

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL DECUYPER

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 64 (1947), p. 227-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__227_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS

PAR M. MARCEL DECUYPER.

1. *Introduction.* — Nous allons, par les procédés de la géométrie élémentaire, esquisser une théorie complète de l'hypocycloïde à trois rebroussements que nous désignerons par H_3 . Nous nous appuierons sur une proposition de M. Hadamard ⁽¹⁾ : *Le segment intercepté sur une tangente fixe à H_3 par deux tangentes rectangulaires variables a pour milieu un point fixe situé sur le cercle inscrit.*

Nous démontrerons d'abord ce théorème, puis, les principales propriétés de la courbe, entre autres, ce résultat dû à Cremona ⁽²⁾ : *l' H_3 découpe sur une tangente quelconque un segment de longueur constante*; nous signalerons ensuite une génération tangentielle nouvelle de H_3 et quelques applications. Enfin, nous démontrerons, en nous plaçant successivement à deux points de vue différents, qu'il y a $\infty^1 H_3$ tangentes à trois droites données et une seule H_3 tangente à quatre droites données, en supposant bien entendu, que ces droites ont des directions distinctes.

2. *Définition tangentielle de H_3 .* — Nous utilisons une définition tangentielle de la courbe à partir du cercle tritangent (ou inscrit). A étant un point fixe du cercle C, de centre O et de rayon R, on a la tangente générale en joignant un point M de C à un point P tel que $\widehat{AP} = -2\widehat{AM}$ où les arcs sont évalués à un multiple près de la circonférence C. Chaque point de C peut être considéré comme un point M ou comme un point P; par un point M passe une seule tangente de H_3 , par un point P, deux tangentes rectangulaires; en tout, par chaque point de C, passent trois tangentes de H_3 dont deux sont rectangulaires.

Les symétriques des points M, P par rapport à l'axe OA vérifient également la relation $2\widehat{AM} + \widehat{AP} = 0$; cette relation ne change pas de forme si l'on prend

⁽¹⁾ Journ. Math. spéciales, 1884, p. 226.

⁽²⁾ Journ. Crelle, 1864, p. 106.

comme nouvelle origine sur C l'un des points A_1, A_2 qui forment avec A un triangle équilatéral; donc H_3 admet trois axes de symétrie OA, OA_1, OA_2 et se reproduit par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O.

Si $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \alpha$, la droite indéfinie Δ , bissectrice de l'angle (\vec{OM}, \vec{OP}) est caractérisée par

$$(OA, O\Delta) = \frac{1}{2} [(\vec{OA}, \vec{OM}) + (\vec{OA}, \vec{OP})] = -\frac{\alpha}{2} \pmod{\pi};$$

or, MP est perpendiculaire à Δ , donc $(OA, MP) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \pmod{\pi}$, ce qui prouve que H_3 possède une tangente unique parallèle à une direction donnée. A une tangente quelconque MP, on peut associer une tangente perpendiculaire unique qui la coupe en P sur le cercle inscrit : le cercle C est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la courbe.

Une H_3 est parfaitement définie par le cercle C et une tangente MP particulière à condition de distinguer les points M et P de rencontre avec C. En effet, les trois sommets A, A_1, A_2 s'obtiennent à partir de l'égalité $2\widehat{AM} + \widehat{AP} = 0$, c'est-à-dire par la division des arcs MP en trois arcs égaux.

Si deux tangentes MP et M_1P_1 se coupent en Q (fig. 1), les deux triangles MQP₁ et M_1QP sont isocèles, les angles en Q, P ou P_1 de ces triangles ayant même mesure. Le point M'_1 diamétralement opposé à M_1 donne la tangente $P_1M'_1$ perpendiculaire à P_1M_1 ; le point Q' où $P_1M'_1$ coupe MP donne $MQ' = MQ = MP_1$: donc le milieu du segment découpé par deux tangentes rectangulaires variables sur MP est fixe; c'est le point M de cette tangente fixe.

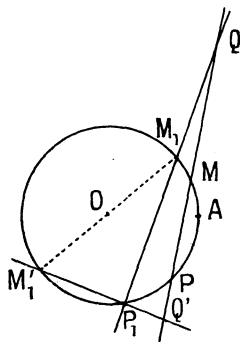


Fig. 1.

Si l'on fait tendre M_1 vers M et P_1 vers P, le point de contact T de MP avec H_3 est tel que $\vec{PM} = \vec{MT}$.

L'enveloppe obtenue peut être engendrée par un point d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur un cercle fixe de centre O et de rayon $3R$: en effet, T est situé sur le cercle C' symétrique de C par rapport à M; avec le même sens de

parcours sur C' que sur C , on a $\widehat{MT} = \widehat{MP} = -3\widehat{AM}$ et, si M' est diamétralement opposé à M sur C' ,

$$\widehat{TM'} = \widehat{TM} + \widehat{MM'} = \pi R + 3\widehat{AM} = 3\widehat{\sigma M},$$

où σ est défini sur C par $\widehat{\sigma A} = \frac{\pi R}{3}$. Appelons S l'homologue de σ sur le cercle Γ homothétique de C par rapport à O dans le rapport 3; Γ est tangent à C' en M' ; on a $\widehat{SM'} = 3\widehat{\sigma M} = \widehat{TM'}$, la proposition en résulte.

Le point A , considéré comme M donne P coïncidant avec A ; H_3 est tangente à C en A (et en A_1 et A_2); A considéré comme P donne deux tangentes rectangulaires, l'une tangente à C en A déjà trouvée, l'autre correspondant à M diamétralement opposé à A , touchant H_3 en S_1 à la distance $4R$ de A dans la direction AO , S_1 est un point de rebroussement de H_3 ; H_3 se reproduisant par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O , a trois points de rebroussement S, S_1, S_2 situés sur Γ .

3. *Tangentes concourantes.* — Appliquons les résultats précédents au problème : *étant donné un point Q sur une tangente MP de H_3 , trouver les autres tangentes à H_3 issues de Q .*

De M comme centre, avec MQ pour rayon, traçons un cercle Ω qui coupe C en P_1 et P_2 (fig. 2). De P_1 sont issues deux tangentes rectangulaires qui coupent MP , l'une en Q , l'autre en Q' symétrique de Q par rapport à M . De même, de P_2 sont issues deux tangentes rectangulaires P_2Q, P_2Q' . Les deux nouvelles tangentes issues de Q sont donc QP_1 et QP_2 .

