ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. JONGMANS
L. NOLLET

La classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quatre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 139-188
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__139_0>

LA

CLASSIFICATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

DE

COURBES ALGÉBRIQUES PLANES DE GENRE QUATRE

PAR MM. F. JONGMANS ET L. NOLLET.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons de déterminer, d'une manière aussi complète et précise que possible, les systèmes linéaires crémoniennement distincts de courbes algébriques planes irréductibles de genre 4. Pour rapprocher nos résultats de ceux déjà obtenus au sujet des courbes de genre moins élevé, nous prendrons comme types de référence les systèmes d'ordre minimum.

Deux Mémoires récents servent de base à la présente étude. Le premier, dû à M. Jongmans, contient la détermination des surfaces à sections hyperplanes de genre 4, c'est-à-dire des systèmes linéaires *simples* de courbes de genre 4; nous le désignerons par la notation [J]. Il expose la matière de notre premier Chapitre de façon moins détaillée, voire parfois un peu sommaire, en raison du fait qu'il n'étudie les surfaces envisagées qu'en vue d'atteindre les variétés à trois dimensions dont ces surfaces sont les sections hyperplanes. Dans ce Mémoire [J] est appliquée pour la première fois une méthode de recherche des systèmes linéaires de courbes planes de genre au moins égal à 4 dont l'adjoint pur n'est pas composé au moyen d'une involution ou d'un faisceau.

Le second Mémoire, qui répondra à la notation [N], est dû à M. Nollet et s'occupe au contraire des systèmes linéaires dont l'adjoint pur n'est pas simple, sans préciser numériquement le genre des courbes considérées. Appliqués aux courbes de genre 4, ses résultats et ses méthodes, qui concernent aussi quelquefois les systèmes simples, permettent de traiter la presque totalité des cas laissés de côté dans [J].

Il convenait de réunir en une seule étude l'exposé complet des connaissances acquises sur les systèmes linéaires de courbes de genre 4; c'est ce que nous avons l'intention de réaliser. Nous ne nous bornerons pas à définir arithmétiquement les systèmes d'ordre minimum par leur ordre et les multiplicités aux points-base, mais nous examinerons de près leur existence et, en général, nous les construirons effectivement. De plus, tandis que la méthode arithmétique de Noether, quand elle n'est pas doublée d'une étude géométrique, ne distingue pas entre eux plusieurs systèmes de mêmes caractères numériques projectifs, mais qui ne possèdent pas la même suite d'adjoints purs, nous classerons précisément les systèmes de genre 4 d'après les caractères invariants de leurs adjoints. Nous parvenons ainsi à des résultats plus précis et plus complets que ceux obtenus jusqu'ici pour les systèmes de courbes de genre 3.

Notre plan de travail consiste à étudier d'abord les systèmes $|C|$ de genre 4 dont l'adjoint pur a le genre effectif p_1 inférieur à 4, en supposant successivement cet adjoint simple, puis composé au moyen d'une involution ou enfin d'un faisceau; ensuite, vient l'examen des systèmes pour lesquels p_1 vaut au moins 4. Nous désignerons respectivement par $|C'|$ et $|C_1|$ les adjoints impur et pur du système $|C|$. Pour exprimer que $|C|$ est d'ordre n et possède a points-base r-uples M_i, b points s-uples N_j, ..., nous désignerons le système par $C^n(aM^r, bN^s, \ldots)$; en général (¹), nous renseignons les multiplicités effectives. Un système dérivé d'un autre par acquisition de points-base simples sera dit système *subordonné* à cet autre. Les références bibliographiques, placées à la fin du Mémoire, se rapportent aux numéros en chiffres romains mis entre crochets dans le texte.

Il pourra sembler que nous poussons parfois trop loin la minutie. Nous répondrons à cela que nous tenons simplement compte de quelques propriétés indiscutables, mais qui sont loin d'avoir toujours été respectées dans les travaux publiés sur les systèmes de courbes planes. Parmi ces propriétés figure en bonne place le fait qu'un même système linéaire (par exemple d'ordre minimum) peut très bien être simultanément l'adjoint de plusieurs systèmes irréductibles qui ne rentrent pas dans un même système linéaire. Un exemple classique est le faisceau de cubiques elliptiques $E^3(9M_i^1)$, adjoint commun d'une multiplicité continue de systèmes de genre 2, $C^7(M_1^3, 8M_i^2, 2N_j^2)$, dont les points-base N_1, N_2 forment l'intersection d'une droite quelconque issue de M_1 avec la courbe unie de l'involution des couples communs aux cubiques E^3 et aux droites issues de M_1; le faisceau considéré est encore l'adjoint du système des sextiques $H^6(M_1^0, 8M_i^2)$, puis de tous les systèmes déduits des précédents par permutations des points M_i ou par une transformation crémonienne qui

---

(¹) Dans certains cas, notamment quand nous décrivons les courbes fondamentales des systèmes linéaires obtenus, nous usons forcément de multiplicités virtuelles; quand celles-ci ne sont pas effectives, le lecteur observera que les systèmes correspondants constituent des cas particuliers.

conserve le faisceau. Des exemples non moins significatifs seront rencontrés plus loin.

Un autre fait, sur lequel nous avons déjà attiré l'attention dans les travaux cités, est le danger que présente l'emploi des caractères virtuels. A cet égard, nous devons rappeler, pour la compréhension du texte, que la relation classique d'adjonction $|(E+F)'|=|E'+F+\Sigma A_i|$, où nous désignons par des lettres accentuées les adjoints impurs et où ΣA_i désigne la somme des points-base du seul système $|F|$, est une équivalence virtuelle et ne saurait servir au calcul des caractères effectifs de systèmes adjoints purs. Tout ce qu'il est permis d'en déduire en général, c'est que l'adjoint pur de $|E+F|$ contient celui de $|E|$, et même la somme de ce dernier et de la partie variable de $|F|$ quand $|F|$ est infini. Cette propriété est largement employée dans le Mémoire [N].

Enfin, rappelons que non seulement les courbes adjointes (impures) d'un système $|C|$ peuvent passer plus de $r-1$ fois en un point r-uple M de $|C|$, mais qu'elles peuvent aussi y passer moins de $r-1$ fois si M n'est pas un point propre, par le jeu du « principe de déchargement » (scaricamento) (1). Il serait imprudent de négliger cette circonstance dans la considération de systèmes d'ordre minimum, qui, précisément, sont souvent contraints de posséder des points-base impropres.

CHAPITRE I.

SYSTÈME ADJOINT SIMPLE, DE GENRE $p_1 < 4$.

1. Supposons que l'adjoint pur $|C_1|$ d'un système $|C|$ de genre 4 soit irréductible et simple. Sa dimension est égale à 3; son genre effectif p_1 et son degré effectif m_1 sont liés par la relation $m_1=p_1+2$, à moins que $|C_1|$ ne soit surabondant (par rapport à sa base propre). Dans ce dernier cas, la série caractéristique $g^2_{m_1}$ de $|C_1|$ est spéciale, avec les conditions $p_1<4$, $2p_1-2\geq m_1\geq 4$, dont la dernière est celle de Clifford. Nous avons ainsi à passer en revue les hypothèses

$$p_1=0,\quad m_1=2;\qquad p_1=1,\quad m_1=3;\qquad p_1=2,\quad m_1=4;\qquad p_1=3,\quad m_1=5 \text{ ou } 4.$$

Comme la classification des systèmes simples de genre 0, 1, 2 ou 3 est acquise, notre tâche est de découvrir $|C|$ à partir d'un adjoint connu $|C_1|$. L'image projective de $|C_1|$ est une surface rationnelle F, normale dans l'espace S_3, sur laquelle les courbes C ont pour homologues des sextiques projectivement canoniques de genre 4, dépourvues de points singuliers et situées chacune sur une seule quadrique, irréductible, dont elles constituent l'intersection

(1) Pour des exemples, *cf.* le Mémoire [N], n° 19, et le présent travail.

complète avec une surface cubique. Par suite, *le système* $|C|$ *doit être cherché au sein de* $|2C_1^*|$ *ou, exceptionnellement, de* $|3C_1|$ *si l'image de* $|C_1|$ *est une quadrique* ($m_1=2$, $p_1=0$). Cette propriété, qui permet d'amorcer la discussion, s'étend d'ailleurs aux systèmes de genre quelconque, par une interprétation hyperspatiale analogue.

2. Abordons la discussion par le cas $p_1=0$, $m_1=2$. L'image projective de $|C_1|$ est une quadrique F, conique ou non, sur laquelle toute sextique de genre 4 est découpée par une surface cubique (qui ne passe pas au point double éventuel de F). Le système complet $|3C_1|$ est effectivement de genre 4 et admet $|C_1|$ pour adjoint pur. Si nous prenons pour $|C_1|$ le système des coniques à deux points-base, distincts ou non, $|C|$ est le système des sextiques à deux points triples, ou un système subordonné. $C^6(2M^3)$ a la dimension 15 et le degré 18; il est d'ordre minimum, car un système de quintiques à deux points-base doubles a au plus le degré 17. En revanche, tout système subordonné est réductible à un système de quintiques à deux points doubles, d'ordre minimum.

Les systèmes $|C|$ *de genre* 4, *d'ordre minimum, dont l'adjoint est irréductible et de genre* 0, *sont* $C^6(2M^3)$, $C^5(2M^2)$ *ou subordonnés à ce dernier.*

3. Si $|C_1|$ est elliptique et de degré 3, son image est une surface cubique non réglée F. Toute sextique canonique tracée sur F est l'intersection complète de F avec une quadrique. Le système complet $|2C_1|$ répond à la question. En prenant pour $|C_1|$ un système de cubiques elliptiques à 6 points-base simples, on voit que $|C|$ est l'ensemble des sextiques à 6 points doubles fixes, ou un système subordonné; il est de toutes façons d'ordre minimum, puisque son adjoint pur $|C_1|$ est en même temps son adjoint impur et a l'ordre minimum. $C^6(6M^2)$ a la dimension 9 et le degré 12.

Les systèmes $|C|$ *d'ordre minimum dont l'adjoint est irréductible et elliptique sont* $C^6(6M^2)$ *et les systèmes subordonnés.*

4. Passons au cas $p_1=2$, $m_1=4$. On sait [I, III] que tout système simple de genre 2 et de dimension 3 est crémoniennement réductible à $|C_1| = C^4(M^2, 8N_i^1)$; il ne doit passer qu'une cubique D par M et $8N_i$, sans quoi $|C_1|$ appartiendrait à une involution du second ordre.

L'image de $|C_1|$ est une surface F du quatrième ordre, douée d'une droite double d, image de D. Une sextique K de genre 4 tracée sur F est découpée par une quadrique Q, dont l'intersection ultérieure avec F est une section plane de Q. Celle-ci ne se compose pas de la droite d comptée deux fois, sinon Q serait un cône de sommet situé sur d et K aurait un point double au sommet. La section plane envisagée de Q ne contient pas non plus la droite d comptée une fois, sinon K admettrait d pour composante et ne serait pas irréductible. En conséquence, l'intersection de F et de Q, en dehors de K, est une conique astreinte à passer aux deux points de percée de d dans Q; dans la représentation plane, elle a pour image une droite L issue de M. Tout système $|C|$ qui répond à la question est donc contenu dans le système

$$|2C_1 - L| = |C_1 + D| = C^7(M^3, 8N_i^2) \quad (^1).$$

Ce dernier système est de dimension virtuelle 5, il n'admet pas D pour composante fixe et est irréductible. Sa dimension est d'ailleurs trop élevée pour qu'il puisse être surabondant, c'est-à-dire acquérir des points-base accidentels sur D. Par suite, il a le genre effectif 4, le degré 8 et la dimension 5. Il admet bien $|C_1|$ pour adjoint et est donc d'ordre minimum.

Les systèmes $|C|$ *d'ordre minimum à système adjoint simple de genre* 2 *sont* $C^7(M^3, 8N_i^2)$ *et les systèmes subordonnés, quand il passe une seule cubique par* M *et* $8N_i$. Observons que deux points N ne peuvent être proches de M.

5. Supposons maintenant que $|C_1|$ soit de genre 3 et de degré 5, formé de courbes non hyperelliptiques. Suivant que l'adjoint par $|C_2|$ de $|C_1|$ est de genre 0 ou 1, $|C_1|$ est référable à $C^4(11M_i^1)$ ou à $C^6(7M_i^2, 3N^1)$ [II]. Examinons le premier cas.

Les 11 points-base de $|C_1|$ n'appartiennent pas à une même cubique, car les droites du plan formeraient avec cette cubique un réseau extrait de $|C_1|$ et ce dernier système, triplement infini, aurait un douzième point-base sur la cubique considérée. $|C_1|$ a pour image une surface F du cinquième ordre, douée d'une cubique gauche double h, généralement irréductible [II]. Celle-ci a pour homologue dans la représentation plane une courbe particulière $H^7(11M_i^2)$. Une sextique K de genre 4 tracée sur F appartient à une quadrique Q, qui rencontre ultérieurement F suivant une biquadratique d. Si celle-ci ne dégénère pas, elle a pour homologue dans le plan R de $|C_1|$ une courbe D d'ordre au plus égal à 1, sinon $|2C_1 - D|$ serait d'ordre insuffisant pour admettre l'adjoint $|C_1|$. Pour correspondre à une droite D, la biquadratique d doit être rationnelle et posséder un point double, évidemment situé sur la cubique double h. Il existe effectivement de telles courbes d; ce sont les homologues des droites D qui joignent deux à deux les points des couples de la série g_2^1 découpée par $|C_1|$ sur H.

Il y a donc des présomptions pour que des solutions C soient contenues dans le système $|2C_1 - D| = C^7(11M_i^2)$. Celui-ci possède la dimension virtuelle 2, le genre virtuel 4 et le degré virtuel 5. Il constitue un système $|C|$ du type désiré si nous démontrons qu'il est irréductible et dépourvu de points-base multiples

(1) Le théorème du reste ne semble pas respecté, puisque par une courbe K passe une seule quadrique, qui ne découpe pas sur K le faisceau complet des sections planes par d; mais on remarquera que les quadriques de l'espace ne découpent pas sur F un système complet.

accidentels. Nous donnons cette démonstration dans le cas générique, c'est-à-dire quand F est la surface générique du cinquième ordre qui passe doublement par une cubique gauche irréductible h. En combinant à une surface particulière de ce type une surface composée de deux quadriques circonscrites à h et d'un plan générique, on voit que la surface F générique n'admet que des points doubles sur h. Chaque cône projetant h d'un de ses points rencontre ultérieurement F suivant une biquadratique d avec un nœud au sommet du cône. Les courbes d relatives à deux cônes analogues se rencontrent en un seul point variable, marqué sur F par la corde de h commune aux cônes. Le faisceau des quadriques menées par une courbe d découpe sur F un faisceau de sextiques projectivement canoniques K avec 5 points fixes aux intersections simples de h et de d, mais sans composante fixe ni points fixes extérieurs à d. L'ensemble des faisceaux analogues déduits de toutes les courbes d correspond précisément au réseau $C^7(11 M_i^2)$ du plan R. Il ne possède aucun point fixe sur F, puisque deux courbes d se rencontrent en un seul point variable sur F; il n'a pas de composante fixe et n'est évidemment pas composé au moyen d'un faisceau. Le système $C^7(11 M_i^2)$ est donc généralement irréductible, dépourvu de points-base accidentels et a exactement la dimension 2.

6. Nous nous devons à présent d'abandonner le cas générique et de vérifier s'il n'existe pas, quelle que soit la configuration des 11 points-base de $|C_1|$, des systèmes $|C|$ distincts de $C^7(11 M_i^2)$ qui admettent l'adjoint $C^4(11 M_i^1)$. Il restera enfin à savoir si, pour une position particulière des $11 M_i$, le système $C^7(11 M_i^2)$, tout en restant irréductible et de genre 4, ne peut devenir de dimension supérieure à 2.

Si $|K|$ est l'homologue sur F d'un système $|C|$ répondant à la question, mais distinct de $C^7(11 M_i^2)$, il faut évidemment, par ce qui précède, exclure l'éventualité que les quadriques menées par toutes les courbes K découpent ultérieurement sur F des biquadratiques d en nombre infini. La seule hypothèse plausible est qu'il existe une seule biquadratique d, image d'une courbe d'ordre 0 du plan R (1); $|C|$ est alors au plus un faisceau et ne peut contenir $C^7(11 M_i^2)$. Nous allons prouver l'inexistence de $|C|$. Un tel système serait d'ordre 8 et admettrait une droite fondamentale D, composante fixe de son adjoint impur. Il ne saurait posséder de points-base de multiplicité supérieure à 3, car un de ces points serait propre, triple au moins pour l'adjoint impur et double pour l'adjoint pur $C^4(11 M_i^1)$. En outre, $|C|$ n'admet pas plus de 2 points triples s'il est d'ordre minimum, mais doit en admettre au moins 1, sinon il posséderait 17 points doubles, dont 6 au moins sur la droite fondamentale D. Si $|C|$ possède 1 point triple et 14 points doubles, D doit de nouveau contenir

(1) Nous n'insistons pas sur le cas où d serait réductible et aurait pour image une droite issue d'un des $11 M_i$; il ne saurait donner d'autres courbes de genre 4 que $C^7(11 M_i^2)$.

le premier et 4 des seconds, ce qui est impossible; si enfin $|C|$ possède 2 points triples et 11 points doubles, D contient les 2 premiers et 2 des seconds. Dans tous les cas, la conclusion est absurde. Un peu d'attention montrera que les considérations précédentes tiennent quand il existe des points-base impropres.

D'autre part, le système $C^7(11 M_i^2)$, quand il est irréductible, est toujours un réseau. En effet, si ce système devient surabondant, sa série caractéristique est spéciale, précisément une g_5^2, puisque C n'est pas hyperelliptique; $|C|$ est un système simple de dimension 3, degré 5 et genre 4, qui peut servir de représentation plane à une surface G du cinquième ordre de l'espace ordinaire. G possède une conique double, éventuellement réduite à deux droites coplanaires, distinctes ou non, ou encore deux droites doubles gauches, qui peuvent être infiniment voisines. Dans la première hypothèse, les quadriques menées par la conique double découpent sur G un système ∞^4 de sextiques irréductibles de genre 4 et de degré 6, cela quelles que soient les particularités de G sur la conique double, puisque ce système contient celui des sections planes de G; en d'autres termes, $|C|$ doit être contenu dans un système plus ample de même genre, dont l'adjoint, devant contenir $|C_1|$ sans être de dimension supérieure à 3, se réduit à $|C_1|$. Cette propriété est d'ailleurs un cas particulier d'un théorème général contenu dans le Mémoire [N], Chapitre V, n° 33. Elle conduit ici à une absurdité, puisque nous avons reconnu il y a un instant que seul $C^7(11 M_i^2)$ et les systèmes surbordonnés admettent $|C_1|$ comme adjoint.

Si, au contraire, G admet deux droites doubles gauches, la congruence des rayons incidents à celles-ci est en correspondance birationnelle avec G et marque dans un plan quelconque la représentation plane de G. Les sections planes de G ont pour images un système de sextiques à 2 points triples et 13 points simples fixes, qui ne peut être équivalent à un système $C^7(11 M_i^2)$ d'ordre minimum.

En résumé, *les seuls systèmes* $|C|$ *d'ordre minimum dont l'adjoint pur est de genre* 3 *et de degré* 5, *non hyperelliptique et doué d'un adjoint de genre* 0, *sont le réseau* $C^7(11 M_i^2)$ *et les systèmes subordonnés, d'existence effective.*

En dehors de la restriction préalable que les $11 M_i$ n'appartiennent pas à une cubique, certaines conditions sont requises pour que $C^7(11 M_i^2)$ soit irréductible; il faut que 4 des $11 M_i$ ne soient jamais en ligne droite, et que 8 d'entre eux n'appartiennent jamais à une conique.

7. D'après le n° 5, nous avons ensuite à déterminer les systèmes $|C|$ d'adjoint $|C_1| = C^6(7 M^2, 3 N^1)$. Observons d'abord que les points-base de C^6 ne doivent pas appartenir à une cubique, sans quoi $|C_1|$ admettrait un point-base accidentel sur celle-ci. $|C_1|$ a pour image une surface quintique F douée de trois droites doubles d_j, représentées dans le plan R de $|C_1|$ par les trois cubiques $D_j^3(7 M^1, 2 N^1)$; ces droites forment un trièdre de sommet O, point triple impropre pour F, car il correspond au terne neutre formé des intersections deux à deux des cubiques D_j.

