SZOLEM MANDELBROJT

Théorèmes d'unicité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 101-138
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__101_0>

THÉORÈMES D'UNICITÉ

PAR M. S. MANDELBROJT.

Introduction.

Nous démontrons dans ce Mémoire plusieurs théorèmes d'unicité qui concernent successivement l'approximation polynomiale sur l'axe entier (en fournissant des suites fermées et complètes sur l'axe), la détermination des noyaux itérés d'une équation intégrale du type Carleman, et, enfin, différents problèmes des moments. Les démonstrations sont toutes basées sur un théorème sur les séries asymptotiques que j'ai démontré dans un Mémoire paru récemment dans ce même Recueil.

Rappel de quelques notions.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

1. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante, et soit $N(\lambda)$ le nombre d'éléments de $\{\lambda_n\}$ inférieurs à $\lambda (\lambda > 0)$. Posons $D(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\lambda}$. Les fonctions $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont respectivement appelées fonction de distribution et fonction de densité de la suite. La fonction $D^{\cdot}(\lambda) = \overline{\text{borne}}_{x \geq \lambda} D(x)$ est sa fonction de densité supérieure. C'est la plus petite fonction non croissante supérieure à $D(\lambda)$. La quantité $D^{\cdot} = \overline{\lim}_{\lambda = \infty} D(\lambda) = \lim_{\lambda = \infty} D^{\cdot}(\lambda)$ est la densité supérieure de $\{\lambda_n\}$. On posera $D^{\cdot}(\infty) = D^{\cdot}$. La fonction $\overline{D}(\lambda) = \lambda^{-1} \int_0^{\lambda} D(x)\, dx$ $(\lambda > 0)$ est la fonction de densité moyenne et la fonction $\overline{D}^{\cdot}(\lambda) = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} \overline{D}(x)$ est la fonction de densité moyenne supérieure de la suite. La quantité $\overline{D}^{\cdot} = \overline{\lim}_{\lambda = \infty} \overline{D}(\lambda) = \lim_{\lambda = \infty} \overline{D}^{\cdot}(\lambda)$ est la densité moyenne supérieure de la suite. On posera $\overline{D}^{\cdot}(\infty) = \overline{D}^{\cdot}$. On a $\overline{D}^{\cdot} \leqq D^{\cdot}$,

et il existe des suites pour lesquelles $\overline{D}^{\cdot} < D^{\cdot}$ [6](¹). Dans tout ce qui suit, $D^{\cdot} < \infty$ (En réalité, les applications des théorèmes de ce Chapitre porteront uniquement sur des λ_n entiers, donc $D^{\cdot} \leqq 1$). La fonction

$$\nu(D) = \overline{\text{borne}}_{\lambda > 0}\, \lambda\left(\overline{D}(\lambda) - D\right) = \overline{\text{borne}}_{\lambda > 0} \int_0^{\lambda} \left(D(x) - D\right) dx,$$

que nous définissons ici seulement pour $D \geqq \overline{D}^{\cdot}$, est appelée fonction d'excès de la suite $\{\lambda_n\}$. Cette fonction est non négative, continue et non croissante. On posera

$$\nu(\overline{D}^{\cdot}) = \lim_{D \to \overline{D}^{\cdot}} \nu(D).$$

Comme $D^{\cdot} < \infty$, les quantités

$$\Lambda_n^* = \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_m^2}{|\lambda_n^2 - \lambda_m^2|} \qquad (n \geqq 1)$$

sont positives finies. La suite $\{\Lambda_n^*\}$ est appelée suite associée à la suite $\{\lambda_n\}$.

Soit Δ un domaine du plan $s = \sigma + it$ dont l'intersection avec aucun demi-plan $\sigma > \sigma_0$ n'est vide, et soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans Δ. Soit $\{d_n\}$ une suite de nombres réels ou complexes. Soit, enfin, $p_n(\sigma)$ une fonction définie (pour n donné) pour σ assez grand, croissante vers l'infini avec σ. L'entier n étant donné, on dit que, pour $m \geqq n$ les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$, si pour x suffisamment grand; s appartenant à Δ, on a

$$\text{(1)} \qquad \underline{\text{borne}}_{m \geqq n}\ \overline{\text{borne}}_{\sigma \geqq x} \left| F(s) - \sum_{k=1}^{m} d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leqq e^{-p_n(x)}.$$

On a le théorème suivant [6].

A. Soit $F(s)$ une fonction holomorphe et bornée dans un domaine Δ défini par $\sigma > c_0$, $|t| < \pi g(\sigma)$, où $g(\sigma)$ est une fonction continue, croissante, bornée ($\sigma > c_0$). Soit, dans Δ :

$$|F(s)| < M.$$

B. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante, avec $\overline{D}^{\cdot} < \lim_{\sigma = \infty} g(\sigma)$. Soit $\{d_n\}$ une suite telle, que, pour n donné, pour $m \geqq n$, les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$.

(¹) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie qui se trouve à la fin du Mémoire.

C. $\nu(D)$ étant la fonction d'excès de $\{\lambda_n\}$, supposons qu'il existe une fonction continue non croissante $h(\sigma)$ avec $\lim h(\sigma) = \overline{D}^*$, $\left(h(\infty) = \overline{D}^*\right)$, et une fonction non décroissante $C(\sigma)$ telles que

$$(2) \qquad 2\nu[h(\sigma)] - p_n(\sigma) < -C(\sigma), \qquad \int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u)-h(u)}}\, d\sigma = \infty.$$

Il existe alors une constante $A > 0$, et une constante réelle u, toutes les deux ne dépendant que de $\{\lambda_n\}$ et Δ, telles que

$$(3) \qquad |d_n| < A\lambda_n \Lambda_n^* M e^{\lambda_n u}.$$

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème principal de mon Mémoire [6], donné sous sa forme D. Sa démonstration est difficile et il ne peut être question de la reproduire ici. Faisons seulement les remarques suivantes : le cercle $C(s_0, \pi R)$ de l'énoncé du théorème F (théorème fondamental de [6]) a été choisi de sorte que le point $s_0 = u$ soit sur l'axe réel et que R, tout en étant supérieur à $\overline{D}^*$, soit assez petit pour que le cercle fermé de centre s_0 et de rayon πR, $\overline{C(s_0, \pi R)}$, appartienne à Δ. D'après la conclusion du théorème F on peut alors poser

$$A = 2^{-1}\pi^2 R\, e^{2\nu(R)}.$$

L'énoncé de la forme D du théorème F est plus général, même en ce qui concerne $g(\sigma)$, bien qu'on y suppose $g(\sigma) > \overline{D}^*$ dans tout le domaine; mais il est clair que l'énoncé que nous venons de donner est équivalent à celui qu'on obtiendrait en y remplaçant c_0 par une quantité a telle que $g(\sigma) > \overline{D}$ pour $\sigma > a$.

2. Nous avons démontré dans [6] que

$$\nu[\overline{D}^*(p)] = o(p), \qquad \nu[D^*(p)] = o(p) \qquad (p \to \infty).$$

Par conséquent, quelle que soit la constante positive γ, et quel que soit $0 < \delta < 1$, on a pour σ suffisamment grand

$$2\nu\left[\overline{D}^*\left(\gamma p_n(\sigma)\right)\right] - p_n(\sigma) < -\delta p_n(\sigma).$$

La même inégalité a lieu lorsque $\overline{D}^*$ est remplacé par D^*.

Comme $\overline{D}^*\left(p_n(\sigma)\right) \downarrow \overline{D}^*(\sigma \to \infty)$, on voit que l'hypothèse C est certainement satisfaite si la condition suivante est remplie.

C_1. Il existe une constante positive γ telle que

$$(4) \qquad \int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u)-\overline{D}^*(\gamma p_n(u))}}\, d\sigma = \infty.$$

Si $D^\bullet = \overline{D}^\bullet$, la condition C_1 peut évidemment être remplacée par une condition semblable où $\overline{D}^\bullet$ est remplacé par $D^\bullet$. Si par contre $D^\bullet > \overline{D}^\bullet$ la condition

C_2. $\lim g(\sigma) > D^\bullet$; il existe une constante positive γ telle que

$$\int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - \overline{D}^\bullet[\gamma p_n(u)]}} d\sigma = \infty \tag{5}$$

est plus restrictive que la condition C_1, l'intégrale figurant dans l'exponentiel de (5) étant plus grande que l'intégrale correspondante dans (4).

Les conditions C_1, C_2, avec $\gamma = 1$, sont celles qui figurent respectivement dans les formes B et A du théorème F énoncé dans [6].

3. Soit $\{A_n(\sigma)\}$ une suite de fonctions dont chacune est continue, non croissante, toutes définies pour $\sigma \geqq \sigma_0$, tendant vers zéro lorsque σ tend vers l'infini, et telles que

$$A_n(\sigma) = O\big(A_{n-1}(\sigma)\big) \qquad (\sigma \to \infty).$$

C'est-à-dire, il existe des constantes finies $I_n > 1$ telles que, pour $\sigma \geqq \sigma_0$, $A_n(\sigma) \leqq I_n A_{n-1}(\sigma)$, $(n \geqq 2)$.

Posons

$$e^{-p_0(\sigma)} = A(\sigma) = \underset{n \geq 1}{\underline{\text{borne}}}\, A_n(\sigma).$$

Si, dans Δ, on a pour tout $n \geqq 1$, $\sigma > \sigma_0$, (σ_0 indépendant de n)

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leqq A_n(\sigma), \tag{6}$$

on peut affirmer que, n étant quelconque, pour $m \geqq n$ les sommes $\sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n^\star(\sigma)$, où

$$e^{-p_n^\star(\sigma)} = \underset{m \geq n}{\underline{\text{borne}}}\, A_m(\sigma) \leqq I_2 I_3 \ldots I_n\, \underset{m \geq 1}{\underline{\text{borne}}}\, A_m(\sigma) = L_n A(\sigma).$$

Autrement dit $p_n^\star(\sigma) \geqq p_0(\sigma) - \log L_n$ ($L_n = I_2 I_3 \ldots I_n$), Par conséquent, si les conditions C, C_1, C_2 sont remplies lorsqu'on y remplace $p_n(\sigma)$ par $p_0(\sigma)$, elles sont remplies à plus forte raison lorsqu'on y remplace $p_n(\sigma)$ par $p_n^\star(\sigma)$, $(n \geqq 1)$.

On voit ainsi que si, dans l'hypothèse B, le fait que, pour $m \geqq n$ les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$ représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$, est remplacé par l'hypothèse que les inégalités (6) ont lieu pour $n \geqq 1$, et si, dans l'hypothèse C (ainsi d'ailleurs que dans C_1 et C_2)

$p_n(\sigma)$ est remplacé par $p_0(\sigma)$ où

$$p_0(\sigma) = -\log A^1(\sigma),$$

les inégalités (3) ont lieu pour $n \geq 1$.

4. Supposons que $\lim_{\sigma=\infty} g(\sigma) = a$, avec

$$\int^{\infty} [a - g(\sigma)]\, d\sigma < \infty. \tag{7}$$

Comme $a > \overline{D}^{\bullet}$, on a $\left(\lim h(\sigma) = \overline{D}^{\bullet}\right)$

$$\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - h(u)} - \int^{\sigma} \frac{du}{a - h(u)} = \int^{\sigma} \frac{[a - g(u)]\, du}{[g(u) - h(u)][a - h(u)]} = O(1) \quad (\sigma \to \infty).$$

et, en particulier

$$\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - \overline{D}^{\bullet}[\gamma p(u)]} - \int^{\sigma} \frac{du}{a - \overline{D}^{\bullet}[\gamma p(u)]} = O(1) \quad (\sigma \to \infty).$$

Si $a > D^{\bullet}$, cette dernière relation est encore valable lorsque $\overline{D}^{\bullet}$ y est remplacé par $D^{\bullet}$.

Si (7) a lieu, les relations (2), (4), (5) sont équivalentes à celles qu'on obtient en y remplaçant $g(u)$ par a.

5. Soit $\{M_n\}$ une suite positive, $\{\nu_n\}$ une suite positive croissante vers l'infini, $\{q_n\}$ une suite positive croissante, et supposons que, dans Δ

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leq M_q\, e^{-\nu_q \sigma} \qquad (q_n \leq q < q_{n+1}). \tag{8}$$

Les relations (6) ont alors lieu avec

$$A_n(\sigma) = \underset{q_n \leq q < q_{n+1}}{\underline{\text{borne}}}\, M_q\, e^{-\nu_q \sigma} \qquad \text{et} \qquad A(\sigma) = \underset{n \geq 1}{\underline{\text{borne}}}\, A_n(\sigma) = \underset{q \geq q_1}{\underline{\text{borne}}}\, M_q\, e^{-\nu_q \sigma}.$$

La fonction $p_0(\sigma)$ étant définie comme plus haut, on a

$$p_0(\sigma) = \underset{q \geq q_1}{\overline{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q).$$

Si

$$\underline{\lim}\, M_q^{\frac{1}{\nu_q}} < \infty,$$

on a pour σ suffisamment grand $p_0(\sigma) = \infty$, et les conditions C, C_1, C_2 sont satisfaites automatiquement. Supposons maintenant que

$$\lim M_q^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty, \qquad \sigma_0 = \min_{q \geq 1} \frac{\log M_q}{\nu_q}$$

et désignons par $H(x)$ l'ordonnée du point d'abscisse x du polygone de Newton « modifié » de la suite des points $\{(\nu_q, \log M_q)\}$, c'est-à-dire, l'ordonnée de la plus haute ligne polygonale convexe dont tous les côtés sont à pente non inférieure à σ_0, et telle qu'il n'y ait aucun point $(\nu_q, \log M_q)$, au-dessous de cette ligne. On écrira

$$\log M_q^{c,\nu} = H(\nu_q) \quad (^1).$$

Si $\nu_q = q (q \geqq 1)$ on omettra le signe ν, et l'on écrira M_q^c pour la valeur correspondante de $M_q^{c,\nu}$.

