ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SHAFIK DOSS

Sur le comportement asymptotique des zéros de certaines fonctions d'approximation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 139-178
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__139_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR

LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ZÉROS

DE

CERTAINES FONCTIONS D'APPROXIMATION

PAR M. SHAFIK DOSS.

INTRODUCTION.

Soient les fonctions $f_n(z)$, holomorphes dans la région R et convergeant uniformément dans R vers la fonction $f(z)$, nécessairement continue dans R et holomorphe à l'intérieur de R.

D'après un théorème de Hurwitz [1], *si $f(z)$ est différent de zéro sur la frontière de* R, *le nombre des zéros de $f_n(z)$ qui sont intérieurs à* R *est pour n suffisamment grand, exactement égal au nombre des zéros de $f(z)$ intérieurs à* R ; les zéros étant comptés avec leurs ordres de multiplicité.

En particulier, *si $f(z)$ a, au point ζ intérieur à* R, *un zéro d'ordre de multiplicité* $k \geqq 1$, pour n assez grand, *$f_n(z)$ aura, dans tout voisinage de ζ* qui ne contient aucun zéro de $f(z)$ différent de ζ, *exactement k zéros. Si l'on ordonne les zéros* $\zeta_{ni}(i = 1, 2, \ldots)$ de $f_n(z)$ *suivant les valeurs croissantes de* $|\zeta_{ni} - \zeta|$, *les k zéros* $\zeta_{ni}(1 \leqq i \leqq k)$ *tendront vers ζ quand n croît indéfiniment.*

L'objet du présent travail est l'étude du comportement asymptotique de $\zeta_{ni} - \zeta$ pour quelques classes de fonctions $f(z)$ et quelques classes de fonctions d'approximation associées, $f_n(z)$. Les notations ci-dessus seront conservées dans la suite.

---

(1) A. HURWITZ, *Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function* (*Math. Annalen*, 33, 1889, p. 246 et suiv.).

Les premiers résultats sur ce sujet paraissent avoir été obtenus en 1930 par M. Fekete, dans ses leçons de l'Université Hébraïque de Jérusalem [1]. Il nous communiqua quelques-uns de ses résultats en juillet 1943 et nous proposa l'étude de cette question.

$f(z)$ désignera dans les Chapitres I, II, III et V la série entière $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$. Les formules (1), (3), (4 *a*), (4 *b*), (5) et (6) sont dues à M. Fekete. Elles sont inédites et nous furent communiquées sans démonstrations.

Voici un résumé du présent travail :

Dans le Chapitre I, nous considérons une série entière $f(z)$ dont le rayon de convergence est $\rho (0 < \rho < \infty)$ et ses sommes partielles $f_n(z)$. Nous démontrons la formule suivante :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho} \qquad (1 \leq i \leq k). \tag{1}$$

Nous examinons ensuite *le cas où* ρ *est infini;* et la série entière représente une fonction entière d'ordre fini r et nous complétons le résultat (1) par le suivant :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \lg n}} = e^{-\frac{1}{r}} \qquad (1 \leq i \leq k) \quad [2]. \tag{2}$$

Dans le Chapitre II, nous considérons une série entière dont le rayon de convergence est $\rho (0 < \rho \leq \infty)$ et les *Moyennes de Cesàro* $f_n^{[r]}(z)$ d'ordre entier $r \geq 1$ qui lui sont associées. Nous démontrons le résultat suivant :

Si $r \geq k$, on a

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq k), \tag{3}$$

où α_i désigne l'un des zéros [tous réels et positifs [3] et ordonnés suivant leurs modules croissants] du polynome

$$L_{rk}(z) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{r}{s} s!\, z^{k-s}.$$

---

(1) Il avait déjà obtenu, en 1913, dans certains cas particuliers, des résultats d'un caractère topologique pour la distribution des ζ_{ni} dans le voisinage de ζ. *Cf. C. R. Ac. Sc.*, t. 157, octobre 1913 et t. 158, mai 1914.

(2) On observera que les formules (1) et (2) donnent *théoriquement* un moyen d'évaluer le rayon de convergence d'une série entière ou l'ordre d'une fonction entière.

(3) Ces propriétés des α_i ont permis à M. Fekete de compléter un résultat obtenu antérieurement dans le cas où ζ et les a_ν sont réels, *voir* la *Remarque* à la fin du Chapitre II.

Si $1 \leqq r \leqq k-1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right)=0 \qquad (1\leqq i\leqq k-r), \tag{4a}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_{n,k-r+j}}\right)=\alpha_j \qquad (1\leqq j\leqq r), \tag{4b}$$

où α_j désigne le $j^{\text{ième}}$ zéro du polynome

$$L_{kr}(z)=\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,z^{r-s}.$$

Le premier groupe de zéros [qui vérifie (4 *a*)] satisfait à la loi plus précise

$$\lim_{n\to\infty} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{k-r}{n}}=\frac{|\zeta|}{\rho} \qquad (1\leqq i\leqq k-r), \tag{5}$$

qui peut être considérée comme une généralisation de (1).

Nous avons de plus déduit des résultats de M. Fekete le *degré d'approximation par les Moyennes de Cesàro en un point intérieur au cercle de convergence.*

Dans le Chapitre III, nous considérons les *polynomes de Jensen*

$$\begin{aligned} j_n(f)=a_0+a_1z+a_2z^2\left(1-\frac{1}{n}\right)+a_3z^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots\\ +a_nz^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

associés par M. Fekete [1] à la série entière $f(z)$ dont le rayon de convergence est positif et nous démontrons le résultat suivant :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\zeta_{ni}}{\zeta}-1\right)=\alpha_i \qquad (1\leqq i\leqq k), \tag{6}$$

où α_i désigne le $i^{\text{ième}}$ zéro du polynome d'Hermite de degré k [2].

Dans le Chapitre IV, nous associons, suivant un procédé de M. Fekete, à toute suite $\varphi_n(z)$ de fonctions holomorphes convergeant uniformément vers $\varphi(z)$ dans un domaine $(\mathcal{D})$, une autre suite $\varphi_{nn}^{[r]}(z)$ que nous appellerons *suite de Fekete* d'ordre $r\geqq 1$.