Nous pouvons reprendre des raisonnements analogues à ceux du cas précédent. S'il existe sur F un système $|K|$ de sextiques de genre 4, homologue d'un système $|C|$ d'adjoint $|C_1|$, les quadriques qui passent par les courbes K rencontrent ultérieurement F suivant des biquadratiques d représentées dans R par des courbes d'ordre au plus égal à 3. Si les courbes d sont irréductibles, elliptiques et en nombre infini, il leur correspond nécessairement dans R des cubiques elliptiques D, irréductibles, qui passent une fois en chaque point-base M_i, propre ou impropre, sinon les conditions d'adjonction seraient impossibles à respecter par l'adjoint impur $|C'| = |C_1|$. En revanche, les courbes D ne passeront en aucun point N_j. Le système $|2C_1 - D| = C^9(7M_i^3, 3N_j^2)$ possède virtuellement le genre 4 et la dimension 3. Il constitue une solution si nous établissons qu'il est irréductible et dépourvu de points-base multiples accidentels.

Puisque sa dimension virtuelle vaut 3 et qu'une biquadratique d permet de construire une simple infinité de courbes K, les courbes d dépendent de deux paramètres, c'est-à-dire que les cubiques D forment le réseau $D^3(7M_i^1)$ complet. Ceci permet aussi d'affirmer que 3 est la dimension effective du système trouvé. Les courbes du réseau $|d|$ s'appuient en deux points variables sur chaque droite double d_j et ne passent pas en O; deux courbes d ont en commum deux points variables alignés sur O. Les quadriques menées par une courbe d rencontrent encore F suivant un faisceau de sextiques K de genre 4, avec 6 points communs situés par couples sur les d_j. Les courbes K relatives à toutes les courbes d n'ont donc pas de points fixes sur F; elles n'ont pas de composante commune et ne sont pas composées au moyen des courbes d'un faisceau. $C^9(7M^3, 3N^2)$ est donc un système irréductible de genre 4, de dimension 3 et de degré 6.

De nouveau, il y a lieu d'examiner s'il existe des systèmes $|C|$ distincts du précédent et d'adjoint $|C_1|$, ou, ce qui revient au même, si les biquadratiques d, intersections résiduelles de F avec les quadriques Q menées par les sextiques K homologues de C, peuvent avoir pour transformées dans R d'autres courbes que $D^3(7M^1)$. Les quadriques Q ne peuvent passer doublement au point triple O de F, sinon O serait au moins quintuple pour les courbes d. Supposons successivement qu'elles ne passent pas en O et qu'elles y passent simplement.

Dans le premier cas, chaque courbe d, irréductible ou non, est bisécante aux trois droites doubles d_j, de sorte que le faisceau de quadriques de base d renferme un cône de sommet O passant par les trois droites d_j. Dans le second cas, Q ne peut contenir une droite d_j sans qu'on trouve pour $|C|$ un système d'ordre inférieur à 9 ou, de nouveau, un système subordonné à $C^9(7M^3, 3N^2)$ si Q contient en outre les droites images de $2N_j$; en admettant donc que Q ne passe par aucune droite d_j, la courbe d passe au moins doublement en O et rencontre encore une fois chaque d_j; le faisceau de quadriques de base d renferme une quadrique soumise à contenir un point d'une droite d_j non située dans le plan tangent commun en O, c'est-à-dire un cône mené par les trois droites d_j.

Dans les deux cas considérés, la biquadratique d est adjointe aux sections planes de la surface F et a pour image une courbe D du réseau $D^3(7M^1)$. Le seul accident qui puisse infirmer les résultats déjà obtenus est la dégénérescence de D en deux courbes dont l'une, fondamentale pour $|C_1|$, doit être défalquée de D quand on veut obtenir l'image proprement dite de d. Cette courbe fondamentale représente un point double P de F, double aussi pour d, de sorte que toute quadrique Q contenant d recoupe F suivant une sextique K dont l'image appartient au système $|2C_1 - D| = C^9(7M^3, 3N^2)$. Nous concluons :

Les seuls systèmes $|C|$ *d'ordre minimum dont l'adjoint pur est de genre* 3 *et de degré* 5, *formé de courbes non hyperelliptiques, sont les systèmes mentionnés au* n° 6 *ou* $C^9(7M^3, 3N^2)$, *de dimension et degré effectifs* 3, 6, *et les systèmes subordonnés.*

8. Toujours dans l'hypothèse $p_1 = 3$, $m_1 = 5$, nous rencontrons le cas où le système adjoint $|C_1|$ est simple et formé de courbes hyperelliptiques. Son adjoint pur est alors composé au moyen d'un faisceau de courbes rationnelles, qu'on peut réduire à un faisceau de rayons. Dans ces conditions, $|C_1|$ est réductible au type $C^{n+2}(M^n, n-3N^2, 11P^1)$. En outre, on pourra supposer que l'ordre de $|C_1|$ ne peut être abaissé par *une* transformation quadratique dont M est un point fondamental; alors, pour $n > 3$, tous les points N sont dans le domaine du premier ordre de M ou, éventuellement, proches de M, tandis que les 11 points P se répartissent sur une ou plusieurs branches d'origine M; n est visiblement inférieur à 6.

L'image projective de $|C_1|$ doit être une surface F du cinquième ordre douée d'une droite triple d; la surface générique de ce type admet d'ailleurs la représentation correspondant à $n = 3$. Pour notre objet, F ne doit pas avoir de point quadruple, sinon une représentation plane s'obtient immédiatement par projection de ce point, le système représentatif $|C_1|$ est du cinquième ordre et toute sextique canonique tracée sur F a pour homologue une courbe plane d'ordre au plus égal à 6, donc trop faible pour admettre $|C_1|$ comme adjoint. Par suite, les coniques h découpées sur F par les plans contenant la droite triple d ne peuvent avoir de point fixe.

Dans le plan R de $|C_1|$, les droites H issues du point M correspondent précisément aux coniques h de la surface F. Par ce qui précède, le domaine du premier ordre de M doit être l'image d'une courbe effective de F (et non d'un point), ce qui exclut le cas $n = 5$, le cas $n = 4$ lorsque les 11 points P se répartissent sur deux branches issues de M, et aussi le cas $n = 3$ si 3 de ces 11 points sont proches de M. Il nous reste ainsi pour $|C_1|$ deux types : *a*. $C^5(M^3, 11P^1)$; *b*. $C^6(M^4, N^2, 11P^1)$ où N est infiniment voisin de M, les 11 points P se succédant sur *une* branche linéaire issue de M; d'ailleurs [IV], quand le type C^6 est d'ordre minimum, cette branche est inflexionnelle.

S'il existe sur F une sextique K de genre 4, la quadrique Q menée par K découpe ultérieurement sur F une biquadratique δ. Q n'est pas un cône de sommet situé sur d, car ce sommet serait au moins double pour K. Q ne passe pas non plus par d, sinon ce serait une quadrique non conique contenant une biquadratique δ qui comprend au moins trois fois une droite d. Il en résulte que Q rencontre d en deux points A_1, A_2, doubles pour la biquadratique δ. Cette dernière se compose en réalité de deux coniques h_1, h_2 qui rencontrent d aux mêmes points A_1, A_2. Il n'est pas exclu que h_1 et h_2 se confondent, mais alors A_1, A_2 sont des points-pince de F, puisque, en chacun de ces points, la sextique K possède une seule tangente [1].

D'après cela, nous allons montrer qu'il faut rejeter le cas où l'adjoint $|C_1|$ serait du type $C^6(M^4, N^2, 11\,P_i^1)$ décrit ci-dessus. Tout d'abord, les courbes C_1 qui contiennent la tangente simple fixe, inflexionnelle, H_0, sont complétées par les courbes $C^5(M^3, N^2, 9P_i^1)$ d'un réseau; mais le système ∞^3 des quintiques $C^5(M^3, N^2, 8P_i^1)$ est composé au moyen d'une involution du second ordre, dont les couples sont formés de points alignés sur M; de sorte que le réseau considéré possède un point-base accidentel T, infiniment voisin de P_9 mais distinct de P_{10}. Il a le degré 2 et le genre 2; en conséquence, la droite fondamentale H_0 correspond à un point triple O de la surface F, situé sur la droite triple d, tel que tout plan mené par O découpe sur F une quintique douée d'un point triple O et d'un point double infiniment voisin. On en déduit que F possède en O un plan tangent ω_0 qui compte pour deux au moins et découpe sur F, en dehors de d, deux droites issues de O; de plus, dans la correspondance projective liant les plans ω menés par d aux droites H issues du point M, le plan ω_0 a pour homologue la droite H_0, puisque la conique h associée est dégénérée.

D'autre part, le simple jeu du principe de déchargement et des relations de voisinage, compte tenu de la surabondance du réseau $|C_1 - H_0|$, montre que les courbes C_1 assujetties à contenir le domaine du point M ou du point P_{11} comprennent la droite H_0 comptée cinq fois et sont complétées par les droites du faisceau $|H|$. Ainsi, l'image de la droite triple d de F se compose de la droite H_0 comptée cinq fois, du domaine de M compté deux fois et du domaine de P_{11}. En d'autres termes, les courbes C_1 touchant en M une droite H quelconque ont encore en commun un point dans le domaine du second ordre de M et un point dans le domaine de P_{11}. Les points du terne neutre considéré appartiennent à trois droites du faisceau $|H|$, dont deux coïncident avec la direction H donnée, la troisième étant H_0. Par suite, en un point quelconque de la droite d, la surface F touche le plan ω_0 et possède deux plans tangents variables confondus. En outre, les coniques h touchent la droite d (en un point variable).

En prenant pour d l'axe $x_1 = x_2 = 0$ d'un système de coordonnées projec-

(1) Toutefois, quand A_2 est infiniment voisin de A_1, il n'est pas certain que le plan des coniques $h_1 = h_2$ soit un plan tangent double de la surface F.

tives, $x_1 = 0$ représentant le plan ω_0, l'équation de F sera de la forme

$$x_1[x_3^2 f_2 + x_4^2 g_2 + x_3 x_4 h_2] + x_3 f_4 + x_4 g_4 + h_5 = 0,$$

où f, g, h désignent des formes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice. Le plan ω d'équation $x_1 = kx_2$ découpe sur F une conique h, rencontrant d en deux points dont les coordonnées vérifient la relation

$$k[x_3^2 f_2(k, 1) + x_4^2 g_2(k, 1) + x_3 x_4 h_2(k, 1)] = 0;$$

pour notre objet, cette équation doit admettre une racine double quel que soit le paramètre k, d'où

$$h_2^2 \equiv 4 f_2 g_2. \tag{1}$$

Observons qu'au point O, par exemple de coordonnées (0, 0, 0, 1), les trois plans tangents à la surface coïncident avec $\omega_0(x_1 = 0)$. Par suite, g_2 est identique à x_1^2, puis, par (1), $h_2 \equiv 2x_1 h_1$, $f_2 \equiv h_1^2$. L'équation de F s'écrit alors

$$x_1[x_3^2 h_1^2 + x_1^2 x_4^2 + 2x_1 x_3 x_4 h_1] + x_3 f_4 + x_4 g_4 + h_5 = 0,$$

tandis que la relation entre un plan tangent $x_1 = kx_2$ et son point de contact $(0, 0, y_3, y_4)$ devient

$$k[y_3^2 h_1^2(k, 1) + y_4^2 k^2 + 2k y_3 y_4 h_1(k, 1)] = 0$$

ou encore

$$k[y_3 h_1(k, 1) + k y_4]^2 = 0,$$

ce qui prouve *a posteriori* que F possède bien le long de d un plan tangent fixe et un plan tangent double variable. D'ailleurs, l'équation obtenue pour F représente visiblement une surface irréductible.

Mais nous n'avons pas tenu compte de toutes les propriétés de F qu'on peut déduire de la représentation plane; ainsi, le plan ω_0 recoupe F suivant deux droites issues de O (dont l'une coïncide avec d), et $g_4 \equiv x_1 g_3$. Néanmoins, quelles que soient les particularités que possède encore la surface F, celle-ci reste irréductible dès que le système $|C_1|$ du type examiné existe irréductible et simple, de genre et de degré effectifs 3 et 5. De toute façon, nous prouvons la thèse en montrant qu'une surface F irréductible ne possède pas de sextique projectivement canonique K.

La quadrique Q menée par K ne passe pas par d et recoupe F suivant deux coniques h_1, h_2 touchant d au même point A, nécessairement confondues dans un plan ω distinct de ω_0, tangent cuspidal en A à la surface F. L'absurdité réside dans le fait qu'une quadrique irréductible Q ne peut toucher F le long d'une conique h, nécessairement irréductible. En effet, le contour apparent de la surface F vue du pôle de ω par rapport à la quadrique Q (1) — ce pôle P n'est

(1) Ou du sommet P de Q si cette quadrique est un cône.

pas situé dans le plan ω — contiendrait la conique h; dans le plan R de $|C_1|$, la jacobienne d'un certain réseau extrait de $|C_1|$ contiendrait l'image H de la conique h, alors que les courbes du réseau considéré doivent effectivement découper sur la droite H une série g_2^2, ce qui est absurde. On peut encore montrer analytiquement l'absurdité en traduisant que la polaire de P par rapport à F découpe sur le plan ω, en dehors de d, la conique h; à cet effet, on pourra poser $A(0, 0, 1, 0)$, $\omega(x_2 = 0)$, donc $h_1 \equiv ax_2$; dans $x_2 = 0$, l'équation de h ne renferme pas de rectangle x_3x_4, d'où la relation $2ay_2 = 0$; mais la coordonnée y_2 de P n'est pas nulle, de sorte que $h_1 \equiv 0$ et F passerait 4 fois par A, ce qui est exclu.

9. La conclusion de toute cette analyse est que seul $C^5(M^3, 11N^1)$ peut servir d'adjoint $|C_1|$ à un système $|C|$ de genre 4. Puisque les sextiques K de F homologues des courbes C sont découpées par des quadriques qui contiennent deux coniques h_1, h_2 dont les plans passent par la droite triple d, $|C|$ est contenu dans $|2C_1 - 2H| = C^8(M^4, 11N^2)$, où H désigne les rayons du faisceau de sommet M dans le plan R de $|C_1|$. Ce système a la dimension virtuelle 1 et le genre virtuel 4. Nous allons voir que ce sont aussi ses caractères effectifs dans le cas générique, en même temps que nous prouverons son irréductibilité.

Les 12 points-base de $|C_1|$ étant fixés au hasard, il est clair que l'image de la droite triple d sera la quartique $C^4(M^2, 11N^1)$, irréductible et de genre effectif 2. Les courbes C_1 découpent sur cette quartique les ternes d'une g_3^1, tandis que les droites H marquent sur la même courbe les couples d'une g_2^1. D'après une formule classique de Schubert, la transformée $\overline{g}_3^1$ de g_3^1 dans l'involution g_2^1 possède deux couples communs avec g_3^1, qui se correspondent évidemment dans la g_2^1. Les droites H_1, H_2 issues de M qui joignent les points de ces couples représentent deux coniques h_1, h_2 rencontrant d aux mêmes points A_1, A_2, et réciproquement. Un tel couple de coniques est donc unique.

Les quadriques Q menées par les coniques du couple considéré découpent sur F un faisceau irréductible de sextiques K, qui n'a d'autres points-base que les deux points d'appui de h_1 et h_2 sur d et deux points infiniment voisins des précédents, situés sur l'intersection des plans tangents aux quadriques Q en A_1, A_2 avec les troisièmes plans tangents à F en ces points. Les courbes K, dépourvues de singularités ponctuelles, ont bien le genre 4. Il leur correspond, dans le plan R, les courbes $C^8(M^4, 11N^2)$ d'un faisceau, lui-même irréductible, puisqu'il contient l'image, comptée deux fois, de la droite triple d.

Le faisceau obtenu possède 4 points-base simples accidentels. Leur position est définie de la manière suivante : d'après ce que nous avons vu, il existe deux ternes de g_3^1 tels que deux points X_1, Y_1 du premier aient pour conjugués dans g_2^1 deux points X_2, Y_2 du second; les troisièmes points Z_1, Z_2 de ces groupes et les points infiniment voisins de Z_1, Z_2 situés sur les droites joignant ces points au point M sont les points-base accidentels du système $|C|$.

Si l'adjoint $|C_1|$ *d'un système irréductible* $|C|$ *de genre* 4 *est simple et formé de courbes hyperelliptiques de genre effectif* 3, *donc de degré effectif* 5, *il est réductible à un système* $C^5(M^3, 11N^1)$. *Quand les points-base de* C^5 *sont fixés au hasard,* $|C|$ *est le faisceau* $C^8(M^4, 11N^2, 2Z^1, 2U^1)$, *où* Z_1 *et* Z_2 *sont les* 2 *points de la quartique* $C^4(M^2, 11N^1)$, *irréductible et de genre* 2, *tels que les quintiques* C_1 *assujetties à contenir* Z_1 *ou* Z_2 *recoupent* C^4 *suivant* 2 *couples de points alignés sur* M, *et où* U_i *est infiniment voisin de* Z_i *sur la droite* MZ_i.

10. On peut se préoccuper de savoir si un choix particulier des 11 points-base de $|C_1|$ est capable d'amener une perturbation dans les caractéristiques du système $|C|$. Celui-ci peut évidemment cesser d'exister au titre de système d'adjoint $|C_1|$; il suffit, par exemple, que 3 des points N_i soient *proches* de M pour que ce dernier point devienne automatiquement quintuple pour $C^8(M^4, 11N_i^2)$, de telle sorte que l'adjoint de $|C|$ n'est plus $C^5(M^3, 11N^1)$; parmi les autres cas d'exception, les plus apparents sont ceux où $5N_i$ se trouvent sur une droite, ou bien plus de $8N_i$ sur une conique, ou encore M et $7N_i$ sur une conique. Le problème le plus important est toutefois d'étudier s'il est possible de trouver un système $|C| = C^8(M^4, 11N^2)$ de dimension supérieure à 1. Si celui-ci admet $C^5(M^3, 11N^1)$ pour adjoint, les multiplicités de C aux points-base de $|C_1|$ sont nécessairement celles que nous renseignions, même en tenant compte du principe de déchargement; donc, son degré effectif est au plus 4 et, comme les courbes C ne peuvent être hyperelliptiques, sa dimension est au plus 2. Il suffit par suite d'examiner si $|C|$ peut devenir un réseau (de degré 4 ou 3).

Ce cas se présente chaque fois que, sur la surface F, il existe une infinité de couples de coniques h_1, h_2 qui rencontrent la droite triple d suivant un même couple de points, nécessairement variables avec ces coniques, puisque F est dépourvue de point quadruple; d'ailleurs, l'une de ces coniques ne peut être fixe, sinon elle contiendrait d, ce qui n'est pas admis pour tous les couples h_1, h_2. Nous devons d'emblée exclure les surfaces F qui possèdent un plan tangent fixe double ou triple, ou encore deux plans tangents simples fixes le long de d; pour des raisons qui apparaîtront bientôt, nous supposerons que la surface F ne possède pas, le long de d, un plan tangent multiple variable.

En prenant pour d l'axe $x_1 = x_2 = 0$ d'un système de coordonnées projectives, et en supposant que deux plans tangents variables soient les mêmes en O_3 qu'en O_4, par exemple $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, F admet la représentation provisoire

$$x_1 x_2 (x_3^2 a_1 + x_4^2 b_1) + x_3 x_4 a_3 + x_3 a_4 + x_4 b_4 + a_5 = 0,$$

où a_i, b_i désignent des formes de degré i en x_1, x_2. Les plans tangents $x_1 = u x_2$ en un point $x_3 = v x_4$ de d répondent à la condition

$$u[v^2 a_1(u, 1) + b_1(u, 1)] + v a_3(u, 1) = 0.$$

Chaque plan est tangent en deux points de paramètres v_1, v_2 tels que

$$v_1 v_2 = \frac{b_1(u, 1)}{a_1(u, 1)}, \qquad v_1 + v_2 = -\frac{a_3(u, 1)}{u a_1(u, 1)}.$$

Pour qu'en ces points existent au moins deux plans tangents communs, il faut que la première des relations précédentes soit vérifiée par deux valeurs de u, donc que $b_1(x_1, x_2) \equiv a_0 a_1(x_1, x_2)$ et que v_1, v_2 soient conjugués dans l'involution $v_1 v_2 = a_0$. La relation qui donne $v_1 + v_2$ exprime alors qu'aux deux points correspondants sur d les trois plans tangents sont les mêmes (en particulier, en O_3 et O_4). La surface d'équation

$$x_1 x_2 a_1(x_3^2 + a_0 x_4^2) + x_3 x_4 a_3 + x_3 a_4 + x_4 b_4 + a_5 = 0$$

satisfait aux conditions prescrites, ne contient généralement aucune singularité ponctuelle en dehors de la droite triple d; comme elle ne possède pas de plan tangent multiple variable le long de cette droite, elle conduit certainement à un système représentatif (*cf.* le n° 8) $|C_1| = C^5(M^3, 11 N^1)$, donc à un réseau surabondant $C^8(M^4, 11 N^2)$ de degré 4. Notons que, si a_3 contient le facteur a_1, un plan tangent est fixe le long de d.