Il est géométriquement évident que pour $\sigma \geqq \sigma_0$

$$(9) \qquad p(\sigma) = \overline{\underset{q \geqq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q) = \overline{\underset{q \geqq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q^{c,\nu}).$$

On voit aussi que pour σ assez grand

$$(9) \qquad p_0(\sigma) = p(\sigma) = \overline{\underset{q \geqq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q) = \overline{\underset{q \geqq 1}{\text{borne}}}(\nu_q \sigma - \log M_q^{c,\nu}).$$

La suite

$$\left\{ \frac{\log M_q^{c,\nu} - \log M_{q-1}^{c,\nu}}{\nu_q - \nu_{q-1}} \right\}, \qquad M_0^{c,\nu} = 1, \qquad \nu_0 = 0$$

croît vers linfini avec q. Désignons par μ_q le terme général de cette suite $(q \geqq 2)$, en posant $\mu_1 = \nu_1^{-1} \log M_1^{c,\nu}$, et définissons $n_\nu(\mu)$ de la manière suivante :

$$n_\nu(\mu) = 0 \qquad \text{pour} \quad \mu \leqq \mu_1,$$
$$n_\nu(\mu) = \nu_q \qquad \text{pour} \quad \mu_q < \mu \leqq \mu_{q+1}.$$

On a le lemme suivant :

LEMME 1 (²). — *On a pour σ suffisamment grand*

$$p(\sigma) = \int_{\mu_1}^{\sigma} n_\nu(u)\, du.$$

Pour $\mu_q < \sigma \leqq \mu_{q+1}$ on a

$$\int_{\mu_1}^{\sigma} n_\nu(u)\, du = \sum_{k=1}^{q-1} (\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_k + (\sigma - \mu_q)\nu_q = \nu_q \sigma - \log M_q^{\nu}.$$

(¹) La définition et la construction de la suite $\{M_n^{c,\nu}\}$ sont encore valables lorsque plusieurs M_n sont égaux à $+\infty$, une infinité de ces quantités étant toutefois supposées finies (positives).

(²) Pour le cas $\nu_q = q (q \geqq 1)$, ce lemme est démontré dans [8]. D'ailleurs ce cas particulier est fréquemment utilisé dans la théorie des fonctions entières par M. Valiron.

Mais pour $0 < n < q$,

$$\nu_n\sigma - \log M_n^{c,\nu} = \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_k + (\sigma - \mu_n)\nu_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_k + \nu_n\sum_{k=n}^{q-1}(\mu_{k+1} - \mu_k) + (\sigma - \mu_q)\nu_n$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{q-1}(\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_k + (\sigma - \mu_q)\nu_q = \nu_q\sigma - \log M_q^{c,\nu}$$

et pour $n > q$

$$\nu_n\sigma - \log M_n^{c,\nu} = \sum_{k=1}^{q-1}(\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_k + (\sigma - \mu_q)\nu_q - \sum_{q+1}^{n}\mu_k(\nu_k - \nu_{k-1}) + (\nu_n - \nu_q)\sigma$$

$$= \nu_q\sigma - \log M_q^{c,\nu} - \sum_{q+1}^{n}(\mu_n - \sigma)(\nu_k - \nu_{k-1}) \leqq \nu_q\sigma - \log M_q^{c,\nu}.$$

Le lemme est ainsi démontré.

Il résulte en particulier de ce lemme que pour σ assez grand

(10) $$p(\sigma) \geqq \int_{\sigma-1}^{\sigma} n_\nu(u)\,du \geqq n_\nu(\sigma - 1).$$

6. La fonction $p(\sigma)$ étant donnée par (9), posons, lorsque $a > \bar{D}^*$,

$$B_1(u) = 2^{-1}\left[a - \bar{D}^*(\gamma p(u))\right]^{-1}$$

et, lorsque $a > D^*$,

$$B_2(u) = 2^{-1}\left[a - D^*(\gamma p(u))\right]^{-1}.$$

On a

$$\lim_{u=\infty} B_1(u) = \frac{1}{2(a - \bar{D}^*)} > 0, \qquad \lim_{u=\infty} B_2(u) = \frac{1}{2(a - D^*)} > 0.$$

Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME 2. — *Pour chaque valeur de i ($i = 1, 2$) les deux expressions*

(11) $$\sum^{\infty} e^{-\int^{\mu_q} B_i(u)\,du}(\nu_q - \nu_{q-1}) \qquad \left(\mu_q = \log\left(\frac{M_q^{c,\nu}}{M_{q-1}^{c,\nu}}\right)^{\frac{1}{\nu_q - \nu_{q-1}}}\right),$$

(12) $$\int^{\infty} p(\sigma)\,e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\,d\sigma$$

convergent simultanément.

En intégrant par parties (en tenant compte du lemme 1), on obtient

$$(13)\quad \int_{\alpha}^{N} p(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du} B_i(\sigma)\, d\sigma$$

$$= -\int_{\alpha}^{N} p(\sigma)\, de^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du} = -p(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\Big]_{\alpha}^{N} + \int_{\alpha}^{N} n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\, d\sigma.$$

Par conséquent la convergence de

$$(14)\qquad \int^{\infty} n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\, d\sigma$$

entraîne celle de (12), car $B_i(u)$ tend vers une limite positive lorsque $u \to \infty$. Si, par contre, l'intégrale (12) converge, il existe une suite $\{N_j\}$ tendant vers l'infini, telle que

$$\lim_{j=\infty} p(N_j)\, e^{-\int^{N_j} B_i(u)\,du} = 0,$$

et, comme la limite de $B_i(u)$ est finie, on voit, d'après (13), que

$$\lim_{j=\infty} \int_{\alpha}^{N_j} n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\, d\sigma < \infty.$$

Les deux expressions (12) et (13) convergent, par conséquent simultanément. On a aussi

$$\int_{\alpha}^{N} n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du} B_i(\sigma)\, d\sigma = -n_\nu(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\Big]_{\alpha}^{N} + \int_{\alpha}^{N} e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\, dn_\nu(\sigma)$$

et, un raisonnement analogue au précédent prouve que l'expression (14) et

$$(15)\qquad \int^{\infty} e^{-\int^{\sigma} B_i(u)\,du}\, dn_\nu(\sigma)$$

convergent simultanément. Or l'expression (15) n'est autre que (11).

7. Comme $\overline{D}^{*}(\lambda)$ et $D^{*}(\lambda)$ sont des fonctions non croissantes, on a, en vertu de (10),

$$B_1(u) \leq \frac{1}{2(a - D^{*}[\gamma n_\nu(u-1)]} = C_1(u-1).$$

Donc la divergence de

$$(16)\qquad \sum^{\infty} e^{-\int^{2q} C_1(u-1)\,du} (\nu_q - \nu_{q-1}),$$

entraîne celle de (11) ($i=1$). Mais la divergence de

$$\sum^{\infty} e^{-\int^{\mu_q} C_1(u)\,du}(\nu_q - \nu_{q-1}), \tag{17}$$

entraîne celle de (16), car

$$\lim_{q=\infty} \int_{\mu_{q-1}}^{\mu_q} C_1(u)\,du = \frac{1}{2(a-\overline{D}^*)}.$$

Donc la divergence de (17) entraîne celle de (11) et (12) ($i=1$). Mais on a, pour $\mu_{q-1} < u \leqq \mu_q$, $n_\nu(u) = \nu_{q-1}$; on a donc, pour ces valeurs de u,

$$C_1(u) = 2^{-1}[a - \overline{D}^*(\gamma\nu_{q-1})]^{-1}$$

et

$$\int_{\mu_1}^{\mu_q} C_1(u)\,du = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1} \frac{(\mu_{k+1}-\mu_k)}{a-\overline{D}^*(\gamma\nu_{q-1})}.$$

Des remarques analogues sont valables pour $i=2$, $\overline{D}^*$ étant remplacé par $D^*(a > D^*)$.

8. Résumons. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite positive croissante dont D^*, $\overline{D}^*$, $D^*(\lambda)$, $\overline{D}^*(\lambda)$, $\nu(D)$ sont respectivement la densité supérieure, la densité moyenne supérieure, la fonction de densité supérieure, la fonction de densité moyenne supérieure, la fonction d'excès. Soit $\{M_n\}$ une suite positive et $\{\nu_n\}$ une suite positive croissante vers l'infini. Si $\lim M_q^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty$, on désignera par $M_q^{c,\nu}$ les termes de la suite obtenue à partir des suites $\{M_n\}$, $\{\nu_n\}$, comme il a été indiqué page 105. Posons

$$p(\sigma) = \overline{\underset{q\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_q\sigma - \log M_q). \tag{18}$$

Soit, enfin, a une constante positive. Chacune des conditions U_i qui suivent (dites hypothèses d'unicité, étant donné le rôle qu'elles vont jouer dans les théorèmes d'unicité) marque une relation entre différents éléments précités.

U_1. *Soit $p(\sigma)$ une fonction croissante. Il existe une fonction continue non croissante $h(u)$ et une fonction non décroissante $C(u)$ telles que*

$$2\nu[h(\sigma)] - p(\sigma) < -C(\sigma),$$
$$\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\lambda_\sigma} \frac{du}{a-h(u)}}\, d\sigma = \infty, \qquad a > \overline{D}^*.$$

Cette condition sera aussi désignée par $U_1(\lambda_n, p(\sigma), a)$. Si $p(\sigma)$ est donné par (18) on désignera aussi cette condition pour $U_1(\lambda_n, \nu_n, M_n, a)$ [1].

[1] Dans la définition des conditions U_i on peut admettre que plusieurs M_n sont égaux à $+\infty$, une infinité d'entre eux étant supposés finis (*voir* la Note [1] de la page 106.)

U_2. *Il existe une constante positive γ telle que*

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{a-\overline{\mathrm{D}}^{\bullet}(\gamma p(u))}} = \infty, \qquad a > \mathrm{D}^{\bullet},$$

On désignera aussi cette condition pour $\mathrm{U}_2(\lambda_n, p(\sigma), a)$, et si (18) est rempli, par $\mathrm{U}_2(\lambda_n, \nu_n, \mathrm{M}_n, a)$.

U_3. *Cette hypothèse diffère de* U_2 *par le fait que la lettre* $\overline{\mathrm{D}}^{\bullet}$ *y est remplacée par* $\mathrm{D}^{\bullet}$ (donc aussi $a > \mathrm{D}^{\bullet}$).

U_4. $\lim \mathrm{M}_q^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty$ *et il existe une constante positive γ telle que, $p(\sigma)$ étant donné par* (18)

$$\sum^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\int^{\mu_q} \frac{du}{a-\overline{\mathrm{D}}^{\bullet}(\gamma p(u))}} = \infty, \qquad \mu_q = \log\left(\frac{\mathrm{M}_q^{c.v}}{\mathrm{M}_{q-1}^{c.v}}\right)^{\frac{1}{\nu_q-\nu_{q-1}}}, \qquad a > \overline{\mathrm{D}}^{\bullet},$$

cette condition sera aussi désignée par $\mathrm{U}_4(\lambda_n, \nu_n, \mathrm{M}_n, a)$.

U_5. *Même hypothèse que* U_4 *sauf que* $\overline{\mathrm{D}}^{\bullet}$ *est remplacé par* $\mathrm{D}^{\bullet}$.

$$\mathrm{U}_5 \equiv \mathrm{U}_5(\lambda_n, \nu_n, \mathrm{M}_n, a).$$

U_6. $\lim \mathrm{M}^{\frac{1}{\nu_q}} = \infty$, *il existe une constante positive γ telle que*

$$\sum^{\infty} e^{-h_q}(\nu_q - \nu_{q-1}) = \infty,$$

$$h_q = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}(\mu_{k+1} - \mu_k)\frac{1}{a - \mathrm{D}^{\bullet}(\gamma\nu_k)},$$

μ_q *comme dans* U_4, $a > \mathrm{D}^{\bullet}$.

$$\mathrm{U}_6 \equiv \mathrm{U}_6(\lambda_n, \nu_n, \mathrm{M}_n, a).$$

U_7. *Comme* U_6, *sauf que* $\mathrm{D}^{\bullet}$ *est remplacé par* $\mathrm{D}^{\bullet}$.

$$\mathrm{U}_7 \equiv \mathrm{U}_7(\lambda_n, \nu_n, \mathrm{M}_n, a).$$

U_8. $\underline{\lim}\, \mathrm{M}_n^{\frac{1}{\nu_n}} < \infty$, $a > \mathrm{D}^{\bullet}$.