La relation entre $\varphi_{nn}^{[r]}(z)$ et $\varphi_n(z)$ est la même que la relation

$$f_n^{[r]}(z)=(-1)^r\frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}r!}\frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

(1) M. Fekete, *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, p. 1256; Jensen, *Acta Math.*, t. 36, p. 184.

(2) M. Fekete a pu, grâce à sa formule (6), compléter un résultat obtenu antérieurement dans le cas où ζ et les a_ν sont réels; voir la *Remarque* à la fin du Chapitre III.

qui lie les moyennes de Cesàro $f_n^{[r]}(z)(r \geqq 1)$ aux sommes partielles $f_n(z)$ d'une série entière $f(z)$.

Les $\varphi_{nn}^{[r]}(z)$ tendent uniformément vers $\varphi(z)$ dans $(\mathcal{D})$. Nous démontrons que si le degré d'approximation de $\varphi_n(z)$ vers $\varphi(z)$ est $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, les lois asymptotiques (3), (4 a) et (4 b) restent vraies pour les suites de Fekete associées à la suite $\varphi_n(z)$.

Dans le Chapitre V, nous considérons les *Moyennes de Hölder* $h_n^{(r)}$ d'ordre entier $r \geqq 2$, associées à une série entière $f(z)$ dont le rayon de convergence est positif.

Ici, on doit distinguer entre les zéros simples et les zéros multiples de $f(z)$. Pour un zéro simple $\zeta \neq 0$, le zéro ζ_n de $h_n^{(r)}$ satisfait à la loi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(r-1)!\, n}{(\log n)^{r-1}} \left(\frac{\zeta_n}{\zeta} - 1\right) = 1.$$

Pour un zéro $\zeta \neq 0$, d'ordre de multiplicité $k \geqq 2$, on a la loi

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{(r-2)!\, n}{(k-2)!\,(\log n)^{r-2}} \right\}^{\frac{1}{k}} \left(\frac{\zeta_{ni}}{\zeta} - 1\right) = \alpha_i \qquad (1 \leqq i \leqq k),$$

où α_i désigne l'un des zéros du binome

$$z^k \varphi(\zeta) + (-1)^k \frac{1}{\zeta^{k-1}} {}^{(k-1)}\varphi(\zeta),$$

avec

$$f(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z) = (z-\zeta)^k\, {}^{(0)}\varphi(z),$$

$${}^{(s)}\varphi(z) = \int_0^z {}^{(s-1)}\varphi(t)\, dt \qquad (s \geqq 1).$$

Les zéros α_i étant ordonnés suivant les valeurs croissantes de leurs arguments, les ζ_{ni} seront ordonnés suivant les valeurs croissantes de $\arg \frac{\zeta_{ni} - \zeta}{\zeta}$ $(1 \leqq i \leqq k)$, (à l'exception possible de ζ_{n1} quand $\alpha_1 > 0$).

Nous avons obtenu, à la fin de ce Chapitre, le *degré d'approximation par les Moyennes de Hölder en un point intérieur au cercle de convergence de* $f(z)$.

Dans le Chapitre VI, nous considérons *une classe de polynomes* $f_n(z)$ *convergeant maximalement*, au sens de Walsh [1], *vers la fonction* $f(z)$, holomorphe dans l'ensemble fermé et borné C dont le complémentaire est connexe et régulier [2].

---

[1] J. L. WALSH, *Interpolation and Approximation by rational functions in the complex domain;* New-York, 1935, p. 80.

[2] WALSH, *loc. cit.* p. 65 et suiv.

Désignant par $w = \varphi(z)$ la fonction qui représente conformément le complémentaire de C sur l'extérieur du cercle $|w| \leqq 1$; par C_R la courbe $|\varphi(z)| = R > 1$; par ρ, la borne supérieure, nécessairement > 1, des valeurs de R pour lesquelles $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur de C_R, nous démontrons la loi asymptotique

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta_n|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho} \qquad (1 \leqq i \leqq k),$$

où ζ, intérieur à C_ρ, n'appartient pas à C.

Enfin, dans le Chapitre VII et dernier, nous étudions un problème inverse. Étant donnée la loi asymptotique à laquelle obéissent les ζ_{ni}, en déduire des renseignements sur l'ordre d'approximation de $f(z)$ par $f_n(z)$.

C'est pour moi un agréable devoir d'exprimer ici ma reconnaissance à M. Fekete, Recteur de l'Université Hébraïque de Jérusalem, qui m'a indiqué le sujet de ce mémoire et a bien voulu diriger mon travail.

CHAPITRE I.

Sur le comportement asymptotique des zéros des sommes partielles d'une série entière.

Soit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

une série entière dont le rayon de convergence est $\rho (0 < \rho < \infty)$ et $\zeta \neq 0$, un zéro de $f(z)$ d'ordre de multiplicité k, intérieur au cercle de convergence.

Désignons par ζ_{ni} les zéros de

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu.$$

Nous nous proposons d'établir la formule

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho} \qquad (1 \leqq i \leqq k).$$

Posons

$$\varphi^{(s-1)}(z) = (z - \zeta)\varphi^{(s)}(z) \qquad (1 \leqq s \leqq k)$$

avec

$$\varphi^{(0)}(z) = f(z),$$
$$\varphi^{(s)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(s)} z^\nu \qquad (1 \leqq s \leqq k).$$

Posons aussi

$$\varphi_n^{(s)}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu^{(s)} z^\nu \qquad (1 \leqq s \leqq k).$$

Les séries $\varphi^{(s)}(z)$ ont un rayon de convergence égal à ρ et $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$.