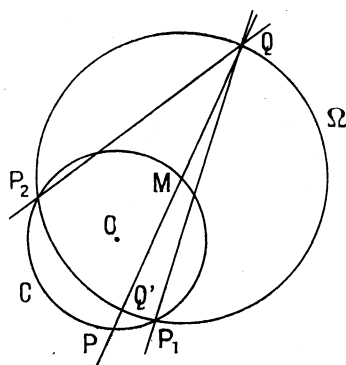


Fig. 2.

Pour que ces tangentes existent, il faut et il suffit que C et Ω se coupent, c'est-à-dire que le rayon MQ de Ω soit inférieur au diamètre $2R$ de C . Si Q tend vers l'un des points \bar{Q}, \bar{Q}' définis par $M\bar{Q} = M\bar{Q}' = 2R$, les deux points P_1 et P_2 viennent se confondre avec le point \bar{P} de C diamétralement opposé à M , les deux tangentes QP_1, QP_2 se confondent, donc \bar{Q} et \bar{Q}' sont les points de ren-

contre de la tangente MP avec H_3 . Les tangentes à H_3 en ces points sont les deux droites rectangulaires \overline{PQ} et $\overline{PQ'}$.

Nous avons ainsi fait apparaître des propriétés importantes :

- a. H_3 est de classe 3 et de degré 4 ;
- b. la longueur du segment intercepté par H_3 sur une tangente quelconque est constante et égale à $4R$, où R désigne le rayon du cercle tritangent.

Nous verrons au paragraphe 6 que les trois arcs SS_1 , S_1S_2 , S_2S limités aux points de rebroussement ont leur convexité tournée vers le centre O du cercle inscrit. Une tangente MP dont le point de contact T est sur l'arc SS_2 recoupe la courbe en deux points \overline{Q} , $\overline{Q'}$ situés sur les arcs SS_1 et S_1S_2 (fig. 3). Considérons

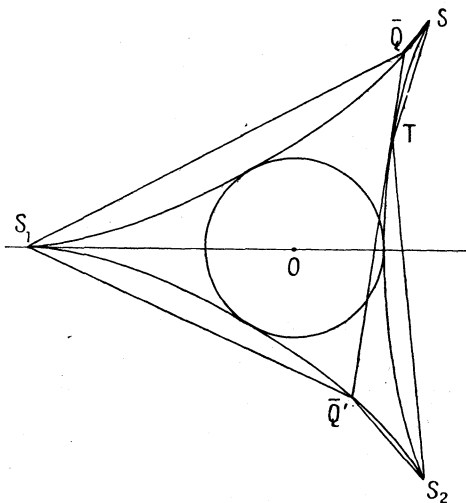


Fig. 3.

les triangles $S_1\overline{QQ'}$, $S\overline{QT}$ et $S_2\overline{Q'T}$ et imaginons qu'une droite Δ se déplace parallèlement à MP en coupant la courbe, donc l'un au moins des triangles précédents. Puisque la convexité de chaque arc est tournée vers l'intérieur de la courbe, si Δ coupe $S_1\overline{QQ'}$, le segment découpé par la courbe est plus court que celui découpé par le triangle, donc plus court que $\overline{QQ'}$. De même, si Δ coupe $S\overline{QT}$ ou $S_2\overline{Q'T}$ chaque segment découpé par la courbe est inférieur à \overline{QT} ou à $\overline{Q'T}$, et par suite, à $\overline{QQ'}$, c'est-à-dire à $4R$.

Si nous considérons le domaine \mathcal{O} fermé intérieur à H_3 , on ne peut y placer aucun segment de longueur supérieure à $4R$. On y trouve une infinité de segments ayant la longueur $4R$; chacun est tangent à la frontière et les extrémités en sont elles-mêmes sur la frontière. Remarquons que le domaine fermé limité par deux cercles concentriques jouit d'une propriété analogue, mais cette fois la frontière n'est plus d'un seul tenant et les deux cercles qui la constituent jouent des rôles différents.

Si Q est le point de concours des trois tangentes MP, M_1P_1 , M_2P_2 (fig. 2), nous venons de voir que M est le centre du cercle circonscrit au triangle QP_1P_2 ; les trois tangentes jouant évidemment le même rôle, M_1 et M_2 sont les centres des cercles circonscrits aux triangles QP_2P et QPP_1 , respectivement; la médiatrice de PQ porte donc les points M_1 et M_2 , d'où une autre construction des tangentes issues de Q; de même les médiatrices de QP_1 et QP_2 sont les droites M_2M et MM_1 . La perpendiculaire en P à MP est aussi tangente à H_3 , elle rencontre en Q_1 et Q_2 les droites M_1P_1 et M_2P_2 , M_1 et M_2 sont les milieux des côtés QQ_1 et QQ_2 ; le cercle C qui passe par M_1 , M_2 et P est le cercle des neuf points du triangle QQ_1Q_2 ; Q' symétrique de Q par rapport à M est l'orthocentre de ce triangle; $Q'P_1$ et $Q'P_2$ sont deux hauteurs. H_3 est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs du triangle QQ_1Q_2 .

Nous déterminerons un point M_i sur C par la mesure de l'angle $\alpha_i = (\vec{OA}, \vec{OM_i})$. Nous nous proposons de trouver la relation exprimant que les tangentes correspondant à α , α_1 , α_2 sont concourantes. Pour obtenir les nouvelles tangentes à H_3 issues d'un point Q de MP, prenons les points M_1 , M_2 où la médiatrice de PQ coupe C; ces tangentes existent à la seule condition que Q soit intérieur au segment $\overline{QQ'}$ découpé par H_3 sur MP. Donc, pour que les tangentes correspondant à des points M_1 et M_2 du cercle C concourent avec une tangente particulière MP, il faut et il suffit que la corde M_1M_2 soit perpendiculaire à MP. ou, ce qui est équivalent, que les bissectrices des angles $(\vec{OM_1}, \vec{OM_2})$ et (\vec{OM}, \vec{OP}) soient perpendiculaires. Ceci donne

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod. } \pi),$$

c'est-à-dire

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

La tangente M'P perpendiculaire à MP forme avec M_1P_1 et M_2P_2 un triangle dont les côtés et les hauteurs sont tangents à H_3 . Or, M' est sur C, diamétralement opposé à M, autrement dit $\alpha = \alpha' + \pi$; la relation qui caractérise un tel triangle est

$$\alpha' + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (\text{mod. } 2\pi),$$

A une H_3 , on peut associer ∞^2 triangles présentant la disposition signalée.