Cette condition sera aussi désignée par $\mathrm{U}_8(\lambda_n, \nu_n, \mathrm{M}_n, a)$. L'hypothèse U_1 est moins restrictive que chacune des hypothèses U_2, U_3. Lorsque $p(\sigma)$ est donné par (18) et $\lim \mathrm{M}_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, les hypothèses U_2, U_4, d'une part, et les hypothèses U_3, U_5, d'autre part, sont équivalentes.

L'hypothèse U_6 est plus restrictive que l'hypothèse U_4, et l'hypothèse U_7 est plus restrictive que U_5. L'hypothèse U_8 est la plus restrictive.

Et voici, le cas particulier du théorème F du mémoire [6] sous une forme qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE I. — *Soit* $F(s)$ *une fonction holomorphe dans un domaine* Δ *du plan* $s = \sigma + it$, *défini par*

$$\sigma > c_0, \qquad |t| < \pi g(\sigma),$$

où $g(\sigma)$ *est une fonction croissante, continue, telle que*

$$\lim_{\sigma = \infty} g(\sigma) = a, \qquad \int^{\infty} \big(a - g(\sigma)\big)\, d\sigma < \infty.$$

Supposons que dans Δ

$$|F(s)| \leqq M.$$

Soit $\{\lambda_n\}$ *une suite croissante, positive, dont* D^*, D^*, $D^*(\lambda)$, $D^*(\lambda)$, $\nu(D)$, $\{\Lambda_n^*\}$ *sont respectivement la densité moyenne supérieure, la densité supérieure, la fonction de densité moyenne supérieure, la fonction de densité supérieure, la fonction d'excès et la suite associée.*

Soit $\{M_n\}$ *une suite positive et* $\{\nu_n\}$ *une suite positive croissante vers l'infini, et posons*

$$p(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} (\nu_n \sigma - \log M_n).$$

Supposons que dans Δ

$$\left| F(s) - \sum_1^n d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leqq M_q e^{-\nu_q \sigma} \qquad (q_n \leqq q < q_{n+1}),$$

où $\{q_n\}$ *est une suite positive croissante vers l'infini.*

Si l'une des hypothèses U_i *est satisfaite, il existe une constante positive* A *et une constante réelle* u (*finies*) *ne dépendant que de* $\{\lambda_n\}$ *et* Δ *telle que pour tout entier* $n \geqq 1$

$$|d_n| < A \lambda_n \Lambda_n^* M e^{\lambda_n u}.$$

9. Les précisions que nous venons d'apporter au théorème F permettent aussi de rendre plus explicite le théorème (Q — A) de ce même Mémoire [6]. C'est un théorème sur la quasi-analyticité généralisée. Nous aurons à utiliser ce théorème sous la forme suivante :

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE II. — *Soit* $f(x)$ *une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle* $[0, \infty)$.

Soit $\{k_n\}$ *une suite d'entiers positifs croissants, et désignons par* $\{\lambda_n\}$ *la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers positifs.*

Soit $\{M_n\}$ *une suite positive croissante, et supposons que*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq M_n \qquad \big(n \geqq 0,\ x \in [0, \infty)\big),$$
$$f^{(k_n)}(0) = 0 \qquad (n \geqq 0,\ k_0 = 0).$$

Si l'une des hypothèses $U_i\left(\lambda_n,\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$ *est satisfaite, la fonction* $f(x)$ *est identiquement nulle.*

Sans répéter la démonstration du théorème (Q — A), remarquons seulement que la fonction $C_f(\sigma)$ introduite dans [6] satisfait à l'inégalité

$$p(\sigma) = \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log M_n) \leqq C_f(\sigma),$$

et la condition (Q_1) du théorème (Q — A) (p. 369 [6]), avec $\overline{D}^{\bullet} < \frac{1}{2}$, est satisfaite si l'hypothèse, la moins restrictive, $U_1\left(\lambda_n,\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$ l'est.

Le théorème que nous venons d'énoncer est donc bien un cas particulier du théorème (Q — A).

10. Il est utile, pour la suite, d'énoncer la très légère généralisation suivante du théorème préliminaire II.

Théorème préliminaire II^{bis}. — *Soit* n_0 *un entier non négatif. Les hypothèses* $U_i\left(\lambda_n,\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$ *du théorème préliminaire* II *peuvent être remplacées par les hypothèses* $U_i\left(\lambda_{n_0+n},\ n,\ M_n,\ \frac{1}{2}\right)$.

C'est-à-dire, en posant $\lambda_n^{(n_0)} = \lambda_{n_0+n}$ $(n \geqq 1)$, et en désignant par $D_{n_0}^{\bullet}(\lambda)$, $\overline{D}_{n_0}^{\bullet}(\lambda)$, $\nu_{n_0}(D)$ respectivement la fonction de densité supérieure, la fonction de densité moyenne supérieure et la fonction d'excès de la suite $\{\lambda_n^{(n_0)}\}$, la conclusion du théorème préliminaire II reste vraie, si les éléments $D^{\bullet}(\lambda)$, $\overline{D}^{\bullet}(\lambda)$, $\nu(D)$ qui interviennent dans les hypothèses U_i explicitées, y sont respectivement remplacés par $D_{n_0}^{\bullet}(\lambda)$, $\overline{D}_{n_0}^{\bullet}(\lambda)$, $\nu_{n_0}(D)$.

Voici les quelques modifications qu'il faut apporter à la démonstration du théorème (Q — A) pour avoir le nouvel énoncé. La fonction $F_a(s)$ étant définie par la formule (20) (p. 367 [6]) du Mémoire, on a, d'après les inégalités (22) de ce même Mémoire, lorsque s varie dans le domaine Δ donné par $\sigma > 0$, $|t| < \arccos e^{-\sigma} = \pi g(\sigma)$ où $g(\sigma)$ croît vers $\frac{1}{2}$,

$$\left| F_a^{\star}(s) - \sum_{k=1}^{m} d_{n_0+k}^{(a)} e^{-\left(\lambda_k^{(n_0)}+1\right)s} \right| \leqq M_q e^{q(a-\sigma)} \qquad \left(\lambda_m^{(n_0)} + 1 \leqq q < \lambda_{m+1}^{(n_0)} + 1\right),$$

où l'on a posé

$$F_a^{\star}(s) = F_a(s) e^{-a} - \sum_{1}^{n_0} d_k^{(a)} e^{-(\lambda_k+1)s}, \qquad d_k^{(a)} = e^{\lambda_k a} f^{(\lambda_k)}(0) \quad (^1).$$

(1) La quantité $d_k^{(a)}$ a ici la valeur de la quantité désignée par la même lettre dans [6] divisée par e^a.

(Dans ce qui précède la quantité $\lambda_k(k \geqq 1)$ est d'une unité inférieure à la quantité désignée par la même lettre dans [6].)

Comme, dans Δ, $|F_a(s)| e^{-a} \leqq M$ (quantité finie, indépendante de a) ([6], p. 369), on voit que dans ce domaine, pour $a \geqq 0$

$$|F_a^\star(s)| \leqq A_1 e^{\lambda_{n_0} a}$$

où A_1 est une quantité finie indépendante de a.

Remarquons que, d'une part, la fonction de densité de la suite $\{\lambda_n^{(n_0)} + 1\}$ n'est pas supérieure à celle de la suite $\{\lambda_n^{(n_0)}\}$, c'est-à-dire que la fonction d'excès de $\{\lambda_n^{(n_0)} + 1\}$ n'est pas supérieure à celle de $\{\lambda_n^{(n_0)}\}$, et que, d'autre part,

$$p_a(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}}[q\sigma - \log(M_q e^{qa})] = p(\sigma - a),$$

où

$$p(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}}(q\sigma - \log M_q).$$

Et il est clair que l'hypothèse $U_1\left(\lambda_n^{(n_0)}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ implique l'hypothèse $U_1\left(\lambda_n^{(n_0)} + 1, p_a(\sigma), \frac{1}{2}\right)$. Il est aussi évident que

$$\int^{\infty} \left(\frac{1}{2} - g(\sigma)\right) d\sigma < \infty.$$

Il suffit donc d'appliquer le théorème préliminaire I $\left(\text{avec } F(s) = F_a^\star(s),\right.$ $\left. d_k = d_{n_0+k}^{(a)},\ M = A_1 e^{\lambda_{n_0} a}\right)$ pour avoir

$$|d_{n_0+k}^{(a)}| = e^{\lambda_{n_0} + ka} |f^{(\lambda_{n_0}+k)}(0)| \leqq A_2 L_k e^{\lambda_{n_0} a} e^{\lambda_k u} \qquad (k \geqq 1),$$

où L_k dépend seulement de k, A_2 et u étant indépendants de a.

En faisant tendre a vers $+\infty$ (k restant fixe), on a immédiatement

$$d_{n_0+k}^{(a)} = e^{\lambda_{n_0} + ka} f^{(\lambda_{n_0}+k)}(0) = 0.$$

Par conséquent

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{pour} \quad n \geqq \lambda_{n_0} + 1.$$

Posons $f^{(\lambda_{n_0}+1)}(x) = f_0(x)$. On a $|f_0^{(k)}(x)| \leqq M_{\lambda_{n_0}+1+k}$ $(k \geqq 0)$, $f_0^{(k)}(0) = 0$ $(k \geqq 0)$. En posant

$$p^\star(\sigma) = \overline{\underset{q \geq 1}{\text{borne}}}(q\sigma - \log M_{\lambda_{n_0}+1+q}),$$

il est encore évident que la condition $U_1\left(\lambda_n^{(n_0)}, n, M_n, \frac{1}{2}\right)$ implique la condition

$$\int^{\infty} p^\star(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma = \infty.$$

Il résulte donc du théorème classique de la quasi-analyticité (ou du théorème préliminaire II, qui est beaucoup plus général) que $f_0(x) \equiv 0$. Donc $f(x)$ ne peut être qu'un polynome, mais comme $|f(x)| < M_0$ $(x \geqq 0)$, on voit que $f(x) \equiv 0$.

11. Je profite de cette occasion pour signaler quelques fautes d'impression qui se sont glissées dans [6]. Signalons que l'expression $3\log\left(\lambda_n D\left(\sqrt{2}\lambda_n\right)\right)$ de la page 355 doit être remplacée par $3\log\left(h_n D\left(\sqrt{2}\lambda_n\right)\right)$, et que, page 362, on doit lire $\underset{m\geq n}{\underline{\text{borne}}}\, P_m(\sigma)$ au lieu de $\overline{\underset{m\geq n}{\text{borne}}}\, P_m(\sigma)$. Remarquons aussi que les deux dernières lignes de la page 370 seraient plus claires si la phase « avec $F(s)=F_a(s)$, $s_0=\xi+\pi R$, $M(s_0, R)\leqq M e^a$, $\{\lambda_n\}=\{q_n+1\}$ », était remplacée par la phase « avec $F(s)=F_a(s)e^{-a}$, $s_0=\xi+\pi R$, $M(s_0, R)\leqq M$, $\{\lambda_n\}=\{q_n+1\}$, $d_n=d_n^{(a)}e^{-a}$ ».

APPROXIMATION POLYNOMINALE SUR L'AXE ENTIER. SUITES FERMÉES.

1. Le théorème suivant de S. Bernstein est bien connu [1]. Soit $\{\beta_n\}$ une suite positive croissante avec $\Sigma\beta_n^{-2}<\infty$ et

$$\sum \frac{1}{\beta_n}=\infty. \tag{19}$$

Posons

$$F(x)=\Pi\left(1+\frac{x^2}{\beta_n^2}\right). \tag{20}$$

$f(x)$ étant une fonction continue $(-\infty<x<\infty)$ telle que

$$\lim_{|x|=\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=0,$$

à tout $\varepsilon>0$ correspond un polynome $P(x)$ tel que

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon F(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{21}$$

Remarquons que la condition (19) équivaut à chacune des conditions suivantes :

$$\int^{\infty}\frac{\log F(x)}{x^2}\,dx=\infty, \tag{22}$$

$$\int^{\infty}\log F(e^{\sigma})\,e^{-\sigma}\,d\sigma=\infty. \tag{23}$$

Nous démontrons que si la fonction $F(x)$ [qui n'est pas nécessairement de la forme (20)] et une suite d'entiers positifs $\{k_n\}$ sont liées d'une certaine manière, l'inégalité (21) peut être réalisée par un polynome de la forme

$$P(x)=a_0+\sum_1^m a_n x^{k_n}.$$

Notre théorème contient le théorème de S. Bernstein comme cas particulier.

2. Nous allons d'abord démontrer un théorème sur la fermeture de certaines suites de fonctions sur l'axe entier. C'est un théorème d'unicité dont résultera un théorème sur des suites complètes et fermées.

