U_p.$$

Et l'on peut prendre

$$(92) \quad U_{p+1} = nYV_{p+1} + \lambda A\alpha U_p.$$

La formule (85) nous donne  $\varphi_\alpha^{p+1} = \lambda(Q_\alpha^{p+1} - Q_\alpha^p)$ . Or,

$$|P_i^{p+1} - P_i^p| < \sum_{\beta=1}^n \left| \frac{\partial P_i}{\partial \epsilon_\beta} \right| V_{p+1} + \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right| A\alpha U_p.$$

On a

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial \epsilon_\beta} \right| < m^2 M_2 Y \Theta.$$

Puis

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = \sum_k p_{ijk}(z_k + \lambda \theta_k) + q_{ij};$$

d'où

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right| < m M_2 R' + N_1.$$

Donc,

$$|P_i^{p+1} - P_i^p| < nm^2 M_2 Y \Theta V_{p+1} + m(m M_2 R' + N_1) A\alpha U_p.$$

Puis, d'après (74),

$$|J_i^{p+1} - J_i^p| < m^2 R'(M_3 + N_2) U_{p+1}.$$

On peut donc prendre

$$(93) \quad V_{p+1} = \lambda(bV_{p+1} + cU_p + dU_{p+1}),$$

avec

$$(94) \quad b = Anm^2 M_2 Y \Theta, \quad c = mA^2 a(m M_2 R' + N_1), \quad d = Am^2 R'(M_3 + N_2).$$

De (92) et (93), on tire

$$U_{p+1} = \lambda U_p \frac{Aa(1 - \lambda b) + ncY}{1 - \lambda b - \lambda dnY} < \lambda U_p \frac{Aa + ncY}{1 - \lambda b - \lambda dnY}.$$

La convergence uniforme est assurée si l'on a

$$(95) \quad \lambda(Aa + ncY + b + dnY) < 1.$$

34. En définitive, le système (64) admet certainement une solution périodique si les inégalités (71), (87), (88), (89), (90), (95) sont toutes vérifiées.

D'après (87),  $C$  doit être  $> \gamma$ ; prenons  $C = 2\gamma$ . Puis  $R' = AN_0 + 3nY\gamma$ . Les inégalités (87) et (90) deviennent

$$(96) \quad \lambda nmEA \left[ nmM_2 Y \Theta + R'(M_3 + N_2) + (mM_2 AN_0 + N_1) \Theta + \frac{\lambda}{2} mM_2 \Theta^2 \right] < \gamma.$$

$$(97) \quad \lambda \Theta < nY\gamma.$$

Le nombre  $\lambda$  doit maintenant vérifier les inégalités (71), (88), (89), (95), (96), (97). Il est évident qu'il suffit pour cela de prendre  $\lambda$  assez petit. Donc,

**THÉORÈME.** — *Le système (64) admet certainement une solution périodique si  $\lambda$  est inférieur à une certaine limite non nulle  $\lambda_1$ .*

La démonstration précédente nous donne le moyen de calculer cette solution avec une approximation théoriquement illimitée. Si l'on s'en tient à la *première approximation*, on a

$$(98) \quad x_i(t) = \sum_{\alpha=1}^n \gamma_{\alpha} y_i^{\alpha}(t) + \varphi_i(t),$$

les  $\varphi_i$  étant donnés par (78) et les  $\gamma_{\alpha}$  par le système linéaire

$$(99) \quad A_i[T, G(\xi, t)] = 0, \quad \xi_k = \sum_{\alpha=1}^n \gamma_{\alpha} y_k^{\alpha} + \varphi_k.$$

**35. Stabilité.** — Pour que la solution périodique soit stable, il faut et il suffit (n° 23) que les décréments du système associé à (64) aient tous leur module  $< 1$ . Ce système s'écrit

$$(100) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_j r_{ij}(t) y_j,$$

avec

$$r_{ij}(t) = f_{ij}(Z + \lambda x, t) + \lambda g_{ij}(Z + \lambda x, t),$$

les  $x_k$  étant les fonctions périodiques précédemment calculées. Cette formule s'écrit

$$r_{ij}(t) = p_{ij}(t) + \lambda s_{ij}(t) + O(\lambda^2),$$

avec

$$(101) \quad s_{ij}(t) = \sum_k p_{ijk}(t) x_k(t) + q_{ij}(t),$$

les  $x_k(t)$  étant réduits à la première approximation, donnée par (98).

Pour  $\lambda = 0$ , l'un des décréments  $S_1 = 1$ ; les autres ont un module  $< 1$ .

Comme les  $r_{ij}(t)$  sont des fonctions continues de  $\lambda$ , il en est de même des coefficients de l'équation en  $S$ , d'après les formules (7) et la convergence uniforme des  $a_{ij}$ . Il s'ensuit que, pour  $\lambda$  très petit, on a  $n$  décréments voisins

de  $un$ , soit  $1 + \lambda\sigma_h$ , et  $m-n$  décrets voisins des autres  $S_j$ , donc de module  $< 1$ , si  $\lambda$  est assez petit.