Les relations que nous venons d'établir entraînent des conséquences simples. Dans la première, si α a une valeur constante, α_1 et α_2 ont une somme constante, donc lorsque le point Q décrit une tangente MP, les bissectrices des angles formés par les deux nouvelles tangentes à H_3 issues de Q ont des directions fixes, celles des tangentes à H_3 aux points \bar{Q} et $\bar{Q'}$ où MP recoupe H_3 . De même, dans la deuxième formule, fixons α' : les deux angles α_1 et α_2 ont encore une somme constante, donc dans les ∞^2 triangles admettant la droite M'P pour un de leurs côtés et dont les côtés et les hauteurs sont tangents à H_3 , les bissectrices de l'angle

opposé au côté M'P ont des directions fixes. Inversement, si $\alpha_1 + \alpha_2 = C$, où C désigne une constante, les tangentes correspondantes concourent sur une tangente fixe (T) de paramètre $\alpha = \pi - C$ et la tangente (T') perpendiculaire à (T) forme avec les tangentes (α_1) , (α_2) un triangle dont les hauteurs sont aussi tangentes à H_3 .

M. Gambier ⁽¹⁾ a étudié les triangles MM_1M_2 inscrits dans un cercle et caractérisés par la relation $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \text{const.}$; ces triangles sont dits *en position isogonale*. Nous reconnaissons alors que, si M, M_1, M_2 sur le cercle C correspondent à trois tangentes concourantes, le triangle MM_1M_2 est en position isogonale avec le triangle symétrique par rapport à O du triangle AA_1A_2 formé par les sommets de H_3 ; de même, si M', M_1, M_2 correspondent à trois tangentes formant un triangle dont les hauteurs et les côtés sont tangents à H_3 , le triangle $M'M_1M_2$ est en position isogonale avec le triangle AA_1A_2 .

La relation $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \pmod{2\pi}$, qui caractérise les ∞^2 systèmes de trois tangentes concourantes peut, suivant Laguerre, être ainsi interprétée : *la somme des angles comptés depuis une direction fixe jusqu'à trois tangentes concourantes de H_3 est constante.* Nous avons vu, en effet, que l'angle (Ox, MT) orienté de droites indéfinies est $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ (α est défini à 2π près); pour les trois tangentes concourantes, la somme est π , ou plus simplement zéro. (Ox est la direction d'une tangente de rebroussement.)

Réciproquement, si une courbe de classe 3 donne pour la somme en jeu, une valeur fixe, c'est une H_3 . D'abord, on ne pourra mener à cette courbe qu'une tangente de direction donnée : s'il en existait plus d'une, il y en aurait deux ou peut-être trois; envisageons alors deux tangentes parallèles T_1, T_2 , puis un autre couple semblable Θ_1, Θ_2 ; de chaque point (T_i, Θ_j) serait issue une troisième tangente, de même direction dans les quatre cas : il y aurait donc des systèmes de quatre tangentes parallèles, d'où contradiction. La courbe est donc *unicursale*. En changeant l'orientation de la direction origine, on peut supposer la somme des angles nulle; la tangente T parallèle à cette direction origine est évidemment un axe de symétrie; en son point de contact, une nouvelle tangente se confond avec T , donc aussi la troisième : T est donc tangente de rebroussement. Il y a deux tangentes inclinées à $\pm \frac{\pi}{3}$ sur T , chacune est un nouvel axe de symétrie et tangente de rebroussement; les trois points de rebroussement sont disposés aux sommets d'un triangle équilatéral. La courbe est nécessairement de degré 4, car si l'on prend une tangente quelconque t , aux points où cette tangente recoupe la courbe, la tangente ne peut être que l'une ou l'autre de deux tangentes rectangulaires (on connaît le double de l'angle compté de la direction origine vers une telle tangente); donc il n'y a que deux points d'intersection autres que le point de contact et les tangentes y sont rectangulaires. La

(1) Triangles en position isogonale (*Bull. Soc. Math. France*, 70, 1942, p. 31-39).

courbe étant de classe 3 et degré 4, coïncide nécessairement avec l' H_3 qui a les mêmes points de rebroussement.

En examinant la propriété démontrée plus loin au paragraphe 9, on verrait de même le résultat suivant : *soit une courbe telle que le triangle formé par trois tangentes donnant une valeur constante (donnée a priori) à la somme des angles déjà indiquée, ait un cercle circonscrit de rayon constant : cette courbe est une H_3 .*

4. *Nouvelle génération tangentielle de H_3 . Droites de Simson.* — Du théorème de M. Hadamard nous pouvons déduire une autre génération tangentielle de H_3 . Soient un cercle C, deux droites perpendiculaires Px , Py issues d'un point P de ce cercle, Px coupant C en M, Py en M_1 ; si une droite QQ' varie de sorte que le milieu m du segment QQ' déterminé sur elle par Px et Py soit un point de C, QQ' enveloppe une H_3 tritangente à C.

Il y a une H_3 et une seule qui admet C pour cercle inscrit, Px et Py pour tangentes particulières; de chaque point m de C, jouant le rôle de M, est issue une seule tangente à H_3 , coupant Px et Py en Q, Q' et le segment QQ' admet m pour milieu; d'autre part, étant donné un point m du plan, il n'existe qu'une droite mQQ' , issue de m telle que m soit milieu de QQ' . La propriété est alors évidente. Vérifions-la par un raisonnement direct qui donnera d'ailleurs la position des sommets de H_3 ; pour cela, désignons par p le deuxième point de rencontre de mQQ' avec C (fig. 4); O étant le centre de C l'égalité des angles de

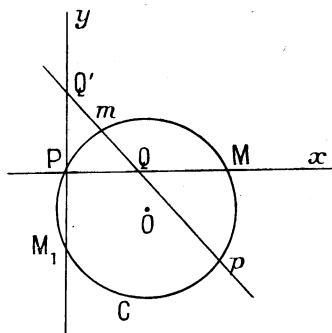


Fig. 4.

droites (PQ, Pm) , (Qm, QP) entraîne, par la considération des angles doubles

$$(\vec{OM}, \vec{Om}) = (\vec{Op}, \vec{OM}) + (\vec{Om}, \vec{Op}) \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

et, en ajoutant de part et d'autre (\vec{OM}, \vec{Om})

$$2(\vec{OM}, \vec{Om}) = (\vec{Op}, \vec{OM}) + (\vec{OM}, \vec{Om}) + (\vec{Om}, \vec{Op}) = (\vec{Op}, \vec{Op}).$$

Désignons par A l'un des sommets de l' H_3 définie par le cercle C et les tangentes particulières Px , Py ; retranchons aux deux membres les quantités

égales ${}_2(\vec{OM}, \vec{OA}) = (\vec{OA}, \vec{OP})$ nous obtenons

$${}_2(\vec{OA}, \vec{Om}) = (\vec{Op}, \vec{OA}),$$

relation caractéristique entre les points m et p d'une tangente à l' H_3 considérée.