On obtient immédiatement par identification

$$\varphi_n^{(s-1)}(z) = (z-\zeta)\varphi_n^{(s)}(z) - z^{n+1}\beta_n^{(s)} \qquad (1 \leqq s \leqq k)$$

et, par suite,

$$f_n(z) = (z-\zeta)^k \varphi_n^{(k)}(z) - z^{n+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (z-\zeta)^{s-1},$$

$$(1) \qquad (\zeta_{ni}-\zeta)^k \varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni}) = \zeta_{ni}^{n+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$$

Or, $\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni})$ a pour limite $\varphi^{(k)}(\zeta) \neq 0$ car on a

$$|\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni}) - \varphi^{(k)}(\zeta)| \leqq |\varphi_n^{(k)}(\zeta_{ni}) - \varphi^{(k)}(\zeta_{ni})| + |\varphi^{(k)}(\zeta_{ni}) - \varphi^{(k)}(\zeta)|$$

et le premier module du second membre tend vers zéro en vertu de la convergence uniforme de $\varphi_n^{(k)}(z)$ vers $\varphi^{(k)}(z)$, tandis que le second tend vers zéro en vertu de la continuité de $\varphi^{(k)}(z)$ et de la convergence de ζ_{ni} vers ζ.

On a donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{k}{n}} = |\zeta| \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

On doit avoir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}} \leqq 1,$$

car, à partir d'un certain rang, $|\zeta_{ni}-\zeta| < 1$.

Si l'on suppose

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}} = 1,$$

comme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(s)}|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho} \qquad (1 \leqq s \leqq k),$$

on aurait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}|^{\frac{1}{n}} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} |\beta_n^{(s)}|^{\frac{1}{n}} \overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{s-1}{n}} = \frac{1}{\rho};$$

et $\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$ pourrait être considéré comme le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série entière dont le rayon de convergence serait $\geqq \rho$, et par suite

$$\sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1}$$

serait aussi le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série entière dont le rayon de convergence est $\rho_1 \geqq \rho$ et l'on aurait

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n}} = |\zeta| \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho_1} < 1$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On doit donc avoir

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{1}{n}} < 1$$

et par suite

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\beta_n^{(s)} (\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1}|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{\rho} \qquad (2 \leqq s \leqq k).$$

La série entière dont le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme a pour coefficient $\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1}$ a donc, pour $s \geqq 2$, un rayon de convergence $> \rho$

De plus, la série $\sum \beta_n^{(1)} z^n$ a le rayon de convergence ρ, de sorte que $\sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)}(\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1}$ est le coefficient du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme d'une série dont le rayon de convergence est ρ.

On a donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho},$$

et, par suite,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho} \quad (^1).$$

---

(1) Voici une autre démonstration qui nous a été communiquée par M. Montel.

Soit

$$f(z) = (z - \zeta)^k \varphi(z) = (z - \zeta)(b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots), \qquad \overline{\lim} |b_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho}.$$

On a,

$$f_n(z) = (z - \zeta)(b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n) - b_n z^{n+1},$$
$$(\zeta_n - \zeta)(b_0 + b_1 \zeta_n + \ldots + b_n \zeta_n^n) = b_n \zeta_n^{n+1}$$

et par suite

$$(1') \qquad (\zeta_n - \zeta)^k \varphi(\zeta_n) = \zeta_n^{n+1} [b_n + (\zeta_n - \zeta)(b_{n+1} + b_{n+2} \zeta_n + \ldots)]$$

qui remplace notre formule (1).

Or,

$$|b_{n+p}| \leqq \frac{M}{(\rho - \varepsilon)^{n+p}}, \qquad |\zeta_n| < |\zeta| + \varepsilon$$

et par suite

$$|b_{n+1} + b_{n+2}\zeta_n + \ldots| < \frac{1}{(\rho - \varepsilon)^n} \frac{M}{\rho - |\zeta| - 2\varepsilon},$$

La formule

$$(1)\qquad (\zeta_{ni}-\zeta)^k\varphi_n^{(k)}(\xi_{ni})=\zeta_{ni}^{n+1}\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(\zeta_{ni}-\zeta)^{s-1},$$

peut servir à étudier le comportement des zéros ζ_{ni} quand, le rayon de convergence de la série $f(z)$ étant infini, $f(z)$ est une *fonction entière d'ordre fini* r. On sait que [1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\frac{1}{|a_n|}\right)}{n\log n}=\frac{1}{r}.$$

ou

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n\log n}}=e^{-\frac{1}{r}}.$$

$f(z)$ étant d'ordre r, $\varphi^{(s)}(z)(1\leq s\leq k)$ est aussi d'ordre r, de sorte que

$$(2)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\beta_n^{(s)}|^{\frac{1}{n\log n}}=e^{-\frac{1}{r}}\qquad (1\leq s\leq k).$$

Nous ferons usage du *lemme* suivant :

Soit

$$u_n=\sum_{j=1}^{k}v_n^{(j)},$$

où k est un nombre fixe, et $\{\mu_n\}$, une suite de nombres positifs qui tendent vers l'infini, alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|u_n|^{\frac{1}{\mu_n}}\leq\max_j\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|v_n^{(j)}|^{\frac{1}{\mu_n}}\right\}.$$

En effet, posons

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|v_n^{(j)}|^{\frac{1}{\mu_n}}=\tau_j\qquad (1\leq j\leq k),$$

et soit τ_1, par exemple, tel que $\tau_1\geq\tau_j(1\leq j\leq k)$. Étant donné $\varepsilon>0$, on peut trouver N tel que pour $n>N$

$$|v_n^{(j)}|\leq(\tau_j+\varepsilon)^{\mu_n}\qquad (1\leq j\leq k)$$

---

d'où l'on tire

$$\overline{\lim}\,|b_{n+1}+b_{n+2}\zeta_n+\ldots|^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{\rho};$$

et l'on déduit successivement de la formule (1')

$$\overline{\lim}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{1}{n}}<1,\qquad \overline{\lim}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k}{n}}=\frac{|\zeta|}{\rho}.$$

(1) *Voir* par exemple TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, 2e édition, p. 253, Oxford.

et par suite,

$$|u_n| \leqq \sum_{j=1}^{k} (\tau_j + \varepsilon)^{\mu_n} \leqq k(\tau_1 + \varepsilon)^{\mu_n},$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |u_n|^{\frac{1}{\mu_n}} \leqq \tau_1 + \varepsilon.$$