Or, si  $\sigma_h = \alpha_h + i\beta_h$ , on a

$$|1 + \lambda\sigma_h|^2 = 1 + 2\lambda\alpha_h + \lambda^2(\alpha_h^2 + \beta_h^2).$$

La condition cherchée est donc  $\alpha_h < 0$ ; tous les  $\sigma_h$  doivent avoir une partie réelle négative, sous réserve que  $\lambda$  soit assez petit.

36. Voyons maintenant comment on peut calculer ces  $\sigma_h$ . Pour  $\lambda = 0$ , le système (100) admet la solution périodique  $u_i(t) = \sum_{h=1}^n \rho_h \gamma_i^h(t)$ , les  $\rho_h$  désignant des coefficients constants arbitraires. Pour  $\lambda$  infiniment petit, il admet la solution voisine  $y_i(t) = u_i(t) + \lambda v_i(t) + o(\lambda^2)$ . Les fonctions  $v_i$  vérifient le système

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^m p_{ij}(t) v_j + \psi_i(t),$$

avec

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^m s_{ij}(t) u_j(t).$$

L'intégrale générale de ce système est

$$(102) \quad v_i(t) = \sum_{j=1}^m y_j^i(t) [a_j + K_j(t)], \quad K_j(t) = \Lambda_j(t, \psi).$$

Écrivons que  $y_i(T) = (1 + \lambda\sigma) y_i(0)$ , c'est-à-dire

$$u_i(T) + \lambda v_i(T) = (1 + \lambda\sigma) [u_i(0) + \lambda v_i(0)] + O(\lambda^2).$$

En tenant compte de  $u_i(T) = u_i(0)$ , divisant par  $\lambda$  et faisant tendre  $\lambda$  vers zéro, il vient

$$v_i(T) = \sigma u_i(0) + v_i(0),$$

ou, d'après (102),

$$\sum_{j=1}^m S_j y_j^i(0) [a_j + K_j(T)] - \sigma u_i(0) - \sum_{j=1}^m y_j^i(0) a_j = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que  $S_j = 1$  pour  $j \leq n$  et posant  $a_j(S_j - 1) = b_j$  pour  $j > n$ ,

$$\sum_{j=n+1}^m b_j y_j^i(0) + \sum_{j=1}^m S_j K_j(T) y_j^i(0) - \sigma \sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha y_i^\alpha(0) = 0.$$

Ceci s'écrit

$$\sum_{j=1}^n [K_j(T) - \sigma \rho_j] y_j^x(0) + \sum_{j=n+1}^m [b_j + S_j K_j(T)] y_j^i(0) = 0.$$

Le déterminant  $\|y_j^i(0)\|$  étant  $\neq 0$ , on a

$$(103) \quad K_j(T) - \sigma \rho_j = 0, \quad j \leq n; \quad b_j + S_j K_j(T) = 0, \quad j > n.$$

D'autre part,

$$K_j(T) = \sum_{\alpha=1}^n \rho_\alpha K_j^\alpha,$$

avec

$$K_j^\alpha = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^m \int_0^T H_k^j(t) s_{kh}(t) y_h^\alpha(t) dt$$

ou, d'après (101) et (98),

$$K_j^\alpha = \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^j(t) \left[ \sum_i p_{khi}(t) \left( \sum_{\beta=1}^n \gamma_\beta y_i^\beta(t) + \varphi_i \right) + q_{kh}(t) \right] y_h^\alpha(t) dt.$$

Le coefficient de  $\gamma_\beta$  est nul (n° 30). Donc

$$(104) \quad K_j^\alpha = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^m \int_0^T H_k^j(t) \left[ \sum_i p_{khi}(t) \varphi_i(t) + q_{kh}(t) \right] y_h^\alpha(t) dt.$$

Portant dans (103), il vient

$$\sum_{h=1}^n \rho_h K_j^h(T) - \sigma \rho_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Éliminons les  $\rho_h$

$$(105) \quad \begin{vmatrix} K_1^1(T) - \sigma & K_1^2(T) & \dots & K_1^n(T) \\ K_2^1(T) & K_2^2(T) - \sigma & \dots & K_2^n(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_n^1(T) & K_n^2(T) & \dots & K_n^n(T) - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation déterminant les  $\sigma_h$ ; nous l'appellerons *l'équation de stabilité*.

*La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que toutes ses racines aient leur partie réelle négative, sous réserve que  $\lambda$  soit assez petit.*

*Remarque.* — Supposons que chaque fonction perturbatrice  $g_k$  soit la somme de plusieurs fonctions perturbatrices partielles et tenons-nous en à la première approximation.