(Au paragraphe 2, nous avons déjà montré que l'égalité ${}_2(\vec{OM}, \vec{OA}) = (\vec{OA}, \vec{OP})$ définit A par trisection de l'arc MP .)

Les points de contact T et T_1 de Px et Py avec H_3 s'obtiennent en doublant PM et PM_1 . Le segment découpé par Px et Py sur une tangente variable mQQ' est égal à $2Pm$; il reste compris entre O et $4R$, la valeur maximum $4R$ étant obtenue quand m est diamétralement opposé à P sur C , la tangente correspondante n'étant autre que la droite qui joint T_1 et T_2 . Px et Py sont deux tangentes rectangulaires quelconques de H_3 et nous retrouvons un résultat déjà obtenu : *un couple de tangentes rectangulaires de H_3 a son sommet sur le cercle inscrit, le segment qui joint les points de contact a pour longueur $4R$ et il est lui-même tangent à H_3 .*

Cette génération tangentielle permet de démontrer que toutes les droites de Simson relatives à un triangle ABC enveloppent une H_3 . Soit un triangle ABC , d'orthocentre H (fig. 5); si P est le pied de la hauteur issue de A , A_1 le point de

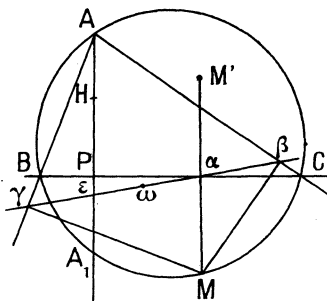


Fig. 5.

rencontre de cette hauteur avec le cercle circonscrit, on a $\vec{A_1P} = \vec{PH}$. Soit M un point du cercle circonscrit, α , β , γ ses projections sur les côtés du triangle; les quadrilatères inscriptibles $\alpha M \gamma B$ et $ABA_1 M$ donnent

$$(\alpha\gamma, \alpha M) = (B\gamma, BM) = (BA, BM) = (A_1A, A_1M) = (M\alpha, MA_1).$$

Donc $\alpha\gamma$ et A_1M ont des directions symétriques par rapport à αM (ou BC); même conclusion pour les droites $\alpha\beta$ et A_1M , ce qui prouve que α , β , γ sont alignés. M' étant le symétrique de M par rapport à BC , HM' est symétrique de A_1M , donc parallèle à la droite de Simson $\alpha\beta\gamma$ ou encore homothétique de

cette droite par rapport à M, dans le rapport 2⁽¹⁾. Si l'on appelle ε le point où la droite de Simson coupe AP, la figure HM' ε est un parallélogramme,

$$\vec{\varepsilon H} = \vec{\alpha M'} = \vec{M' \alpha};$$

donc H α M' ε est un parallélogramme, $\alpha\varepsilon$ et HM se coupent en leur milieu ω dont le lieu, quand M varie, est le cercle des neuf points de ABC. La droite de Simson rencontre BC, AP en deux points α , ε tels que le milieu de $\alpha\varepsilon$ soit sur le cercle des neuf points; elle enveloppe l' H_3 ayant pour cercle tritangent le cercle des neuf points de ABC, et tangente à BC et AH. Par raison de symétrie, cette H_3 est tangente aux trois côtés et aux trois hauteurs de ABC; le côté BC est la droite de Simson du point diamétralement opposé au sommet A, et la hauteur AH est droite de Simson de A; nous verrons plus loin qu'il existe $\infty^1 H_3$ tangentes à BC, CA, AB et que c'est l'enveloppe des droites de Simson qui donne l' H_3 de plus petite dimension.

5. *Enveloppe des asymptotes d'un faisceau linéaire d'hyperboles équilatères.* — Signalons le théorème suivant : l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle ABC est l'hypocycloïde à trois rebroussements tangente aux côtés et aux hauteurs du triangle ABC. Ces hyperboles passent toutes par l'orthocentre H du triangle, le lieu de leur centre est le cercle Γ des neuf points du triangle ABC; trois d'entre elles sont dégénérées en un côté de ABC et la hauteur correspondante. Les deux asymptotes P α , P γ de l'une de ces hyperboles se coupent en un point P de Γ ; le milieu de AB (ou CH) est aussi le milieu du segment découpé sur AB (ou CH) par P α , P γ ; donc l' H_3 définie par Γ comme cercle tritangent et les tangentes particulières P α , P γ est tangente à AB (ou CH) et par raison de symétrie, à BC, CA, AH, BH; elle coïncide avec l' H_3 enveloppe des droites de Simson de ABC et toutes les hyperboles en jeu ont pour asymptotes des tangentes de H_3 .