11. Après avoir établi l'existence de réseaux surabondants $C^8(M^4, 11 N^2)$, il s'agit de trouver les configurations possibles de leurs points-base. Une étude poussée conduirait à des développements hors de proportion avec la place qu'occupent ces réseaux dans le plan général de notre travail. Nous nous bornerons donc ici, par un raisonnement rapide, à obtenir les types généraux de solutions, en nous réservant d'y revenir avec plus de détails dans une publication séparée. Les configurations trouvées sont en effet assez remarquables pour mériter d'être examinées de plus près.

L'image $C^4(M^2, 11 N^1)$ de la droite triple d de F doit présenter des particularités qui traduisent la répartition des plans tangents. Nous admettrons dans nos raisonnements que cette image C^4 reste irréductible et de genre 2. Elle possède une involution g_2^1 découpée par les droites H issues de M et une série linéaire g_3^1 découpée par $C^5(M^3, 11 N^1)$ lui-même. Cette dernière est dépourvue de point multiple variable et de point fixe, de sorte que les points de son terne générique appartiennent à 3 droites H distinctes; l'image projective F de $|C_1|$ est donc dépourvue de plan tangent multiple variable le long de d et F rentre dans le type considéré au numéro précédent. La répartition particulière des plans tangents à F le long de d équivaut à la permutabilité de g_2^1 avec g_3^1, ou encore à l'équivalence $2g_3^1 \equiv 3g_2^1$. Or, sur C^4, g_3^1 peut être découpée par un faisceau de coniques assujetties à passer en M et en trois points X_i convenables de C^4; l'un des X_i peut d'ailleurs être choisi arbitrairement, à moins que les ternes de g_3^1 ne soient formés de points collinéaires, auquel cas la g_3^1 est découpée sur C^4 par les droites issues d'un certain point X de C^4. Il existe donc toujours une transformation quadratique, se réduisant éventuellement à l'identité, qui fait passer de C^4 à une quartique $\overline{C}^4$, dotée d'un point double $\overline{M}$, sur laquelle la transformée de g_3^1 soit découpée par un faisceau de rayons dont le sommet $\overline{X}$ appartient à $\overline{C}^4$. L'équivalence écrite ci-dessus peut alors se traduire géométriquement de façon très simple à l'aide des intersections $\overline{P}$, $\overline{Q}$ de $\overline{C}^4$ avec les tangentes en $\overline{M}$: *il faut et il suffit que la tangente à* $\overline{C}^4$ *en* $\overline{X}$ *contienne* $\overline{P}$ *et* $\overline{Q}$. En effet, si $\overline{Y}$ désigne l'intersection ultérieure de $\overline{MX}$ avec $\overline{C}^4$, $(\overline{X}, \overline{P}, \overline{Q})$ et $(\overline{M}, \overline{M}, \overline{Y})$ sont deux groupes de l'involution d'ordre 3, $(\overline{M}, \overline{P})$, $(\overline{M}, \overline{Q})$, $(\overline{X}, \overline{Y})$ trois couples de celle d'ordre 2. Pour plus de brièveté, nous dirons que $\overline{C}^4$ présente la disposition I en $\overline{M}$, $\overline{X}$. Pour obtenir celle-ci, il a fallu, en général, appliquer à C^4 une transformation quadratique, qui peut avoir aussi pour effet d'élever l'ordre du système $|C_1|$, de sorte que nous ne pouvons pas toujours remplacer C^4 par $\overline{C}^4$ si nous désirons conserver des systèmes d'ordre minimum. C^4 ne présente généralement pas la disposition I, mais une disposition un peu plus compliquée : elle doit posséder un point double M, un point simple X et quatre points alignés X_2, X_3, Y, Z tels que la conique menée par M, X, X_2, X_3 et tangente à C^4 en X coupe ultérieurement cette quartique en deux points situés respectivement sur MY, MZ. C'est ce que nous appellerons la disposition II relative à M, X, X_2, X_3. Notons que les rôles de X, X_2 et X_3 sont permutables.

Cela étant, supposons qu'il existe un système $C^5(M^3, 11N^1)$ avec une courbe $C^4(M^2, 11N^1)$ qui présente la disposition II par rapport à M et trois de ses points X_i. Nous pouvons choisir l'un de ceux-ci parmi les $11N_i$. Généralement, aucun des deux autres ne coïncide avec un point N_i et il n'est pas possible de se ramener à la disposition I. Mais, si deux des X_i peuvent coïncider avec N_{10}, N_{11}, une transformation quadratique de points fondamentaux M, N_{10}, N_{11} ramène le système à un autre du type $C^5(M^3, 11N^1)$, doué d'une courbe $C^4(M^2, 11N^1)$ présentant la disposition I par rapport à M et un de ses points X. Enfin, si les trois X_i peuvent coïncider avec N_9, N_{10}, N_{11}, une transformation quadratique de points fondamentaux M, N_9, N_{10} ramène à un système $C^5(M^3, 11N^1)$ avec courbe $C^4(M^2, 11N^1)$ présentant la disposition I par rapport à M, N_{11}. Nous voyons qu'il doit exister un type général dont peuvent se déduire deux types particuliers de structure plus simple, bien que du même ordre.

La position de tous les points-base n'est pas encore définie d'une façon assez précise pour qu'on puisse assurer l'existence d'un réseau $C^8(M^4, 11N^2)$ d'adjoint $C^5(M^3, 11N^1)$. Il faut par suite que nous étudiions encore dans quelles conditions le système $C^5(M^3, 11N^1)$ découpe précisément sur $C^4(M^2, 11N^1)$ l'involution g_3^1 permutable avec celle des couples de points alignés sur M.

Dans le cas général, la quartique C^4 présente la disposition II par rapport à M et trois de ses points dont un, P, appartient à la base de $|C_1|$ tandis que les deux autres, Q_1, Q_2, ne jouissent pas de cette propriété. La conique menée par M, Q_1, Q_2 et touchant C^4 en P recoupe C^4 en deux points A, B tels que les droites MA, MB rencontrent ultérieurement C^4 sur la droite Q_1Q_2. Les points A, B, P forment un terne de l'involution g_3^1, de sorte que, par le théorème du reste, les quintiques (M^3, P^1, P^1, A^1, B^1) qui touchent C^4 en P découpent encore sur C^4 la série linéaire complète g_{10}^8 déterminée par le groupe $10N_i$ des points-base simples de $|C_1|$ distincts de P.

Dans les autres cas, on peut supposer que la quartique C^4 présente la disposition I par rapport à M et un de ses points P. La tangente en P à C^4 recoupe cette courbe en deux points A, B situés sur les tangentes en M à C^4; les points A, B, P forment un terne de la g_3^1 et les 11 points-base simples de $|C_1|$ déterminent la série linéaire complète g_{11}^9 découpée sur C^4 par les quintiques (M^3, A^1, B^1, P^1); en observant que le dernier point d'intersection de la droite PM avec C^4 forme, avec les points infiniment voisins de M sur C^4, un terne de la g_3^1, on peut substituer à ces quintiques les quintiques (M^4, Q_1). En particulier, si le point P est commun à toutes les courbes C_1, les 10 points-base simples ultérieurs de $|C_1|$ sont à l'intersection de C^4 et d'une quintique (M^3, A^1, B^1, P^1, P^1) touchant C^4 en P, ou, comme on voit, d'une quartique (M^3) (augmentée de la droite ABP) [1]. On observera que l'image projective F des systèmes particuliers $|C_1|$ que nous venons de construire possède soit une conique unisécante à la droite triple d, d'image $C^5(M^4,\ Q^1,\ 11N^1)$, soit une droite ne s'appuyant pas sur d, d'image $G^4(M^3,\ 10N^1)$.

Résumons-nous.

Pour certaines positions des points-base, le système $C^5(M^3,\ 11N^1)$ *est l'adjoint pur d'un réseau de degré* 4, $C^8(M^4,\ 11N^2)$, *d'ordre minimum et de surabondance* 1. *Lorsque la quartique* $C^4(M^2,\ 11N)$ *est irréductible et de genre* 2, *les* 10 *points* N_2, N_3, …, N_{11} *constituent l'intersection de* $C^4(M^2,\ N_1^1)$ *avec une quintique* $C^5(M^3,\ A^1,\ B^1)$ *qui touche* C^4 *en* N_1, A *et* B *désignant deux points de* C^4 *tels que la conique menée par* M, A, B *et touchant* C^4 *en* N_1 *rencontre ultérieurement* C^4 *en deux points situés sur la droite qui joint les points d'intersection de* C^4 *et des droites* MA, MB. *Des dispositions particulières plus simples sont décrites ci-dessus* (*n*° 11).

12. Il reste, pour achever le programme tracé au n° 1, à découvrir les systèmes $|C|$ de genre 4 dont l'adjoint $|C_1|$ est simple, de genre 3 et de degré 4, de surabondance 1. L'image projective de $|C_1|$ est une surface rationnelle

---

[1] Ici, la construction directe de $|C_1| = C^5(M^3,\ 10N,\ P)$ est facile : il suffit de combiner les courbes formées de $C^4(M^2,\ 10N,\ P)$ et des rayons issus de M avec celles formées de $G^4(M^3,\ 10N)$ et des rayons issus de P. On voit avec évidence que $|C_1|$ découpe bien sur C^4 la même série que les droites issues de P.

quartique F plongée dans l'espace ordinaire et dépourvue de courbe multiple, c'est-à-dire [III, chap. VIII] douée d'un point triple, d'un tacnode ou d'un point double avec tacnode infiniment voisin. Ce dernier cas conduit à deux types, connus sous le nom de *surfaces* $F_4^{(2)}$ *et* $F_4^{(3)}$ *de Noether*. Excluons d'emblée les monoïdes, pour la même raison qu'au début du n° 8, et donnons quelques généralités valables pour les trois autres types de surfaces.

La quadrique Q menée par toute sextique K, projectivement canonique, tracée sur F rencontre ultérieurement la surface suivant une conique h (courbe *plane* du second ordre), réductible ou non. Pour notre objet, *le plan de h passe nécessairement par le point singulier* O *de* F, tacnode ou point double avec tacnode infiniment voisin. En effet, si h ne contient pas O, le système $|K$ découpé sur F par les quadriques menées par h est effectivement dépourvu de points-base multiples et doit avoir pour adjoint le système des sections planes; or, par la loi distributive de l'adjonction, le système adjoint est découpé par les quadriques soumises à contenir h et le point double O; pour que ces quadriques se réduisent à l'ensemble des plans, il faut qu'il s'en détache un plan fixe où se trouvent à la fois h et O. On voit de plus que tout système d'adjoint $|C_1|$ est contenu dans un système de dimension 4, homologue de celui découpé sur F par les quadriques qui passent par la conique h attachée au système. Nous disons bien *la* conique, sinon F porterait un faisceau de droites ou de coniques situées dans des plans menés par O; ceci, on le sait, n'a pas lieu pour les trois types de surfaces considérés (¹). Aussi nous bornerons-nous à la recherche des systèmes $|C|$ de dimension 4. Un tel système contient nécessairement son adjoint pur $|C_1|$ et a par suite le degré effectif 6 et la surabondance 1. Envisageons successivement les trois types de surfaces rationnelles quartiques avec point double.

Quand F possède un tacnode O, elle est l'image d'un système plan $|C_1| = C^6(7M^2, 4N^1)$ avec cubique fondamentale $G^3(7M^1, 4N^1)$. Cette cubique représente le domaine du point O, tandis que la section de F par le plan tacnodal est formée de quatre droites issues de O et correspond à la courbe C_1 comprenant la cubique G^3 comptée deux fois et le domaine des quatre points N_i. Si la conique h associée au système $|K|$ passe en O, le système $|C|$ homologue de $|K|$ dans le plan est contenu dans $|2C_1 - G^3| = C^9(7M^3, 4N^1)$. Comme il ne peut avoir l'ordre inférieur à 9, l'homologue de h dans le plan se réduit au domaine d'un point M, à celui de deux points N ou à deux fois celui d'un point N. Dans la première hypothèse, un point M *propre* deviendrait quadruple pour $|C|$ et devrait être au moins triple pour $|C_1|$; dans la deuxième, quand l'accident précédent n'a pas lieu, $|C_1|$ aurait la surabondance 2; dans la troisième, un point N serait triple pour $|C|$ et double pour $|C_1|$, à moins, encore une fois, qu'un point propre M ne devienne quadruple pour $|C|$.

(¹) La surface F n'est pas réglée et ses sections planes ne sont pas hyperelliptiques.

Supposons donc que la conique h ne contienne pas O. Son plan U passe par O et coupe encore F suivant deux droites issues de O; il est distinct du plan tacnodal, de sorte que les deux droites considérées sont confondues. Il faut, par conséquent, que U touche F tout le long d'une des quatre droites de F contenues dans le plan tacnodal. Désignons par d cette droite, homologue du point-base N_4 de $|C_1|$, et observons que d est une composante *simple* de la section de F par le plan tacnodal, sans quoi F posséderait le long de d deux plans tangents distincts, le plan tacnodal et le plan U. Dans le plan, le faisceau de cubiques $C^3(7M^1, N_4^1)$ correspond aux cubiques découpées sur F par les plans menés par d; il contient une cubique $(7M^1, N_4^2)$, image de la section par U, et la cubique G^3, image de la section par le plan tacnodal, passant effectivement *une* fois par N_4; par suite, ses cubiques touchent G^3 en N_4. Les cubiques découpées sur F par les plans contenant d sont tangentes à d en O et recoupent donc d en un point fixe O′, infiniment voisin de O; les cubiques envisagées admettent en O une branche inflexionnelle tangente à d. En outre, *le point* N_4 *est uni pour l'involution de Geiser engendrée par le réseau* $C^3(7M^1)$. La conique h située dans le plan U a pour homologue la courbe particulière $H^3(7M^1, N_4^2)$. Retranchée de $|2C_1|$, celle-ci donne le système $|C| = C^9(7M^3, 3N^2)$, le seul de dimension 4 qui puisse admettre l'adjoint $|C_1|$, sauf permutation éventuelle des points N_i.

D'après la construction même, sur F, du système $|K|$ homologue du système trouvé $|C|$, celui-ci est irréductible, de dimension 4, de genre 4 et de degré 6, pour autant qu'il existe une surface F douée des caractères décrits plus haut. Or, l'équation

$$x_4^2x_3^2 + x_4x_3(x_2F_1 + x_3f_1) + x_2F_3 + x_3^2f_2 = 0,$$

dans laquelle F_i et f_i désignent des formes d'ordre i en (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_3) respectivement, représente une telle surface irréductible, avec tacnode O_4 et plan tacnodal $x_3 = 0$, tangente au plan $x_2 = 0$ tout le long de la droite $x_2 = x_3 = 0$, et rencontrée par ce plan suivant une conique qui ne passe pas au tacnode. La question de l'existence de $|C|$ se trouve ainsi élucidée.

Il peut paraître singulier que la condition d'existence de $|C|$ soit imposée à un point N_4 non contenu dans la base de $|C|$. Mais il faut remarquer que, jointe à l'hypothèse de l'existence du système surabondant $C^6(7M^2, 4N^1)$ de dimension 3, elle limite le choix des trois autres N_i. En effet, le choix de N_4 est possible de quatre manières si G^3 est elliptique (de deux seulement quand G^3 est rationnelle); le système $C^6(7M^2, N_4^1)$ découpe alors sur G^3 une série linéaire g_3^2, de sorte que deux seulement des points N_1, N_2, N_3 peuvent être pris arbitrairement. Il est d'ailleurs possible, sans sortir du plan, d'établir directement que N_4 est uni pour l'involution de Geiser définie par $C^3(7M^1)$. Si, en effet, nous donnons à G^3 la représentation paramétrique cartésienne $x = p(u)$, $y = p'(u)$, où $p(u)$ est la fonction elliptique élémentaire de

Weierstrass, et si m_i, n_j sont les valeurs de u aux points M_i, N_j, l'existence des systèmes $|C|$ et $|C_1|$ entraîne les relations

$$3\sum_1^7 m_i + 2\sum_1^3 n_j \equiv 0 \quad (\text{mod. périodes}), \qquad 2\sum_1^7 m_i + \sum_1^4 n_j \equiv 0 \quad (\text{mod. périodes}),$$

d'où il résulte que

$$\sum_1^7 m_i + 2n_4 \equiv 0 \quad (\text{mod. périodes}),$$

comme nous l'avons annoncé.

Réciproquement, la condition imposée à N_4 est suffisante pour qu'existe une cubique $H^3(7M^1, N_4^2)$, donc aussi, si H^3 est distincte de G^3, le système $C^9(7M^3, 3N^2) = |2C_1 - H|$.

Puisque deux points N_2, N_3 peuvent être choisis arbitrairement sur G^3, nous pouvons prendre l'un d'eux en un second point uni de l'involution de Geiser sur G^3 : $|C_1|$ est alors l'adjoint de deux systèmes de dimension 4 et de même type, déduits l'un de l'autre en permutant les rôles des deux points unis adoptés. Si G^3 est elliptique, nous pouvons même fixer les trois points N_2, N_3, N_4 en trois points unis; N_1 *est alors le quatrième point uni*, comme il résulte aisément de la représentation paramétrique déjà adoptée de G^3 ou de la représentation analytique de la surface F qui possède des plans tangents fixes le long de trois droites issues du tacnode. L'équation d'une telle surface est réductible à la forme

$$x_4^2 x_3^2 + x_4 x_3^2 F_1(x_1, x_2, x_3) + x_4 x_3 f_2(x_1, x_2) + x_3 F_3(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2) = 0,$$

où f_2 est assujetti à contenir en facteur trois facteurs linéaires de f_4; f_2 est identiquement nul et le plan tangent le long de la quatrième droite est fixe à son tour. On vérifie immédiatement l'existence de quatre systèmes irréductibles $C^9(7M^3, N_i^2, N_j^2, N_k^2)$ d'adjoint $|C_1|$.

Tout système linéaire $|C|$ *de genre* 4 *dont l'adjoint* $|C_1|$ *est simple, de genre* 3, *degré* 4, *et d'adjoint* $|C_2|$ *elliptique, est contenu dans un système* ∞^4 *de même genre, réductible à* $C^9(7M^3, 3N^2)$, *de degré effectif* 6. *Ce dernier a pour adjoint un système surabondant* $C^6(7M^2, 3N^1, P^1)$ *avec cubique fondamentale* $G^3(7M^1, 3N^1, P^1)$; *la condition nécessaire et suffisante d'existence de* $|C|$ *est que* P *soit uni pour l'involution de Geiser engendrée par le réseau* $C^3(7M^1)$ *et effectivement simple pour* G^3. *Suivant que parmi les points unis* (*simples pour* G^3) *de l'involution de Geiser figurent un, deux ou quatre points-base simples du système adjoint donné* $|C_1|$, *il existe une, deux ou quatre solutions* $|C|$ *du type décrit ci-dessus, auxquelles sont subordonnés tous les systèmes d'adjoint* $|C_1|$.

13. Le cas suivant est celui où $|C_1|$ est le système $C^7(M^3, 9N^2)$ avec cubique fondamentale $G^3(M^1, 9N^1)$, représentatif de la surface $F_4^{(2)}$ de Noether. Le

système $|C_1 - G^3| = |C_2| = C^4(M^2, 9N^1)$ est un réseau de genre 2 et de degré 2, doué d'un point-base accidentel P situé sur G^3, et correspond à la gerbe ayant pour centre le point double isolé O de F; le faisceau $|C_1 - 2G^3| = |C_3| = C^1(M^1)$ a pour homologue le faisceau des quartiques, irréductibles et rationnelles, découpées sur F par les plans contenant la droite d qui joint O à un point tacnodal O_1 de F, infiniment voisin de O. Rappelons encore que la section de F par le plan osculateur en O a pour image la droite MP et ne peut contenir une droite.

Tout système quadruplement infini d'adjoint $|C_1|$ est du type $|2C_1 - H|$, où H est l'homologue d'une conique h de la surface. Nous savons que le plan de h contient O. Si O n'appartient pas à h, l'intersection ultérieure de la surface avec le plan de h se compose de deux droites issues de O, appartenant nécessairement au plan osculateur en O, ce qui est absurde. L'hypothèse que h passe en O n'offre non plus aucune issue; en effet, $|C|$ est alors du type $|2C_1 - G^3 - H|$, d'ordre 11 ou 10, H est le domaine d'un point N ou une droite issue de M, le plan de h contient d et h doit passer en O_1; cette conclusion est absurde, car elle signifie que $|C|$ est contenu dans le système $|2C_1 - 2G^3|$, d'ordre 8.

Il n'existe donc aucun système irréductible d'adjoint $|C_1|$.