L'équation (75) peut être obtenue en additionnant les équations analogues correspondant aux différentes fonctions perturbatrices partielles. De même, la formule (104) nous montre que *chaque*  $K_j^\alpha$  *peut être obtenu en additionnant les*  $K_j^\alpha$  *correspondant aux différentes fonctions perturbatrices partielles*. Cela résulte de ce que cette formule contient  $\varphi_i$  et  $g_{kh}$  linéairement et de ce que la formule (78) est également linéaire par rapport aux  $g_k$ .

37. La condition de stabilité étant supposée remplie, appelons  $(\Gamma_0)$  la trajectoire fermée correspondant à  $\lambda = 0$ . Elle est parcourue par le point  $P_0$ , de coordonnées  $Z_i(t, \mu)$ . Appelons  $A_0$  la position de  $P_0$  pour  $t = 0$ .

Supposons maintenant  $\lambda > 0$  et suffisamment petit. Nous avons une trajectoire fermée  $(\Gamma_\lambda)$ , parcourue périodiquement par le point  $P_\lambda$ . Appelons  $A_\lambda$  la position de  $P_\lambda$  pour  $t = 0$ . Lorsque  $\lambda$  croît à partir de zéro,  $A_\lambda$  part de  $A_0$  et décrit un certain arc  $A_0H$ .

Autour de  $A_\lambda$  existe un certain domaine de stabilité  $(\Delta_\lambda)$ , contenant le domaine linéaire  $(D_\lambda)$  du n° 23.

Supposons maintenant que  $\lambda$  tende vers zéro. Les  $n$  décrets  $1 + \lambda\sigma_h$  tendent vers  $un$ . Donc (n° 23), le domaine  $(D_\lambda)$  se réduit, à la limite, au point  $A_0$ . Mais, on peut se demander quelle est la limite  $(\Delta_0)$  du domaine complet  $(\Delta_\lambda)$ . Nous ne pouvons pas répondre à cette question d'une manière précise. Examinons seulement si  $(\Delta_0)$  peut contenir un arc de  $(\Gamma_0)$  comprenant  $A_0$ . Soit  $B_0$  un point de cet arc. Faisons partir, au temps zéro,  $M$  de  $B_0$  et  $P$  de  $A_\lambda$ , en supposant  $\lambda$  assez petit pour que  $B_0$  appartienne à  $(\Delta_\lambda)$ . Nous savons que la distance  $MP$  tend vers zéro pour  $t = +\infty$ . Faisons maintenant tendre  $\lambda$  vers zéro, en laissant  $B_0$  fixe. A la limite,  $A_\lambda$  vient en  $A_0$ . La distance  $MP$  tend encore vers zéro pour  $t = +\infty$ . Ceci n'est possible que si  $B_0$  appartient au domaine restreint de stabilité du point  $A_0$ . Il en résulte que ce domaine restreint contiendrait l'arc ci-dessus.

Il est probable que ceci n'a pas lieu en général; mais, nous n'en sommes pas sûrs. Il y a toutefois un cas où nous avons cette certitude; c'est le cas où les fonctions principales sont indépendantes de  $t$  (n° 37). En effet, dans ce cas, les points  $M$  et  $P$  décrivent tous deux périodiquement la trajectoire  $(\Gamma_0)$ . Leur distance est fonction périodique de  $t$  et par conséquent ne peut pas tendre vers zéro.

38. *Cas où les fonctions principales sont indépendantes de  $t$ .* — Supposons qu'il existe une seule solution périodique  $Z_i(t)$ , à un changement près de l'origine des  $t$ . On en déduit la solution plus générale  $Z_i(t + \mu)$ ,  $\mu$  désignant une constante arbitraire. On rentre dans le cas du n° 26, avec  $n = 1$ .

Le système linéaire associé admet la solution périodique  $Z'_i(t + \mu)$ . L'équation en  $S$  admet la racine simple  $S = 1$ .

Si l'on change  $t$  en  $t - \mu$ , les  $Z_i(t + \mu)$  deviennent  $Z_i(t)$ ; les fonctions  $p_{ij}(t, \mu)$  du n° 27 deviennent les fonctions  $p_{ij}(t)$  obtenues en remplaçant les  $z_i$  par les

$Z_i(t)$  dans les  $f_{ij}(z)$ ; elles ne contiennent pas  $\mu$ . Les  $g_i(Z, t)$  des équations (67) deviennent  $g_i[Z(t), t - \mu]$ . Les équations (75) se réduisent à la suivante :

$$(106) \quad \sum_{k=1}^m \int_0^T H_k^1(t) g_k[Z(t), t - \mu] dt = 0.$$

L'équation (105) se réduit à  $\sigma = K_1^1(T)$  ou, d'après (104),

$$\sigma = \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^1(t) \left[ \sum_i p_{khi}(t) \varphi_i(t) + g_{kh}(Z, t - \mu) \right] Z_h dt.$$

Mais, on a

$$\frac{d(p_{ki})}{dt} = \sum_h p_{kih} Z_h'.$$

Donc,

$$(107) \quad \sigma = \sum_k \sum_i \int_0^T H_k^1(t) \varphi_i(t) d(p_{ki}) + \sum_k \sum_h \int_0^T H_k^1(t) g_{kh}(Z, t - \mu) dZ_h.$$

La condition de stabilité est que le nombre  $\sigma$ , que nous appellerons *indice de stabilité*, soit  $< 0$ .