Si l'on a $\tau_1 > \tau_j (2 \leqq j \leqq k)$,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |u_n|^{\frac{1}{\mu_n}} = \tau_1.$$

Il n'y a en effet qu'à appliquer le lemme à

$$v_n^{(1)} = u_n - \sum_{j=2}^{k} v_n^{(j)}.$$

Nous pouvons maintenant montrer que l'on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

En effet, si l'on suppose

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{1}{n \log n}} = 1,$$

le lemme appliqué à (1) donnera, en tenant compte de (2),

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \log n}} \leqq e^{-\frac{1}{r}} < 1,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{1}{n \log n}} < 1$$

et par suite

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\beta_n^{(s)} (\zeta_{ni} - \zeta)^{s-1}|^{\frac{1}{n \log n}} < e^{-\frac{1}{r}} \qquad (2 \leqq s \leqq k)$$

tandis que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\beta_n^{(1)}|^{\frac{1}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

Appliquant le lemme, on obtient

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{ni} - \zeta|^{\frac{k}{n \log n}} = e^{-\frac{1}{r}}.$$

Remarque. — On peut évidemment appliquer cette méthode au cas d'une série entière ayant un rayon de convergence fini.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES MOYENNES DE CESÀRO D'ORDRE ENTIER r ASSOCIÉES A UNE SÉRIE ENTIÈRE.

Nous ferons usage de la formule suivante, mise en évidence par M. Fekete [1].

$$f_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\}, \tag{1}$$

où la $r^{\text{ième}}$ moyenne de Cesàro $f_n^{[r]}(z)$ est définie par

$$f_n^{[r]}(z) = \frac{\sum_{s=0}^{n} \binom{n+r-s-1}{r-1} f_s(z)}{\binom{n+r}{r}}, \qquad (r \geqq 1).$$

Conservons les notations du Chapitre I mais posons, pour simplifier, $\varphi^{(k)}(z) = \varphi(z)$.

Les $f_n^{[r]}(z)$, qui convergent uniformément vers $f(z)$ dans toute région intérieure au cercle de convergence de $f(z)$ auront exactement k zéros ζ_{ni} qui tendent vers ζ. On a

$$f_n(z) = (z-\zeta)^k \varphi_n(z) - z^{n+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (z-\zeta)^{s-1}$$

et, si $r \geqq k$,

$$\begin{aligned} f_n^{[r]}(z) &= (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{(z-\zeta)^k \frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}\right\} \\ &= (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \sum_{s=0}^{k} \binom{r}{s}\binom{k}{s} s!\,(z-\zeta)^{k-s} \frac{d^{r-s}}{dz^{r-s}}\left\{\frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}}\right\}; \end{aligned}$$

ou, en faisant encore usage de la formule (1),

$$\begin{aligned} f_n^{[r]}(z) &= \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{z^s}{\binom{n+r}{s} s!} \binom{r}{s}\binom{k}{s} s!\,(z-\zeta)^{k-s} \varphi_n^{[r-s]}(z) \\ &= \frac{z^k}{n^k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{k}{s} s! \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{k-s} n^{k-s} \frac{\varphi_n^{[r-s]}(z)\, n^s}{\binom{n+r}{s} s!}, \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] *C. R. Acad. Sc.* t. 157, octobre 1913.

ou

$$(2') \qquad \frac{n^k}{z^k} f_n^{[r]}(z) = \mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z}),$$

avec

$$\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z}) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, \mathrm{Z}^{k-s} \Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z}),$$

$$\mathrm{Z} = n\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{\zeta}{\left(1 - \dfrac{\mathrm{Z}}{n}\right)}.$$

et

$$\Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z}) = \frac{\varphi_n^{[r-s]}(z)\, n^s}{\dbinom{n+r}{s} s!} \qquad (0 \leqq s \leqq k).$$

Considérons le polynome,

$$\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z}) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, \mathrm{Z}^{k-s}.$$

Dans toute région finie R du plan des Z, les fonctions $\Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z})$ tendent uniformément vers la constante $\varphi(\zeta) \neq 0$. En effet, il correspond à R, par la transformation $z = \dfrac{\zeta}{\left(1 - \dfrac{\mathrm{Z}}{n}\right)}$, une suite de régions du plan des z qui tendent vers le point ζ, de plus, les $\Phi_n^{(r-s)}(\mathrm{Z})(0 \leqq s \leqq k)$ sont, à un facteur numérique près qui tend vers 1, égaux aux $\varphi_n^{[r-s]}(z)$ et l'on a

$$|\varphi_n^{[r-s]}(z) - \varphi(\zeta)| \leqq |\varphi_n^{[r-s]}(z) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(\zeta)|;$$

le premier module du second membre tend vers zéro et le second aussi car z tend vers ζ et la fonction $\varphi(z)$ est continue.

Cela étant, si l'on considère une région R du plan des Z qui contient tous les zéros $\alpha_i (1 \leqq i \leqq k)$ du polynome $\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z})$, qui sont tous distincts et positifs [1], on peut afirmer que les fonctions $\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z})$ qui, pour n assez grand, sont holomorphes dans R, tendront uniformément dans R, quand n tend vers l'infini, vers le polynome $\varphi(\zeta)\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z})$. On en déduit que pour n assez grand les $\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z})$ auront, dans R, exactement k zéros $\mathrm{Z}_{ni} (1 \leqq i \leqq k)$ qui tendront vers les k zéros α_i du polynome $\mathrm{L}_{rk}(\mathrm{Z})$; les Z_{ni} et les α_i étant ordonnés selon leurs modules croissants.

On déduit de (2′) que, à tout zéro Z_{ni} de $\mathrm{L}_{rk}^{(n)}(\mathrm{Z})$ correspond, par la transformation $z = \dfrac{\zeta}{\left(1 - \dfrac{\mathrm{Z}}{n}\right)}$, un zéro z_{ni} de $f_n^{[r]}(z)$ qui tendra évidemment vers ζ quand

---

[1] *Voir* par exemple Polyá und Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, t. 2, p. 94 pour l'étude de ces polynomes qui sont des polynomes généralisés de Laguerre.