14. Enfin se présente le système $|C_1| = C^9(8M^3, N^2, P^1)$ avec cubique fondamentale $G^3(8M^1, N^1, P^1)$, représentatif de la surface $F_4^{(3)}$ de Noether. Celle-ci possède encore un point double O avec tacnode O_1 infiniment voisin, mais passe maintenant par la droite d qui joint ces deux points, en y admettant un plan tangent fixe U, précisément le plan osculateur en O. La section de la surface par U comprend deux fois la droite d, image de P, et la conique k, image de N, tangente à d en O. Nous devons de nouveau étudier la position d'une conique h, tracée sur F dans un plan mené par O, et dont l'homologue H donne pour reste par rapport à $|2C_1|$ un système d'adjoint $|C_1|$.

Si nous supposons que h ne passe pas en O, son plan rencontre ultérieurement F suivant deux droites issues de O. Puisque d est l'unique droite de F qui passe en O, le plan de h n'est autre que U, h est la conique k et passe en O, contrairement à notre hypothèse.

Puisque h passe forcément par O, son image H est d'ordre o. En effet, si H était d'ordre positif n, les 10 points-base de $|C_1|$ absorberaient au plus $3n - 1$ intersections de H avec G^3, donc au plus $3(3n - 1)$ intersections de H avec C_1, et ce maximum est toujours inférieur au nombre $9n - 2$ qui serait requis pour que H corresponde bien à une conique. Ainsi, h se réduit à k ou à deux fois d. On en déduit que tout système $|C|$ d'adjoint $|C_1|$ et de dimension 4 est du type $C^{12}(8M^4, N^3)$ ou $C^{12}(8M^4, N^2, P^2)$. Le second système est à rejeter, car il devrait posséder un nouveau point double pour être de genre 4 et son degré s'abaisserait à 4. En revanche, le premier système a le genre virtuel 4; il resterait à prouver qu'il est irréductible et dépourvu de points-base multiples accidentels, de manière qu'il admette bien l'adjoint $|C_1|$. Il possède de toute façon un point-base simple accidentel P_4 simple pour G^3, vu qu'il doit suffire d'une condition pour qu'il admette G^3 comme composante fixe et se réduise à $|C_1|$.

L'existence du système irréductible $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$ de genre 4 peut s'étudier sur la surface F, mais les singularités infiniment voisines créent des difficultés qui se résolvent le mieux à l'aide de la représentation plane. Aussi préférons-nous ne plus quitter le plan. Le système à l'étude rentre dans une suite infinie de systèmes $C^{3n}(8M^n, N^{n-1}, P_n^1)$, de dimension n, genre n, surabondance 1 ($n=1, 2, 3, \ldots$), doués d'une cubique fondamentale $G^3(8M^1, N^1, P_n^1)$. Ces systèmes, pour la première fois rencontrés par Jung [V], sont intervenus plus tard dans diverses études, mais nous n'avons pas connaissance qu'on ait démontré leur irréductibilité ni l'absence de points-base extérieurs à G^3. Une telle démonstration n'est pas difficile à donner pour toute valeur positive de n, bien qu'il eût été suffisant ici de l'exposer pour $n=4$.

Pour les premières valeurs de n, nous obtenons des systèmes connus, le faisceau de cubiques elliptiques, le réseau $C^6(8M^2, N^1, P_2^1)$, puis le système $C^9(8M^3, N^2, P_3^1)$ représentatif de la surface $F_4^{(3)}$ de Noether. Procédons par récurrence, et admettons l'existence du système irréductible

$$C^{3(n-1)}(8M^{n-1}, N^{n-2}, P_{n-1}^1),$$

de dimension et genre effectifs $n-1$, de degré effectif $2n-4$ et de surabondance 1 par rapport à sa base *totale*. Le système

$$|C^{3n}(8M^n, N^{n-1})| = |C^{3(n-1)}(8M^{n-1}, N^{n-2}) + G^3(8M^1, N^1)|$$

est de dimension virtuelle n, de sorte qu'il n'admet pas G^3 comme composante fixe et est irréductible. Comme sa dimension virtuelle est égale à son genre virtuel, le système est régulier *par rapport à sa base imposée* et a exactement la dimension n. Il s'ensuit qu'il possède un point-base accidentel P_n sur G^3, puisque, en lui retranchant G^3, nous devons retrouver un système de dimension $n-1$. En revanche, il ne possède aucun point-base X extérieur à G^3, sinon X serait un point-base de $|C^{3(n-1)}| = |C^{3n} - G^3|$, puis de $|C^{3(n-2)}|, \ldots,$ et, finalement, de $|C^3(8M^1, N^0, P_1^1)|$.

$C^{3n}(8M^n, N^{n-1}, P_n^1)$ admet pour adjoints purs successifs tous les systèmes antérieurs de la suite. Il en résulte encore qu'il est d'ordre minimum et que P_n ne coïncide jamais avec P_{n-1}, sinon la série canonique sur une courbe C^{3n} admettrait un point fixe. Observons enfin que la démonstration précédente repose sur les seules hypothèses : il existe une cubique, éventuellement dégénérée, passant *simplement* par les points donnés 8M, N [1]; ensuite, les cubiques menées par les huit premiers de ces points sont irréductibles et elliptiques. D'ailleurs, cette dernière condition est aussi nécessaire.

Appliqués au cas $n=4$, les résultats précédents mettent hors de doute l'existence de la solution $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$.

Les systèmes d'ordre minimum dont l'adjoint $|C_1|$ *est* ∞^3, *simple, de genre* 3 *et degré* 4, *sont contenus dans un système* $|C|$ *de genre* 4, *dimension* 4 *et degré* 6, *réductible à l'un des systèmes décrits au n°* 12 *ou au système* $C^{12}(8M^4, N^3, P_4^1)$ *doué d'un point-base accidentel* P_4 *sur* $G^3(8M^1, N^1)$.

Voici achevée la détermination des systèmes irréductibles de genre 4 dont le système adjoint est simple et de genre inférieur à 4. Il importe d'observer que, pour la première fois dans la littérature des systèmes linéaires de courbes planes, *cette détermination atteint même les courbes isolées.* Dans les autres parties de ce travail, il ne nous sera plus possible de conduire l'étude aussi loin : nous devrons nous limiter aux systèmes de dimension non nulle, et, lorsque l'adjoint a le genre au moins égal à 4, aux systèmes de dimension supérieure à deux.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES ADJOINTS NON SIMPLES ET DE GENRE INFÉRIEUR A QUATRE.

15. *Systèmes adjoints composés au moyen d'une involution.* — Nous abordons l'étude des systèmes irréductibles *infinis* $|C|$ de genre 4 dont l'adjoint pur $|C_1|$, toujours de genre effectif inférieur à 4, n'est plus simple, soit qu'il appartienne à une involution, soit qu'il soit composé au moyen d'un faisceau. Débutons par le cas où $|C_1|$ est irréductible et composé au moyen d'une involution J. Celle-ci est nécessairement du second ordre et induit sur chaque courbe C_1 une série linéaire [N, n° 31]. Les courbes C_1 sont hyperelliptiques, de genre 2 ou 3, et forment un système de degré 4 (*ibid.*).

Examinons séparément les deux valeurs du genre.

Si le système $|C_1|$, de dimension 3 et degré 4, est de genre 2, partant régulier, il admet un faisceau $|E|$ de bisécantes rationnelles ou elliptiques appartenant à J [N, n° 22]. Distinguons de nouveaux deux cas.

16. Lorsque les bisécantes E sont elliptiques, $|C_1|$ appartient à priori à quatre types connus, décrits dans le mémoire [N], au n° 17.

---

[1] En fait, à quelques modifications de langage près, la démonstration tient encore quand la cubique G^3 acquiert accidentellement un point multiple en l'un ou l'autre des points 8M, N; cette cubique reste fondamentale pour le système $|C^{3n}|$ considéré, mais ne passe plus nécessairement au point-base simple accidentel P_n de ce système.

Puisqu'il est régulier, il ne peut se rattacher au premier type, relatif à des systèmes surabondants. $|C_1|$ ne peut être dérivé d'un des autres types par adjonction de points-base sans devenir surabondant, vu que les systèmes décrits à l'endroit cité ne sont pas simples. Dès lors, si l'on tient compte de la valeur 2 du genre, deux systèmes seulement sont à retenir :

a. $C^4(M^2, 8N^1)$ avec faisceau elliptique $E^3(M^1, 8N^1)$; *b.* $C^6(8M^2)$.

a. Si $|C_1| = C^4(M^2, 8N^1) = |D+E|$, où $|D|$ désigne le faisceau de rayons de sommet M, les droites D rencontrent les courbes C en quatre points variables au moins, sinon, suivant que le nombre des intersections vaudrait 0, 1, 2, 3, les courbes C seraient réductibles ou rationnelles, ou bien les adjointes C_1 deviendraient elles-mêmes réductibles ou unicursales. Comme, d'autre part, les courbes C rencontrent leurs adjointes C_1 en 6 points variables, sans pouvoir rencontrer une seule fois les courbes E, elles sont nécessairement quadrisécantes des droites D et bisécantes des cubiques E; elles sont hyperelliptiques et appartiennent à la même involution J que $|C_1|$, à savoir celle des intersections libres des courbes D et E. Sur la quadrique double image projective de $|C_1|$ existent deux systèmes de génératrices rectilignes d, e, homologues des faisceaux $|D|$, $|E|$. Aux courbes C correspondent des cubiques gauches bisécantes de d, unisécantes de e; $|C|$ est donc contenu dans le système $|2E+D| = C^7(M^3, 8N^2)$, qui [N, n° 17] est irréductible et régulier, de genre 4, degré 8 et dimension 5; il appartient effectivement à J et est d'ordre minimum.

b. Si $|C_1|$ est le système générateur $C^6(8M^2)$ d'une involution de Bertini J, les couples de cubiques $E^3(8M^1)$ forment des courbes C_1 particulières qui passent doublement au neuvième point-base N du faisceau $|E|$. Par suite, des courbes C d'adjoint $|C_1|$ sont bisécantes ou trisécantes des courbes E suivant qu'elles passent ou non en N; dans le premier cas seulement, elles appartiennent à J. D'ailleurs, pourvu qu'elles soient irréductibles, elles passent au plus simplement en N.

L'image projective de $|C_1| = |2E^3(8M^1)|$ est un cône quadratique Q dont les génératrices e correspondent à E. Quand les courbes C sont trisécantes des cubiques E, il leur correspond sur Q des sextiques canoniques, dont chacune est découpée sur Q par une surface cubique. Ainsi, l'ensemble d'une courbe C et de sa conjuguée $\overline{C}$ dans J est contenu dans $|3C_1| = C^{18}(8M^6)$. C et $\overline{C}$ ont même système adjoint $|C_1|$ d'ordre 6, elles ont toutes deux au moins l'ordre 9, et par suite exactement cet ordre. Chacune de ces courbes passe au plus trois fois en chaque point M_i, propre ou non, pour que $|C_1|$ y passe deux fois seulement; donc, C passe exactement trois fois en chaque M_i et appartient au système irréductible $C^9(8M^3) = |C_1 + E^3(8M^1)|$. La dimension virtuelle 6 de celui-ci est trop forte pour qu'il puisse être surabondant ou composé au moyen d'une involution, donc il n'admet pas N comme point-base accidentel, ni évidemment aucun autre point, et possède la dimension 6, le genre 4 et le degré 9. C'est une solution du problème; son ordre est minimum.

Comme nous l'avons vu, une autre solution peut être cherchée en admettant que les courbes C soient bisécantes des cubiques E. Il leur correspond sur Q des cubiques gauches qui passent simplement au sommet de Q, et qui appartiennent de ce chef au système $|c_1 + e|$, en désignant par c_1 les sections planes de Q. A son tour, $|C|$ est contenu dans le système irréductible

$$|C_1 + E^3(8M^1, N^1)| = C^9(8M^3, N^1).$$

Celui-ci est simplement subordonné à $C^9(8M^3)$. Observons qu'il ne possède sûrement aucun point-base accidentel et n'est pas surabondant. Il se rattache d'ailleurs, tout comme son adjoint, au type 4 de [N], n° 17.

17. Supposons ensuite que le système $|C_1|$, de genre 2 et composé au moyen d'une involution J du second ordre, admette un faisceau de bisécantes rationnelles E. La différence $|C_1 - E|$ est un faisceau $|H|$ formé de bisécantes des courbes E et C_1. Ce faisceau est dépourvu de partie fixe, car sa partie variable, si elle ne coïncide pas avec $|E|$, donne par addition à $|E|$ un système irréductible de dimension au moins égale à 3, et qui coïncide par conséquent avec $|C_1|$. Quant à l'hypothèse où la partie variable de $|H|$ serait $|E|$, elle n'est pas à retenir ici, parce que le faisceau $|E|$ est crémoniennement réductible à un faisceau de droites, que les courbes E sont au moins quadrisécantes de C (*cf.* n° 16, *a*) et que, dans l'hypothèse où nous nous sommes placés, C rencontrerait au moins huit fois ses adjointes. Nous pouvons donc admettre que C est quadrisécante des E et bisécante des H. Or, la relation d'addition des genres, appliquée à E, H, fournit pour les courbes H le genre virtuel 1. Le genre effectif est 0 ou 1; la première valeur est à rejeter, sinon C posséderait de nouveau un faisceau de bisécantes rationnelles. Dès lors, $|C_1|$ admet un faisceau de bisécantes elliptiques H et ressortit à l'un des cas étudiés au n° 16, plus précisément au premier.

Les systèmes infinis de genre 4 et d'ordre minimum dont l'adjoint pur est de genre 2 et composé au moyen d'une involution sont $C^7(M^3, 8N^2)$ *avec faisceau elliptique* $E^3(M^1, 8N^1)$, $C^9(8M^3)$, *et les systèmes subordonnés.*

18. Après avoir admis que le système adjoint $|C_1|$, de degré 4 et composé au moyen d'une involution J du second ordre, avait le genre 2, envisageons l'éventualité où son genre vaut 3. Il possède de nouveau un faisceau $|E|$ de bisécantes rationnelles ou elliptiques [N, n° 23].

Si les courbes E sont elliptiques, $|C_1|$ appartient à l'un des quatre types décrits au n° 17 de [N]. En tenant compte du fait qu'il possède la surabondance un et qu'il est donc nécessaire d'imposer deux points-base simples supplémentaires ou un point-base double pour les trois derniers types, on voit que $|C_1|$ se réduit en définitive à l'un des trois systèmes suivants :

a. $C^9(8M^3, N^2, P^1)$, avec faisceaux $E^3(8M^1, P^1)$ et $H^6(8M^2, N^2)$; J est l'involution de Bertini de points fondamentaux M_i.

b. $C^7(M^3, 8N^2, P^2)$ avec faisceau $E^3(M^1, 8N^1)$ et P uni pour l'involution J des intersections libres des cubiques E avec les droites D issues de M.

c. $C^6(7M^2, 2N^1, 2P^1)$ où 2N, 2P sont deux couples de l'involution de Geiser J engendrée par $C^3(7M^1)$.

Reprenons successivement ces trois cas.

a. Puisque $|C_1| = |H + E|$, les courbes C d'adjoint $|C_1|$ sont bisécantes des courbes d'un des faisceaux $|H|$, $|E|$ et quadrisécantes des courbes de l'autre, ou bien admettent les deux faisceaux de trisécantes $|H|$, $|E|$. La dernière hypothèse est à exclure, car il est bien clair qu'aucune courbe ne rencontre un nombre impair de fois les sextiques H d'un faisceau de Halphen. Il faut donc admettre que $|C|$ soit doué d'un faisceau de bisécantes elliptiques H ou E et, partant, composé au moyen de l'involution de Bertini J. Par suite, $|C|$ est réductible à l'un des types, disons primaires, décrits dans le Mémoire [N], n° 17, ou à un système *dérivé des précédents par l'adjonction de nouveaux points-base, simples ou doubles;* cette locution doit être comprise au sens étroit : parmi les systèmes subordonnés aux types primaires, entrent seuls en ligne de compte ceux dont l'ordre et les multiplicités effectives aux points-base du faisceau des bisécantes elliptiques coïncident avec l'ordre et les multiplicités en ces points du système primaire dont ils dérivent; un tel système subordonné a même adjoint $|C^2|$ (1) que le système primaire associé et est aussi d'ordre minimum. Mais nous pouvons obtenir des renseignements précis au sujet de cet ordre minimum du système $|C|$; il suffit, en effet, de se référer à la quadrique double Q, image projective de $|C_1|$, pour vérifier que $|C|$ est contenu dans $|2H + E|$ ou $|2E + H|$ suivant que les sextiques H ou les cubiques E sont bisécantes de C.

Dans le premier cas, $|C|$ appartient au premier type de [N], n° 17, et est réductible à $C^{12}(8M^4, N^3, N_1^1)$ avec un point-base accidentel N_1 infiniment voisin de N sur $G^3(8M^1, P^1, N^1)$, ou à $C^{15}(8M^5, N^4, P^1, U^2)$, où U est un point uni de l'involution J. Le second système ne peut convenir s'il admet $|C_1|$ pour adjoint pur, puisque la cubique $G^3(8M^1, P^1, N^1, U^1)$ qui doit être défalquée de son adjoint impur serait, non une courbe fondamentale de $|C|$, mais bien une composante fixe de ce système. En revanche, le premier système trouvé admet bien l'adjoint $|C_1|$, est irréductible et d'ordre minimum (*loc. cit.*).

---

(1) *Cf.* [N], nos 3, 4.

Dans le second cas, $|C|$ est d'ordre minimum 12 et appartient au quatrième type de $[N]$, n° 17; il est réductible à $C^{12}(8M^4, P^2, N^2, U^2)$, où U est un point uni de l'involution J tel que les courbes adjointes (impures) $C^9(8M^3, P^1, N^1, U^1)$ se réduisent aux courbes $C_1 = C^9(8M^3, P^1, N^2)$; U est donc le point infiniment voisin de N sur la courbe unie de l'involution J. On peut vérifier que le système $|C|$ obtenu est irréductible, triplement infini, de genre et de degré 4, en se référant à la quadrique double Q, image projective de $|C_1|$; sans entrer dans le détail, bornons-nous à observer que les courbes C ont pour homologues sur Q les cubiques gauches bisécantes aux génératrices rectilignes h qui correspondent aux sextiques H et assujetties à toucher la courbe de diramation au point u représentant U; ces cubiques gauches sont irréductibles, puisque la tangente en u à la courbe de diramation n'est pas une génératrice e.

Les systèmes d'ordre minimum (y compris les courbes isolées) dont l'adjoint est $C^9(8M^3, N^2, P^1)$ *avec faisceaux elliptiques* $E^3(8M^1, P^1)$ *et* $H^6(8M^2, N^2,)$ *sont:* 1° $C^{12}(8M^4, N^3, N_1^1)$, *de dimension* 4, *degré* 6 *et surabondance* 1, *doué d'un point-base simple* N_1 *infiniment voisin de* N *sur* $G^3(8M^1, N^1, P^1)$; 2° $C^{12}(8M^4, N^2, U^2, P^2)$, *de dimension* 3, *degré* 4 *et surabondance* 2, *doué d'un point-base double* U *infiniment voisin de* N *sur la courbe unie de l'involution de Bertini* J *de points fondamentaux* M_i; 3° *ou des systèmes subordonnés aux précédents. Tous ces systèmes appartiennent à l'involution* J.

Nous attirons l'attention sur le fait, rappelé dans l'Introduction, que $|C_1|$ *est ici l'adjoint de deux systèmes typiquement distincts, qui ne rentrent pas dans un système linéaire commun de même genre et ne sont pas crémoniennement réductibles l'un à l'autre :* ils sont de dimensions différentes et admettent deux faisceaux différents de bisécantes elliptiques.

19. Passons à l'examen du cas *b.* du numéro précédent, celui où

$$|C_1| = C^7(M^3, 8N^2, P^2),$$

en admettant l'existence d'un faisceau de cubiques elliptiques $E^3(M^1, 8N^1)$. Ce dernier est contenu dans $|C_1|$ et laisse pour reste un faisceau $H^4(M^2, 8N^1, P^2)$, irréductible d'après un raisonnement déjà fait au n° 17, chaque fois que sa partie variable ne coïncide pas avec $|E|$. Rappelons d'ailleurs que P est uni pour l'involution J des couples communs aux courbes E et aux droites issues de M. Un peu d'attention fait voir que les multiplicités assignées de M, N, P pour H^4 sont effectives.

Une courbe C d'adjoint $|C_1|$ est trisécante des courbes E, H, ou bien bisécante des E et quadrisécante des H, ou enfin quadrisécante des E et bisécante des H. Nous allons voir que la première hypothèse est à exclure.