*Remarque.* — Si chaque  $g_k$  est la somme de plusieurs fonctions partielles, l'indice de stabilité est la somme des indices partiels correspondant aux différents termes de  $g_k$ . Cela résulte de la remarque du n° 36.

39. *Cas où les fonctions principales et la période dépendent d'un paramètre.* — Supposons que les  $f_i$  dépendent d'un certain paramètre  $\alpha$ , tout en restant indépendantes de  $t$ . Supposons en outre que le système principal admette une solution périodique  $Z_i(t, \alpha)$ , quelle que soit la valeur attribuée à ce paramètre. La période de cette solution est une fonction déterminée  $T = \varphi(\alpha)$ , que nous supposons continue et à dérivée continue.

Voyons d'abord les conséquences analytiques résultant de ces hypothèses.

Les  $Z_i(t, \alpha)$  étant considérées comme des fonctions des variables indépendantes  $t$  et  $\alpha$ , posons  $u_i = \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha}$ . En dérivant  $\frac{\partial Z_i}{\partial t} = f_i(Z, \alpha)$  par rapport à  $\alpha$ , on a

$$u_i'(t) = \sum_j p_{ij}(t) u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}.$$

D'où

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^m [a_j + A_j(t)] y_j^i(t),$$

les  $A_j(t)$  étant obtenus par la formule (24), en remplaçant  $f_k$  par  $\frac{\partial f_k}{\partial \alpha}$ . Dérivons l'identité  $Z_i(T, \alpha) = Z_i(0, \alpha)$  par rapport à  $\alpha$  :

$$Z_i'(T) \varphi'(\alpha) + u_i(T) = u_i(0).$$

En tenant compte de l'expression ci-dessus de  $u_i(t)$ , ceci s'écrit

$$\sum_{j=1}^m y_i^j(0) a_j(S_j - 1) + \sum_{j=1}^m A_j(T) S_j y_i^j(0) + \varphi'(\alpha) Z_i(0) = 0.$$

Convenons que  $y_i^1(t)$  est  $Z_i'(t)$  de sorte que  $S_1 = 1$ . Nous avons

$$y_i^1(0) [A_1(T) + \varphi'(\alpha)] + \sum_{j=2}^m y_i^j(0) [a_j(S_j - 1) + S_j A_j(T)] = 0.$$

On en conclut que tous les crochets sont nuls, en particulier le premier. On a donc l'identité

$$(108) \quad \sum_{k=1}^m \int_0^T H_k^1(t) \frac{\partial f_k}{\partial x} dt + \varphi'(\alpha) = 0.$$

40. Supposons maintenant que les fonctions perturbatrices  $g_i(z, t)$  aient une période déterminée  $T = \varphi(\alpha)$ . Supposons d'autre part que la valeur numérique  $\alpha'$  attribuée à  $\alpha$  dans les fonctions  $f_i(z, \alpha)$  soit voisine de  $\alpha$ , de telle sorte que la période  $T' = \varphi(\alpha')$ , que nous appellerons la *période propre* du système principal, soit voisine de  $T$ . Posons  $\alpha' = \alpha + \lambda\beta$ . Les équations (64) peuvent s'écrire

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(x, \alpha) + \lambda [g_i(z, t) + h_i(z)],$$

avec

$$h_i(z) = \frac{f_i(z, \alpha + \lambda\beta) - f_i(z, \alpha)}{\lambda}.$$

A ce système nous pouvons appliquer la théorie générale précédente, les fonctions perturbatrices étant  $g_i + h_i$ , de période  $T$  par rapport à  $t$ . L'équation (106) s'écrit

$$\sum_{k=1}^m \int_0^T H_k^1(t) [g_k(Z, t - \mu) + h_k(z)] dt = 0.$$

C'est l'équation en  $\mu$ , qui détermine un certain nombre de solutions admettant la période  $T$  des fonctions perturbatrices  $g_k(z, t)$ .