Rappelons d'abord les définitions suivantes : I étant un intervalle fini ou infini, une suite de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ est dite fermée sur I par rapport à $L_p(0 < p \leqq \infty)$, si toute fonction $f(x)$, appartenant à L_p (¹) sur I, pour laquelle on a

$$\int_I f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (x \geqq 1)$$

est nulle presque partout.

Théorème I. — *Soit $\{k_n\}$ une suite d'entiers positifs croissants et soit $\{\lambda_n\}$ la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite $\{k_n\}$ par rapport à la suite de tous les entiers positifs.*

Soit $F(x)$ une fonction positive continue paire, $p(\sigma) = \log F(e^\sigma)$ étant une fonction convexe de σ.

Si, pour un entier non négatif n_0 l'une des hypothèses $U_2\left(\lambda_{n_0+n}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_{n_0+n}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ est satisfaite, la suite

$$\left\{\frac{x^{k_n}}{F(x)}\right\} \qquad (n \geqq 0,\ k_0 = 0) \tag{24}$$

est fermée sur l'axe entier par rapport à tout $L_p(1 \leqq p \leqq \infty)$.

Ce théorème résulte facilement du théorème suivant :

Théorème II. — *Les suites $\{k_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ étant définies comme dans le théorème I, soit $F(x)$ une fonction positive, continue, paire, et soient la suite positive $\{M_n\}$ et la constante $q \geqq 1$ telle que*

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leqq M_n^q \qquad (n \geqq 1). \tag{25}$$

Si, pour un entier non négatif n_0, l'une des hypothèses $U_i\left(\lambda_{n_0+n}, n, M_n, \frac{1}{2}\right)$ est satisfaite, la suite (24) est fermée sur l'axe entier par rapport à L_p, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. *Démonstration du théorème* II. — Soit $f(x)$ une fonction appartenant à L_p sur l'axe entier, et supposons que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{f(x)\,x^{k_n}}{F(x)}\,dx = 0 \qquad (n \geqq 0,\ k_0 = 0). \tag{26}$$

(¹) Si $0 < p < \infty$, la classe L_p est celle des fonctions pour lesquelles $\int_I |f(x)|^p\,dx$ existe et est fini. L_∞ est la classe des fonctions bornées sur I et intégrables sur chaque intervalle fini faisant partie de I.

Posons

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\frac{f(x)}{F(x)}\,dx.$$

La fonction $\varphi(t)$ est indéfiniment dérivable sur tout l'axe et l'on a

$$|\varphi^{(n)}(t)|\leqq\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n\frac{|f(x)|}{F(x)}\,dx \qquad (n\geqq 0).$$

D'après (25) et l'inégalité de Hölder on a

$$|\varphi^{(n)}(t)|\leqq\left[\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|x|^n}{F(x)}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\leqq CM_n, \text{ (1)}$$

où C est une constante. Il résulte aussi de (26) que

$$\varphi(0)=0, \qquad \varphi^{(k_n)}(0)=i^{k_n}\int_{-\infty}^{\infty}x^{k_n}\frac{f(x)}{F(x)}\,dx=0 \qquad (n\geqq 1).$$

Donc, en vertu du théorème préliminaire II *bis*, $\varphi(t)$ est identiquement nulle, ce qui prouve que $f(x)$ est identiquement nulle, et le théorème est démontré.

4. Démontrons maintenant le théorème I. Supposons que l'hypothèse U_2 est satisfaite, la démonstration est la même pour le cas de l'hypothèse U_3.

Il résulte de cette hypothèse, en posant $k=\left(1-2\overline{D}^{\bullet}\right)^{-1}$ que

$$\int^{\infty}p(\sigma)\,e^{-k\sigma}\,d\sigma=\infty.$$

Il existe donc une suite de nombres $\sigma_i\to\infty$ tels que $p(\sigma_i)>e^{\frac{k\sigma_i}{2}}$, et comme $p(\sigma)$ est une fonction convexe de σ, on a $\lim_{\sigma=\infty}\sigma^{-1}p(\sigma)=\infty$. Posons

$$n(\sigma)=[p'(\sigma)], \tag{27}$$

$[a]$ désignant la partie entière non négative de a, c'est-à-dire $[a]=0$, si $a<1$, et $[a]$ est la partie entière de a, si $a\geqq 1$. La fonction $n(\sigma)$ est définie presque partout; elle est définie partout si on la complète par continuité à gauche. Comme $\sigma^{-1}p(\sigma)\to\infty$, et comme $p(\sigma)$ est une fonction convexe, $n(\sigma)$ est une fonction en escalier, non négative, non décroissante, tendant vers l'infini avec σ. Soit μ_1^* la première valeur positive où la fonction $n(\sigma)$ est discontinue, et soit $n_1=n(\mu_1^*-0)$. Il est d'ailleurs évident que $n_1=[p'(+0)]$. Posons $m(\sigma)=n(\sigma)-n_1$. Cette fonction possède les mêmes propriétés que $n(\sigma)$, avec, en plus, $m(\sigma)=0$ pour $0\leqq\sigma\leqq\mu_1^*$.

---

(1) Le premier facteur du membre du milieu de cette relation est à remplacer par $\overline{\text{borne}}_{x}\,|f(x)|$, si $p=\infty$.

Soit $\{\mu_n\}$ la suite des valeurs de σ où la fonction $m(\sigma)$ est discontinue, on a évidemment $\mu_1 = \mu_1^* \geqq 0$. Posons $\nu_n = m(\sigma)$ pour $\mu_n < \sigma \leqq \mu_{n+1}$ et désignons par $\{m_n\}$ la suite définie de la manière suivante :

pour $\nu_n \leqq k < \nu_{n+1} (n \geqq 1)$

$$\log m_k = \sum_1^n (\nu_p - \nu_{p-1}) \mu_p + (k - \nu_n) \mu_{n+1},$$

et pour $1 \leqq k < \nu_1$ (si $\nu_1 > 1$)

$$\log m_k = k \mu_1.$$

Si l'on désigne, d'autre part, par N_n les quantités telles que

$$\log N_n = \sum_1^n (\nu_p - \nu_{p-1}) \mu_p \qquad (n \geqq 2),$$

$$\log N_1 = \nu_1 \mu_1,$$

on voit immédiatement (géométriquement, par exemple) que

$$\overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_n \sigma - \log N_n) = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log m_n).$$

Or, d'après le lemme 1 on a, pour σ assez grand,

$$(28) \qquad \int_{\mu_1}^{\sigma} m(u)\, du = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(\nu_n \sigma - \log N_n) = \overline{\underset{n\geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log m_n)$$

(ici, en employant la notation de la page 105, $N_n^{\varphi, \nu} = N_n$).

Mais d'après (27), aux points où $p'(\sigma)$ existe, on a

$$(29) \qquad m(\sigma) \leqq p'(\sigma) \leqq m(\sigma) + n_1 + 1 \qquad (\sigma \geqq 0),$$

c'est-à-dire

$$(30) \qquad \int_{\mu_1}^{\sigma} m(u)\, du + O(1) \leqq p(\sigma) \leqq \int_{\mu_1}^{\sigma} m(u)\, du + (n_1 + 1)\sigma + O(1).$$

Si k est un entier positif on a, d'après (28) et le côté gauche de (30), pour σ assez grand

$$p(\sigma) \geqq (k+2)\sigma - \log m_{k+2} + A,$$

où A est une constante. Cette inégalité peut être écrite, pour $x \geqq x_0 > 0$, sous la forme suivante :

$$F(x) \geqq L \frac{x^{k+2}}{m_{k+2}} \qquad (k \geqq 0,\ L > 0).$$

On a, par conséquent, pour q tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $k = n \geqq 0$.

$$\int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leqq L^{-q}\, m_{n+2}^q \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^{2q}} \leqq B^q\, m_{n+2}^q$$

Comme il existe, d'autre part, une constante C telle que

$$\int_0^{x_0} \left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leqq C^n,$$

on a $\left(\text{car } \lim m_n^{\frac{1}{n}} = \infty\right)$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x^n}{F(x)}\right)^q dx \leqq (R^{n+2} m_{n+2})^q, \tag{31}$$

où R est une constante finie. Posons

$$M_n = R^{n+2} m_{n+2} \, (n \geqq 0), \qquad p(\sigma) = \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log M_n).$$

On a, en vertu du côté droit de (30), pour σ assez grand,

$$\begin{aligned} p_1(\sigma) &= \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}}[n\sigma - (n+2)\log R - \log m_{n+2}] = -2\sigma + \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}}[(n+2)(\sigma - d) - \log m_{n+2}] \\ &= -2\sigma + \overline{\underset{k \geq 3}{\text{borne}}}[k(\sigma - d) - \log m_k] = -2\sigma + \overline{\underset{k \geq 1}{\text{borne}}}[k(\sigma - d) - \log m_k] \\ &= -2\sigma + \int_{\mu_1}^{\sigma - d} m(u)\,du \geqq p(\sigma - d) - (n_1 + 3)\sigma + O(1) \geqq \frac{p(\sigma - d)}{2}, \end{aligned}$$

où $d = \log R$. $\Big($Il est géométriquement évident que, pour σ assez grand $\overline{\underset{n \geq k_0}{\text{borne}}}(n\sigma - \log m_n) = \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}}(n\sigma - \log m_n)\Big)$.

Soit $\overline{D}^{*}_{n_0}(\lambda)$ la fonction de densité moyenne supérieure de la suite $\{\lambda_{n_0+n}\}$. L'hypothèse $U_2\left(\lambda_{n_0+n}, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ implique l'existence d'une constante positive γ telle que

$$\int^{\infty} p(\sigma - d)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{1 - 2\overline{D}^{*}_{n_0}[\gamma p(u-d)]}} d\sigma = \infty,$$

et l'inégalité que nous venons de démontrer prouve que

$$\int^{\infty} p_1(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{1 - 2\overline{D}^{*}_{n_0}[2\gamma p_1(u)]}} d\sigma = \infty,$$

ce qui est la condition $U_2\left(\lambda_{n+n_0}, p_1(\sigma), \frac{1}{2}\right)$. Si l'on tient compte des inégalités (31) ($M_n = R^{n+2} m_{n+2}$, $n \geqq 0$), on voit que les hypothèse du théorème II sont satisfaites, d'où l'on tire la conclusion voulue.

5. On tire de ce théorème le corollaire suivant : *Si* $F(x)$ *est une fonction continue, positive, paire,* $\log F(x)$ *étant une fonction convexe de* $\log x$ $(x > 0)$, *et si la condition* (22) *est satisfaite, la suite* $\left\{\frac{x^n}{F(x)}\right\}$ $(n \geqq 0)$ *est une suite fermée sur l'axe entier par rapport à tout* $L_p(\leqq p \leqq \infty)$.

Pour $p = \infty$ ce fait a été démontré par Izumi et Kawata [5]. Leur démonstration est une conclusion immédiate de leur généralisation aux transformées de

Fourier d'un de mes théorèmes concernant les séries de Fourier représentant les fonctions indéfiniment dérivables [7]. D'ailleurs, leur démonstration pour les transformées est une transposition de la mienne pour les séries. Remarquons, d'autre part, que si, dans la démonstration que je viens de donner du théorème I, on se borne au cas $k_n = n (n \geqq 1)$, celle-ci devient beaucoup plus facile, car, au lieu d'utiliser le théorème préliminaire II *bis* (ou II), on est réduit à utiliser le théorème classique sur la quasi-analyticité; cette démonstration devient alors, à quelques détails près, celle menée dans [7] et [5].

Remarquons encore qu'il résulte de notre démonstration du théorème I que les hypothèses $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ de l'énoncé de ce théorème peuvent être remplacées par la condition plus générale

$$U_1\left(\lambda_n, p(\sigma) - \left(p'(+0)+3\right)\sigma, \frac{1}{2}\right).$$

Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'inégalité suivante a lieu (avec les notations de la démonstration que nous venons d'achever)

$$p_1(\sigma) \geqq p(\sigma - d) - (n_1 + 3)(\sigma - d) + O(1),$$

où $d = \log R$, $n_1 = [p'(+0)]$. En substituant cette inégalité à l'inégalité $p_1(\sigma) > 2^{-1} p(\sigma - d)$, que nous avons utilisée plus haut (et qui résulte de l'inégalité ci-dessus), nous arrivons au résultat voulu.

6. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soit* $\{k_n\}$ *une suite d'entiers positifs et soit* $\{\lambda_n\}$ *la suite d'entiers positifs complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers positifs. La fonction* $F(x)$ *ayant les mêmes propriétés que dans l'énoncé du théorème* I, *posons* $p(\sigma) = \log F(e^\sigma)$, *et supposons qu'une des hypothèses* $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ *soit satisfaite.*

Soit $\varphi(x)\,(-\infty < x < \infty)$ *une fonction pouvant se mettre sous la forme*

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x dt_{k_1} \int_0^{t_{k_1}} dt_{k_1-1} \int_0^{t_{k_1-1}} dt_{k_1-2} \ldots \int_0^{t_2} f(t_1)\,dt_1,$$

la fonction

$$\frac{f(x)x^{k_1}}{F(x)}$$

appartenant à L_2 sur $(-, \infty\ \infty)$.