Z_{ni} tend vers α_i. La relation

$$Z_{ni} = n\left(1 - \frac{\zeta}{z_{ni}}\right)$$

donne alors

(3) $$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{z_{ni}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leqq i \leqq k).$$

On peut observer que (3) implique que les z_{ni} sont ordonnés suivant les valeurs croissantes de $|z_{ni} - \zeta|$ et l'on a par suite, avec les notations introduites précédemment, $z_{ni} = \zeta_{ni}$ et

(4) $$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leqq i \leqq k).$$

Pour le cas où $1 \leqq r \leqq k - 1$, revenons à la formule

$$f_n(z) = (z - \zeta)^k \varphi_n(z) - z^{n+1} \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (z - \zeta)^{s-1}.$$

On aura

$$f_n^{(r)}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r} \left\{ (z - \zeta)^k \frac{\varphi_n(z)}{z^{n+1}} \right\} - \nu_n(z),$$

où

$$\nu_n(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r} \left\{ \sum_{s=1}^{k} \beta_n^{(s)} (z - \zeta)^{s-1} \right\}.$$

On en déduit

$$f_n^{(r)}(z) = \frac{z^k}{n^k} \left\{ \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s! \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{k-s} n^{k-s} \frac{\varphi_n^{(r-s)}(z)\, n^s}{\binom{n+r}{s} s!} - \frac{n^k \nu_n(z)}{z^k} \right\}.$$

Si l'on effectue la transformation introduite précédemment et que l'on pose $N_n(Z) = \nu_n(z)$, on aura

$$\frac{n^k}{z^k} f_n^{(r)}(z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, Z^{k-s} \Phi_n^{(r-s)}(Z) - \frac{n^k N_n(Z) \left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = \Lambda_{kr}^{(n)}(Z).$$

Considérons maintenant le polynome de degré k

$$\Lambda_{kr}(Z) = Z^{k-r} L_{kr}(Z)$$

et une région finie R du plan des Z qui contient tous les zéros du polynome $\Lambda_{kr}(Z)$, c'est-à-dire $\alpha_0 = 0$ de multiplicité $k - r$ et $\alpha_i (1 \leqq i \leqq r)$ ordonnés suivant leurs modules croissants; alors, pourvu que

$$\frac{n^k N_n(Z) \left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}$$

tende uniformément vers zéro dans la région R, on peut, comme précédemment, affirmer que $\Lambda_{kr}^{(n)}(Z)$ possède k zéros $Z_{ni}(1 \leq i \leq k)$ qui, ordonnés suivant leurs modules croissants, vérifient

$$\lim_{n \to \infty} Z_{ni} = \alpha_0 = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r)$$

$$\lim_{n \to \infty} Z_{n,k-r+i} = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r),$$

et par suite, pour les zéros correspondants ζ_{ni} de $f_n^{[r]}(z)$, on aura

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r),$$

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{n,k-r+i}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Il reste à montrer que $\dfrac{n^k N_n(Z)\left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}$ tend uniformément vers zéro dans la région R. Pour établir ce fait, considérons $\nu_n(z) = N_n(Z)$. On a

$$(6) \qquad \nu_n(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \sum_{s=0}^{k-r-1} \frac{(r+s)!}{s!} \beta_n^{(r+s+1)} (z-\zeta)^s = \sum_{p=1}^{k-r} \gamma_n^{(p)} z^{n+k-p+1},$$

où les $\gamma_n^{(p)}$ sont des combinaisons linéaires, à coefficients indépendants de n, des $\dfrac{\beta_n^{(r+s+1)}}{\binom{n+r}{r}}$, pour lesquels on a par suite

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\gamma_n^{(p)}|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_p}, \qquad \rho_p \leq \rho.$$

On en déduit que, dans toute région intérieure au cercle de convergence de $f(z)$, $\nu_n(z)$ tend vers zéro comme $\theta^n (0 < \theta < 1)$ et l'on a par suite, uniformément dans R,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k N_n(Z)\left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = 0.$$

Quant aux $k-r$ zéros ζ_n du polynome $f_n^{[r]}(z)$ qui tendent vers ζ suivant la loi

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right) = 0,$$

on peut montrer qu'ils satisfont, plus précisément, à la loi

$$(6') \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho}.$$

Pour cela, on considère l'identité

$$(7) \qquad f_n^{[r]}(z) = -\nu_n(z) + \frac{z^r}{n^r}(z-\zeta)^{k-r}\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,Z^{r-s}\Phi_n^{(r-s)}(Z).$$

Pour

$$z = \zeta_n \qquad \text{ou} \qquad Z = n\left(1-\frac{\zeta}{\zeta_n}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\binom{k}{s}s!\,Z^{r-s}\Phi_n^{(r-s)}(Z)$$

tend vers $(-1)^r\binom{k}{r}r!\,\varphi(\zeta) \neq 0$ et par suite

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\nu_n(\zeta_n)|^{\frac{1}{n}}.$$

De plus,

$$\nu_n(\zeta_n) = (-1)^r\frac{\zeta_n^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r}r!}\sum_{s=0}^{k-r-1}\frac{(r+s)!}{s!}\beta_n^{(r+s+1)}(\zeta_n-\zeta)^s,$$

et l'on peut répéter ici le raisonnement du Chapitre I pour l'étude de $\sum_{s=1}^{k}\beta_n^{(s)}(\zeta_n-\zeta)^{s-1}$. On obtient ainsi

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_n-\zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho}.$$

Dans le cas où $f(z)$ est une fonction entière d'ordre s par exemple, on peut obtenir une précision analogue à celle du Chapitre I.

Remarque. — Le fait que les zéros du polynome $L_{rk}(Z)(r \geqq k)$ sont positifs et distincts permet de déduire de (4) une information complémentaire intéressante, dans le cas où ζ *et les* a_ν *sont réels*. Dans ce cas, *les* k *zéros* ζ_{ni} de $f_n^{[r]}(z)$ *sont*, pour $n \geqq n_0$, *réels, et distincts, séparés de l'origine par* ζ.