6. *Développée de H_3 .* — Le point de contact T (fig. 6) de la tangente MP est défini par $\vec{MT} = \vec{PM}$. Soit M' diamétralement opposé à M sur C, PM' est une autre tangente à H_3 , dont nous désignons le point de contact par T'. La normale en T à H_3 est parallèle à PT'; la médiatrice de MP est parallèle à ces deux droites, elle passe par O et coupe MP en son milieu μ ; l'homothétie de centre O et de rapport (— 3) transforme PT' en la normale en T à H_3 , la développée est la transformée de H_3 dans cette homothétie. Si Θ est le centre de courbure en T et θ

(¹) Cette démonstration de l'existence de la droite de Simson Δ et du fait que la parallèle à Δ menée par H est à la distance double de M a été donnée autrefois par M. Schmidt. Les deux faits sont établis simultanément par une méthode assez élégante pour mériter d'être signalée incidemment.

le point de rencontre de OT avec PT', on a $\vec{T\Theta} = -3\vec{\Theta T'}$. Or, le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle MM'P donne

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}} \cdot \frac{\overline{OM'}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{TP}}{\overline{TM}} = +1, \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{OM'}}{\overline{OP}} = -\frac{1}{2},$$

$$\vec{\Theta T'} = \vec{\Theta M'} + \vec{M'T'} = \frac{4}{3}\vec{PM'}, \quad \vec{T\Theta} = -4\vec{PM'}.$$

En tout point de l'un des trois arcs SS_1 , S_1S_2 , S_2S de la courbe, la convexité est toujours tournée du côté de O; PM' est le double de la distance de O à PM; donc le rayon de courbure en T est égal à huit fois la distance du centre du

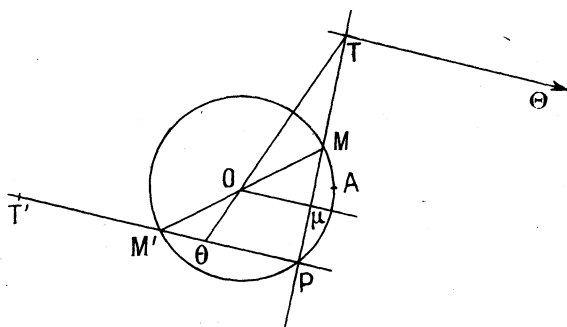


Fig. 6.

cercle inscrit à la tangente en ce point. PM' est nul lorsque M correspond à une tangente de rebroussement, Θ est alors confondu avec T qui est en S par exemple, point de rebroussement de H_3 et sommet de la développée. Supposons que, sur la développée, le point Θ appartienne à l'arc de sommet S; l'arc de développée $S\Theta$ égal à $4PM'$ est l'homothétique d'un arc A_2T' sur H_3 . Donc, l'arc A_2T' a une longueur égale à $\frac{4}{3}PM'$, de même arc $AT = \frac{4}{3}PM$; α variant de 0 à $\frac{\pi}{3}$, PM varie de 0 à $2R$ et le point T décrit un arc AS de H_3 , de longueur $\frac{8R}{3}$. La courbe complète comporte six arcs égaux à AS, elle a pour longueur $16R$.

7. H_3 tangentes à trois droites. — Montrons qu'il y a $\infty^1 H_3$ tangentes à trois droites données et une seule tangente à quatre droites données, ces droites étant de directions différentes.

Prenons trois droites Θ , T, T_1 et supposons d'abord que deux d'entre elles, Θ , T soient rectangulaires; désignons par P leur point de rencontre, par Q_1 et Q'_1 les points de rencontre de T et Θ avec T_1 , par M_1 le milieu de $Q_1Q'_1$. La médiatrice de PM_1 est le lieu du centre ω d'un cercle C passant par P et M_1 ; chacun de ces cercles fournit une H_3 demandée.

Supposons maintenant que le triangle formé par les trois droites T, T_1 , T_2 ne soit pas rectangle. Montrons que, si nous choisissons arbitrairement une

droite Θ perpendiculaire à T au point variable P (*fig. 7*), il existe une H_3 et une seule tangente à T, T_1, T_2, Θ ; en effet, soient Q_1, Q'_1 les points où T_1 rencontre T et Θ , Q_2, Q'_2 les points analogues fournis par T_2 ; les milieux M_1, M_2 de $Q_1 Q'_1, Q_2 Q'_2$ déterminent avec P un cercle C tritangent à une H_3 cherchée.

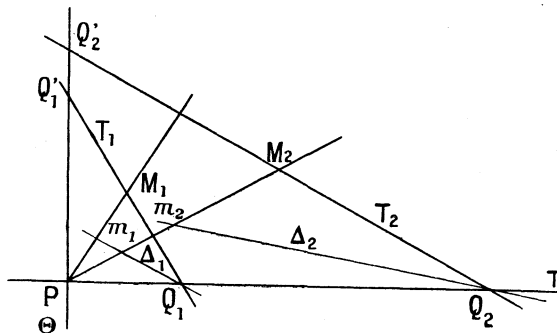


Fig. 7.

P variant sur T , les droites PM_1, PM_2 conservent chacune sa direction; le milieu m_1 de PM_1 décrit une droite Δ_1 issue de Q_1 , le milieu m_2 de PM_2 décrit une droite Δ_2 issue de Q_2 ; m_1 et m_2 décrivent sur Δ_1 et Δ_2 des divisions semblables à celle que P décrit sur T , les médiatrices de PM_1, PM_2 ont encore des directions fixes, de sorte que le lieu du centre O de C est une droite.

8. H_3 tangente à quatre droites. — Donnons-nous maintenant quatre droites. *Premier cas.* — Deux d'entre elles, T et Θ , sont rectangulaires; le raisonnement précédent donne l'unique H_3 tangente aux quatre droites T, T_1, T_2, Θ .

Cas général. — Il n'existe aucun couple de droites rectangulaires parmi les droites données T, T_1, T_2, T_3 . Prenons une droite Θ perpendiculaire à T et cherchons comment il faut choisir son pied P sur T pour que les médiatrices de PM_1, PM_2, PM_3 soient concourantes, auquel cas P, M_1, M_2, M_3 seront sur un même cercle C , tritangent à une H_3 tangente aux quatre droites; le point O de concours des médiatrices de PM_1, PM_2 décrit, quand P varie, une droite; de même pour le point de concours des médiatrices de PM_1, PM_3 ; en montrant que ces droites ne sont ni parallèles ni confondues, on peut conclure à l'existence d'une seule H_3 répondant à la question. Mais les directions de ces droites n'étant pas simples, nous emploierons une méthode un peu différente.

Soit deux axes rectangulaires fixes Px, Py . Supposons que le système invariable T, T_1, T_2, T_3 glisse dans le plan, T glissant sur Px ; chaque position du système fournit une H_3 tangente à Py, T, T_1, T_2 et une autre H'_3 tangente à Py, T, T_1, T_3 ; montrons qu'il y a une position unique pour laquelle H_3 et H'_3 coïncident.