Quel que soit $\varepsilon > 0$, *il existe un polynome* $P(x)$ *de la forme*

$$P(x) = a_0 + \sum_1^m a_n x^{k_n}$$

tel que

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon F(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Démonstration — Chacune des fonctions $\log \Phi_1(x) = \log F(x) - k_1 \log x$, $\log \Phi_2(x) = \log F(x) - (k_1 - 1) \log x$ est une fonction convexe de $\log x (x > 0)$. Il existe donc deux fonctions continues et positives pour $x \geq 0$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, les fonctions $\log F_1(x)$ et $\log F_2(x)$ étant convexes de $\log x$ $(x > 0)$, avec $F_1(x) = \Phi_1(x)$, $F_2(x) = \Phi_2(x)$ pour x suffisamment grand. Posons

$$F_2(x) = g(x) F_1(x).$$

Désignons par $\{\lambda'_n\}$ la suite complémentaire à la suite $\{k_n - k_1\} (n \geq 1)$ par rapport à la suite des entiers non négatifs. Si l'on désigne par $N'(x)$ la distribution de la suite $\{\lambda'_n\}$, on voit immédiatement que $N'(x) \leq N(x) + 1$ (où $N(x)$ est la distribution de $\{\lambda_n\}$). Autrement dit, en désignant par $N''(x)$ la distribution de la suite $\{\lambda'_{1+n}\}$ (c'est-à-dire de la suite $\lambda'_2, \lambda'_3, \ldots$), il est clair que pour x assez grand $N''(x) \leq N(x)$, ce qui prouve que les fonctions de densité supérieure et de densité moyenne supérieure de la suite $\{\lambda'_{1+n}\}$ sont non supérieures aux fonctions respectives correspondant à la suite $\{\lambda_n\}$.

Comme, d'autre part, a étant une constante supérieure à un, on a, pour x suffisamment grand

$$\log F(x) < a \log F_1(x),$$

on voit, qu'en posant

$$p_1(\sigma) = \log F_1(e^\sigma),$$

les hypothèses $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ entraînent respectivement les hypothèses $U_2\left(\lambda'_{1+n}, p_1(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda'_{1+n}, p_1(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ (avec éventuellement, la constante γ remplacée par une constante supérieure, par exemple 2γ). En posant alors pour $x < 0$, $F_1(x) = F_1(-x)$, on voit, qu'en vertu du théorème I la suite

$$\frac{1}{F_1(x)}, \quad \frac{x^{k_2 - k_1}}{F_1(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{x^{k_n - k_1}}{F_1(x)}, \quad \ldots$$

est fermée sur l'axe entier par rapport à L_2.

D'après un théorème bien connu [9] cette suite est alors aussi complète sur l'axe entier par rapport à L_2, c'est-à-dire, $\psi(x)$ étant une fonction appartenant à L_2 sur l'axe entier, à tout $\eta > 0$ correspondent des constantes (en nombre fini) $d_1, d_2, \ldots, d_m$, telles, qu'en posant $Q(x) = d_1 + \sum_2^m d_n x^{k_n - k_1}$, on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi(x) - \frac{Q(x)}{F_1(x)} \right|^2 dx < \eta^2. \tag{32}$$

Comme la fonction $f(x)\left(F_1(x)\right)^{-1}$ appartient à L_2, l'inégalité (32) peut être réalisée avec $\psi(x) = f(x)\left(F_1(x)\right)^{-1}$.

Pour abréger l'écriture nous écrirons, q étant un entier positif,

$$\int_0^x dt_q \int_0^{t_q} dt_{q-1} \ldots \int_0^{t_2} \alpha(t_1)\, dt_1 = \underset{q}{\int_0^x} \alpha(t)\, dt.$$

En posant pour $x < 0$, $F_2(x) = F_2(-x)$, $g(x) = g(-x)$ on a pour x réel quelconque

$$(33) \quad \left| \underset{k_1}{\int_0^x} \big(f(t) - Q(t)\big)\, dt \right|$$
$$\leqq \left| \underset{k_1-1}{\int_0^x} \left[\left| \int_0^t \big(f(\tau) - Q(\tau)\big)\, d\tau \right| \right] dt \right|$$
$$\leqq \left| \underset{k_1-1}{\int_0^x} \left(\left| \int_0^t \left(\frac{f(\tau)\, g(\tau)}{F_2(\tau)} - \frac{Q(\tau)\, g(\tau)}{F_2(\tau)} \right)^2 d\tau \right| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{|t|} \left(\frac{F_2(\tau)}{g(\tau)} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} dt \right|$$
$$\leqq \left| \underset{k_1-1}{\int_0^x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi(\tau) - \frac{Q(\tau)}{F_1(\tau)} \right|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{|t|} \left(\frac{F_2(\tau)}{g(\tau)} \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} dt \right|.$$

Lorsque $k_1 = 1$, le symbole $\underset{k_1-1}{\int_0^x}$ est à supprimer, et, dans les symboles $\int_0^t$, $\int_0^{|t|}$, t doit être remplacé par x.

Pour x assez grand $F_2(x)$ est une fonction croissante; il existe, par conséquent, une constante A tel que, pour $t > 0$, $\max\limits_{0 \leqq \tau \leqq t} F_2(\tau) \leqq A\, F_2(t)$ et pour $t \geqq 0$

$$\int_0^t \left(\frac{F_2(\tau)}{g(\tau)} \right)^2 d\tau \leqq A^2 \big(F_2(t)\big)^2 \int_0^t \frac{d\tau}{\big(g(\tau)\big)^2} \leqq C^2 \big(F_2(t)\big)^2,$$

[$g(\tau) = \tau$, pour τ assez grand].

Et de (32) et (33) on tire immédiatement

$$\left| \underset{k_1}{\int_0^x} \big(f(t) - Q(t)\big)\, dt \right| \leqq C_1 \eta\, |x|^{k_1 - 1} F_2(x) \leqq \eta\, D\, F(x),$$

où D est une constante indépendante de η.

Comme

$$\underset{k_1}{\int_0^x} Q(t)\, dt = P_1(x) = \frac{d_1 x^{k_1}}{k_1!} + \frac{d_2 x^{k_2}}{(k_2 - k_1 + 1) \ldots k_2} + \ldots + \frac{d_m x^{k_m}}{(k_m - k_1 + 1) \ldots k_m},$$

on tire la conclusion du théorème en posant

$$\eta = \frac{\varepsilon}{D}, \qquad a_0 = \varphi(0), \qquad a_n = \frac{d_n}{(k_n - k_1 + 1) \ldots k_n} \qquad (1 \leqq n \leqq m).$$

7. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème général sur la meilleure approximation sur l'axe réel. — *Soit* $\{k_n\}$ *une suite d'entiers positifs croissants, et désignons par* $\{\lambda_n\}$ *la suite d'entiers positifs croissants, complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers positifs.*

Soit $F(x)$ *une fonction positive, continue, croissante, paire,* k_1 *fois dérivable,* $p(\sigma) = \log F(e^\sigma)$ *étant une fonction convexe de* σ, *et supposons que*

$$|F^{(k_1)}(x)| = O\left(F(x)\right)^{1+\frac{1}{k_1}} \qquad (x \to \infty). \tag{34}$$

Supposons qu'une des hypothèses $U_2\left(\lambda_n,\ p(\sigma),\ \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n,\ p(\sigma),\ \frac{1}{2}\right)$ *soit satisfaite.*

Soit $f(x)$ *une fonction continue sur l'axe entier, telle que*

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = 0.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, *il existe un polynome de la forme*

$$P(x) = a_0 + a_1 x^{k_1} + \ldots + a_n x^{k_n},$$

tel que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Démonstration. — Posons pour $x \geqq 0$

$$\Phi(x) = 1 + \frac{x^{k_1}}{1 + x^{k_1}} F(x).$$

Cette fonction est continue, croissante, k_1 fois dérivable, et, si $k_1 > 1$, on a pour $1 \leqq p \leqq k_1 - 1$, $\Phi^{(p)}(0) = 0$. Il résulte de l'égalité (34) et de la relation

$$F^{(p)}(x) = \underbrace{\int_0^x}_{k_1-p} F^{(k_1)}(t)\, dt + P(x) \qquad 1 \leqq p \leqq k_1 - 1,$$

où $P(x)$ est un polynome de degré $k_1 - p - 1$, que

$$|F^{(p)}(x)| = O\left[\left(F(x)\right)^{1+\frac{1}{k_1}} x^{k_1-p}\right] \qquad (x \to \infty),$$

et, il est alors évident que

$$|\Phi^{(p)}(x)| = O\left[\left(\Phi(x)\right)^{1+\frac{1}{k_1}} x^{N_p}\right] \qquad (n \to \infty). \tag{35}$$

où N_p est un entier positif. Posons $S_k(x) = \left(\Phi(x)\right)^{-k}$, $S_k^{(k_1)}(x) = R_k(x)$. On a pour $k \geqq 1$

$$S_k(x) = \underbrace{\int_0^x}_{k_1} R_k(t)\, dt + 1. \tag{36}$$

On voit, d'autre part, par induction, que pour $q \geqq 1$, la fonction $S_1^{(q)}(x)$ peut être mise sous la forme d'une somme d'un nombre fini de termes $\Phi^{(\alpha_1)}(x)\Phi^{(\alpha_2)}(x)\ldots\Phi^{(\alpha_r)}(x)S_{r+1}(x)$, munis de facteurs constants, avec $r \leqq q$, $\alpha_i < q$ (les α_i n'étant pas nécessairement distincts).

En tenant alors compte de (35), on a pour $0 < q \leqq k_1$

$$S_1^{(q)}(x) = O(x^{N'_q}) \qquad (x \to \infty),$$

et, en appliquant la formule de Leibnitz, on a, pour $k \geqq 1$

$$|S_k^{(k_1)}(x)| = |R_k(x)| = \left|\left[\left(S_1(x)\right)^k\right]^{(k_1)}\right| = O(x^{L_k}) \qquad (x \to \infty).$$

Posons pour $x < 0$, $S_k(x) = S_k(-x)$, $R_k(x) = S_k^{(k_1)}(x)$, cette dernière fonction est définie pour tout x, sauf peut-être pour $x = 0$, et (36) est valable pour tout x.

Soit $\eta_k > 0$, d'après le théorème III, il existe pour tout $k \geqq 1$ un polynome $Q_k(x)$ de la forme

$$Q_k(x) = a_0^{(k)} + \sum_1^{m_k} a_n^{(k)} x^{k_n},$$

tel que

$$|S_k(x) - Q_k(x)| < \eta_k F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Comme $S_k(x)$ est une fonction paire, on a aussi

$$|S_k(x) - Q_k(-x)| < \eta_k F(x).$$

En ajoutant les deux inégalités on obtient

$$(37) \qquad |S_k(x) - P_k(x)| < \eta_k F(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

où $P_k(x) = \frac{1}{2}\left(Q_k(x) + Q_k(-x)\right)$ est un polynome où seuls les exposants k_n, *pairs*, interviennent.

Posons maintenant

$$\overline{S}_k(x) = S_k(x) - 1 \quad (x \geqq 0), \qquad \overline{S}_k(x) = -\overline{S}_k(-x) \quad (x < 0).$$

Il existe un polynome

$$\overline{Q}_k(x) = b_0^{(k)} + \sum_1^{m'_k} b_n^{(k)} x^{k_n},$$

tel que

$$|\overline{S}_k(x) - \overline{Q}_k(x)| < \eta_k F(x) \qquad (-\infty < x < \infty);$$

et comme $\overline{S}_k(0) = 0$, on a, en particulier, $|b_0^{(k)}| < \eta_k F(0)$, et

$$\left|\overline{S}_k(x) - \sum_1^{m'_k} b_n^{(k)} x^{k_n}\right| < 2\eta_k F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

comme $\overline{S}_k(x)$ est une fonction impaire, on a, par un raisonnement analogue à celui qu'on a fait plus haut

$$|\overline{S}_k(x) - \overline{P}_k(x)| < 2\eta_k F(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

où $\overline{P}_k(x)$ est un polynome où n'interviennent que les puissances k_n *impaires*. Pour $x \geqq 0$ cette dernière inégalité peut se mettre sous la forme

$$(38) \qquad |S_k(x) - 1 - \overline{P}_k(x)| < 2\eta_k F(x) \qquad (x \geqq 0).$$

Soit maintenant $\psi(x)$ une fonction continue pour $x \geqq 0$ telle que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{F(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\Phi(x)} = 0.$$

Posons

$$u = (\Phi(x))^{-1} \qquad (x \geqq 0), \qquad A(u) = \psi(x)(\Phi(x))^{-1},$$

avec

$$A(0) = \lim_{u=0} A(u) = \lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{\Phi(x)} = 0.$$

$A(u)$ est une fonction continue dans l'intervalle $[0, 1]$. Si donc $\delta > 0$ est donné, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, un polynome

$$P(u) = c_0 + \sum_{p=1}^{n} c_p u^p,$$

tel que, sur $[0, 1]$

$$(39) \qquad |A(u) - P(u)| < \delta;$$

et comme $A(0) = 0$, on peut bien supposer $c_0 = 0$.