Si  $\lambda$  est très petit, on a approximativement  $h_k(Z) = \beta \frac{\partial f_k}{\partial x}$ . En tenant compte de (108), l'équation ci-dessus s'écrit alors approximativement

$$\sum_{k=1}^m \int_0^T H_k^1(t) g_k(Z, t - \mu) dt = \beta \varphi'(\alpha).$$

Or, si l'on pose  $\Delta T = T' - T$ , on a approximativement  $\Delta T = \lambda \beta \varphi'(\alpha)$ . Donc, l'équation précédente s'écrit

$$(109) \quad \sum_{k=1}^m \int_0^T H_k^1(t) g_k(Z, t - \mu) dt = \frac{\Delta T}{\lambda}.$$



41. Supposons maintenant que les fonctions perturbatrices  $g_k$  soient indépendantes de  $t$ . Dans ce cas, l'équation (109) ne contient plus l'inconnue  $\mu$ . Par contre, la période  $T$  du n° 40 est indéterminée. Nous pouvons alors la considérer comme une inconnue. La théorie précédente nous prouve que le système (64) admet une solution périodique dont la période s'obtient en ajoutant  $\Delta T$  à la période propre  $T'$ . La formule (109) nous donne, à  $o(\lambda^2)$  près, la perturbation de période apportée par les fonctions perturbatrices  $g_k$ .

42. L'indice de stabilité  $\sigma$  est donné par la formule (107). D'après la remarque du n° 38, c'est la somme des indices partiels correspondant aux fonctions  $g_i$  et aux fonctions  $h_i = \beta \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + o(\lambda)$ . Or, le second de ces indices partiels est identiquement nul. En effet, la solution  $Z_i(t, \alpha)$  étant périodique quel que soit  $\alpha$ , l'équation en  $S$  admet la racine  $S = 1$  quel que soit  $\alpha$ . Comme cette racine vaut asymptotiquement  $1 + \lambda\sigma$ , on a nécessairement  $\sigma = 0$ .

Il résulte de là que l'indice de stabilité peut être calculé en tenant compte uniquement des fonctions perturbatrices  $g_i$ .

Remarque. — On peut supposer que les  $f_i$  du n° 39 dépendent de  $t$ , mais que la solution périodique  $Z$  dépend, comme au n° 26, de  $n$  paramètres  $\mu_\beta$ . On a, dans ce cas,  $n$  équations analogues à (109) et l'équation de stabilité (105). Bien entendu, les  $y_i^3$  sont les  $\frac{\partial Z_i}{\partial \mu_\beta}$ , comme au n° 26. La démonstration ci-dessus ne subit aucune modification.

43. *Couplage de plusieurs systèmes.* — Considérons  $n$  systèmes  $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \dots, (\Sigma_n)$  analogues à celui du n° 39. Réunissons-les en un système unique  $(\Sigma)$  par l'introduction des fonctions perturbatrices  $g_i(z, t)$  dépendant à la fois des coordonnées de tous les  $(\Sigma_j)$  et admettant la période  $T$  par rapport à  $t$ . Nous dirons que les  $(\Sigma_j)$  sont couplés par ces fonctions.

Les coordonnées  $z_i$  seront numérotées de telle manière que pour

$$s'_j = s_{j-1} + 1 \leq i \leq s_j,$$

$z_i$  soit une coordonnée de  $(\Sigma_j)$ . Le nombre des coordonnées de  $(\Sigma_j)$  est donc  $s_j - s_{j-1}$ . Nous convenons bien entendu que  $s_0 = 0$ . Les indices vérifiant la double inégalité ci-dessus constitueront le groupe  $(j)$ .

La fonction principale  $f_i$  dépend uniquement des  $z_k$  dont l'indice appartient au même groupe que  $i$ . Elle dépend aussi du paramètre  $\alpha_j$  si  $i$  appartient au groupe  $(j)$ . La solution périodique principale  $Z_i(t, \alpha_j)$  a la période  $T_j = \varphi_j(\alpha_j)$ .

Choisissons les  $\alpha_j$  de telle manière que l'on ait  $\frac{T_j}{T} = \frac{N}{N_j}$ ,  $N$  et les  $N_j$  désignant des nombres entiers premiers entre eux. Supposons maintenant que les  $\alpha_j$

prennent des valeurs  $\alpha'_j = \alpha_j + \lambda\beta_j$  voisines des précédentes. Nous appellerons *période propre* de  $(\Sigma_j)$  la période  $T'_j = \varphi_j(\alpha'_j)$ , voisine de  $T_j$ . Nous posons

$$(110) \quad T_j = T_j(1 + \lambda\varepsilon_j),$$

de sorte que

$$\varepsilon_j \varphi_j(\alpha_j) = \beta_j \varphi'_j(\alpha_j) + O(\lambda).$$

44. Faisons le changement de variable  $t = N\theta$  et posons

$$h_i(z) = \frac{1}{\lambda} [f_i(z, \alpha'_j) - f_i(z, \alpha_j)] = \beta_j \frac{df_i}{d\alpha_j} + O(\lambda),$$

l'indice  $i$  appartenant au groupe  $(j)$ . Les équations différentielles deviennent

$$(111) \quad \frac{dz_i}{d\theta} = N f_i(z, \alpha_j) + \lambda N [g_i(z, N\theta) + h_i(z)].$$

Les fonctions entre crochets jouent le rôle de fonctions perturbatrices pour le système  $(\Sigma)$ ; elles admettent évidemment la période  $T$  par rapport à  $\theta$ .