La réalité des $\zeta_{ni}(1 \leqq i \leqq k)$, pour n assez grand, est évidente pour $k=1$.

Pour $k \geqq 2$, la négation de la réalité des ζ_{ni} pour $1 \leqq i \leqq k$ entraînerait l'existence d'une suite infinie de nombres conjugués ζ_{n,i_1} et ζ_{n,i_2}. Ceci implique, d'après (4), que α_{i_1} et α_{i_2} soient conjugués; ce qui contredit le fait qu'ils sont réels et distincts.

Si maintenant on fait usage de (4) sous la forme

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\frac{\zeta_{ni}-\zeta}{\zeta} = \alpha_i > 0 \qquad (1 \leqq i \leqq k),$$

on voit que, ζ sépare, pour n assez grand, les zéro $\zeta_{ni}(1 \leqq i \leqq k)$ de l'origine.

La réalité des zéros ζ_{ni}, dans les conditions précédentes, a été établie par M. Fekete dans sa Note aux *Comptes rendus* de 1913, d'une façon élémentaire et sans faire usage de la formule (4), qui lui a permis de reconnaître les inégalités $0 < |\zeta| < |\zeta_{ni}|$.

On peut, dans les mêmes hypothèses établir pour $r \leqq k-1$, la réalité des r zéros $\zeta_{n,k-r+i} (1 \leqq i \leqq r)$ de $f_n^{[r]}(z)$ qui satisfont à (5) et aussi le fait qu'ils sont séparés de l'origine par ζ. En particulier, *pour* $r = k-1$, *le seul zéro de* $f_n^{[r]}(z)$ *qui tend vers* ζ, *suivant la loi* (6') *est réel*. Mais on ne peut rien dire au sujet des positions respectives des trois points 0, ζ, ζ_n,

Degré d'approximation en un point par les moyennes de Cesàro.

On peut déduire des formules (2) et (7) le degré d'approximation par les Moyennes de Cesàro, en un point ζ intérieur au cercle de convergence.

Pour un zéro ζ de $f(z)$, d'ordre de multiplicité $k \leqq r$, intérieur à ce cercle, on a, d'après (2),

$$f_n^{[r]}(\zeta) = (-1)^k \frac{\zeta^k}{\binom{n+r}{k} k!} \binom{r}{k} k! \, \varphi_n^{[r-k]}(\zeta)$$

et par suite

$$\lim_{n \to \infty} n^k f_n^{[r]}(\zeta) = (-1)^k \zeta^k \binom{r}{k} f^{(k)}(\zeta),$$

où $f^{(k)}(z)$ désigne la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $f(z)$.

De même, pour un zéro ζ d'ordre de multiplicité $k > r$, on a par la formule (7)

$$f_n^{[r]}(\zeta) = -\nu_n(\zeta)$$

et par suite, d'après (6)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |f_n^{[r]}(\zeta)|^{\frac{1}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho}.$$

Si maintenant ζ *est un point quelconque du cercle de convergence* de $f(z)$ et si l'on pose

$$h(z) = f(z) - f(\zeta),$$

ζ sera un zéro de $h(z)$ et l'on aura

$$h_n^{[r]}(z) = f_n^{[r]}(z) - f(\zeta).$$

Si ζ est un zéro d'ordre k pour $h(z)$,

$$f'(\zeta) = f''(\zeta) = \ldots = f^{k-1}(\zeta), \qquad f^{(k)}(\zeta) \neq 0,$$

on aura, pour $k \leqq r$,

$$\lim_{n \to \infty} \{ f_n^{[r]}(\zeta) - f(\zeta) \} n^k = (-1)^k \zeta^k \binom{r}{k} f^{(k)}(\zeta)$$

et, pour $k > r$,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |f_n^{[r]}(\zeta) - f(\zeta)|^{\frac{1}{n}} = \frac{|\zeta|}{\rho}.$$

CHAPITRE III.

Polynomes de Jensen [1] associés a une série entière.

Étant donnée la série entière $f(z)$, associons-lui le polynome de Jensen d'ordre n

$$j_n(f) = \alpha_0^{(n)} a_0 + \alpha_1^{(n)} a_1 z + \alpha_2^{(n)} a_2 z^2 + \ldots + \alpha_n^{(n)} a_n z^n,$$

où

$$\alpha_0^{(n)} = \alpha_1^{(n)} = 1, \qquad \alpha_k^{(n)} = \prod_{s=1}^{k-1} \left(1 - \frac{s}{n}\right) \qquad (2 \leqq k \leqq n).$$

Si l'on observe que

$$\alpha_{k+1}^{(n)} = \alpha_k^{(n)} - \frac{k}{n} \alpha_k^{(n)},$$

on voit que le polynome de Jensen associé à f s'écrit

$$j_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \alpha_n^{(n)} f_k.$$

Posant $\beta_{nk} = \frac{k\alpha_k^{(n)}}{n}$ et observant que les β_{nk} sont positifs et que

$$\lim_{n \to \infty} \beta_{nk} = 0, \qquad \sum_k \beta_{nk} = 1,$$

on, voit que l'on est dans les conditions d'application du théorème de Tœplitz [2], et l'on peut affirmer que $j_n(f)$, dans les mêmes conditions que f_n, tend uniformément vers f.

f ayant au point $\zeta \neq 0$, intérieur au cercle de convergence, un zéro d'ordre de multiplicité k, nous nous proposons de montrer que l'on a

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\left(\frac{\zeta_{ni}}{\zeta} - 1\right) = \alpha_i \qquad (1 \leqq i \leqq k),$$

où, les α_i sont les zéros du polynome d'Hermite $H_k(z)$ d'ordre k défini par les formules

$$H_0 = 1,$$
$$H_s(Z) = ZH_{s-1}(Z) - H'_{s-1}(Z) \qquad (s \geqq 1).$$

---

(1) Introduits par M. Fekete (*C. R. Acad. Sc.*, t. 158, mai 1914), où leurs zéros sont étudiés dans le voisinage d'un zéro réel ζ de la fonction $f(z)$ représentée par une série entière à coefficients réels.