Cette inégalité peut être écrite sous la forme

$$\left|\psi(x) - \sum_{1}^{n} c_p (\Phi(x))^{-p+1}\right| < \delta\,\Phi(x) < A\delta\,F(x) \qquad (x \geqq 0),$$

où A est une constante indépendante de δ.

Comme $(\Phi(x))^{-p+1} = S_{p-1}(x)$; on a d'après (37) et (38), pour $x \geqq 0$

$$(40) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left|\psi(x) - \sum_{1}^{n} c_p P_{p-1}(x)\right| < \left(A\delta + \sum_{2}^{n} |c_p|\,\eta_{p-1}\right) F(x), \\ &\left|\psi(x) - \sum_{1}^{n} c_p \overline{P}_{p-1}(x) - \sum_{2}^{n} c_p\right| < \left(A\delta + 2\sum_{2}^{n} |c_p|\,\eta_{p-1}\right) F(x), \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé $P_0(x) = \overline{P}_0(x) = 1$. $\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons n et $c_p (0 \leqq p \leqq n)$

pour que (39) ait lieu avec $\delta = \frac{\varepsilon}{4A}$, et choisissons, alors, les quantités $\eta_p (0 \leqq p \leqq n-1)$ de sorte que

$$2 \sum_2^n |c_p| \eta_{p-1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

En posant $a = \sum_1^n c_p$, on voit, d'après les inégalités (40), que pour $x \geqq 0$

$$(41) \qquad |\psi(x) \qquad - A(x)| < \frac{\varepsilon}{2} F(x),$$

$$(42) \qquad |\psi(x) - a - \overline{A}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} F(x),$$

où $A(x)$ et $\overline{A}(x)$ sont des polynomes, respectivement pair et impair, ne contenant que des puissances k_n. Si $\psi(0) = 0$, (42) donne $|a| < \frac{\varepsilon}{2} F(0) \leqq \frac{\varepsilon}{2} F(x)$, et cette inégalité (42), donne $\big($lorsque $\psi(0) = 0\big)$

$$(43) \qquad |\psi(x) - \overline{A}(x)| < \varepsilon F(x).$$

Appliquons (41) à la fonction $\psi(x) = f(x) + f(-x)$ et (43) à la fonction $\psi(x) = f(x) - f(-x)$ [ici $\psi(0) = 0$].

Il existe donc un polynome pair, ne contenant que des puissances k_n, $P_1(x)$, tel que, pour $x \geqq 0$

$$(44) \qquad |f(x) + f(-x) - P_1(x)| < \varepsilon F(x),$$

et, il existe un polynome impair, ne contenant que des puissances k_n, $P_2(x)$, tel que, pour $x \geqq 0$

$$(45) \qquad |f(x) - f(-x) - P_2(x)| < \varepsilon F(x).$$

Comme $f(x) + f(-x)$ est, elle-même, une fonction paire, et que $f(x) - f(-x)$ est une fonction impaire, l'inégalité (44), ainsi que l'inégalité (45), ont lieu sur tout l'axe réel. En ajoutant ces deux inégalités on obtient, en posant $P(x) = \frac{1}{2}\big(P_1(x) + P_2(x)\big)$, l'inégalité de l'énoncé, pour $(-\infty < x < \infty)$.

8. Lorsque $k_n = n (n \geqq 1)$, l'ensemble $\{\lambda_n\}$ est vide, et $\overline{D}^*(\lambda) = D^*(\lambda) = 0 (\lambda > 0)$. Donc chacune des hypothèses $U_2\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$, $U_3\left(\lambda_n, p(\sigma), \frac{1}{2}\right)$ de l'énoncé du théorème que nous venons de démontrer devient (23). On a ainsi, comme cas particulier de ce théorème le corollaire suivant :

Si $F(x)$ *est une fonction continue, positive, croissante, paire, dérivable,* $\log F(x)$ *étant une fonction convexe de* $\log x (x > 0)$, *si*

$$\int^{\infty} \frac{\log F(x)}{x^2} dx = \infty,$$

et si

$$|F'(x)| = O\big(F(x)\big)^2, \tag{46}$$

alors, quelle que soit la fonction continue $f(x)$ sur l'axe entier, telle que

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = 0,$$

à tout $\varepsilon > 0$ correspond un polynome $P(x) = a_0 + \sum_1^m a_n x^n$ tel que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon F(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Or, il est facile à voir que lorsque $F(x)$ est donné par le produit (20), la condition (46) est certainement remplie. En effet, $\frac{F'(x)}{F(x)} x$ étant une fonction croissante $\big(\log F(x)$ est ici, bien entendu, une fonction convexe de $\log x$, d'après des théorèmes bien classiques$\big)$, on peut écrire pour $x > 1$

$$\log F(x) = \int_0^x \frac{F'(t)}{F(t)}\, dt \geqq \int_{x-1}^x \frac{F'(t)}{F(t)}\, dt$$

$$\geqq (x-1) \frac{F'(x-1)}{F(x-1)} \int_{x-1}^x \frac{dt}{t} \sim \frac{F'(x-1)}{F(x-1)}, \qquad (x \to \infty).$$

Mais $F(x)$ est une fonction entière d'ordre fini, donc $\log F(x) = O(x^p)$ $(p > 1)$ et

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = O(x^p) \qquad (p > 1), \quad (x \to \infty),$$

ce qui donne immédiatement la condition (46). Le théorème de S. Bernstein est donc bien un cas particulier du nôtre.

Sur les noyaux réels, symétriques singuliers.

1. Dans son étude sur les équations intégrales de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x),$$

où $[a, b]$ est un intervalle fini, Carleman considère les noyaux réels, symétriques $K(x, y)$ ayant les propriétés suivantes [3] :

1° L'expression

$$K^2(x) = \int_a^b K^2(x, y)\, dy$$

a un sens et est finie, et

$$\lim_{x'=x} \int_a^b [K(x, y) - K(x', y)]^2\, dy = 0,$$

pour toutes les valeurs de x exceptées celles d'un ensemble dénombrable ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ au plus, cette suite admettant un nombre fini de points limites.

2° Il existe au plus un nombre fini de valeurs de ξ_i, qu'on désignera par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$, telles que, quel que soit $\delta > 0$, en désignant par I_δ le complément des intervalles $[\eta_i - \delta, \eta_i + \delta]$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) par rappport à $[a, b] \left(I_\delta = [a, b] - \bigcup\limits_{1 \leq i \leq m} [\eta_i - \delta, \eta_i + \delta] \right)$, l'expression

$$\int_{I_\delta} K^2(x)\, dx$$

existe et est finie.

Un tel noyau sera appelé noyau C.

Carleman considère aussi des noyaux C possédant la propriété M que voici :

$|K(x, y)|$ admet des noyaux itérés de tout ordre $n \geqq 2$, $\overline{K}^{(n)}(x, y)$, définis pour $x \neq \xi_i$, $y \neq \xi_i$ et tels que pour $x \neq \xi_i$

$$\int_a^b \left(\overline{K}^{(n)}(x, y)\right)^2 dy < \infty.$$

Il est évident qu'un noyau C possédant la propriété M, admet des noyaux itérés de tout ordre $n \geqq 2$, que nous désignerons par $K^{(n)}(x, y)$; ces noyaux existent lorsque $x \neq \xi_i$, $y \neq \xi_i (n \geqq 2)$, et l'on voit immédiatement que les fonctions $K^{(2m)}(x, y)$ sont symétriques, avec

$$K^{(2m)}(x, y) \geqq 0.$$

Un point (x, y) du carré $\Delta : a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$, est dit régulier s'il n'appartient à aucune droite $x = \xi_i$, $y = \xi_i$, ni à aucune droite limite de telles droites.

2. Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME I SUR LES NOYAUX. — *Soit* $K(x, y)$ *un noyau réel symétrique C, défini dans le carré* $\Delta : a \leqq x \leqq b$, $a \leqq y \leqq b$, *possédant la propriété* M. *Soit* (x_0, y_0) *un point régulier de* Δ.

Soit $\{k_n\}$ $(k_1 = 2)$ *une suite d'entiers positifs croissants contenant tous les entiers positifs pairs. Soit* $\{\lambda_n\}$ *la suite complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à tous les entiers* $n \geqq 2$. *Supposons que*

$$K^{(k_n)}(x_0, y_0) = 0 \qquad (n \geqq 1). \tag{47}$$

Si l'une des hypothèses $U_i(\lambda_n, \nu_n M_n, a)$ *avec*

$$\nu_n = 2n, \qquad M_{n-1} = [K^{(2n)}(x_0, x_0) K^{(2n)}(y_0, y_0)]^{\frac{1}{2}}, \qquad a = \frac{1}{2},$$

est satisfaite, on a

$$K^{(p)}(x_0, y_0) = 0 \qquad (p \geqq 2).$$

REMARQUE. — *Si* $\lim_{n=\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$, *on a, avec les notations de la page* 105, *pour n assez grand* ($\nu_n = 2n$)

$$M_n^{c,\nu} = M_n,$$

donc

$$\mu_n = \frac{1}{2}\log\frac{M_n}{M_{n-1}}.$$

3. *Démonstration* (du théorème et de la remarque). — Carleman fait correspondre à $K(x, y)$ des *fonctions spectrales* $\theta(x, y \mid \lambda)$ définies lorsque (x, y) est un point régulier et possédant les propriétés suivantes [3] : chaque fonction θ est symétrique de (x, y), continue par rapport à (x, y) (aux points réguliers), et à variation bornée par rapport à λ dans chaque intervalle fini.

Démontrons maintenant que chaque fonction spectrale possède la propriété suivante :

$K(x, y)$ étant un noyau C possédant la propriété M, (x_0, y_0) étant un point régulier de Δ, la fonction

$$A(z) = z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d_\lambda\theta(x_0, y_0 \mid \lambda)}{\lambda(\lambda - z)} \tag{48}$$

est holomorphe pour $\mathcal{I}z > 0$ (et pour $\mathcal{I}z < 0$) et dans $|z - ip| < p\,(p > 0)$ on a

$$|A(z)| \leq 2pM_0. \tag{49}$$

D'ailleurs, l'intégrale (48) converge uniformément dans chaque domaine fermé, borné D situé dans le demi-plan $\mathcal{I}z > 0$.

Soit $\alpha < \beta$; comme, en posant $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left|1 - \frac{z}{\lambda}\right| = \left|e^{-i\varphi} - \frac{r}{\lambda}\right| \geqq \sin\varphi > 0,$$

on voit que

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda\theta}{\lambda(\lambda - z)}\right| \leqq \int_\alpha^\beta \frac{|d_\lambda\theta|}{\lambda^2\left|1 - \frac{z}{\lambda}\right|} \leqq \frac{1}{\sin\varphi}\int_\alpha^\beta\frac{|d_\lambda\theta|}{\lambda^2}. \tag{50}$$

Posons

$$\lambda_j^{(n)} = \alpha + \frac{j}{n}(\beta - \alpha) \qquad (0 \leqq j < n),$$

$$\Delta_j^{(n)}\theta = \Delta_j^{(n)}\theta(x_0, y_0 \mid \lambda) = \theta(x_0, y_0 \mid \lambda_{j+1}^{(n)}) - \theta(x_0, y_0 \mid \lambda_j^{(n)}).$$

Il est évident que

$$\int_\alpha^\beta \frac{|d_\lambda\theta|}{\lambda^2} = \lim_{n=\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{|\Delta_j^{(n)}\theta|}{|\lambda_j^{(n)}|^2}.$$

Or, en appliquant une inégalité de Carleman (l'inégalité (71) [3]) et l'inégalité de Hölder, on a

$$(51)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{|d_\lambda \theta(x_0, y_0 | \lambda)|}{\lambda^2} \leq \lim_{n=\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_j^{(n)} \theta(x_0, x_0)}{|\lambda_j^{(n)}|^2} \sum_{i=}^{n-1} \frac{\Delta_j^{(n)}(y_0, y_0)}{|\lambda_j^{(n)}|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda \theta(x_0, x_0 | \lambda)}{\lambda^2} \int_\alpha^\beta \frac{d_\lambda \theta(y_0, y_0)}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

les fonctions $\theta(x_0, x_0 | \lambda)$, $\theta(y_0, y_0 | \lambda)$ étant des fonctions croissantes de $\lambda(-\infty < \lambda < \infty)$. D'après une égalité de Carleman (formule (173) [3]) on a d'ailleurs

$$(52)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda \theta(x_0, x_0 | \lambda)}{\lambda^n} = K^{(n)}(x_0, x_0) \qquad (n \geq 1).$$

Donc, d'après (50), (51) et (52) (avec $n = 2$), on a, pour $\mathcal{I} z > 0$

$$|A(z)| \leq \frac{r}{\sin\varphi} M_0,$$

l'intégrale (48) fournissant $A(z)$ étant uniformément et absolument convergente dans D. Comme, dans $|z - ip| < p$,

$$(53)\qquad r \leq 2p \sin\varphi,$$

(49) est établi.