Pour cela, cherchons le lieu du centre ω du cercle tritangent à H_3 , tangente à Py, T, T_1, T_2 . Appelons φ_i l'angle des droites indéfinies (T_i, T) de sorte que

(Px, PM_i) a aussi φ_i pour l'une de ses déterminations. Exprimons que le point ω de coordonnées a, b se projette orthogonalement sur PM_i au milieu m_i de ce segment. On a

$$\overline{Pm_i} = a \cos \varphi_i + b \sin \varphi_i \quad \text{d'où} \quad \overline{PM_i} = 2(a \cos \varphi_i + b \sin \varphi_i).$$

La projection de M_i sur Px est le milieu de PQ_i , donc

$$(1) \quad \overline{PQ_i} = 4(a \cos \varphi_i + b \sin \varphi_i) \cos \varphi_i$$

et, comme vérification, on constate que le résultat ne change pas quand on remplace φ_i par $\varphi_i + \pi$. De même

$$\overline{PQ_2} = 4(a \cos \varphi_2 + b \sin \varphi_2) \cos \varphi_2$$

et, par soustraction

$$(2) \quad \begin{aligned} \overline{Q_1 Q_2} &= 4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) [a \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - b \cos(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ a \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - b \cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \frac{\overline{Q_1 Q_2}}{4 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

C'est l'équation de la droite lieu de ω dans le plan Pxy . Pour le lieu de ω' , centre de H_3 tangente à $P\gamma$, T , T_1 , T_3 , on a l'équation

$$(3) \quad a \sin(\varphi_1 + \varphi_3) - b \cos(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{\overline{Q_1 Q_3}}{4 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}.$$

Ces deux droites ont des directions différentes; a et b sont calculés de façon unique; ensuite, (1) détermine $\overline{PQ_i}$ et l'unique H_3 tangente aux quatre droites données en résulte.

Étudions sans calcul les lieux des points ω et ω' lorsque le système des quatre droites glisse sur le plan Pxy . Cherchons plutôt le lieu du point O diamétralement opposé à P sur le cercle $PM_1 M_2$, homothétique de ω dans l'homothétie de centre P , et de rapport 2. $Q_1 Q_2$ glissant sur Px , le point M_1 décrit sur la droite Px_1 , $(T, Px_1) = \varphi_1$, une division (M_1) semblable à celle que Q_1 décrit sur T (*fig. 8*); de même, M_2 sur la droite Px_2 définie par $(T, Px_2) = \varphi_2$ décrit une

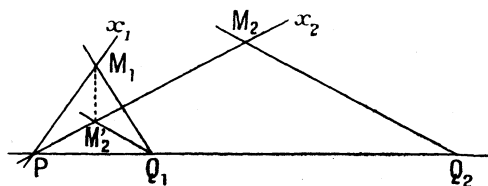


Fig. 8.

division (M_2) semblable à celle de Q_2 ; Q_1 et Q_2 décrivent des divisions égales, donc les divisions (M_1) et (M_2) sont semblables. Soit π le centre de la similitude (M_1, M_2) . Considérons une position quelconque du système T, T_1, T_2 et les points M_1 et M_2 ; par Q_1 , menons la parallèle à T_2 qui coupe Px_2 en M_2' . Q_1 variant, le

9. *Cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes de H_3 .* — Nous retrouverons certains des résultats précédents en étudiant le triangle $Q_{20}Q_{01}Q_{12}$ formé par trois tangentes quelconques de H_3 , MP , M_1P_1 , M_2P_2 (fig. 10). L'angle

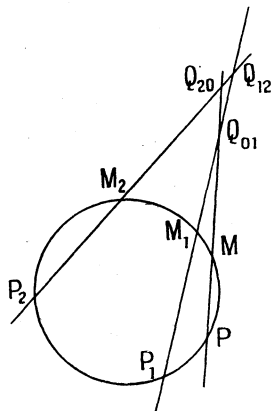


Fig. 10.

(M_1P_1, MP) ou $(Q_{01}Q_{12}, Q_{01}Q_{20})$ défini en grandeur et en signe à $k\pi$ près est égal à $\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha)$, comme l'angle (M_2M, M_2M_1) ,

$$(M_1P_1, MP) = (M_2M, M_2M_1).$$

De même,

$$(M_2P_2, M_1P_1) = (MM_1, MM_2),$$

donc les triangles $Q_{12}Q_{20}Q_{01}$ et MM_1M_2 sont directement semblables. Le rapport de similitude est le rapport de $Q_{01}Q_{02}$ à M_1M_2 ou le rapport des rayons des cercles circonscrits. Or

$$MQ_{01} = MP_1 = 2R \left| \sin \frac{\alpha + 2\alpha_1}{2} \right|.$$

En choisissant sur MP un sens positif convenable, nous aurons

$$\overline{MQ_{01}} = 2R \sin \frac{\alpha + 2\alpha_1}{2}.$$

(Ce sens positif sera celui de P vers M , aussi celui de M vers le point de contact de la tangente MP si $\sin \frac{3\alpha}{2}$ est positif, le sens contraire, si $\sin \frac{3\alpha}{2}$ est négatif.)

De même

$$\overline{MQ_{02}} = 2R \sin \frac{\alpha + 2\alpha_2}{2}$$

et

$$\overline{Q_{01}Q_{02}} = 2R \left(\sin \frac{\alpha + 2\alpha_2}{2} - \sin \frac{\alpha + 2\alpha_1}{2} \right) = 4R \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$Q_{01}Q_{02} = 4R \left| \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|.$$

Par ailleurs

$$M_1 M_2 = 2R \left| \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right|.$$

Le rapport de similitude est donc $2 \left| \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|$ et le rayon du cercle circonscrit au triangle $Q_{12} Q_{20} Q_{01}$ a pour valeur $2R \cos \left| \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} \right|$. Notons que si l'on change α en $\alpha + 2\pi$, ni le triangle circonscrit, ni le triangle $MM_1 M_2$ ne change, mais $\cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2}$ change de signe.

Nous retrouvons la condition $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = \pi \pmod{2\pi}$ exprimant que les tangentes issues de M, M_1, M_2 concourent; de même la condition

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \pmod{2\pi}$$

qui correspond au cas où H_3 touche les côtés et les hauteurs du triangle $Q_{12} Q_{20} Q_{01}$, exprime que le rayon du cercle circonscrit à ce triangle formé par trois tangentes a la valeur maximum $2R$.