Quand C est supposée trisécante des courbes E, H, elle ne peut appartenir à l'involution J. Le recours à la quadrique double Q image projective de $|C_1|$

montre, d'une manière analogue à celle du n° 16, *b*., que l'ensemble de C et de sa transformée $\bar{C}$ dans l'involution J appartient au système $|3C_1|$, d'ordre 21. En outre, C et $\bar{C}$, pour admettre l'adjoint $|C_1|$, ont au moins l'ordre 10. Il en résulte que l'une de ces courbes est d'ordre 10, et nous pouvons admettre que c'est C. En désignant par x, y_i, z les multiplicités effectives de C en M, N_i, P, nous avons

$$30 - x - \Sigma y_i = 40 - 2x - \Sigma y_i - 2z = 3, \qquad \text{d'où} \qquad x + 2z = 10, \; x + \Sigma y_i = 27.$$

x est pair et vaut au plus 4, tandis que z vaut au plus 3; par suite, $x = 4$, $z = 3$. On voit ensuite que tous les y_i valent 3, à l'exception d'un seul, $y_8 = 2$. Le système $|C|$ cherché est, aux points-base simples près, du type $C^{10}(M^4, 7N^3, N_8^2, P^3, X^2)$, le point double X n'appartenant pas à la cubique fondamentale $G^3(M^1, 8N^1, P^1)$. Pour que l'adjoint soit bien $|C_1|$, il faut toutefois que X soit infiniment voisin de N_8 et que, au préalable, le système $C^7(M^3, 7N^2, N_8^1, P^2)$ possède déjà un point-base simple infiniment voisin de N_8 et distinct de X. Cette condition à priori est vérifiée; les courbes du système en question sont tangentes à G^3 en N_8, car ce système est nécessairement de dimension 4, laisse pour reste par rapport à G^3 un système de dimension 3, et enfin ne doit satisfaire qu'à une condition pour se réduire à $|C_1|$. Remarquons maintenant que le reste du système trouvé $|C^{10}|$ par rapport à G^3 est virtuellement $C^7(M^3, 7N^2, N_8^1, P^2, X^2)$ et devient en fait $C^7(M^3, 8N^2, P^2, X^1) = |C_1 - X|$. Ce reste est donc de dimension 2, car le passage en d'éventuels points-base simples accidentels de $|C^{10}|$ ne lui impose aucune condition. Il s'ensuit que $|C^{10}|$ doit être de dimension 3, alors que son degré vaut au maximum 4; il est formé de courbes hyperelliptiques et est composé au moyen de la même involution J que son adjoint $|C_1|$, contrairement à l'hypothèse ([1]).

Nous passons au cas où la courbe C est bisécante des courbes E ou H; $|H|$ est alors distinct de $|E|$ et formé de quartiques irréductibles. C est hyperelliptique et appartient à l'involution J. Par l'intermédiaire de la quadrique double Q, on voit que C est contenue dans le système $|2E + H|$ ou $|2H + E|$; son ordre minimum vaut à priori 10 ou 11 et $|C|$ est par suite réductible à un système du second type décrit dans [N] au n° 17, plus précisément $C^{10}(M^4, 8N^3, P^2, P_1^2)$, où P_1 est situé sur la courbe unie de l'involution J[N, n° 18]. On pouvait d'ailleurs prévoir que C ne peut être d'ordre minimum 11, puisque la transformation quadratique, nécessairement existante, de points fondamentaux M, P, N_1, permute les faisceaux $|E|$ et $|H|$ sans altérer $|C_1|$. D'autre part, P_1 doit être infiniment voisin de P pour que ce dernier puisse devenir double pour l'adjoint par le jeu du déchargement. Le système $|C^{10}|$ ainsi obtenu est

([1]) Le raisonnement tient si la partie variable de $|H|$ est $|E|$; la condition arithmétique exprimant que les courbes C sont trisécantes des courbes H reste valable : elle exprime alors que les courbes C sont sextisécantes des courbes C_1.

représenté sur Q par l'ensemble des cubiques gauches bisécantes des génératrices h homologues de H, et qui touchent la courbe de diramation j au point d'appui de celle-ci sur la génératrice de Q homologue de P (en dehors d'un point triple de j homologue de G^3). Le système est donc irréductible et dépourvu de points-base accidentels. Il a le degré 4, la dimension 3, la surabondance 2.

Les systèmes dont l'adjoint est $C^7(M^3, 8N^2, P^2)$, *avec faisceau elliptique* $E^3(M^1, 8N^1)$ *et* P *uni pour l'involution* J *des couples de* E *alignés sur* M, *sont composés au moyen de* J *et réductibles à* $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$, *doué d'un point double infiniment voisin de* P *sur la courbe unie de* J, *ou à des systèmes subordonnés au précédent (tous d'ordre minimum).*

20. Le troisième cas défini au n° 18, et qu'il faut maintenant traiter, est celui où l'adjoint de $|C|$ est $|C_1| = C^6(7M^2, 2N^1, 2P^1)$, supposé que 2N, 2P forment deux couples de l'involution de Geiser J engendrée par $C^3(7M^1)$. $|C_1|$ est la somme des faisceaux $E^3(7M^1, 2N^1)$ et $H^3(7M^1, 2P^1)$. Ceux-ci seraient éventuellement confondus si le couple 2P était infiniment voisin du couple 2N, mais alors C serait trisécante des cubiques E.

Or, montrons par un raisonnement rapide qu'on ne peut admettre l'hypothèse où la courbe C serait trisécante des courbes E et, partant, des courbes H, peut-être virtuelles. Dans cette éventualité, C n'appartient pas à l'involution J, et le recours à la quadrique double Q image de $|C_1|$ montre, de la même manière qu'au n° 16, que C est d'ordre 9 et passe trois fois en chaque point M_i. Si nous désignons par x_j sa multiplicité en N_j, par y_k sa multiplicité en P_k, le fait que C est trisécante des E et sextisécante des C_1 se traduit par les conditions

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 3.$$

Aucun des quatre x_j, y_k n'est égal à 3, d'après le comportement de l'adjoint, de sorte que C est contenue dans le système $C^9(7M^3, N_1^2, N_2^1, P_1^2, P_2^1)$. Ce dernier a le genre 5, il est nécessaire qu'il acquière un nouveau point-base double, mais alors le type de l'adjoint ne saurait plus être respecté.

Force nous est donc de supposer que C soit bisécante des courbes E, par exemple, et quadrisécante des cubiques H. Les faisceaux $|E|$, $|H|$ sont nécessairement distincts et les couples 2N, 2P ne sont pas infiniment voisins. La courbe C est hyperelliptique, appartient à l'involution J et, toujours par la considération de la quadrique double Q image de $|C_1|$, est contenue dans le système $|2E + H| = C^9(7M^3, 2N^2, 2P^1)$. Toutefois, pour que le genre se réduise à 4 en tenant compte du comportement de l'adjoint et du nombre d'intersections avec les courbes H, il faut que les multiplicités effectives aux points P_i soient 2, 0. C doit appartenir au système $C^9(7M^3, 2N^2, P_1^2)$, qui doit lui-même être contenu dans $C^9(7M^3, 2N^2, 2P^1)$. Cette dernière condition entraîne que P_2 est infiniment voisin de P_1 ou, en d'autres termes, que P_1 est uni pour l'involution de Geiser J. Moyennant cette condition, le système obtenu est dérivé du type 3 de [N], n° 17, par imposition d'un point double; sa dimension vaut 4, son degré 6. Il n'est pas douteux qu'il soit irréductible et dépourvu de points-base accidentels.

Il n'existe pas de système irréductible admettant pour adjoint

$$|C_1| = C^6(7M^2, 2N^1, 2P^1),$$

où $2N$, $2P$ *sont deux couples de l'involution* J *de Geiser engendrée par* $C^3(7M^1)$, *à moins que l'un de ces couples (ils doivent être supposés distincts) ne forme une coïncidence de* J. *Si c'est le cas pour* $(2P)$, *il existe un système* $C^9(7M^3, 2N^2, P_1^2)$ *d'adjoint* $|C_1|$, *de dimension* 4 *et degré* 6. *Si les deux couples* $2N$, $2P$ *forment des coïncidences de* J, *il existe deux systèmes analogues, d'ordre minimum. Tout autre système d'adjoint* $|C_1|$ *est subordonné aux précédents.*

21. Nous avons supposé, depuis le n° 18, que le système adjoint $|C_1|$, de degré 4, genre 3, composé au moyen d'une involution du second ordre, admettait un faisceau de bisécantes elliptiques; nous avons reconnu qu'il fallait encore examiner le cas où il existe un faisceau de courbes unicursales E bisécantes aux courbes C_1. Le reste $|C_1 - E|$ est alors un faisceau irréductible $|H|$, formé de bisécantes aux courbes C d'adjoint $|C_1|$ (*cf.* n° 17), de sorte que C appartient à l'involution J au moyen de laquelle $|C_1|$ est composé. Le genre virtuel des courbes H vaut 2. Nous pouvons admettre aussi cette valeur pour le genre effectif; en effet, si celui-ci valait 1, nous serions ramenés à l'étude des nos 18-20; et, s'il était nul, $|C|$, possédant un faisceau de bisécantes rationnelles, aurait l'adjoint réductible. Tablons donc sur l'existence d'un faisceau $|H|$ de genre 2, doué d'un faisceau de bisécantes rationnelles E. En prenant pour $|E|$ un faisceau de rayons de sommet M, on ramène sans peine $|H|$ à l'un des types suivants, d'ordre minimum : *a.* $H^4(M^2, 12P_1)$; *b.* $H^5(M^3, N^2, 12P^1)$, où N est dans le domaine du premier ordre de M et où les 12 P_i sont infiniment voisins successifs sur une branche linéaire inflexionnelle issue de M. Ainsi $|C_1|$ est du type $C^5(M^3, 12P^1)$ ou $C^6(M^4, N^2, 12P^1)$. En nous rapportant encore à la quadrique double image de $|C_1|$, nous trouvons aussitôt que C doit appartenir au système $|E+2H|$, soit respectivement $C^9(M^5, 12P^2)$ et $C^{11}(M^7, N^4, 12P^2)$ pour les cas *a* et *b*.

22. Développons le cas *a*. Le système $|C|$ est contenu dans un système d'ordre 9 et est par suite d'ordre minimum 8 ou 9.

Dans la première éventualité, $|C|$ est effectivement du type $C^8(M^4, 11P^2, P_{12}^0)$. La multiplicité effective des courbes C au point M est déterminée par le fait que C est quadrisécante des droites E issues de M. D'autre part, le comportement de l'adjoint $|C_1| = C^5(M^3, 12P^1)$ n'autorise pas que les courbes C passent plus de deux fois par un point P_i, propre ou impropre. Il suffit alors d'exprimer que la courbe C est bisécante des quartiques du faisceau $H^4(M^2, 12P^1)$ pour voir que C est du type décrit ci-dessus ou du type $C^8(M^4, 10P^2, P^1_{11}, P^1_{12}, X^2)$; mais un examen un peu attentif montre que le dernier système ne peut avoir $|C_4|$ pour adjoint. Puisque $|C|$ est contenu dans le système $|E+2H| = C^9(M^5, 12P^2)$, il est nécessaire que P_{12} soit aligné sur M, P_{11} et infiniment voisin de P_{11}. Réciproquement, quand ces deux conditions sont réalisées, $|C|$ existe, irréductible, de dimension 3 et degré 4. En effet, $|E+2H|$ est ∞^5; les courbes de ce système assujetties à contenir le domaine de P_{11}, puis la droite $MP_{11}P_{12}$ laissent précisément pour reste les ∞^3 courbes C; comme le système $|C|$ ainsi obtenu contient $|2H|$, il est bien irréductible, de degré effectif 4.

Passons au cas où C est d'ordre *minimum* 9. Il est clair que C passe exactement cinq fois en M et trois fois au plus en P_i. D'autre part, il est exclu que P_1 et P_2 soient triples pour C, qui pourrait alors être ramenée à l'ordre 7 par la transformation quadratique, nécessairement existante, de points fondamentaux M, P_1, P_2. Le fait que C est bisécante des quartiques H montre ensuite que C est du type $C^9(M^5, 12P^2, 2X^2)$ ou $C^9(M^5, P^3_1, P^2_2, \ldots, P^2_{11}, P^1_{12}, X^2)$. Le second type sera d'ordre minimum pour autant que P_1 soit infiniment voisin de M et que $P_2, P_3, \ldots, P_{11}$, X puissent être amenés à se succéder sur une branche issue de M dont les deux premiers points soient alignés sur M; dans ces conditions, il ne peut manifestement admettre $|C_4|$ pour adjoint pur. Quant au premier type, il doit posséder une droite fondamentale impropre MX_1X_2, tandis que X_1 et X_2 sont unis pour l'involution J[N, n° 18] des couples communs à E, H; en d'autres termes, X_1 et X_2 sont les points d'intersection d'une droite E_0 issue de M et de la courbe unie de l'involution J. Le système obtenu $C^9(M^5, 12P^2, 2X^2)$ a le degré virtuel zéro et est effectivement un faisceau, généralement irréductible, comme on peut le voir soit par un raisonnement direct, soit en observant qu'il est représenté, sur la quadrique double Q image de $|C_4|$, par l'ensemble des cubiques gauches tangentes à la courbe de diramation j aux deux points d'appui x_i de celle-ci sur la génératrice e_0 homologue de E_0. La condition d'irréductibilité de ces cubiques gauches est qu'en un des points x_i, supposés distincts, la courbe j ne soit pas tangente à la génératrice h homologue de la quartique H qui contient X_i. Il suffit donc de choisir E_0 pour que les courbes H qui touchent E_0 en X_1 ou X_2 ne passent pas doublement par ces points.

Un système surabondant $C^5(M^3, 12P^1)$, *de genre et de dimension* 3, *est généralement l'adjoint d'une infinité continue de faisceaux* $C^9(M^5, 12P^2, 2X^2)$, *dont les deux points-base* X_i *sont alignés sur* M *et unis pour l'involution* J *des couples communs aux droites issues de* M *et aux quartiques du faisceau irréductible* $H^4(M^2, 12P^1)$; *ces faisceaux appartiennent à* J *et sont d'ordre minimum. En outre, quand deux points* P_{11}, P_{12} *sont infiniment voisins et alignés sur* M (*ou se succèdent sur une branche dont la tangente passe en* M), $C^5(M^3, 12P^1)$ *est aussi* *l'adjoint d'un système irréductible* $C^8(M^4, 11P^2)$ *de dimension* 3, *degré* 4 *et surabondance* 2, *composé au moyen de* J. *Il existe plusieurs systèmes analogues si plusieurs couples de points* P_i *présentent la disposition de* P_{11}, P_{12}.

Pour la seconde fois, nous sommes en présence d'un système adjoint à plusieurs systèmes typiquement distincts. L'exemple actuel est d'une analogie frappante avec celui rappelé dans l'Introduction. Il semble que l'on doive s'attendre à voir ce phénomène se multiplier à mesure que le genre augmente, du moins pour les systèmes composés. S'il n'a pas été mis jusqu'ici en évidence pour le genre 3, c'est probablement parce qu'on n'a pas encore fait une classification *géométrique* des systèmes de ce genre [1], et notamment parce qu'on n'a pas encore déterminé les faisceaux. Il n'est en tout cas plus admissible de croire que l'exemple, cité dans l'introduction, de plusieurs systèmes typiquement distincts possédant même adjoint soit une exception.

23. Envisageons le cas *b*. du n° 21, relatif à l'adjoint

$$|C_1| = C^6(M^4, N^2, 12P^1) = |E + H|,$$

où $|E|$ est le faisceau de rayons de sommet M et $|H|$ le faisceau des courbes de genre effectif deux $H^5(M^3, N^2, 12P^1)$; N est infiniment voisin de M et les $12P_i$ infiniment voisins successifs de M sur une branche linéaire inflexionnelle. Le système $|C|$ cherché est contenu dans $|E+2H| = C^{11}(M^7, N^4, 12P^2)$, de dimension 5, degré 8 et genre 6, et est par suite, du moins à priori, d'ordre minimum $m = 9$, 10 ou 11. Les courbes C passent $m-4$ fois en M, car elles sont effectivement quadrisécantes aux droites E; de plus, puisqu'elles sont supposées irréductibles, on déduit de la configuration toute spéciale des points M, N, 12P qu'elles passent au plus deux fois en chaque point P_i. Il suffit alors d'exprimer que les courbes H sont effectivement bisécantes de C pour voir que le système $|C|$ se réduit à l'un des types suivants : 1° $C^9(M^5, N^4, 8P^2, 4P^1)$; 2° $C^9(M^5, N^3, 11P^2, P^0_{12})$; 3° $C^9(M^5, N^3, 10P^2, P^1_{11}, P^1_{12}, Q^2)$; 4° $C^9(M^5, N^2, 12P^2, Q^2)$; 5° $C^{10}(M^6, N^4, 11P^2, P^0_{12})$; 6° $C^{10}(M^6, N^4, 10P^2, P^1_{11}, P^1_{12}, Q^2)$; 7° $C^{10}(M^6, N^3, 12P^2, 2Q^2)$; 8° $C^{11}(M^7, N^4, 12P^2, 2Q^2)$, que nous pouvons

[1] Un exemple caractéristique des lacunes qui subsistent dans l'étude géométrique des systèmes de genre 3 est précisément celui du système irréductible $C^5(M^3, 12P^1)$ de dimension 3. De Franchis [IV] en renseigne la construction quand il existe une cubique fondamentale $C^3(M^1, 12P^1)$ et donne un autre exemple, assez compliqué. Or, géométriquement, il est aisé de définir tous les systèmes de cette espèce. Le reste de $C^5(M^3, 12P^1)$ par rapport au faisceau de rayons E de sommet M est irréductible chaque fois que sa partie variable ne se réduit pas à $|E|$ (*cf.* n° 17). Ainsi, les dispositions possibles des points-base se rattachent à deux types: ou bien il existe une cubique fondamentale $C^3(M^1, 12P^1)$, ou bien M et les P_i forment la base d'un faisceau irréductible $H^4(M^2, 12P^1)$; les multiplicités assignées pour les points-base de ce dernier sont effectives, sinon on ne saurait retrouver par sommation un système $C^5(M^3, 12P^1)$ de dimension 3 et degré 4. Comme nous l'avons vu, seuls les systèmes du second type peuvent être des systèmes adjoints.

supposer d'ordre minimum. Bien entendu, les multiplicités renseignées des courbes C aux points M, N, 12 P, Q sont les multiplicités effectives. Quelques-uns des types décrits peuvent être exclus d'emblée : le 1° parce que les relations de proximité ne sont pas satisfaites au point M; le 3° et le 6°, car, ou bien les coniques menées par les points M, N, Q sont irréductibles et l'on pourrait abaisser l'ordre des deux systèmes envisagés à 8, ou bien le point Q est proche de P_{10}, mais distinct de P_{11} et les relations de voisinage ne sont plus satisfaites en P_{10}.

L'adjoint $|C_1|$ est de dimension 3 et de degré 4; il est composé au moyen de l'involution J des couples d'intersections libres des droites E et des quintiques H. D'autre part, on peut vérifier, en application du principe de déchargement, que la droite MP_1P_2 comptée cinq fois est une courbe particulière du faisceau $|H|$. Ainsi, la polaire de M par rapport à une courbe H reste fixe quand H engendre le faisceau $|H|$ et contient la courbe unie de J. D'ailleurs, en prenant les droites MN et MP_1P_2 respectivement pour côtés $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ du triangle de référence, le faisceau $|H|$ est représenté par l'équation

$$x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 f_2(x_2, x_3) + f_5(x_2, x_3) + k x_3^5 = 0;$$

la polaire de M par rapport à ce faisceau est représentée analytiquement par

$$x_2 x_3 [2 x_1 x_2 + f_2(x_2, x_3)] = 0$$

et la courbe unie de l'involution J est une conique j passant *une* fois en M, touchant en ce point la droite MN. Évidemment, ce calcul nous fournit seulement la courbe unie effective j de l'involution J. En réalité, J possède encore deux courbes unies infinitésimales : le domaine de M et le domaine de P_{12}. En effet, les courbes H découpent sur une droite E quelconque issue de M les couples de la g_2^1 induite sur E par J; or, nous savons que la droite MP_1 comptée cinq fois est une courbe H particulière, de sorte que la g_2^1 considérée possède un couple formé de deux points infiniment voisins de M : le domaine du premier ordre de M a pour conjugué dans J le domaine du second ordre de ce point. De plus, comme les couples de J sont formés de points alignés sur M, il est clair que tout point infiniment voisin de P_{12} a pour homologue dans J un point situé dans le domaine du second ordre de P_{12}. La courbe unie totale de J est bien rencontrée en deux points variables par les droites E et en six points variables par les quintiques H de genre 2.