L'inégalité (52) suffit pour démontrer la remarque qui suit l'énoncé du théorème.

Posons, en effet

$$m_n = K^{(2n)}(x_0, x_0), \qquad c > \frac{1}{2};$$

on a

$$P_n(c, \lambda) = c\left(\frac{m_{n+2}}{m_n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^{2n}} - \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}} + c\left(\frac{m_n}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^{2(n+2)}} > 0,$$

donc, d'après (52)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(c, \lambda)\, d_\lambda \theta(x_0, x_0 | \lambda) = c\, m_n \left(\frac{m_{n+2}}{m_n}\right)^{\frac{1}{2}} - m_{n+1}$$
$$+ c\, m_{n+2} \left(\frac{m_n}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2c(m_n m_{n+2})^{\frac{1}{2}} - m_{n+1} > 0,$$

ce qui prouve, en faisant tendre c vers $\frac{1}{2}$, que

$$m_{n+1} \leq (m_n m_{n+2})^{\frac{1}{2}},$$

et, avec les notations de l'énoncé du théorème,

$$M_{n+1} \leqq (M_n M_{n+2})^{\frac{1}{2}},$$

ce qui prouve que la remarque [les points $(2n, \log M_n)$ sont les sommets d'un polygone convexe].

Nous nous appuyons maintenant sur le théorème suivant, démontré par Carleman (p. 125 [3]).

On a, pour $\mathcal{I} z > 0$, $m \geqq 2$

$$(54)\qquad \left| z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_\lambda \theta(x_0, y_0 \mid \lambda)}{\lambda(\lambda - z)} - \sum_{\nu=1}^{2m-2} K^{(\nu+1)}(x_0, y_0) z^\nu \right| \leqq \frac{r^{2m-1}}{\sin\varphi} M_{m-1}.$$

Posons alors $z = ie^{-s+a}$, où a est une constante positive $F_a(s) = ie^{-s+a} A(ie^{-s+a})$, où $A(z)$ est la fonction donnée par (48), et supposons que s varie dans le domaine Δ, défini par

$$\sigma > 0, \qquad |t| < \arccos e^{-\sigma} = \pi g(\sigma),$$

où $g(\sigma)$ tend vers $\frac{1}{2}$ en croissant. Il est clair que

$$\int^{\infty} \left(\frac{1}{2} - g(\sigma) \right) d\sigma < \infty.$$

La variable z varie, d'autre part, dans le cercle

$$\left| z - \frac{ie^a}{2} \right| < \frac{e^a}{2}.$$

Les relations (48), (53) $\left(\text{avec } p = \frac{e^a}{2}\right)$ et (54) permettent alors d'affirmer que dans Δ

$$(55)\qquad \left| F_a(s) - \sum_{2}^{2m-1} a_k e^{-ks} \right| \leqq M_{m-1} e^a e^{-(2m-2)(\sigma-a)},$$

où

$$a_k = i^k K^{(k)}(x_0, y_0) e^{ka}.$$

En tenant compte de (47), on a, en posant $d_n^{(a)} = i^{\lambda_n} K^{(\lambda_n)}(x_0, y_0) e^{\lambda_n a}$, dans Δ

$$(56)\qquad \left| F_a(s) - \sum_{1}^{n} d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leqq M_q e^{(2q+1)a} e^{-2q\sigma} = M_q^{(a)} e^{-2q\sigma} \qquad (\lambda_n - 1 \leqq 2q < \lambda_{n+1} - 1).$$

Posons

$$p_a(\sigma) = \overline{\underset{2q \geqq \lambda_1 - 1}{\text{borne}}} \, (2q\sigma - \log M_q^{(a)}).$$

On a, pour σ assez grand,

$$\begin{aligned} p_a(\sigma) &= \overline{\underset{2q \geqq \lambda_1 - 1}{\mathrm{borne}}}\,[2q\sigma - (2q+1)a - \log \mathrm{M}_q] \\ &= -a + \overline{\underset{2q \geqq \lambda_1 - 1}{\mathrm{borne}}}\,[2q(\sigma - a) - \log \mathrm{M}_q] \\ &= -a + \overline{\underset{q \geqq 1}{\mathrm{borne}}}\,[2q(\sigma - a) - \log \mathrm{M}_q] = -a + p(\sigma - a), \end{aligned}$$

où

$$p(\sigma) = \overline{\underset{q \geqq 1}{\mathrm{borne}}}\,(2q\sigma - \log \mathrm{M}_q).$$

L'hypothèse $\mathrm{U}_1\left(\lambda_n, 2n, \mathrm{M}_n, \frac{1}{2}\right)$, entraîne, par conséquent l'hypothèse $\mathrm{U}_1\left(\lambda_n, 2n, \mathrm{M}_n^{(a)}, \frac{1}{2}\right)$,

Mais, d'autre part, l'inégalité (49) fournit $\left(\text{compte tenu de } p = \frac{e^a}{2}\right)$

$$|\mathrm{F}_a(s)| \leqq e^{2a}\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}.$$

Toutes les hypothèses du théorème préliminaire I sont ainsi satisfaites, à condition d'y remplacer $\mathrm{F}(s)$ par $\mathrm{F}_a(s)$, d_k par $d_k^{(a)}$, M_q par $\mathrm{M}_q^{(a)}$, et, en y posant $\nu_q = 2q$. On a donc, d'après ce théorème,

$$|d_n^{(a)}| = |\mathrm{K}^{(\lambda_n)}(x_0, y_0)|\, e^{\lambda_n a} < \mathrm{A}\,\lambda_n \Lambda_n^{\star}\, e^{2a}\, e^{\lambda_n u}.$$

Or $\lambda_n \geqq 3$, en fixant n et en faisant tendre a vers $+\infty$, on voit que $d_n^{(a)} = o\,(n \geqq 1)$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{K}^{(\lambda_n)}(x_0, y_0) = 0,$$

ce qui, joint à (47), démontre le théorème.

3. Un noyau C, $\mathrm{K}(x, y)$, est dit du type positif, si, quelle que soit la fonction $h(x)$ s'annulant autour de chaque point ξ_i $\big($dans un intervalle $[\xi_i - \delta_i, \xi_i + \delta_i]$, $i \geqq 1\big)$, on a

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy \geqq 0.$$

Pour un tel noyau, supposé continu en tout point régulier, on a $[(x_0, y_0)$ étant un point régulier de $\Delta]$ (*voir* [3])

(57) $$\theta(x_0, y_0 \mid \lambda) = 0 \qquad (\lambda < 0).$$

Nous pouvons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II SUR LES NOYAUX. — *Soit* $\mathrm{K}(x, y)$ *un noyau réel symétrique* C, *défini dans le carré* $\Delta : a \leqq x \leqq b,\ a \leqq y \leqq b$, *continu aux points réguliers, possédant la propriété* M, *et du type positif. Soit* (x_0, y_0) *un point régulier de* Δ.

Les suites $\{k_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ ayant la même signification que dans le théorème I (*sur les noyaux*) *supposons que* (47) *ait lieu.*

Si l'une des conditions $U_i(\lambda_n, \nu_n, M_n, 1)$, *avec* $\nu_n = 2n$, M_n *défini comme dans le théorème* I *sur les noyaux, est satisfaite, on a*

$$K^{(p)}(x_0, y_0) = 0 \qquad (p \geqq 2).$$

Il est évident que si $a_1 > a_2$, les conditions U_i avec $a = a_1$ sont moins restrictives que les mêmes conditions avec $a = a_2$.

Il est vrai que, de toute façon, on a dans les deux énoncés $\overline{D}^* \leqq \frac{1}{2}$, mais, dans le premier on a nécessairement $\overline{D}^* < \frac{1}{2}$, tandis que dans le second, on peut avoir $\overline{D}^* = D^* = \frac{1}{2}$. D'ailleurs, du fait que, dans le second théorème $a = 1$, tandis que dans le premier, $a = \frac{1}{2}$, on exige bien moins sur la « petitesse » de la croissance des M_n dans le second théorème, que dans le premier.

La démonstration du second théorème diffère peu de celle du théorème I. Il suffit seulement de remarquer que de (57) il résulte que des inégalités de la forme (55) ont lieu, dans le cas du théorème II, dans un domaine Δ, donné par $\sigma > 0$, $|t| < \pi g(\sigma)$, avec $\lim g(\sigma) = 1$, et

$$\int^{\infty} \big(1 - g(\sigma)\big)\, d\sigma < \infty,$$

[$g(\sigma)$ étant une fonction croissante].

Problèmes des moments.

1. Soit $\{m_n\}$ une suite de nombres réels ($n \geqq 0$). On connaît des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur la suite $\{m_n\}$, pour qu'il existe une fonction non décroissante $V = V(t)$ ($t \geqq 0$) telle que

$$(S^{(n)}) \qquad \int_0^{\infty} t^n\, dV = m_n \qquad (n \geqq 0).$$

On connaît, de même, de telles conditions pour qu'il existe une fonction non décroissante $V = V(t)$ ($-\infty < t < \infty$), telle que

$$(H^{(n)}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^n\, dV = m_n \qquad (n \geqq 0).$$

On possède aussi des conditions suffisantes, très générales, portant sur les m_n, pour que, si une solution V satisfaisant à $(S^{(n)})$ existe, cette solution soit unique, lorsqu'on suppose $V(0) = 0$. Autrement dit, si ces conditions sont satisfaites, deux fonctions V_1 et V_2, satisfaisant à $(S^{(n)})$, ont les mêmes intervalles de continuité, et diffèrent sur ces intervalles par une constante. On connaît de même des conditions suffisantes, très générales, pour qu'il existe une seule fonction V, avec $V(-\infty) = \lim_{t=-\infty} V(t) = 0$, satisfaisant à $(H^{(n)})$, si toutefois une telle solution existe.

Le problème d'existence et d'unicité dans le cas $(S^{(n)})$ constitue le problème des moments de Stietjes, celui concernant $(H^{(n)})$ est le problème des moments de Hamburger.

Démontrons d'abord le fait suivant :

Si les quantités m_n admettent une solution V de $(S^{(n)})$, $\log m_n$ est une fonction convexe de n; si ces quantités admettent une solution de $(H^{(n)})$, $\log m_{2n}$ est une fonction convexe de n.

Il s'agit de démontrer que dans le premier cas

$$m_{n+1} \leqq m_n^{\frac{1}{2}} m_{n+2}^{\frac{1}{2}}, \tag{58}$$

et que dans le second cas

$$m_{2(n+1)} \leqq m_{2n}^{\frac{1}{2}} m_{2(n+2)}^{\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

La démonstration de ces faits est tout à fait analogue à celle de la remarque qui suit l'énoncé du théorème I sur les noyaux. Ainsi, pour le cas du problème de Stieljes, on a, pour $c > \frac{1}{2}$,

$$Q_n(c, t) = c\left(\frac{m_{n+2}}{m_n}\right)^{\frac{1}{2}} t^n - t^{n+1} + c\left(\frac{m_n}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} t^{n+2} \geqq 0 \qquad (t \geqq 0),$$

et, par conséquent

$$\int_0^\infty Q_n(c, t)\, dV = cm_n\left(\frac{m_{n+2}}{m_n}\right)^{\frac{1}{2}} - m_{n+1} + cm_{n+2}\left(\frac{m_n}{m_{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \geqq 0.$$

On conclut, comme à la page 122 que (58) a lieu. La démonstration est analogue pour (59).

Nous allons nous occuper uniquement des problèmes d'unicité, mais les problèmes que nous envisageons sont bien plus généraux que les problèmes classiques de Stieltjes et de Hamburger.

Soit $\{k_n\}(n \geqq 0)$ une suite d'entiers non négatifs, avec $k_0 = 0$. Soit $\{M_n\}(n \geqq 0)$ une suite réelle. Nous traitons les problèmes suivants :

Problème (S^{k_n}). — En supposant qu'il existe une fonction croissante $V = V(t)$ telle que

$$\int_0^\infty t^{k_n}\, dV = M_n \qquad (n \geqq 0), \tag{S^{k_n}}$$

indiquer des conditions portant sur les k_n et les M_n, pour qu'il existe une seule fonction V avec $V(0)=0$ satisfaisant à $(S^{(k_n)})$.

Problème $(H^{(k_n)})$. — Supposons que le problème

$$(H^{(k_n)}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^{k_n}\, dV = M_n \qquad (n \geqq 0)$$

admette une solution. Indiquer des conditions portant sur les k_n et les M_n pour qu'une telle solution, avec $V(-\infty)=0$, soit unique.

La réponse la plus complète pour les problèmes d'unicité $(S^{(n)})$ et $(H^{(n)})$ a été fournie par Carleman (*voir* [10]).

La voici, sous une forme distincte de celle donnée par Carleman, mais qui lui est équivalente.