(2) *Voir* par exemple Knopp, *Theory and application of infinite series*, p. 391 (Blackie and Son.)

Les zéros α_i du polynome d'Hermite H_k sont réels, distincts et opposés. Nous les supposerons ordonnés de sorte que le premier zéro soit le zéro éventuel nul, les $\left[\frac{k}{2}\right]$ suivants étant les zéros positifs ordonnés suivant leurs grandeurs croissantes et enfin les $\left[\frac{k}{2}\right]$ derniers étant les zéros négatifs ordonnés suivant leurs modules croissants. L'ordre correspondant pour les $\zeta_{ni}(1 \leqq i \leqq k)$ est le suivant : si k est impair, le premier zéro ζ_{n1}, est le plus proche de ζ, puis on aura $\left[\frac{k}{2}\right]$ zéros tels que l'argument de $\frac{\zeta_{ni}-\zeta}{\zeta}$ soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et qui sont ordonnés selon les valeurs croissantes de $|\zeta_{ni}-\zeta|$, enfin on aura $\left[\frac{k}{2}\right]$ zéros tels que l'argument de $\frac{\zeta_{ni}-\zeta}{\zeta}$ soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et ordonnés selon les valeurs croissantes de $|\zeta_{ni}-\zeta|$. Si k est pair nous n'aurons point à considérer le zéro le plus proche de ζ.

Pour démontrer (1), nous observerons d'abord que l'on a pour toute fonction φ holomorphe dans $|z| < \rho$.

$$j_n\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)j_n(\varphi) - \frac{z^2}{n}j'_n(\varphi).$$

En effet, si l'on pose

$$\varphi = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

on aura

$$j_n\{(z-\zeta)\varphi\} = -\zeta j_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} a_{k-1} z^k = -\zeta j_n(\varphi) + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)}\left(1-\frac{k}{n}\right) a_k z^{k+1}$$

$$= -\zeta j_n(\varphi) + z j_n(\varphi) - \frac{z^2}{n} j'_n(\varphi).$$

Cela étant, f ayant au point ζ un zéro d'ordre de multiplicité k, on peut écrire $f = (z-\zeta)^k \varphi(z)$, $\varphi(\zeta) \neq 0$.

Nous sommes ainsi conduits à étudier les zéros du polynome $j_n\{(z-\zeta)^k\varphi\}$ lorsque l'on a de plus

$$\left\{\lim_{n\to\infty} j_n(\varphi)\right\}_{z=\zeta} = \varphi(\zeta) \neq 0.$$

Faisons le changement de variable $Z = \sqrt{n}\left(\frac{z}{\zeta} - 1\right)$ et posons

$$j_n\{(z-\zeta)^s\varphi\} = J_s(Z, n) \qquad (0 \leqq s \leqq k).$$

La relation

$$j_n\{(z-\zeta)^s\varphi\} = (z-\zeta)j_n\{(z-\zeta)^{s-1}\varphi\} - \frac{z^2}{n}j'_n\{(z-\zeta)^{s-1}\varphi\}$$

devient

$$\frac{\sqrt{n}}{\zeta}J_s(Z, n) = ZJ_{s-1}(Z, n) - \left(1 + \frac{Z}{\sqrt{n}}\right)^2 J'_{s-1}(Z, n). \tag{2}$$

Posant

$$\frac{\sqrt{n}}{\zeta} = \lambda, \qquad \left(1 + \frac{Z}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1 + \varepsilon,$$

on voit, que ε, qui est une fonction de Z et de n, tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini, Z restant dans une région finie de son plan.

De plus, la relation de récurrence (2) s'écrit

$$\lambda J_s = ZJ_{s-1} - (1+\varepsilon)J'_{s-1} \qquad (s = 1, 2, \ldots).$$

La première de ces relations

$$\lambda J_1 = ZJ_0 - (1+\varepsilon)J'_0$$

s'écrit aussi

$$\lambda J_1 = ZJ_0 + \gamma_1 J_0 + \mu_1^{(1)} J'_0,$$

où

$$\gamma_1 = 0, \qquad \mu_{(1)}^{1} = -(1+\varepsilon).$$

Supposons que l'on ait obtenu

$$\lambda^s J_s = H_s J_0 + \gamma_s J_0 + \mu_s^{(1)} J'_0 + \mu_s^{(2)} J''_0 + \ldots + \mu_s^{(s)} J_0^{(s)},$$

où γ_s tend uniformément vers zéro quand n augmente indéfiniment et où $\mu_s^{(r)} (1 \leqq r \leqq s)$ est borné dans toute région finie du plan des Z. Nous allons montrer qu'une telle relation sera encore vraie pour J_{s+1}, avec des coefficients ayant les mêmes propriétés

On a, en effet,

$$\lambda^s J'_s = H'_s J_0 + \gamma'_s J_0 + \nu_s^{(1)} J'_0 + \nu_s^{(2)} J''_0 + \ldots + \nu_0^{(s)} J_0^{(s)} + \nu_s^{(s+1)} J_0^{(s+1)},$$

où

$$\nu_s^{(1)} = (\mu_s^{(1)})' + \gamma_s + H_s,$$
$$\nu_s^{(r)} = (\mu_s^{(r)})' + \mu_s^{(r-1)} \qquad (r \geqq 2).$$

sont bornés.

Par suite,

$$\lambda^{s+1} J_{s+1} = \lambda^s ZJ_s - \lambda^s(1+\varepsilon)J'_s$$

peut s'écrire

$$\lambda^{s+1} J_{s+1} = H_{s+1} J_0 + \gamma_{s+1} J_0 + \mu_{s+1}^{(1)} J'_0 + \mu_{s-1}^{(2)} J''_0 + \ldots + \mu_{s+1}^{(s+1)} J_0^{(s+1)},$$

où

$$\gamma_{s+1} = Z\gamma_s - (1+\varepsilon)\gamma'_s - \varepsilon H'_s$$

tend uniformément vers zéro, et

$$\mu_{s+1}^{(r)} = Z\mu_s^{(r)} - (1+\varepsilon)\nu_s^{(r)}$$

est uniformément borné.