L'image projective du système $|C_1|$ est une quadrique double Q, douée de deux systèmes distincts de génératrices rectilignes, $|e|$, $|h|$, correspondant respectivement aux faisceaux $|E|$, $|H|$. Les courbes C_1 qui contiennent la droite MP_1P_2 sont complétées par les quintiques irréductibles $C^5(M^3, N^2, 10P^1)$ d'un réseau de degré 2 et genre 2 (contenant le faisceau $|H|$); ainsi, la droite MP_1P_2 a pour homologue un point A de Q, double ou triple pour la courbe de diramation, certainement simple pour la sextique k image de la conique j. Les courbes C_1 assujetties à passer deux fois en P_{12} contiennent la droite MP_1P_2 et sont complétées par les quintiques H (virtuellement, les courbes H ne passant pas en P_{12}), de sorte que les domaines du premier et du second ordre de P_{12} correspondent à une droite e_A de Q, précisément la génératrice e menée par A, ne recoupant pas k. De même, les courbes C_1 passant cinq fois en M se composent de la droite MP_1P_2 comptée cinq fois et d'une droite E quelconque : les domaines du premier et du second ordre de M représentent la génératrice h_A de $|h|$ qui passe par A et k a un contact 5-ponctuel avec h_A au point A, D'autre part, les courbes C_1 contenant la droite MN sont complétées par les quintiques irréductibles $C^5(M^3, N^1, N_1^1, 12P^1)$ d'un réseau de degré 2 et genre 3, doué d'un point-base N_1 proche de N, puisque les quintiques H en sont des courbes particulières; la droite MN et le domaine de N_1 ont pour homologue sur Q un point B, non situé sur e_A ou h_A. Quant au domaine du premier ordre de N, il représente visiblement la génératrice e_B de $|e|$ menée par B, s'appuyant sur k en un point, généralement distinct de B, dont l'homologue est alors le point uni U infiniment voisin de N sur j.

Les cubiques gauches du système $|e+2h|$ qui touchent e_A en A sont irréductibles et correspondent précisément aux courbes C du type 5° : le système $C^{10}(M^6, N^4, 11P^2)$ est irréductible, ∞^3, de genre 4 et degré 4, et admet bien $|C_1|$ pour adjoint pur (compte tenu de la surabondance de ce dernier). Parmi ces cubiques gauches, celles qui passent en B sont encore irréductibles; elles représentent les courbes C du type 2°, de sorte que le système $C^9(M^5, N^3, 11P^2)$ est un réseau de degré 2, contenu dans le système ∞^3 obtenu à l'instant, qui répond encore à la question; observons qu'il possède un point-base supplémentaire, proche de N, le point N_1 défini à l'alinéa précédent.

Les courbes C du type 7° ou 8° ne peuvent convenir. Puisqu'elles sont supposées d'ordre minimum, les deux points doubles Q_1, Q_2 sont infiniment voisins successifs de P_{12}, donc non situés sur la conique j. De plus, elles doivent rencontrer la courbe unie totale de J en 10 intersections impaires. Or, elles passent en un point uni du domaine de M, de sorte que les 11 points qu'elles ont en commun avec j, en dehors des points M, N, 12P, 2Q, forment 9 intersections impaires. Ainsi, les courbes C considérées touchent nécessairement la conique unie j en un point T; elles passent *une* fois en T et au conjugué T_1 de T dans l'involution J. Par suite, la droite MT touche la conique j au point T, puisque T_1 est proche de T; elle constitue une partie de la conique j et coïncide avec MN. Mais cette conclusion est absurde, car elle entraîne la dégénérescence des courbes C [1].

Il nous reste à éliminer les courbes C du type 4°, soit $C^9(M^5, N^2, 12P^2, Q^2)$.

---

[1] On peut encore observer que les points doubles Q_1, Q_2, infiniment voisins de P_{12}, sont unis pour l'involution J, et doivent par suite être proches de P_{12}, ce qui est absurde, puisque P_{12} est double pour la courbe C.

A cet effet, nous allons d'abord préciser la position du point N_1. Ce point est infiniment voisin de N sur la quartique $|H - MN| = H^4(M^2, N^1, 12P^1)$, d'équation

$$x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_3 f_2(x_2, x_3) + f_4(x_2, x_3) = 0,$$

où l'on a posé

$$f_3(x_2, x_3) \equiv a_0 x_3^3 + x_2 f_4(x_2, x_3);$$

cette quartique H^4 correspond à la valeur $-a_0$ du paramètre k. N_1 appartiendra à la droite MN si $f_2(0, 1) = 0$; la conique j se réduit alors à la droite MN et à une droite j_1 ne passant pas en M; en outre, sur Q, la sextique k passe en B.

Dans le cas général, où N_1 n'est pas situé sur MN, les ∞^4 courbes du système $|E + 2H - MN| = C^{10}(M^6, N^3, N_1^1, 12P^2)$ rencontrent MN en un point variable, de sorte que le système $|E + 2H - 2MN| = C^9(M^5, N^2, 12P^2)$ est un réseau, contenant la courbe C à l'étude. Or, ce réseau est formé de courbes dégénérées en une partie fixe $H^4(M^2, N^1, 12P^1)$ et une composante $C^5(M^3, N^1, 12P^1)$, variable dans le réseau $|C_1 - MN|$. En revanche, quand N_1 est situé sur MN, le système $|E + 2H - 2MN| = C^9(M^5, N^2, 12P^2)$ est ∞^3, donc irréductible et de degré effectif 4; ses courbes ont pour images, sur Q, les cubiques gauches du système $|e + 2h|$ qui touchent en B la sextique de diramation k. Les courbes C cherchées sont des courbes C^9 de ce système assujetties à passer deux fois en un certain point Q, proche de N par le comportement de l'adjoint $|C_1|$, mais distinct de N_1, sinon les cubiques gauches homologues auraient un point double en B et seraient par suite dégénérées. En outre, le point Q doit être uni pour l'involution J [N, n° 18]; il coïncide avec le second point uni du domaine de N, le premier point uni de ce domaine étant N_1, et a pour image le point commun aux génératrices e_B, h_A. En conséquence, les courbes C sont représentées par des cubiques gauches touchant en ce dernier point la courbe de diramation de Q, plus précisément la droite h_A. Comme ces cubiques gauches appartiennent au système $|e + 2h|$ et sont unisécantes des génératrices h, elles contiennent la droite h_A, de sorte que les courbes C sont dégénérées.

Tout système irréductible $C^6(M^4, N^2, 12P^1)$, *de genre et dimension* 3, *degré* 4 *et surabondance* 1, *somme des faisceaux irréductibles* $E^1(M^1)$, $H^5(M^3, N^2, 12P^1)$, *supposé que* N *est proche de* M *et que les* $12P_i$ *se succèdent sur une branche linéaire inflexionnelle issue de* M, *est l'adjoint par* $|C_1|$ *d'un système irréductible* $C^{10}(M^6, N^4, 11P^2)$ *d'ordre minimum, de degré* 4 *et dimension* 3, *composé au moyen de l'involution* J *des couples communs aux droites* E *et aux quintiques* H. *Tout système irréductible d'adjoint* $|C_1|$ *est contenu dans le précédent et a l'ordre minimum* 10 *ou* 9 (¹); *dans ce dernier cas, il appartient au réseau* $C^9(M^5, N^3, 11P^2, N_1^1)$,

(¹) Il est d'ordre minimum 10 quand ses couples de points-base simples sont infiniment voisins de P_{11}; sinon, son ordre est réductible à 9.

de degré 2, *dont le point-base supplémentaire* N_1 *est proche de* N *sur la quartique* $|H - MN| = H^4(M^2, N^1, 12P^1)$.

24. *Systèmes adjoints réductibles.* — Nous abordons l'étude des systèmes irréductibles de genre 4 dont l'adjoint pur $|C_1|$, de genre effectif p_1 inférieur à 4, est le triple d'un faisceau $|E|$. Si p est le genre des courbes E, p_1 vaut $3p$, et nous devons prendre p égal à 0 où à 1. Mais le cas $p = 1$ est à rejeter. En effet, dans [N], n° 27, se trouvent décrits les systèmes infinis de genre quelconque dont l'adjoint pourrait être composé au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. Certaines particularités nous ayant conduits à mettre en doute l'existence de ces systèmes, nous avons démontré depuis qu'effectivement ils n'existent pas. La démonstration sera publiée bientôt [VI]; nous nous bornons ici à appliquer anticipativement le résultat aux systèmes de genre 4.

Supposons en conséquence l'adjoint $|C_1|$ composé au moyen d'un faisceau de courbes rationnelles E, bisécantes des courbes C. $|C|$ peut être ramené à un système de courbes d'ordre n douées d'un point $(n-2)$-uple M et de $k = n - 6$ points doubles N_i, outre des points-base simples P_j. Si k dépasse 1, tous les N_i doivent être proches de M pour que $|C|$ soit d'ordre minimum, et l'on sait [III, I. II, n° 29] qu'ils peuvent même être ramenés dans le domaine du premier ordre de M. La relation de proximité permet de montrer que $|C|$ appartient totalement à l'un des systèmes suivants : *a.* $C^6(M^4)$; *b.* $C^7(M^5, N^2)$; *c.* $C^8(M^6, 2N^2)$; *d.* $C^9(M^7, 3N^2)$; *e.* $C^{10}(M^8, 4N^2)$.

Ces systèmes sont irréductibles [I], réguliers et simples, de dimension 17, degré 20, et d'ordre minimum [III, *loc. cit.*]. Pour que les systèmes subordonnés soient à leur tour d'ordre minimum, il est nécessaire de poser quelques restrictions au choix des points-base simples P_j. Tout d'abord, le système *a.* reste évidemment d'ordre minimum quelle que soit la position de ses points-base. Le système *e.* ne peut admettre aucun point-base simple, pas plus que *b.* quand N est distinct de M. Pour les cas *b.*, *c.*, *d.*, avec tous les points-base doubles dans le domaine du premier ordre de M, il faut prendre tous les P_j infiniment voisins de M. On peut supposer qu'aucun ne soit consécutif à un point double N_i, car il doit alors être proche de M et peut être ramené dans le domaine du premier ordre de M par une transformation quadratique de seconde espèce. Si plus de deux points P_j sont infiniment voisins successifs de M sur une branche linéaire, celle-ci est inflexionnelle, sinon il existerait une transformation de Jonquières du troisième ordre qui abaisse l'ordre du système. Il se peut aussi, relativement aux cas *b.*, *c.*, que des points P_j se succèdent sur une branche du second ordre issue de M, mais alors ces points sont au plus au nombre de 4, sinon on pourrait de nouveau construire une transformation de Jonquières, du quatrième ordre, qui abaisse l'ordre du système. Enfin, dans le cas *b.*, plusieurs P_j peuvent se succéder sur une branche du troisième ordre issue de M, mais en nombre au plus égal à 6, de manière qu'aucune transformation d'ordre 5 ne réduise l'ordre du système.

Réciproquement, les conditions imposées aux points-base sont suffisantes pour que les systèmes *b.*, *c.*, *d.*, aient l'ordre minimum. Donnons par exemple la démonstration dans le cas *b*. Une transformation qui abaisse l'ordre de $|C|$ ne peut évidemment élever l'ordre des droites issues de M au moyen desquelles est composé $|C_1|$, puisque $|C|$ est d'ordre inférieur à 10; c'est donc une transformation de Jonquières, définie par un réseau de courbes d'ordre m qui passent $m-1$ fois en M et simplement en $2m-2$ points, parmi lesquels éventuellement le point double N de C et $y \leqq 6$ points-base simples P_j. La limitation de y vaut, comme on le vérifie immédiatement, quels que soient les ordres des branches de C issues de M dans les directions différentes de MN. La condition d'abaissement de l'ordre montre que m vaut au plus 4. Mais la disposition des points-base empêche des quartiques d'avoir plus de 6 intersections avec les courbes C dans le domaine de M, alors qu'il en faudrait au moins 7 pour que l'abaissement de l'ordre ait lieu. Les valeurs 3, 2 de m n'ont pas plus de succès.

En résumé :

Les systèmes infinis de genre 4 dont l'adjoint, de genre inférieur à 4, est composé au moyen d'un faisceau (de courbes nécessairement rationnelles) sont réductibles aux types d'ordre minimum :

a. $C^6(M^4)$ et subordonnés;

b. $C^7(M^5, N^2)$; en plus, si N est proche de M, les systèmes dérivés du précédent par imposition de points-base simples, tous infiniment voisins de M sur des branches non tangentes à MN; une branche d'ordre t ($t=1, 2, 3$) contient au plus $2t$ points-base simples, sauf si elle est d'ordre 1 et de classe 2 (inflexionnelle).

c. $C^8(M^6, 2N^2)$, où les $2N_i$ sont situés dans le domaine du premier ordre de M, et les systèmes subordonnés, à points-base simples successifs sur deux branches linéaires ou sur une branche d'ordre 2, branches issues de M et non tangentes à MN_i; une branche d'ordre 2 en contient 4 au plus, une branche linéaire non inflexionnelle 2 au plus.

d. $C^9(M^7, 3N^2)$, les $3N_i$ situés dans le domaine du premier ordre de M, et les systèmes dérivés par imposition de points-base simples, infiniment voisins successifs de M sur une branche linéaire non tangente à MN_i, et inflexionnelle si les points-base simples sont en nombre supérieur à 2.

e. $C^{10}(M^8, 4N^2)$, où les $4N_i$ sont dans le domaine du premier ordre de M.

En l'absence de points-base simples, ces systèmes de courbes hyperelliptiques sont simples et réguliers, de dimension 17 *et degré* 20.

Ainsi se termine à son tour la recherche des systèmes infinis de genre 4 dont l'adjoint pur, tout en ayant le genre inférieur à 4, n'est pas simple. Nous avons dit que, dans cette partie, nous n'étions pas en mesure d'obtenir à coup sûr les courbes isolées. Il faut entendre cette restriction de la manière suivante. Pour chacun des systèmes $|C_1|$ qui ont été successivement mis à l'étude, nous avons déterminé tous les systèmes d'ordre minimum, y compris les courbes isolées, qui admettent $|C_1|$ comme adjoint. En d'autres termes, il n'existe aucune courbe isolée qui, sans se rattacher aux systèmes classés par nous, admette le même adjoint qu'un de ces systèmes. Mais il n'est pas exclu que des courbes isolées puissent admettre d'autres adjoints $|C_1|$ que ceux repris dans notre étude.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES ADJOINTS DE GENRE AU MOINS ÉGAL A 4.

25. Nous terminons notre étude par un chapitre relatif aux systèmes $|C|$ dont l'adjoint pur a le genre au moins égal à 4. Antérieurement au mémoire [N], les seuls systèmes connus de genre p non supérieur à celui de leur adjoint étaient deux faisceaux de genre 2 et deux réseaux de genre 3 [IV]. Le Mémoire [N] donne pour la première fois des exemples très généraux et aborde l'étude de ces systèmes. Il montre notamment que leur dimension vaut au plus $p-1$. Si l'on considère que, jusqu'ici, seuls les systèmes infinis ont été étudiés, et que, de plus, les faisceaux de genre 3 ne sont pas connus, on s'explique pourquoi les exemples précédemment connus avaient précisément la dimension $p-1$. Ici encore, c'est à cette dimension que nous allons nous limiter : nous allons déterminer les systèmes triplement infinis de genre 4 dont l'adjoint a le genre au moins égal à 4. La recherche des systèmes de dimension moindre semble assez ardue pour que nous nous réservions d'y consacrer plus tard nos efforts.

Pour les systèmes triplement infinis, au contraire, nous bénéficions d'emblée des résultats de [N]. Tout d'abord, l'adjoint pur $|C_1|$ est irréductible et de genre 4 ou 5 [N, n^{os} 28, 35]. $|C|$ est composé de courbes hyperelliptiques, a le degré effectif 4, de même que $|C_1|$, appartient en même temps que $|C_1|$ à une involution J du second ordre, et admet un faisceau $|E|$ de bisécantes elliptiques ou de genre 2 (*ibid.*, n^{os} 35, 36).

Si les courbes E sont elliptiques, $|C|$ relève de la classification faite dans le Mémoire [N], n° 40; il est un des trois systèmes suivants :

1° $C^{15}(8M^5, N^4, P^2, Q^1)$, où les $8M_i$ forment avec Q la base d'un faisceau de cubiques elliptiques, et où N, P sont deux points distincts de Q, unis pour l'involution de Bertini de points fondamentaux M_i. $|C_1|$ a le genre 4, puis les adjoints purs successifs les genres 3, 2, 1.

2° $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$, où M et les $8N_i$ forment la base d'un faisceau de cubiques elliptiques E, tandis que les deux P_j sont deux points unis distincts pour l'involution J des couples de E alignés sur M. $|C_1|$ a le genre 4, les adjoints suivants les genres 2 et 0.

3° $C^{12}(8M^4, N^2, 2P^2)$, où les $8M_i$ forment avec N la base d'un faisceau de cubiques elliptiques E, où les deux P_j sont deux points unis distincts pour l'involution de Bertini de points fondamentaux $8M_i$. Les adjoints successifs ont les genres 4, 2, 1.

26. Il nous reste à étudier les systèmes $|C|$ triplement infinis de genre 4 doués d'un faisceau $|E|$ de bisécantes de genre 2. $|C|$ est toujours composé au moyen d'une involution J du second ordre à laquelle appartiennent les courbes E. Le reste $|C-E|$ est un faisceau irréductible, à moins que sa partie variable ne soit précisément $|E|$ (*cf.* n° 17). S'il est irréductible et distinct de $|E|$, son genre virtuel vaut 1. Comme $|C|$ ne peut admettre un faisceau de bisécantes rationnelles sans que $|C_1|$ ne soit composé au moyen de ce faisceau, nous devons supposer que les courbes $|C-E|$, bisécantes de C, ont effectivement le genre 1; nous sommes ramenés à l'étude du numéro précédent.

Admettons maintenant que la partie variable de $|C-E|$ se réduise à $|E|$. En d'autres termes, le système triplement infini $|C|=|2E+F|$ possède une courbe fondamentale totale F, monovalente et impropre, éventuellement dégénérée. D'ailleurs, d'après une remarque faite dans l'introduction, l'adjoint pur $|C_1|$ contient $|E+E_1|$ et se réduit exactement à ce système ∞^3 puisqu'il est lui-même ∞^3. On observera que la sommation précédente est effectuée par rapport à la base *totale* des faisceaux $|E|$, $|E_1|$ et que les genres virtuels des systèmes $|E|$, $|E_1|$, $|C_1|$, relatifs à cette base, sont égaux aux genres effectifs de ces systèmes. Partant, les courbes E_1 sont effectivement quadrisécantes des courbes C et leur genre effectif vaut 2 ou 1 suivant que C_1 est de genre 5 ou 4. En outre, les courbes C découpent sur une courbe E_1 une série g_4 d'ordre 4, nécessairement composée, donc de dimension inférieure à 3, de sorte que le faisceau $|E_1|$ est contenu dans le système $|C|$.

Envisageons en premier lieu le cas où les courbes E_1 sont de genre 2. Puisque $|C|$ contient $|E_1|$, l'adjoint $|C_1|$ contient le faisceau $|E_2|$. Les courbes E_2 sont bisécantes des courbes E et ne peuvent être unicursales, sinon $|E_1|$ coïnciderait avec $|E_2|$; leur genre ne peut non plus surpasser 1, sans quoi le faisceau $|E|$ serait réductible à $E^{13}(M^5, 9N^4)$ [IV, VII] et, comme nous le montrons ailleurs [VII], les courbes E, E_2 seraient quadrisécantes. Ainsi, le faisceau $|E_2|$ est formé de courbes elliptiques bisécantes des courbes E. Par suite [VII], le faisceau $|E|$ est crémoniennement identique à $E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$; on doit avoir *effectivement* $|E_1|=E_1^6(8M^2, 2N^1, P^0)$ et $|E_2|=E_2^3(8M^1, 2N^0, P^1)$. Les $8M_i$ sont les points fondamentaux d'une involution J de Bertini, de point uni isolé P; les points $2N_j$ sont unis pour J [N, n° 18] et distincts [N, n° 19]; $|E_1|$ possède deux points-base supplémentaires $2Z_j$, où Z_j est infiniment voisin de N_j sur la cubique $G_j^3(8M^1, N_j^1, Z_j^1, P^1)$ $(j=1, 2)$; de plus, $|C|$ est composé au moyen de cette involution J de Bertini.

Le recours à la quadrique double image projective de

$$|C_1|=|E+E_1|=C_1^{15}(8M^5, 2N^3, 2Z^1, P^1)$$

montre que $|C|$ est contenu dans le système ∞^5

$$|2E + E_1| = D^{24}(8M^8, 2N^5, 2Z^1, P^2).$$

Ce dernier admet G_j^3 pour courbe fondamentale monovalente, même si cette cubique dégénère. Par suite, le système

$$|2E + E_1 - G_1^3 - G_2^3| = C^{18}(8M^6, 2N^4, 2Z^0, P^0)$$

a la dimension effective 3; comme il contient $|2E|$, il est irréductible et de genre effectif 4, les multiplicités indiquées étant respectées. Ce système $C^{18}(8M^6, 2N^4)$ a le degré effectif 4 et admet bien $|C_1|$ pour adjoint pur (compte tenu de la surabondance 3 de $|C_1|$) : il constitue une solution du problème posé. Nous allons montrer que tout système linéaire $|C|$, triplement infini, de courbes irréductibles dont l'adjoint $|C_1|$ est du type considéré est crémoniennement identique au système précédent, d'ordre minimum.