Le système principal admet la solution périodique principale  $Z_i(N\theta + \mu_j, \alpha_j)$ , qui admet bien la période  $T$  par rapport à  $\theta$ , car si  $\theta$  augmente de  $T$ ,  $N\theta$  augmente de  $NT = N_j T_j$ , c'est-à-dire d'un multiple de la période  $T_j$  de  $Z_i(t + \mu_j, \alpha_j)$ .

Le système (111) rentre donc dans le type du système (64) et nous pouvons lui appliquer les résultats obtenus aux nos 26 à 36.

Le système linéaire associé se décompose en  $n$  systèmes partiels, correspondant aux différents  $(\Sigma_j)$ . Les fonctions  $p_{ik}(t)$  et  $p_{ikh}(t)$  ne sont  $\neq 0$  que si les indices  $i, k, h$  appartiennent au même groupe. Il en est de même des  $y_i^k(t)$  et des  $H_i^k(t)$ . Nous conviendrons de ranger les  $y_i^k$  du groupe  $(j)$  par exemple, de telle manière que, pour  $k = s_j$ , on ait  $y_i^k = Z'_i(t)$ . Bien entendu, dans toutes ces fonctions,  $t$  doit être remplacé par  $N\theta + \mu_j$ , si les indices appartiennent au groupe  $(j)$ .

45. A chaque  $(\Sigma_j)$  correspond une équation en  $\mu$ , qui s'écrit, en divisant par  $N$ ,

$$\sum_{k=s'_j}^{s_j} \int_0^T H_k^{s_j}(t + \mu_j) [g_k(Z, t) + h_k(Z)] d\theta = 0.$$

Le terme  $h_k(Z)$  dépend seulement des  $Z_i$  d'indice appartenant au groupe  $(j)$ , il admet la période  $T_j$  par rapport à  $t$ , de même que  $H_k^s$ . L'intégrale correspondante peut se calculer en prenant  $t$  pour variable d'intégration; elle vaut, en tenant compte de la périodicité ci-dessus, puis de (109) et (110),

$$- \frac{N_j}{N} \int_0^{T_j} H_k^{s_j}(t + \mu_j) h_k(Z) dt = -T \varepsilon_j.$$

L'équation en  $\mu$  s'écrit donc

$$(112) \quad \sim \sum_{k=s'_j}^{s_j} \int_0^T H_k^j(N0 + \mu_j) g_k(Z, N0) d0 = T \varepsilon_j \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Elle contient tous les  $\mu_h$ , qui figurent dans les  $g_k$ . On obtient ainsi le système des équations en  $\mu$ .

46. Pour la *stabilité*, on écrit l'équation (105), chaque  $K_j^\alpha$  se calculant par la formule (104). Les indices  $j$  et  $\alpha$  doivent être choisis parmi les  $s_r$ ; prenons par exemple  $j=s_r$  et  $\alpha=s_\beta$ . Comme au n° 42, le terme  $h_k(Z)$  de la fonction perturbatrice totale ne donne rien. Remarquons maintenant que, d'après (111), les fonctions  $f$  et  $g$  doivent être multipliées par  $N$ ; donc aussi  $p_{khi}$  et  $q_{kh}$ , ainsi que  $\varphi_i$ , d'après (78). D'autre part, l'indice  $k$  doit appartenir au groupe  $(r)$  et  $h$  doit appartenir au groupe  $(\beta)$ . Le terme en  $\varphi_i$  n'existe que si  $i, k, h$  appartiennent au même groupe, ce qui n'est possible que si  $r=\beta$ , donc  $j=\alpha$ . On a dès lors

$$(113) \quad K_j^\alpha = NA_j^\alpha, \quad \text{si } j \neq \alpha; \quad K_j^j = NA_j^j + N^2 A_j',$$

en posant

$$(114) \quad \begin{cases} A_j^\alpha = \sum_{k=s'_r}^{s_r} \sum_{h=s'_\beta}^{s_\beta} \int_0^T H_k^j(N0 + \mu_r) \gamma_h^\alpha(N0 + \mu_\beta) q_{kh}(N0) d0, \\ A_j^j = \sum_{k=s'_r}^{s_r} \sum_{h=s'_r}^{s_r} \sum_{i=s'_r}^{s_r} \int_0^T p_{khi}(N0 + \mu_r) \varphi_i(N0) H_k^j(N0 + \mu_r) \gamma_h^j(N0 + \mu_r) d0. \end{cases}$$

Portons dans l'équation (105), en posant  $\sigma = N\sigma'$ ; nous obtenons

$$(115) \quad \begin{vmatrix} NA_1' + A_1^1 - \sigma' & A_1^2 & \dots & A_1^n \\ A_2^1 & NA_2' + A_2^2 - \sigma' & \dots & A_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^1 & A_n^2 & \dots & NA_n' + A_n^n - \sigma' \end{vmatrix} = 0.$$

47. Les  $T_j$  et  $T$  étant donnés, les rapports  $\frac{T_j}{T}$  peuvent être approchés autant qu'on le veut et d'une infinité de manières, par des nombres commensurables. On peut donc se demander si le problème du couplage admet une infinité de solutions, quelles que soient les valeurs des  $T_j$  et  $T$ . En réalité, il n'en est rien, parce que le nombre  $N$  ne doit pas dépasser une certaine limite.