Pour que la solution du problème $(S^{(n)})$ soit unique [avec $V(0)=0$], il suffit que

$$(60) \qquad \sum \left(\frac{m_n}{m_{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty \quad (^1).$$

Pour que la solution du problème $(H^{(n)})$ soit unique [avec $V(-\infty)=0$], il suffit que

$$(61) \qquad \sum \left(\frac{m_{2n}}{m_{2(n+1)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Ces théorèmes apparaîtront comme des cas particuliers de nos théorèmes généraux concernant respectivement les problèmes $(S^{(k_n)})$ et $(H^{(k_n)})$.

Notons que le problème d'unicité $(S^{(k_n)})$ a déjà été traité, d'une part, par Boas [2] et, d'autre part, par Fuchs [4]. Tous les deux ont étudié le cas où les k_n sont réels positif, sans les supposer entiers. Le théorème de Boas ne contient pas comme cas particulier le théorème de Carleman concernant le problème $(S^{(n)})$ Celui de Fuchs le contient. Comme nous l'avons dit plus haut, notre théorème concernant $(S^{(k_n)})$ englobe celui de Carleman sur $(S^{(n)})$. Remarquons que d'une condition d'unicité concernant un problème (H) on peut tirer une condition d'unicité concernant (S), mais non réciproquement. Notre méthode, contrairement à celle des auteurs cités, permet de fournir une réponse aux problèmes des deux espèces.

---

(1) Shohat et Tamarkin [10] consacrent plusieurs pages à une « amélioration » du théorème de Carleman. Par exemple, pour le problème (S), ils remplacent la condition de Carleman $\Sigma m_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty$ par $\Sigma \beta_n^{-\frac{1}{2}} = \infty$, où $\beta_n = \min\limits_{k \geq n} m_k^{\frac{1}{k}}$. Mais, de la convexité de $\log m_n$, démontrée plus haut, il résulte que pour n assez grand $\beta_n = m_n^{\frac{1}{n}}$ $\left(\text{si } \lim m_n^{\frac{1}{n}} = \infty\right)$. Une remarque analogue est valable pour le problème (H) (en remplaçant m_n par m_{2n}).

Notre méthode consiste en l'application du théorème préliminaire I (concernant les séries asymptotiques).

2. Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I [UNICITÉ($S^{(k_n)}$)]. — *Soit* $\{k_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs, croissants, avec* $k_0=0$, *et soit* $\{\lambda_n\}$ *la suite complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers non négatifs. Soit* $\{M_n\}$, *une suite positive* $(n\geqq 0)$.

Supposons qu'il existe une fonction non décroissante $V=V(t)\,(t\geqq 0)$, $V(0)=0$, *telle que*

$$(S^{(k_n)})\qquad \int_0^\infty t^{k_n}\,dV=M_n \qquad (n\geqq 0).$$

Si l'une des conditions $U_i(\lambda_n, k_n, M_n, 1)$ *est satisfaite, cette solution est unique.*

THÉORÈME II [UNICITÉ ($H^{(k_n)}$)]. — *Soit* $\{k_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs, croissants, avec* $k_0=0$, *et soit* $\{\lambda_n\}$ *la suite complémentaire à la suite* $\{k_n\}$ *par rapport à la suite de tous les entiers non négatifs. Soit* $\{M_n\}$, *une suite réelle.*

Supposons qu'il existe une fonction non décroissante $V=V(t)\,(-\infty<t<\infty)$, $V(-\infty)=\lim_{t=-\infty} V(t)=0$, *telle que*

$$(H^{(k_n)})\qquad \int_{-\infty}^\infty t^{k_n}\,dV=M_n \qquad (n\geqq 0).$$

Posons $M'_n=M_n$ *si* k_n *est pair, et* $M'_n=\infty$ *si* k_n *est impair.*

Si l'une des conditions $U_i\left(\lambda_n, k_n, M'_n, \frac{1}{2}\right)$ *est satisfaite, cette solution est unique.*

On se rend immédiatement compte que si $k_n=n\,(n\geqq 0)$, c'est-à-dire si l'ensemble $\{\lambda_n\}$ est vide $\left(\overline{D}^{\bullet}(\gamma k_n)=0\right)$, l'hypothèse $U_6(\lambda_n, k_n, M_n, 1)$ du théorème I devient la relation (60) et $U_6\left(\lambda_n, k_n, M'_n, \frac{1}{2}\right)$ du théorème II devient (61) $\left(\text{avec respectivement } \lim M_n^{\frac{1}{n}}=\infty,\ \lim M_n'^{\frac{1}{2n}}=\infty\right)$. Comme, dans le problème ($S^{(k_n)}$), la ligne polygonale liant les points $(k_n, \log M_n)$ est convexe, on a $\underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{k_n}}=\lim M_n^{\frac{1}{k_n}}$, et, par conséquent la condition $U_8(\lambda_n, k_n, M_n, 1)$ du théorème I devient (si $k_n=n$) la condition (60), avec $\underline{\lim}\, M_n^{\frac{1}{n}}<\infty$. Une remarque analogue est valable pour le théorème II.

Autrement dit, les théorèmes de Carleman, concernant les problèmes ($S^{(n)}$) et ($H^{(n)}$) sont bien des cas particuliers respectivement des théorèmes I et II.

3. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES I ET II. — Soient $V_1(t)$ et $V_2(t)$ deux fonctions croissantes $(t\geqq 0)$, $V_1(0)=V_2(0)=0$, telles que

$$(62)\qquad \int_0^\infty t^{k_n}\,dV_1=\int_0^\infty t^{k_n}\,dV_2=M_n \qquad (n\geqq 0),$$

et posons, pour $a \geqq 0$,

(63) $$F_a(s) = \int_0^\infty \frac{dV_1 - dV_2}{e^{s-a} + t}.$$

Soit Δ un domaine du plan $s = \sigma + it$ contenant l'axe $\sigma > 0$ et dont la frontière est composée du segment $\sigma = 0$. $|t| < \frac{\pi}{2}$ et des courbes $\sigma \geqq 0$, $t = \pm \arcsin e^{-\sigma} = \pm \pi g(\sigma)$, $g(\sigma) > 0$ tendant en croissant vers 1. On a, évidemment

$$\int^\infty \bigl(1 - g(\sigma)\bigr)\, d\sigma < \infty.$$

On a aussi, dans Δ, $t \geqq 0$

(64) $$|e^{s-a} + t| \geqq e^{-a}.$$

$F_a(s)$ est, par conséquent, holomorphe dans $\overline{\Delta}$ avec

(65) $$|F_a(s)| \leqq e^a \left(\int_0^\infty dV_1 + \int_0^\infty dV_2 \right) = 2 M_0 e^a.$$

On a aussi dans Δ, pour tout $p \geqq 1$

(66) $$F_a(s) = \sum_1^p a_k e^{-ks} + (-1)^{p-1} e^{-p(s-a)} F_n^{(a)}(s),$$

où

(67) $$a_k = (-1)^{k-1} e^{ka} \int_0^\infty t^{k-1} (dV_1 - dV_2),$$

(68) $$F_n^{(a)}(s) = \int_0^\infty \frac{t^n (dV_1 - dV_2)}{e^{s-a} + t}.$$

Posons

$$\int_0^\infty t^n\, dV_1 = m'_n, \qquad \int_0^\infty t^n\, dV_2 = m''_n.$$

On a ainsi

$$m'_{k_n} = m''_{k_n} = M_n \qquad \text{et} \qquad a_{k_n+1} = 0 \qquad (n \geqq 0).$$

Et, d'après (64) et (68), on a dans Δ

$$|F_n^{(a)}(s)| \leqq e^a (m'_n + m''_n).$$

On peut donc écrire, pour s variant dans Δ, pour tout $n \geqq 1$

(69) $$\left| F_a(s) - \sum_1^n d_n^{(a)} e^{-(\lambda_k+1)s} \right| \leqq e^{-q(\sigma-a)} e^a (m'_q + m''_q), \qquad (\lambda_n + 1 \leqq q < \lambda_{n+1} + 1),$$

où

$$d_k^{(a)} = e^{(\lambda_k+1)a} (m'_{\lambda_k} - m''_{\lambda_k}),$$

Posons

$$m_q^{(a)} = e^{(q+1)a}(m'_q + m''_q),$$
$$p_a(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{q\geq 1}(q\sigma - \log m_q^{(a)}).$$

On a l'inégalité suivante :

$$(70)\quad \begin{aligned} p_a(\sigma) &= \overline{\text{borne}}_{q\geq 1}[q\sigma - (q+1)a - \log(m'_q + m''_q)] \\ &\geqq \overline{\text{borne}}_{n\geq 1}[k_n\sigma - (k_n+1)a - \log(m'_{k_n} + m''_{k_n})] \\ &= -\log 2 - \log a + \overline{\text{borne}}_{n\geq 1}[k_n(\sigma - a) - \log M_n] = p(\sigma - a) - \log 2 - \log a, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$p(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n\geq 1}(k_n\sigma - \log M_n).$$

Remarquons que la densité moyenne supérieure de la suite $\{\lambda_n + 1\}$ est celle de $\{\lambda_n\}$, et que la fonction de densité de $\{\lambda_n + 1\}$ est inférieure ou égale à celle de $\{\lambda_n\}$; la fonction d'excès de $\{\lambda_n + 1\}$ n'est donc pas supérieure à celle de $\{\lambda_n\}$.

Il devient alors clair que l'hypothèse $U_1(\lambda_n, p(\sigma), 1)$ implique l'hypothèse $U_1(\lambda_n + 1, p(\sigma - a), 1)$, et d'après (70), l'hypothèse $U_1(\lambda_n + 1, p_a(\sigma), 1)$, c'est-à-dire, l'hypothèse $U_1(\lambda_n + 1, n, m_n^{(a)}, 1)$. Les relations (65) et (69) permettent alors d'appliquer le théorème préliminaire I, ce qui donne

$$(71)\qquad |d_n^{(a)}| = e^{(\lambda_n+1)a}|m'_{\lambda_n} - m''_{\lambda_n}| \leqq 2A(\lambda_n + 1)\overline{\Lambda}_n^{\star} M_0 e^a e^{(\lambda_n+1)u},$$

où $\{\overline{\Lambda}_n^{\star}\}$ est la suite associée à la suite $\{\lambda_n + 1\}$ et où A et u sont indépendants de a et de n.

Comme $\lambda_n \geqq 1$, on obtient, en fixant n et en faisant tendre a vers $+\infty$; $m'_{\lambda_n} = m''_{\lambda_n} (n \geqq 1)\, (d_n^{(a)} = 0,\ n \geqq 1)$.

Ainsi, pour $a = 0$, (69) peut s'écrire maintenant sous la forme suivante :

$$|F_0(s)| \leqq 2\, \underline{\text{borne}}_{n\geq 1}\, e^{-k_n\sigma} M_n = 2\, e^{-p(\sigma)} \qquad (s \in \Delta).$$

Mais il résulte, en particulier, de la condition U_1 que

$$\int^{\infty} p(\sigma)\, e^{-\frac{\sigma}{2}}\, d\sigma = \infty.$$

Il résulte alors du théorème I de [8] (qui dans le cas actuel, n'est qu'une transcription d'un théorème classique) que $F_0(s) \equiv 0$. On a, en définitive

$$\int_0^{\infty} \frac{dV_1}{z - t} = \int_0^{\infty} \frac{dV_2}{z - t},$$

ce qui prouve que $V_1 - V_2$ est une constante, mais comme $V_1(0) = V_2(0) = 0$, notre théorème est démontré.

La démonstration du théorème II ne diffère guère de celle du théorème I. La différence ne concerne que la *largeur* du domaine Δ $\left(g(\sigma)\right.$ tend, cette fois-ci, en croissant vers $\left.\frac{1}{2}\right)$ et la définition de la fonction $F_a(s)$ qui devient

$$F_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV_1 - dV_2}{-ie^{s-a} + t}.$$

Bibliographie.

1. S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation*, Paris, Gauthier-Villars, 1926.
2. R. P. Boas, *Density theorems for power series and complete sets* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. **61**, 1937, p. 54).
3. T. Carleman, *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique* (*Uppsala Universitets Arsskrift*, 1923).
4. W. H. J. Fuchs, *On a generalization of the Stieltjes moment problem* (*Bulletin of the American Mathematical. Society*, t. **25**, 1946, p. 1057).
5. S. Izumi et T. Kawata, *Quasi-analytic class and closure of* $\{t^n\}$ *in the interval* $(-\infty, \infty)$. (*The Tôhoku Mathematical Journal*, t. **43**, 2ᵉ partie, 1937, p. 267).
6. S. Mandelbrojt, *Sur une inégalité fondamentale* (*Annales de l'École Normale Supérieure*, t. **63**, 1946, p. 351).
7. S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions.* Gauthier-Villars, Paris, 1935.
8. S. Mandelbrojt et G. R. Mac-Lane, *On fonctions holomorphic in a strip region, and an extension of Watson's problem* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. **61**, 1947, p. 454).
9. R. E. A. C. Paley et N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain.* (*Colloquium Publications*, t. **19**, American Mathematical Society, 1934).
10. J. A. Shohat et J. D. Tamarkin, *The problem of moments* (*Mathematical Surveys*, n° **1**, American Mathematical Society, 1943).