Observons tout d'abord que l'adjoint pur $|C_2|$, défini virtuellement par $|C_1'|^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^0, P^0)$, contient le réseau $|2E_1|^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^2, P^0)$ et le système ∞^3 irréductible $|E + E_2|^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^0, P^2)$, auquel n'appartient pas toute courbe $2E_1$. Il est ∞^4, irréductible et effectivement $C_2^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^0, P^0)$. Outre cela, il est composé au moyen de l'involution J, puisque les courbes C_1 sont hyperelliptiques, et découpe sur une courbe C une série linéaire ∞^4 non simple, d'ordre au moins égal à 8; d'autre part, cette série doit être d'ordre au plus égal à 8 [N, n° 4]. Par suite, les courbes C, C_2 sont exactement octosécantes. Exprimons successivement que la courbe $C^t(8M^m, 2N^n, 2Z^z, P^p)$ est bisécante de E, quadrisécante de E_1 et octosécante de C_2 :

(1) $$9t = 2 + 3S + 2(n_1 + n_2) + p,$$

(2) $$6t = 4 + 2S + (n_1 + n_2) + (z_1 + z_2),$$

(3) $$12t = 8 + 4S + 2(n_1 + n_2),$$

où S désigne la somme $m_1 + m_2 + \ldots + m_8$. De (2) et (3), on tire

(3′) $$z_1 = z_2 = 0;$$

on déduit ensuite, de (1), (2) et (3′),

(1′) $$3t = S + 6 - p,$$

(2′) $$n_1 + n_2 + 2p = 8.$$

Par ailleurs, nous savons que $|C|$ contient $|2E|$ et que les courbes E, E_2 sont bisécantes. Donc, E_2 et C sont au moins quadrisécantes, et au plus sextisécantes, puisque $|C_1|$ contient $|E_2|$. D'où,

(4) $$3t - S - p = 6 - 2p = 4 \text{ ou } 6, \qquad p = 1 \text{ ou } 0.$$

De plus, nous pouvons supposer sans restriction que l'ordre t de la courbe C ne peut être abaissé par une transformation quadratique dont les trois points fondamentaux sont choisis parmi les $8M_i$, laissant par suite inaltérés les systèmes $|E_2|$, $|E_1|$, $|E|$, $|C_1|$. Ceci revient à postuler que la somme de trois quelconques des $8m_i$ ne surpasse pas t [N, n° 11]. Il suffit alors de former les 56 combinaisons des $8m_i$ pris 3 à 3 et de sommer tous les nombres écrits pour obtenir la relation $21S \leqq 56t$ ou $8t \geqq 3S = 3(3t+p-6)$ ou encore $t \leqq 3(6-p)$. Comme t vaut au moins 18, on trouve $t=18$, $p=0$, $S=48$. Dans ces conditions, $48 = S = (S+m_i) - m_i \leqq 3t - m_i = 54 - m_i$ et $m_1 = m_2 = \ldots = m_8 = 6$. Enfin, par ($2'$), $n_1 + n_2 = 8$, d'où l'on tire $n_1 = n_2 = 4$, puisque le genre virtuel de C par rapport à la base $(8M, 2N)$ vaut au moins 4. La thèse se trouve ainsi complètement établie.

27. Pour terminer, étudions les systèmes $|C| = |2E+F|$ triplement infinis de genre 4 doués d'un faisceau $|E|$ de bisécantes de genre 2 et d'un faisceau $|E_1|$ de quadrisécantes elliptiques, où $|E_1|$ est précisément l'adjoint pur de $|E|$. Nous avons vu que $|E_1|$ est contenu dans $|C|$ et que $|C_1|$ coïncide avec le système $|E+E_1|$ de genre 4. En outre, les courbes C_2 sont pour le moins octosécantes de C, puisque $|C_2|$ contient $|2E_1|$, et exactement octosécantes en vertu d'un théorème général démontré dans le Mémoire [N], n° 4. D'autre part, l'étude géométrique du faisceau $|E|$ se trouve exposée dans [N], n° 19; $|E|$ est réductible à l'un des types qui suivent :

1° $E^6(8M^2, 2N^1, 2P^1)$ avec adjoint elliptique $E_1^3(8M^1, Q^1)$, où 2N et 2P sont des couples de l'involution de Bertini J de points fondamentaux 8M, douée d'un point uni isolé Q;

2° $E^9(8M_i^3, 2U_i^2, Q^1)$ avec adjoint elliptique $E_1^6(8M_i^2, U_1^2)$ et faisceau $G^3(8M^1, Q^1)$, où U_1 et U_2 sont des points infiniment voisins sur la courbe unie de l'involution J décrite au 1°;

3° $E^7(M^3, 8N^2, 2U^2)$ avec adjoint elliptique $E_1^3(M^1, 8N^1)$, où les U sont les points de contact de deux cubiques du faisceau $|E_1|$ avec une même droite D issue de M. Les systèmes $|C|$ et $|C_1|$ sont alors composés au moyen de l'involution de Jonquières J des intersections libres des cubiques E_1 et des droites issues de M.

Dans le premier cas, $C^{12}(8M^4, 2N^2, P_1^2, P_2^0, Q^0)$ admet bien l'adjoint pur imposé $|C_1| = C_1^9(8M^3, 2N^1, 2P^1, Q^1)$, car $|C_1|$ est de surabondance 2 et l'on est en droit de considérer P_2 et Q comme ses points-base accidentels. Pour notre objet, il faut que C^{12} soit irréductible et ait effectivement le comportement décrit. Mais, en général, ceci n'aura pas lieu. En effet, on vérifie aisément que le double du réseau $H^6(8M^2, 2N^1)$ est un système irréductible $H^{12}(8M^4, 2N^2)$ dont la dimension effective vaut toujours 5 (quand les conditions imposées à la base sont respectées); par suite, C^{12} sera généralement de dimension 2 et coïncidera avec le réseau dégénéré $|2E|$. Ce raisonnement prouve encore que C^{12} sera ∞^3, irréductible, de genre et degré effectifs 4, sous la condition nécessaire et suffisante que les $2P$ forment un couple en coïncidence de l'involution J, à laquelle appartiennent les courbes H^{12}. D'autre part, la méthode utilisée au numéro précédent permet de montrer que toute solution $|C|$ est crémoniennement identique au système $|C^{12}|$ que nous venons d'obtenir, ou au système analogue associé à l'autre couple $(2N)$ si ce dernier est aussi en coïncidence. Il suffira de nouveau d'exprimer que $C^t(8M^m, 2N^n, 2P^p, Q^q)$ est bisécante de E, quadrisécante de E_1 et octosécante de $C_2^6(8M^2)$, de se prévaloir en outre de l'hypothèse, encore licite dans le cas qui nous occupe, d'après laquelle la somme de trois quelconques des $8m_i$ est inférieure ou égale à t, pour voir que C se réduit à $C^{12}(8M^4, Q^0, 2N^n, 2P^p)$ où $n_1+n_2+p_1+p_2=6$. Comme le genre virtuel de C par rapport à la base indiquée n'est pas moindre que 4, les quatre entiers encore indéterminés sont, à l'ordre près, $(3, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 0)$ ou $(2, 2, 1, 1)$. Or, dans le dernier cas, C^{12} posséderait un point double ultérieur et serait de degré au plus égal à 2, tandis que le premier cas est inacceptable vu la nature de l'adjoint $|C_1|$.

28. Passons à l'examen du 2° du n° 27.

Pour la commodité du lecteur, situons de nouveau le problème. Soient $8M_i$ le groupe des points fondamentaux d'une involution de Bertini J, P le point uni isolé de cette involution, neuvième point-base du faisceau des cubiques elliptiques $G^3(8M_i^1, P^1)$, $2N_j$ deux points infiniment voisins l'un de l'autre situés sur la courbe unie de J. Le faisceau irréductible $|E| = E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$ admet l'adjoint pur $|E_1| = E_1^6(8M^2, N_1^2)$. Il s'agit de déterminer les systèmes triplement infinis $|C| = C^t(8M_i^{m_i}, 2N_j^{n_j}, P^p, \ldots)$ dont l'adjoint pur $|C_1|$ coïncide avec le système somme $|E+E_1| = C_1^{15}(8M^5, N_1^4, N_2^2, P^1)$. Rappelons que $|C|$ a le degré et le genre effectifs 4, que ses courbes sont quadrisécantes de E_1, bisécantes de E, et appartiennent à l'involution J tout comme E, E_1, G et C_1. Notre premier objectif sera de déterminer les entiers non négatifs t, m_i, n_j, p par une discussion arithmétique appropriée. Nous pourrons évidemment supposer que l'ordre t des courbes C, au moins égal à 18, ne peut être abaissé par une transformation quadratique qui ne modifie pas la structure des systèmes $|E|$, $|E_1|$, $|C_1|$, $|G|$, et écrire en conséquence

$$m_i+m_j+m_k \leqq t \quad \text{pour} \quad i \neq j \neq k. \tag{1}$$

Puisque C est quadrisécante de E_1 et bisécante de E, nous avons, en posant $m = m_1+m_2+\ldots+m_8$,

$$3t = 2+m+n_1, \tag{2}$$

$$n_2+p = n_1-n_2+4. \tag{3}$$

Le genre virtuel π de C par rapport à la base de $|C_1|$ est donné par la relation

$$2\pi = t^2-\Sigma m_i^2-\Sigma n_j^2-p^2+2-3t+m+n_1+n_2+p,$$

ou encore, moyennant (2), par

$$t^2 - \Sigma m_i^2 - \Sigma n_j^2 - p^2 = 2\pi - n_2 - p. \tag{4}$$

En dehors de la base de $|C_1|$, le système $|C|$ possède encore exactement $\pi - 4$ points doubles; il est en effet de genre effectif 4 et ne peut avoir de points triples ultérieurs, puisqu'il est doué d'un faisceau de bisécantes $|E|$ dont la base coïncide avec celle de $|C_1|$. Par suite, son degré virtuel calculé par rapport à l'ensemble de ses points multiples (et de ses points-base simples éventuels contenus dans la base de $|C_1|$) vaut, compte tenu de (4),

$$2\pi - n_2 - p - 4(\pi - 4) = 16 - (2\pi + n_2 + p) \geqq 4.$$

Puisque π est au moins égal à 4, ceci prouve que $n_2 + p$ ne peut dépasser 4. Or, N_2 étant proche de N_1, il est clair que la différence $n_1 - n_2$ n'est pas négative, de sorte que, par (3), $n_2 + p$ vaut au moins 4. En conséquence,

$$n_2 + p = 4, \qquad n_1 = n_2, \qquad \pi = 4. \tag{5}$$

D'autre part, les relations (1) donnent, par addition, $8t \geqq 3m$; l'élimination de m entre cette inégalité et (2) fournit $18 \leqq t \leqq 3(2 + n_1)$, de sorte que n_1 est supérieur à 3. Les relations (5) et (4) montrent ensuite que

$$n_1 = n_2 = 4, \qquad p = 0, \qquad t^2 = \Sigma m_i^2 + 36. \tag{6}$$

(2) devient $3t = m + 6$ et l'élimination de m entre cette relation et $8t \geqq 3m$ laisse $t = 18, m = 48, \Sigma m_i^2 = 288$. Or, par (1), $m_i + m_j + 2t \geqq m, m_i + m_j \geqq 12$, $m_k \leqq 6$. Finalement,

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_7 = m_8 = 6, \qquad t = 18. \tag{7}$$

Au total, la seule solution arithmétiquement possible est $C^{18}(8M^6, 2N^4, P^0)$, sans autres points-base. L'existence du système précédent est quasi évidente, parce qu'il contient d'une part le réseau $|2E|$, et d'autre part la courbe $\overline{E}_1^6(8M^2, N_1^2, N_2^1)$ comptée trois fois. Cette sextique existe bien à titre de courbe irréductible; elle correspond, sur le cône quadratique double image de $H^6(8M^2)$, à la section par le plan osculateur à la courbe de diramation en un point de celle-ci. Ainsi, l'équation $k_1 E^2 + k_2 \overline{E}^2 + k_3 E . \overline{E} + k_4 \overline{E}_1^3 = 0$, où E, $\overline{E}$, $\overline{E}_1$ sont les premiers membres des équations de deux courbes du faisceau $|E|$ et de la sextique considérée plus haut, représente le système irréductible $\infty^3|C|$ à l'étude. L'adjoint de $|C|$ est virtuellement $C^{15}(8M^5, 2N^3)$, contient $|C_1|$ et se réduit à ce dernier, puisqu'il est aussi ∞^3 [1]. On en déduit que $|C|$ est bien d'ordre minimum.

---

[1] Nous sommes en présence d'un cas typique d'augmentation et de *diminution* des multiplicités virtuelles de l'adjoint impur.

29. C'est encore une discussion arithmétique semblable à celles qui précèdent qui permet de montrer que le 3° du n° 27 ne correspond à aucun système irréductible $|C|$ triplement infini. Dans le cas présent, $|C| = C^t(M^m, 8N_i^{n_i}, 2P_j^{p_j}, \ldots)$ a encore le genre et le degré effectifs 4, possède un faisceau de bisécantes $E^7(M^3, 8N^2, 2P^2)$, un faisceau de quadrisécantes $E_1^3(M^1, 8N^1)$, et admet pour adjoint pur le système

$$|C_1| = |E + E_1| = C_1^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2).$$

On en déduit aussitôt, en désignant par n la somme des $8n_i$, par p la somme des $2p_j$, par π le genre virtuel de C par rapport à la base de $|C_1|$,

$$3t = 4 + m + n, \tag{1}$$

$$m + 2p = t + 6, \tag{2}$$

$$2\pi = t^2 - m^2 - \Sigma n_i^2 - \Sigma p_j^2 + p - 2. \tag{3}$$

$|C|$ possède encore $\pi - 4$ points-base doubles ultérieurs. Son degré virtuel par rapport à la base précédente augmentée de ces $\pi - 4$ points est toujours au moins égal à 4, d'où, compte tenu de (3),

$$14 - p \geqq 2\pi. \tag{4}$$

D'autre part, l'adjoint impur $|C'|$ de $|C|$ contient $|C_1|$ et est complété par une courbe fixe G. Les courbes C' passent $m - 1 + a \geqq m - 1$ fois par le point propre M, les courbes C_1 passent 4 fois en ce point, tandis que G, d'ordre $t - 13$, y passe $t - 13 - b \leqq t - 13$ fois. Par suite,

$$m - 1 + a = 4 + t - 13 - b, \qquad t - 8 = m + a + b \geqq m.$$

Combinée avec (2), la dernière relation donne $2p \geqq 14$, $p \geqq 7$. Mais ceci est contradictoire avec (4), qui, moyennant $\pi \geqq 4$, fournit $p \leqq 6$.

30. Résumons les résultats obtenus dans ce Chapitre III.

Les systèmes linéaires irréductibles $|C|$ de genre effectif 4 dont l'adjoint pur $|C_1|$ est formé de courbes de genre effectif $p_1 \geqq 4$ sont tout au plus ∞^3. Lorsque $|C|$ est exactement ∞^3, il a le degré 4 et est composé au moyen d'une involution J du second ordre; $|C_1|$, formé de courbes irréductibles de genre effectif 4 ou 5, a aussi le degré 4 et est composé au moyen de J. $|C|$ est doué d'un faisceau $|E|$ de bisécantes elliptiques ou de genre 2. Dans le premier cas, il est réductible à l'un des trois types suivants, d'ordre minimum :

1° $C^{15}(8M^5, N^4, P^2, Q^1)$, où les $8M_i$ forment avec Q la base d'un faisceau de cubiques elliptiques quadrisécantes, où N et P sont deux points, distincts de Q, unis pour l'involution J de Bertini de points fondamentaux $8M_i$. $|E|$ n'est autre que le faisceau $E^6(8M^2, N^2)$, tandis que $|C_1| = C_1^{12}(8M^4, N^3, N_1^1, P^1, P_1^1)$ a le genre 4 (N_1 et P_1 désignent respectivement les conjugués de N et P dans l'involution J); les adjoints purs successifs $C_2^9(8M^3, N^2, Q^1)$, $C_3^6(8M^2, N^1, N_1^1)$, $C_4^3(8M^1, Q^1)$ sont de genres 3, 2, 1 et de degrés 4, 2, 0.

2° $C^{10}(M^4, 8N^3, 2P^2)$, où M et $8N_i$ forment la base du faisceau $|E|$ des cubiques elliptiques bisécantes, tandis que les $2P_j$ sont deux points unis distincts pour l'involution J des couples de E alignés sur M. $|C_1| = C_1^7(M^3, 8N^2, 2P_j^1, 2\bar{P}_j^1)$ a le genre 4 ($\bar{P}_j$ est le conjugué de P_j dans J) et les adjoints purs suivants $C_2^4(M^2, 8N^1)$, $C_3^1(M^1)$ sont respectivement de genres 2, 0 et de degrés 4, 0.

3° $C^{12}(8M^4, N^2, 2P^2)$, où les $8M_i$ forment avec N la base du faisceau $|E|$ des cubiques elliptiques bisécantes, où les $2P_j$ sont deux points unis distincts pour l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. Les adjoints purs successifs $C_1^9(8M^3, N^1, 2P_j^1, 2\bar{P}_j^1)$, $C_2^6(8M^2)$, $C_3^3(8M^1, N^1)$ sont respectivement de genres 4, 2, 1 et de degrés 4, 4, 0.

Dans le second cas, l'adjoint pur $|E_1|$ *du faisceau* $|E|$ *est formé de courbes de genre effectif* 2 *ou* 1, *quadrisécantes des courbes* C. *Si* E_1 *a le genre* 2, $|C|$ *est réductible au type décrit ci-après, d'ordre minimum :*

4° $C^{18}(8M_i^6, 2N_j^4)$, où les $2N_j$ sont des points distincts situés sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. L'adjoint pur $|C_1| = C_1^{15}(8M_i^5, 2N_j^3, 2Z_j^1, P^1)$, où P est le point uni isolé de J, où Z_j est proche de N_j sur la cubique $(8M^1, N_j^1, Z_j^1, P^1)$, a le genre 5 et le degré 4, tandis que les adjoints *purs* suivants $C_2^{12}(8M^4, 2N^2, 2Z^0, P^0)$, $C_3^9(8M^3, 2N^1, 2Z^0, P^0)$ (¹), $C_4^6(8M^2)$, $C_5^3(8M^1, P^1)$ sont respectivement de genres effectifs 5, 4, 2, 1 et de degrés effectifs 8, 7, 4, 0. Dans cette suite de systèmes, seul $|C_3|$ n'appartient pas à l'involution J et est d'ailleurs simple (¹). Quant au faisceau $|E|$, il n'est autre que $E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$, d'adjoints purs $E_1^6(8M^2, 2N_j^1, 2Z_j^1)$, $E_2^3(8M^1, P^1)$.

Lorsque E_1 *est elliptique,* $|C|$ *est crémoniennement identique à l'un des deux types suivants, d'ordre minimum :*

5° $C^{12}(8M_i^4, 2N_j^2, P_1^2)$, où les $2N_j$ forment un couple de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$, où P_1 est un point de la courbe unie de cette involution. Le faisceau $|E|$ est ici $E^6(8M^2, 2N^1, P_1^1, P_2^1)$, d'adjoint pur $|E_1| = E_1^3(8M^1, Q^1)$, Q désignant le point uni isolé de J, P_2 le conjugué de P_1 dans J, proche de P_1 sur la cubique $(8M^1, Q^1, P_1^1)$. La suite des adjoints purs de $|C|$ est $C_1^9(8M^3, 2N^1, 2P^1, Q^1)$, $C_2^6(8M^2)$, $C_3^3(8M^1, Q^1)$, de genres 4, 2, 1, de degrés 4, 4, 0.

(¹) Nous savons (n° 26) que $|C_2|$ est composé au moyen de l'involution J; il a le genre 5 et le degré 8, la dimension 4; par suite, J induit sur la courbe C_2 générique une involution *elliptique*. Donc [VIII] $|C_3|$ est simple, ∞^4, de genre effectif 4; son degré effectif doit être supérieur à 6 et vaut précisément 7 : $|C_3|$ est régulier et dépourvu de points-base accidentels.

6° $C^{18}(8M_i^6, 2N_j^4)$, où les $2N_j$ sont deux points infiniment voisins l'un de l'autre situés sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8M_i$. P désignant le point uni isolé de J, on a $|E| = E^9(8M^3, 2N^2, P^1)$, $|E_1| = E_1^6(8M^2, N_1^2)$. L'adjoint pur $|C_1| = C_1^{15}(8M^5, N_1^4, N_2^2, P^1)$ a le genre 4 et le degré 4, et constitue un cas *particulier* du système décrit au 1° (¹); les adjoints purs successifs sont de genres $p_1 = p_2 = 4$, $p_3 = 3$, $p_4 = 2$, $p_5 = 1$ et de degrés $D_1 = D_2 = D_3 = 4$, $D_4 = 2$, $D_5 = 0$.