Reportons-nous en effet à la démonstration des n°s 27 à 34, en l'appliquant au système (111), dans le cas où  $N$  est très grand.

Les nombres appelés  $M_i$ ,  $N_i$  sont tous multipliés par  $N$ . D'après (78) et (79), il en est de même des  $\varphi_i$  et des  $\theta_i^p$ . Les  $p_{hjk}$  et  $q_{ij}$  le sont également. On en conclut (n° 31) que  $C_i^\alpha = O(N^2)$ ; d'où  $E_i^\alpha = O(N^{-2})$  et  $E = O(N^{-2})$ . Or  $L_i = O(N^3)$ ;

donc  $\gamma_\alpha = O(N)$  et par suite  $\gamma = O(N)$ ; d'où (n° 34)  $R' = O(N)$ . D'après (71), on en conclut que  $\lambda$  vaut au plus  $O(N^{-1})$ . De (80) on déduit ensuite  $\Theta = O(N^3)$ . Portant dans (88), on a  $\lambda = O(N^{-2})$ . De (86) on déduit  $Q = O(N^2)$  et (89) donne de nouveau  $\lambda = O(N^{-2})$ . On a ensuite (n° 33) :  $a = O(N^2)$ ,  $b = O(N^4)$ ,  $c = O(N^4)$ ,  $d = O(N^2)$ . Portant dans (95), on obtient  $\lambda = O(N^{-4})$ . Enfin (96) et (97) donnent  $\lambda = O(N^{-2})$ .

En définitive, on voit que la limite supérieure  $\lambda_1 = O(N^{-4})$  peut devenir, si  $N$  est trop grand, inférieure à la valeur numérique attribuée à  $\lambda$ , auquel cas notre démonstration est en défaut.

Signalons encore que, pour  $N$  très grand, les racines de l'équation (115) sont asymptotiquement  $\sigma'_i = NA'_i$ ; d'où  $\sigma_i = N^2 A'_i$ . En se reportant au n° 35, on en conclut d'abord que les  $A'_i$  doivent être  $< 0$ ; puis, si cette condition est remplie, que la limite imposée à  $\lambda$  par la stabilité vaut  $O(N^{-2})$ . Elle est donc très petite si  $N$  est très grand.

48. *Méthode de la variation des constantes.* — Revenons au système (64) en supposant les  $f_i$  indépendantes de  $t$ . Admettons que l'on connaisse l'intégrale générale du système principal

$$(116) \quad z_i = \varphi_i(t + y_m, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}),$$

les  $y_i$  désignant les constantes d'intégration. Supposant maintenant  $\lambda \neq 0$ , faisons le changement de variables

$$(117) \quad z_i = \varphi_i(\theta, y_1, \dots, y_{m-1}), \quad t + y_m = \theta.$$

La nouvelle variable indépendante est  $\theta$ ; les nouvelles fonctions inconnues sont les  $y_i$ . Les nouvelles équations s'écrivent

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} d\theta + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j = [f_i(z) + \lambda g_i(z, \theta - y_m)] (d\theta - dy_m)$$

ou, en tenant compte de  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} = f_i$ ,

$$(f_i + \lambda g_i) dy_m + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j = \lambda g_i d\theta.$$

D'où l'on tire

$$(118) \quad \frac{dy_i}{d\theta} = \lambda G_i(y, \theta, \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Dans le cas général, les  $\varphi_i$  ne sont périodiques par rapport à  $\theta$  que pour certaines valeurs particulières de  $y_1, \dots, y_{m-1}$ , par exemple zéro. Donc, les  $G_i$  ne sont pas périodiques par rapport à  $\theta$ , quand on suppose que les  $y_j$  ont des valeurs constantes quelconques. Le système (118) ne rentre pas dans la catégorie du système (64).