Ce résultat montre que si un cercle Γ quelconque du plan a un rayon ρ supérieur au diamètre $2R$ du cercle tritangent, il n'existe aucun triangle réel inscrit dans Γ et circonscrit à H_3 ; si $\rho = 0$, Γ se réduit à son centre ω et il y a une solution unique, formée par les tangentes à H_3 issues de ω ; si $\rho = 2R$, il y a encore une solution unique: du centre de similitude directe H de Γ et C , on mène les tangentes à H_3 et les tangentes perpendiculaires à celles-ci donnent l'unique triangle cherché (réel si H est à l'intérieur de H_3). Si $\rho < 2R$, un système de tangentes formant une solution doit d'abord satisfaire à l'équation

$$2 \cos \frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2} = \pm \frac{\rho}{R},$$

ce qui revient à écrire à 2π près.

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = u \quad \text{ou} \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = -u,$$

où u est un argument connu. $u = 0$, $u = \pi$ correspondent aux deux cas spéciaux qui viennent d'être signalés. A un triangle $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ circonscrit à H_3 , nous pouvons associer le triangle $(-\alpha, -\alpha_1, -\alpha_2)$ symétrique par rapport à l'un des axes de symétrie OA de H_3 : les deux séries de triangles correspondant à

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = u \quad \text{et} \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = -u$$

sont formées de triangles deux à deux symétriques par rapport à OA .

Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par les tangentes à H_3 correspondant aux angles $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ liés par la relation $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = u$, où u est donné, est

$$\rho = 2R \left| \cos \frac{u}{2} \right|.$$

Étant donné un tel triangle, si nous remplaçons chaque angle α par $\alpha + \pi$ pour avoir la tangente perpendiculaire, u est remplacé par $u + 3\pi$ et $\frac{u}{2}$ par $\frac{u}{2} + \frac{3\pi}{2}$ ou, ce qui est équivalent, par $\frac{u}{2} - \frac{\pi}{2}$; le nouveau rayon ρ' vérifie

$$\rho' = 2R \left| \sin \frac{u}{2} \right|,$$

on a donc

$$\rho^2 + \rho'^2 = 4R^2,$$

ce qui a été obtenu pour $u = 0$, $u = \pi$ ($\rho = 0$, $\rho' = 2R$).

Ce qui précède permet d'obtenir toutes les H_3 inscrites dans un triangle donné T : en effet, par des similitudes, on peut ramener le problème au suivant : *circonscrire à une H_3 donnée un triangle directement semblable à un triangle donné*; il suffit d'inscrire dans le cercle tritangent C un triangle MM_1M_2 directement semblable au triangle donné T et de tracer les tangentes à H_3 issues des points M, M_1, M_2 considérés comme points M ; on fait glisser le système invariable des trois points M, M_1, M_2 sur le cercle C , autrement dit on remplace les angles $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ par $\alpha + h, \alpha_1 + h, \alpha_2 + h$ où h désigne un angle quelconque; le triangle des trois tangentes issues de M, M_1, M_2 reste directement semblable à lui-même; H_3 se reproduisant par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de son centre O , il suffit de faire varier h dans un intervalle d'amplitude $\frac{2\pi}{3}$, puis de faire subir à la série des triangles obtenus deux rotations successives de $\frac{2\pi}{3}$ autour de O pour avoir tous les triangles cherchés. Parmi les triangles d'une série, celui qui est le plus petit correspond à

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = \pi \quad (\text{mod } 2\pi);$$

et se réduit à un point, celui qui a la dimension maximum correspond à

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = 0 \quad (\text{mod } 2\pi)$$

entre ces deux extrêmes, il y a pour chaque taille, deux triangles solutions correspondant à des valeurs de h telles que

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = u \quad \text{et} \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + 3h = 2\pi - u.$$

On obtient enfin toutes les H_3 inscrites dans le triangle T en prenant chaque triangle t de la série étudiée et faisant la similitude transformant t en T ; on trouve ainsi $\infty^1 H_3$; celle qui a la plus petite dimension est tangente aux côtés et aux hauteurs de T ; pour toute dimension supérieure, on trouve deux H_3 inscrites.

Pour obtenir une H_3 tangente à quatre droites données, formant le quadrilatère complet Q , on procédera ainsi : on mènera à une H_3 particulière quatre tan-

gentes formant une figure q directement semblable à Q , puis la similitude transformant q en Q donnera l' H_3 cherchée. Plaçons (*fig. 11*) deux droites rectangulaires Ox , Oy de façon que Oy soit parallèle à un côté du quadrilatère Q , traçons le cercle unité C de centre O , et désignons par A le point d'abscisse 1 sur Ox ; considérons l' H_3 de cercle tritangent C , de sommet A ;

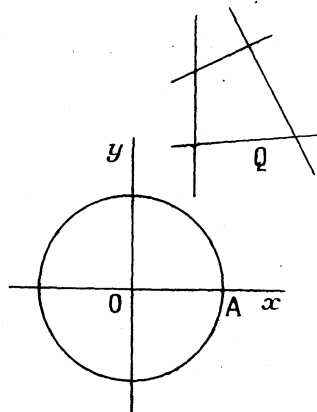


Fig. 11.

menons à cette H_3 les tangentes parallèles aux côtés de Q , soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, les abscisses curvilignes des points M relatifs à ces tangentes, en adoptant des notations telles que

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 2\pi.$$

Le quadrilatère cherché q , semblable à Q sera formé par les tangentes à H_3 correspondant à des valeurs du paramètre α de la forme

$$\alpha_0 = h, \alpha_1 = \alpha_1^0 + h, \alpha_2 = \alpha_2^0 + h, \alpha_3 = \alpha_3^0 + h.$$

On peut supposer $h = \alpha_0 < \frac{2\pi}{3}$. En orientant la tangente M_0P_0 de paramètre α_0 , de P_0 vers M_0 , on a

$$\overline{M_0Q_{10}} = 2 \sin \frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{2},$$

de même

$$\overline{M_0Q_{20}} = 2 \sin \frac{\alpha_0 + 2\alpha_2}{2},$$

$$\overline{Q_{10}Q_{20}} = 4 \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

$$\overline{Q_{10}Q_{30}} = 4 \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_3}{2}.$$

La donnée du quadrilatère Q fournit le rapport

$$\frac{\overline{Q_{10}Q_{20}}}{\overline{Q_{10}Q_{30}}} = m \geq 0$$

et l'on trouve l'équation

$$\frac{\sin \frac{\alpha_2^0 - \alpha_1^0}{2} \cos \frac{3h + \alpha_1^0 + \alpha_2^0}{2}}{\sin \frac{\alpha_3^0 - \alpha_1^0}{2} \cos \frac{3h + \alpha_1^0 + \alpha_3^0}{2}} = m,$$

qui donne $\operatorname{tg} \frac{3h}{2}$, d'où h à 2π près.