CHAPITRE IV.

CONCLUSIONS.

Rassemblons maintenant, en un seul énoncé, l'essentiel de nos résultats, dans l'ordre où ils ont été exposés. Pour donner la classification complète des systèmes $|C|$ de genre 4 déterminés dans notre étude, nous devons renseigner pour chacun les adjoints pur successifs $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$, ..., qui permettent de distinguer entre eux plusieurs systèmes définis arithmétiquement de façon identique (²). Nous indiquerons même pour chaque cas les genres p_i et degrés effectifs D_i des adjoints $|C_i|$: ces nombres constituent les principaux invariants crémoniens arithmétiques de $|C|$. Bien que les adjoints successifs $|C_i|$ n'aient pas toujours été renseignés au cours de notre étude, il sera facile de vérifier l'exactitude de notre texte en ce qui les concerne.

La notation $C^n(aM^r, bN^s, \ldots)$, appliquée à $|C|$ ou à ses adjoints, désignera un système irréductible d'existence effective, d'ordre n, doué de a points-base *effectivement* r-uples, b points-base s-uples, etc., et *dépourvu de points-base* (accidentels) *non mentionnés.* Au contraire, la même notation, appliquée à une courbe isolée associée à $|C|$, par exemple une courbe fondamentale de $|C|$ ou d'un adjoint, définit évidemment les conditions de passage *assignées* à cette courbe, de telle sorte que les multiplicités effectives imposées à cette courbe peuvent différer des multiplicités assignées : ainsi, lorsqu'une cubique fondamentale de $|C|$ est assujettie à passer simplement en 9 points-base de $|C|$, rien n'empêche qu'en réalité elle passe doublement au premier et ne contienne pas le second, pourvu que le compte des intersections avec les courbes C ne soit pas altéré. Ces changements de multiplicité pour les courbes fondamentales ont lieu pour des positions particulières des points-base et ne doivent pas modifier les caractères de $|C|$ tant que ce système reste irréductible.

(¹) Le lecteur vérifiera que les caractères des adjoints successifs de $|C_1|$ sont les mêmes que dans le cas général.

(²) Rappelons qu'il s'agit des adjoints à indices inférieurs au sens de [N], n° 3 : $|C_i|$ n'est autre que l'adjoint pur de $|C_{i-1}|$.

Le nombre r que nous renseignons pour chaque cas est la dimension effective du système $|C|$ correspondant quand on ne lui impose aucun point-base simple. En plus de ces systèmes de dimension maxima, notre classification englobe aussi, du moins pour $p_1 < 4$, les systèmes irréductibles subordonnés aux précédents. Ces systèmes seront eux-mêmes d'ordre minimum *quels que soient le nombre et la position des points-base simples*, sauf les cas où une restriction est explicitement formulée dans l'énoncé.

Moyennant ces conventions, les systèmes linéaires de courbes algébriques planes irréductibles de genre 4 sont crémoniennement réductibles aux types $|C|$ *suivants, d'ordre minimum, ou à des types subordonnés.*

I. — Systèmes de dimension $\geqq 0$ avec adjoint $|C_1|$ irréductible, simple et de genre $p_1 < 4$.

1. $p_1 = 0$, $D_1 = 2$. *a.* $C^6(2\,M^3)$, sans autres points-base; $r = 15$; $C_1^2(2\,M^1)$.

b. $C^5(2\,M^2)$, contenu dans le précédent et de même adjoint; $r = 14$.

2. $p_1 = 1$, $D_1 = 3$. $C^6(6\,M^2)$; $r = 9$; $C_1^3(6\,M^1)$.

3. $p_1 = 2$, $D_1 = 4$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$. $C^7(M^3,\ 8\,N^2)$; $r = 5$; $C_1^4(M^2,\ 8\,N^1)$; $C_2^1(M^1)$. La cubique $G^3(M^1,\ 8\,N^1)$ est unique.

4. $p_1 = 3$, $D_1 = 5$; $p_2 = 0$, $D_2 = 1$. $C^7(11\,M^2)$; $r = 2$; $C_1^4(11\,M^1)$; C_2^1.

5. $p_1 = 3$, $D_1 = 5$; $p_2 = 1$, $D_2 = 2$. $C^9(7\,M^3,\ 3\,N^2)$; $r = 3$; $C_1^6(7\,M^2,\ 3\,N^1)$; $C_2^3(7\,M^1)$.

6. $p_1 = 3$, $D_1 = 5$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$. *a.* $C^8(M^4,\ 11\,N^2,\ 2\,Z^1,\ 2\,U^1)$; $r = 1$; $C_1^5(M^3,\ 11\,N^1)$; $C_2^2(M^2)$. Z_1 et Z_2 sont les deux points de $C^4(M^2, 11\,N^1)$, irréductible et de genre 2, tels que les C_1 par Z_1 ou Z_2 recoupent au total C^4 suivant quatre points alignés par couples sur M. U_i est infiniment voisin de Z_i sur la droite $MZ_i (i = 1,\ 2)$.

b. $C^8(M^4,\ 11\,N^2)$; $r = 2$; mêmes adjoints que *a*. N'existe que pour certaines positions des points-base. Quand $C^4(M^2,\ 11\,N^1)$ est irréductible et de genre 2, il faut que $10\,N_i (i = 2,\ 3,\ \ldots,\ 11)$ forment l'intersection de $C^4(M^2, N_1^1)$ avec une quintique $C^5(M^3)$ qui touche C^4 en N_1 et passe par deux points A, B de C^4 tels que la conique menée par M, A, B et tangente à C^4 en N_1 rencontre ultérieurement C^4 en deux points situés sur la droite qui joint les dernières intersections de C^4 avec MA, MB. Il existe des configurations particulières réductibles à des types plus simples (*cf.* n° **11**).

7. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 1$, $D_2 = 2$. $C^9(7\,M^3,\ 3\,N^2)$; $r \geqq 4$; $C_1^6(7\,M^2,\ 3\,N^1,\ P^1)$; $C_2^3(7\,M^1)$. $|C_1|$ admet la cubique fondamentale $G^3(7\,M^1,\ 3\,N^1,\ P^1)$ pour laquelle P est effectivement simple; P est uni pour l'involution de Geiser J définie par $|C_2|$. Suivant les cas, 1, 2 ou 4 points-base simples de $|C_1|$ peuvent jouer le rôle de P. Néanmoins (*cf.* le type **13** ci-après), le groupe des $3\,N_i$ ne renferme aucun couple de J.

8. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 2$, $D_2 = 2$; $p_3 = 1$, $D_3 = 0$.

$C^{12}(8\,M^4, N^3, P^1_4)$; $r = 4$; $C^9_1(8\,M^3, N^2, P^1_3)$; $C^6_2(8\,M^2, N^1, P^1_2)$; $C^3_3(8\,M^1, N^0, P^1_1)$. Il existe une courbe $G^3(8\,M^1, N^1, 4\,P^1)$ fondamentale pour $|C|$ et ses adjoints, mais (*cf.* le type **11** ci-dessous) N n'est pas uni pour l'involution de Bertini de points fondamentaux $8\,M_i$.

II. — Systèmes infinis avec adjoint $|C_1|$ non simple et de genre $p_1 < 4$.

A. — $|C_1|$ *est composé au moyen d'une involution* J *du* 2^e^ *ordre.*

9. $p_1 = 2$, $D_1 = 4$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$.

$C^7(M^3, 8\,N^2)$; $r = 5$; $C^4_1(M^2, 8\,N^1)$; $C^1_2(M^1)$. Il doit exister un faisceau elliptique $E^3(M^1, 8\,N^1)$. C appartient, comme C_1 et C_2, à l'involution des intersections libres des courbes E^3 et C_2.

10. $p_1 = 2$, $D_1 = 4$; $p_2 = 1$, $D_2 = 0$.

$C^9(8\,M^3)$; $r = 6$; $C^6_1(8\,M^2)$; $C^3_2(8\,M^1, N^1)$. $|C|$ contient un système $C^9(8\,M^3, N^1)$, de dimension 5, composé au moyen de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8\,M_i$.

11. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 2$, $D_2 = 2$; $p_3 = 1$, $D_3 = 0$.

a. $C^{12}(8\,M^4, N^3, N^1_1)$; $r = 4$.

b. $C^{12}(8\,M^4, N^2, U^2, P^2)$; $r = 3$.

Ces deux systèmes admettent la même suite d'adjoints $C^9_1(8\,M^3, N^2, P^1)$, $C^6_2(8\,M^2, N^1, N^1_1)$, $C^3_3(8\,M^1, P^1)$. Il faut qu'existent les faisceaux de courbes elliptiques $H^6(8\,M^2, N^2)$ et $E^3(8\,M^1, P^1)$, que N_1 soit infiniment voisin de N sur $G^3(8\,M^1, N^1, P^1)$ et que U soit infiniment voisin de N sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8\,M_i$. Ces systèmes et leurs adjoints sont composés au moyen de J. Le système *a.* est un cas limite du type **8**, pour lequel les courbes C deviennent hyperelliptiques (¹).

12. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 2$, $D_2 = 2$; $p_3 = 0$, $D_3 = 0$.

$C^{10}(M^4, 8\,N^3, 2\,P^2)$; $r = 3$; $C^7_1(M^3, 8\,N^2, P^2_1)$; $C^4_2(M^2, 8\,N^1, P^1_1, Q^1)$; $C^1_3(M^1)$, avec faisceau de cubiques elliptiques $E^3(M^1, 8\,N^1)$, P_1 uni pour l'involution J des couples de E alignés sur M, P_2 infiniment voisin de P_1 sur la courbe unie de J et Q infiniment voisin de P_1 sur MP_1. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J.

13. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 1$, $D_2 = 2$.

$C^9(7\,M^3, 2\,N^2, P^2_1)$; $r = 4$; $C^6_1(7\,M^2, 2\,N^1, P^1_1, P^1_2)$; $C^3_2(7\,M^1)$. Les $2\,N_i$ et les $2\,P_j$ forment deux couples de l'involution de Geiser J engendrée par $|C_2|$; le couple $2\,P_j$ forme une coïncidence de J. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J. Si le couple $2\,N_i$ (à distance finie de P_1P_2) forme à son tour une coïncidence de J, les rôles des deux couples sont permutables et il existe deux systèmes du type de $|C|$ et d'adjoint $|C_1|$.

(¹) L'invariant (C, C^2), nombre des intersections variables des courbes C et C^2, permet de différencier les types **8**, **11** *a* et **11** *b*, pour lesquels il prend respectivement les valeurs 5, 4 et 8.

14. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$.

a. $C^9(M^5, 12\,P^2, 2\,X^2)$; $r = 1$; $C_1^5(M^3, 12\,P^1)$; $C_2^2(M^2)$.
Les $2\,X_j$ sont alignés sur M et unis pour l'involution J des couples communs aux droites issues de M et aux courbes du faisceau $H^4(M^2, 12\,P^1)$. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J.

b. $C^8(M^4, 11\,P^2)$; $r = 3$; mêmes adjoints que *a*. Ce système n'existe que si P_{11}, P_{12} sont infiniment voisins et alignés sur M (ou se succèdent sur une branche dont la tangente passe en M); il est composé au moyen de J. Si plusieurs couples de P_i présentent la disposition de P_{11}, P_{12}, il existe autant de systèmes du type de $|C|$ et de même adjoint $|C_1|$.

15. $p_1 = 3$, $D_1 = 4$; $p_2 = 0$, $D_2 = 0$.

a. $C^{10}(M^6, N^4, 11\,P^2)$; $r = 3$; $C_1^6(M^4, N^2, 12\,P^1)$; $C_2^2(M^2)$.
N est dans le domaine du premier ordre de M et les $12\,P_i$ se succèdent sur une branche linéaire inflexionnelle issue de M; $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de l'involution J des couples communs aux droites par M et aux quintiques du faisceau $H^5(M^3, N^2, 12\,P^1)$. Les systèmes subordonnés à $|C|$ ne sont d'ordre minimum que si les couples de points-base simples sont infiniment voisins à P_{11} (et différents de P_{12}); sinon, ils sont réductibles à *b.*, ci-après.

b. $C^9(M^5, N^3, 11\,P^2, N_1^1)$, contenu dans le précédent et de mêmes adjoints; $r = 2$. N^1 est proche de N sur la quartique isolée $H^4(M^2, N^1, 12\,P^1)$. $|C|$ se différencie encore du type **14** *a.* par l'invariant $r^{(2)}$, dimension de l'adjoint $|C^2|$: pour le type **14** *a.*, $r^{(2)} = 3$; pour le type **15**, $r^{(2)} = 2$.

B. — $|C_1|$ *composé au moyen d'un faisceau de courbes rationnelles :*

$$p_1 = 0, \qquad D_1 = 0, \qquad r = 17.$$

16.

a. $C^6(M^4)$.

b. $C^7(M^5, N^2)$, sans points-base simples si N est distinct de M; si N est au contraire proche de M, les points-base simples imposés sont infiniment voisins de M sur des branches non tangentes à MN, et répartis à raison de $2\,t$ points au plus par branche d'ordre $t \leqq 3$, excepté si la branche est linéaire inflexionnelle.

c. $C^8(M^6, 2\,N^2)$, avec les $2\,N_i$ dans le domaine du premier ordre de M. Les points-base simples imposés doivent être infiniment voisins de M sur des branches non tangentes aux MN_i, et répartis à raison de $2\,t$ points au plus par branche d'ordre $t \leqq 2$, excepté si la branche est linéaire inflexionnelle.

d. $C^9(M^7, 3\,N^2)$, avec les $3\,N_i$ dans le domaine du premier ordre de M. Les points-base simples imposés sont infiniment voisins de M sur une branche linéaire non tangente aux MN_i et inflexionnelle s'il existe plus de deux points-base simples.

e. $C^{10}(M^8, 4\,N^2)$, avec les $4\,N_i$ dans le domaine du premier ordre de M, et sans points-base simples.

III. — Systèmes $|C|$ de dimension 3 avec adjoint de genre $p_1 \geqq 4$.

$|C|$ est de degré 4, composé en même temps que $|C_1|$ au moyen d'une involution J du second ordre, et admet un faisceau $|E|$ de bisécantes de genre 1 ou 2.

A. — $|E|$ *est elliptique : tous les adjoints de* $|C|$ *sont composés au moyen de l'involution* J.

17. $p_1=4,\ D_1=4$; $p_2=3,\ D_2=4$; $p_3=2,\ D_3=2$; $p_4=1,\ D_4=0$.

$C^{15}(8\,M^5, N^4, P^2, Q^1)$; $C_1^{12}(8\,M^4, N^3, N_1^1, P^1, P_1^1)$; $C_2^9(8\,M^3, N^2, Q^1)$; $C_3^6(8\,M^2, N^1, N_1^1)$; $C_4^3(8\,M^1, Q^1)$; $E^6(8\,M^2, N^2)$. $8\,M_i$ et Q forment la base d'un faisceau $|C_4|$ de cubiques elliptiques; N et P sont deux points, distincts de Q, unis pour l'involution J de Bertini de points fondamentaux $8\,M_i$; N_1 et P_1 leurs conjugués dans J.

18. $p_1=4,\ D_1=4$; $p_2=2,\ D_2=4$; $p_3=0,\ D_3=0$.

$C^{10}(M^4, 8\,N^3, 2\,P^2)$; $C_1^7(M^3, 8\,N^2, 2\,P^1, 2\,\overline{P}^1)$; $C_2^4(M^2, 8\,N^1)$; $C_3^1(M^1)$; $E^3(M^1, 8\,N^1)$. Les $2\,P_j$ sont distincts et unis pour l'involution J des couples de E alignés sur M; les $\overline{P}_j$ sont conjugués aux P_j dans J.

19. $p_1=4,\ D_1=4$; $p_2=2,\ D_2=4$; $p_3=1,\ D_3=0$.

$C^{12}(8\,M^4, N^2, 2\,P^2)$; $C_1^9(8\,M^3, N^1, 2\,P^1, 2\,\overline{P}^1)$; $C_2^6(8\,M^2)$; $C_3^3(8\,M^1, N^1)$; $E^3(8\,M^1, N^1)$. Les $2\,P_j$ sont distincts et unis pour l'involution J de Bertini engendrée par $|C_2|$.

B. — $|E|$ *est de genre* 2 : $|C_1|=|E+E_1|$, $|E_1|$ *formé de quadrisécantes à* $|C|$.

20. $p_1=5,\ D_1=4$; $p_2=5,\ D_2=8$; $p_3=4,\ D_3=7$; $p_4=2,\ D_4=4$; $p_5=1,\ D_5=0$.

$C^{18}(8\,M^6, 2\,N^4)$; $C_1^{15}(8\,M^5, 2\,N^3, 2\,\overline{N}^1, P^1)$; $C_2^{12}(8\,M^4, 2\,N^2)$; $C_3^9(8\,M^3, 2\,N^1)$; $C_4^6(8\,M^2)$; $C_5^3(8\,M^1, P^1)$; $E^9(8\,M^3, 2\,N^2, P^1)$; $E_1^6(8\,M^2, 2\,N^1, 2\,\overline{N}^1)$; $|E_2|=|C_5|$. Les $8\,M_i$ et P forment la base d'un faisceau $|C_5|$ de cubiques elliptiques; les $2\,N_j$ sont distincts et situés sur la courbe unie de l'involution J de Bertini engendrée par $|C_4|$; les $2\,\overline{N}_j$ sont les conjugués dans cette involution des $2\,N_j$. Le seul adjoint de $|C|$ non composé au moyen de J est $|C_3|$, qui est simple.

21. $p_1=4,\ D_1=4$; $p_2=2,\ D_2=4$; $p_3=1,\ D_3=0$.

$C^{12}(8\,M^4, 2\,N^2, P^2)$; $C_1^9(8\,M^3, 2\,N^1, P^1, \overline{P}^1, Q^1)$; $C_2^6(8\,M^2)$; $C_3^3(8\,M^1, Q^1)$; $E^6(8\,M^2, 2\,N^1, P^1, \overline{P}^1)$; $|E_1|=|C_3|$. P est un point de la courbe unie de l'involution J engendrée par $|C_2|$; les $2\,N_j$ forment un couple de J; Q est le point uni isolé et $\overline{P}$ est le conjugué de P. $|C|$ et ses adjoints sont composés au moyen de J (1).

22. $p_1=4,\ D_1=4$; $p_2=4,\ D_2=4$; $p_3=3,\ D_3=4$; $p_4=2,\ D_4=2$; $p_5=1,\ D_5=0$.

$C^{18}(8\,M^6, 2\,N^4)$; $C_1^{15}(8\,M^5, N_1^4, N_2^2, P^1)$ est un cas particulier du système **17**. Les $2\,N_j$ sont infiniment voisins sur la courbe unie de l'involution de Bertini J de points fondamentaux $8\,M_i$; P est le point uni isolé de J. $|C|$ et tous ses adjoints sont composés au moyen de J. $E^9(8\,M^3, 2\,N^2, P^1)$; $E_1^6(8\,M^2, N_1^2)$.

---

(1) Les types **19** et **21** se différencient par les valeurs que prend l'invariant crémonien (C, C_3), nombre des intersections variables des courbes C avec les adjointes C_3, soient deux pour le type **19** et quatre pour le type **21**.

BIBLIOGRAPHIE.

[J] F. Jongmans, *Les variétés algébriques à courbes-sections de genre 4* (*Mém. Acad. roy. de Belgique*, in-8°, 1944).

[N] L. Nollet, *Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes* (*Mém. Soc. roy. Sc. de Liège*, t. **7**, 1947, p. 469-555).

[I] G. Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. **4**, 1890; *Memorie scelte*, XII).

[II] *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere* 3 (*Atti R. Accad. Sc. Torino*, vol. XXV. 1890; *Memorie scelte*, XIII).

[III] F. Conforto, *Le superficie razionali*, Bologna, N. Zanichelli, 1939.

[IV] M. De Franchis, *Riduzione dei fasci di curve di genere* 2. *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere* 3, *per* $k > 1$ (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, t. **13**, 1899).

[V] G. Jung, *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque* (*Annali di Mat.*, sér. 2, t. **15** et **16**, 1887-1889).

[VI] Jongmans et Nollet, *Un théorème sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes à système adjoint réductible* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, sér. 5, t. **34**, 1948, p. 617-625).

[VII] *Contribution à la classification des faisceaux de courbes algébriques planes de genre* 2 (*Bull. sc. mathém.*, 1948).

[VIII] L. Nollet, *Sur le système adjoint à un système linéaire de courbes planes appartenant à une involution* (*Bull. Acad. roy. de Belgique*, sér. 5, t. **33**, 1947, p. 556-562).