Supposons maintenant que l'intégrale générale (116) admette la période  $T$ . Dans ce cas, le système (118) est de la forme (64), avec cette particularité que les fonctions principales  $f_i$  sont nulles. On y peut prendre  $y_i^j(t) = 0$  si  $j \neq i$  et  $y_i^i(t) = 1$ . On a alors  $H_i = 0$  si  $j \neq i$  et  $H_i^i(t) = 1$ . Les fonctions  $Z_i(t)$  sont des constantes arbitraires  $\mu_i$ . Tous les décrets sont égaux à un. Les équations (75) deviennent

$$(119) \quad \int_0^T g_k(\mu, t) dt = 0.$$

La formule (104) devient

$$(120) \quad K_j^x(T) = \int_0^T g_{jx}(\mu, t) dt.$$

En portant dans (105), on obtient l'équation de stabilité.

Si toutes ses racines sont simples, le domaine de stabilité reste fini quand  $\lambda$  tend vers zéro, comme on l'a vu au n° 23.

On retrouve exactement les résultats de l'étude directe faite dans un des Mémoires précités.

La méthode de variation des constantes que nous venons de signaler constitue une généralisation de la méthode employée dans ma théorie générale de la synchronisation des oscillateurs harmoniques.

49. Cas  $m = 2$ . — Supposons les fonctions principales indépendantes de  $t$ . Le système linéaire associé admet pour solutions fondamentales la solution périodique  $Z_i(t)$  et la solution  $U_i(t)$  donnée par les formules

$$(121) \quad U_1(t) = Z_1(t) \int \frac{p_{12}(t)H(t)}{Z_1^2(t)} dt, \quad U_2(t) = \frac{H(t) + Z_2'(t)U_1(t)}{Z_1(t)},$$

$$(122) \quad H(t) = e^{\lambda t}, \quad \Delta(t) = \int_0^t [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt.$$

L'intégrale générale est

$$x_i(t) = aZ_i(t) + bU_i(t) \quad (i = 1, 2).$$

Formons l'équation en  $S$ . Les équations  $x_i(T) = Sx_i(0)$  s'écrivent

$$a(1 - S)Z_i'(0) + b[U_i(T) - SU_i(0)] = 0.$$

La racine  $S = 1$  saute aux yeux. L'autre est donnée par

$$Z_1(0)[U_2(T) - SU_2(0)] - Z_2(0)[U_1(T) - SU_1(0)] = 0,$$

soit

$$(123) \quad S = H(T) = e^{\lambda(T)}.$$

La condition de stabilité est donc <sup>(1)</sup>

$$(124) \quad \Delta(T) < 0.$$

On a ensuite

$$y_i^1(t) = Z_i'(t), \quad y_i^2(t) = U_i(t) \quad (i=1 \text{ et } 2);$$

en choisissant la constante d'intégration de la première formule (121) de telle manière que l'on ait

$$(125) \quad U_i(t+T) = S U_i(t).$$

L'équation (109) et la formule (107) deviennent

$$(126) \quad \int_0^T [U_2(t) g_1(Z, t - \mu) - U_1(t) g_2(Z, t - \mu)] e^{-\Delta(t)} dt = \frac{\Delta T}{\lambda},$$

$$(127) \quad \sigma = \int_0^T [(U_2 p'_{11} - U_1 p'_{21}) \varphi_1 + (U_2 p'_{12} - U_1 p'_{22}) \varphi_2 + (U_2 q_{11} - U_1 q_{21}) Z_1 + (U_2 q_{12} - U_1 q_{22}) Z_2] e^{-\Delta(t)} dt,$$

avec

$$(128) \quad \begin{cases} \varphi_i = Z_i' A_1(t) + U_i \left[ A_2(t) + \frac{S}{1-S} A_2(T) \right], \\ A_1(t) = \int_0^t (U_2 g_1 - U_1 g_2) e^{-\Delta} dt, \quad A_2(t) = \int_0^t (-Z_2' g_1 + Z_1' g_2) e^{-\Delta} dt. \end{cases}$$

La première approximation de la solution périodique est donnée par (n° 34)

$$(129) \quad x_i(t) = \gamma Z_i'(t) + \varphi_i(t),$$

la constante  $\gamma$  se calculant par l'équation

$$\int_0^T (\lambda x_1^2 + 2B x_1 x_2 + C x_2^2 + 2D x_1 + 2E x_2) e^{-\Delta} dt = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= U_2 p_{111} - U_1 p_{211}, & B &= U_2 p_{112} - U_1 p_{212}, & C &= U_2 p_{122} - U_1 p_{222}, \\ D &= U_2 q_{11} - U_1 q_{21}, & E &= U_2 q_{12} - U_1 q_{22}. \end{aligned}$$

Nous savons que le coefficient de  $\gamma^2$  est nul, il reste, en tenant compte de (127),

$$(130) \quad 2\gamma\sigma = - \int_0^T (\lambda \varphi_1^2 + 2B \varphi_1 \varphi_2 + C \varphi_2^2 + 2D \varphi_1 + 2E \varphi_2) e^{-\Delta} dt.$$

---

(1) On peut aussi l'obtenir en appliquant la théorie de H. Poincaré à l'équation différentielle

$$f_2 dx_1 - \lambda dx_2 = 0.$$