Le rapport précédent ne change pas si l'on augmente de 2π l'un des angles $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0$.

L'étude faite à partir d'un triangle T permettrait aussi de trouver toutes les H_3 tangentes à deux droites données T_1 et T_2 , le point de contact de T_1 étant donné; de même, l'étude faite pour le quadrilatère Q permettrait de construire l' H_3 tangente à deux droites T_1 et T_2 , les points de contact avec T_1 et T_2 étant donnés.

10. *Triangles admettant les mêmes droites de Simson.* — Nous avons montré au paragraphe 4 que les droites de Simson relatives à un triangle ABC enveloppent une H_3 dont le cercle inscrit est le cercle des neuf points du triangle de base, et dans le paragraphe 3, que, à une H_3 quelconque, on peut associer ∞^2 triangles dont les côtés et les hauteurs sont tangents à H_3 , c'est-à-dire admettant H_3 pour enveloppe de leurs droites de Simson. Nous venons enfin de trouver qu'il existe une H_3 unique tangente à quatre droites données, T, T_1, T_2, T_3 . Donc.:

Étant donné quatre droites T, T_1, T_2, T_3 de directions différentes, il existe toujours ∞^1 triangles admettant ces droites pour droites de Simson; tous ces triangles ont le même cercle des neuf points; toute droite de Simson de l'un d'eux est droite de Simson pour les autres.

11. *Définition de certaines courbes unicursales qui ne sont pas courbes de direction.* — Si nous fixons sur une normale de H_3 un sens positif et si nous nous déplaçons sur H_3 de façon à parcourir toute la courbe, la demi-normale positive étant suivie par continuité, nous reviendrons au point de départ avec changement de sens sur cette demi-normale. Cependant les cosinus directeurs de la demi-normale peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'un paramètre, en même temps que les coordonnées du point courant; en effet, en prenant l'origine des coordonnées au centre du cercle tritangent, Ox joignant ce centre à l'un des trois sommets de H_3 , puis prenant le rayon de ce cercle pour unité de longueur, l'équation de la tangente MP est $x \cos \frac{\alpha}{2} - y \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} = 0$ et les coordonnées du point de contact T , obtenu en écrivant $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{PM}$ sont

$$x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha, \quad y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha,$$

de sorte que les coordonnées de T s'expriment rationnellement en $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; or, en

fonction de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, les paramètres directeurs $\cos \frac{\alpha}{2}$, $-\sin \frac{\alpha}{2}$ de la normale sont irrationnels; ce n'est qu'en prenant $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ comme nouveau paramètre que les cosinus directeurs deviennent rationnels et pour revenir au point de départ avec le même sens positif, il faut avoir parcouru deux fois la courbe. Toute courbe unicursale, telle que l'équation de la tangente générale puisse être ramenée à la forme $y - tx - f(t) = 0$, où $f(t)$ est une fraction rationnelle en t , jouit évidemment de la même propriété et est la courbe unicursale la plus générale de ce type.

Dans le même ordre d'idées, à une courbe *plane* C unicursale quelconque, $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, où f et φ sont des fractions rationnelles en t , nous pouvons faire correspondre, par les formules $t = F(\theta)$, $z = \psi(\theta)$, où F et ψ sont des fractions rationnelles, une nouvelle courbe *gauche* Γ , $x = f[F(\theta)]$, $y = \varphi[F(\theta)]$, $z = \psi(\theta)$, dont la projection sur le plan $z = 0$ est la courbe C parcourue p fois, p étant le degré de $F(\theta)$ par rapport à θ . Pour le cas de H_3 , il est intéressant de prendre $p = 2$; les formules $x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha$, $y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha$ seront complétées par une formule

$$z = F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

où F est une expression rationnelle en $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ et nous aurons une courbe unicursale où le paramètre unicursal sera $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$; si, de plus, F admet la *demi-période* 2π , la courbe Γ aura le plan xOy comme plan de symétrie. Or, notre étude élémentaire nous donne deux exemples particulièrement simples : nous avons vu, au paragraphe 6, que l'arc de H_3 peut être pris égal à

$$\frac{4}{3} \text{ PM ou } \frac{8}{3} \sin \frac{3\alpha}{2};$$

donc, si k est une constante numérique quelconque, les formules

$$x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha \quad y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha \quad z = k \sin \frac{3\alpha}{2}$$

définissent une *hélice unicursale* dont H_3 , parcourue deux fois est la projection horizontale. D'ailleurs la puissance du point de contact T de la tangente MP de H_3 par rapport au cercle C est, d'une part $x^2 + y^2 - 1$, d'autre part

$$\overline{\text{TM}} \cdot \overline{\text{TP}} = 2 \overline{\text{MP}}^2 = 8 \sin^2 \frac{3\alpha}{2};$$

en prenant $k = 2\sqrt{2}$, l'hélice en jeu sera située sur l'hyperboloïde à une nappe $z^2 = x^2 + y^2 - 1$.

Si maintenant on calcule z_1 par la formule $z_1^2 + z^2 = 8$ de façon que z_1 soit égal à $2\sqrt{2} \cos \frac{3\alpha}{2}$, on aura $z_1^2 = 9 - x^2 - y^2$; la nouvelle courbe unicursale

$$x = 2 \cos \alpha - \cos 2\alpha, \quad y = 2 \sin \alpha + \sin 2\alpha, \quad z_1 = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\alpha}{2},$$

sera tracée sur la sphère de centre O et rayon 3, contenant les trois points de rebroussement de H_3 .

Quelle que soit la valeur de k , les cosinus directeurs de la tangente à l'hélice que nous avons indiquée,

$$\frac{8}{\sqrt{64 + 9k^2}} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{8}{\sqrt{64 + 9k^2}} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{3k}{\sqrt{64 + 9k^2}}$$

sont exprimés rationnellement au moyen du même paramètre que les coordonnées (x, y, z) .