On a donc

$$\lambda^k J_k = H_k J_0 + \gamma_k J_0 + \mu_k^{(1)} J'_0 + \mu_k^{(2)} J''_0 + \ldots + \mu_k^{(k)} J_0^{(k)}. \tag{3}$$

De plus, $J_0(Z, n)$ tend uniformément vers $\varphi(\zeta)$ quand n augmente indéfiniment; ses dérivées $J_0^{(s)}(Z, n)$ tendent, par suite, uniformément vers zéro. Enfin, γ_k tendant uniformément vers zéro et les $\mu_k^{(r)}$ étant uniformément bornés, on en déduit que le second membre de (3) tend uniformément vers $\varphi(\zeta)H_k(Z)$ dans toute région finie du plan des Z.

Les zéros de $J_k(Z, n)$, les plus voisins de l'origine, tendent donc vers les k zéros du polynome d'Hermite d'ordre k.

Remarque. — Lorsque ζ et les a_n, $n \geqq 0$, sont réels on peut, comme pour les Moyennes de Cesàro, établir que les k zéros ζ_{ni} de $f_n(f)$ qui tendent vers ζ, sont, pour n assez grand, des nombres réels, distincts, $\left[\frac{k}{2}\right]$ d'entre eux étant inférieurs à ζ et $\left[\frac{k}{2}\right]$ supérieurs à ζ,

Le fait que les zéros soient réels et distincts a été démontré par M. Fekete dans sa Note aux *Comptes rendus* de 1914 sans faire usage de la formule (1) qui lui a permis par la suite de localiser les zéros par rapport à ζ.

CHAPITRE IV.

SUITES DE FEKETE.

La formule

$$f_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{f_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

de M. Fekete, peut être considérée comme une opération qui associe à la suite $f_n(z)$ une autre suite de polynomes $f_n^{[r]}(z)$ dont les zéros voisins de $\zeta \neq 0$, possèdent une propriété remarquable.

Cette même formule permet d'associer à toute suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ qui convergent vers $f(z)$, uniformément dans un voisinage de ζ, une autre suite de fonctions $f_{nn}^{[r]}(z)$ que nous nous proposons d'étudier [1].

---

[1] Nous avons appris, plus tard, que ce procédé avait été utilisé (dans un cas plus restreint) par M. Fekete et M^lle E. Held qui ont associé pour r entier positif à la suite de polynomes $p_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} z^\nu$ convergeant uniformément dans un domaine $(\mathcal{D})$ vers la fonction $f(z)$, sous la condition $|p_n(z) - f(z)| \leqq c\theta^n$, $0 < c < \infty$, $0 < \theta < 1$, une autre suite de polynomes

$$p_n^{[r]}(z) = \frac{1}{\binom{n+r}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^{(n)} \binom{n+r-\nu}{n-\nu} z^\nu = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{p_n(z)}{z^{n+1}}\right\}$$

de degrés n en z et ont étendu, sous les conditions énoncées, aux polynomes $p_n^{[r]}(z)$, les résultats établis pour les zéros des Moyennes de Cesàro.

Nous montrerons que *si* $f_n(z)$ *converge vers* $f(z)$, uniformément dans une région $(\mathcal{D})$, $f_{nn}^{[r]}(z)$ *convergera aussi vers* $f(z)$, uniformément dans toute région $(\mathcal{D}_1)$ intérieure à $(\mathcal{D})$.

Nous montrerons aussi que, sous certaines conditions concernant le degré d'approximation de $f(z)$ par les $f_n(z)$ dans le voisinage de ζ, une partie des résultats, obtenus pour les zéros des Moyennes de Cesàro $f_n^{[r]}(z)$, demeurent vrais pour la suite $f_{nn}^{[r]}(z)$.

Soit $\psi(z)$ holomorphe dans une région $(\mathcal{D})$ du plan des z. Considérons pour $z \neq 0$, $r \geqq 0$, l'opération

$$\psi_n^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{\psi(z)}{z^{n+1}}\right\} \quad (1) \quad [1].$$

On a, pour $r \geqq 1$,

$$\psi_n^{[r]}(z) = -\frac{z^{n+r+1}}{n+r}\frac{d}{dz}\left\{\frac{\psi_n^{[r-1]}(z)}{z^{n+r}}\right\} = \psi_n^{[r-1]}(z) - \frac{z}{n+r}\left(\psi_n^{[r-1]}(z)\right)'.$$

Cette formule montre que si pour $s \geqq 1$, $\{\psi_n^{[s-1]}(z)\}$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant vers la fonction holomorphe $\psi(z)$, uniformément dans la région $(\mathcal{D})$, $\{\psi_n^{[s]}(z)\}$ sera aussi une suite de fonctions holomorphes convergeant vers $\psi(z)$, uniformément dans toute région fermée $(\mathcal{D}_1)$ complètement intérieure à $(\mathcal{D})$; $\left(\psi_n^{[s-1]}(z)\right)'$ est en effet holomorphe et uniformément bornée dans $(\mathcal{D}_1)$.

De plus,

$$\psi_n^{[0]}(z) = \psi(z), \qquad \psi_n^{[1]}(z) = \psi(z) - \frac{z}{n+1}\psi'(z)$$

et ceci montre que, dans $(\mathcal{D}_1)$, les fonctions $\psi_n^{[r]}(z)$, pour $r \geqq 0$, convergent uniformément vers $\psi(z)$.

Plus généralement, pour une suite arbitraire de fonctions holomorphes $\omega_n(z)$ qui convergent vers la fonction $\omega(z)$, uniformément dans $(\mathcal{D})$, la suite associée des fonctions $\omega_{nn}^{[r]}(z)$ définies par la formule

$$\omega_{nn}^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r}\left\{\frac{\omega_n(z)}{z^{n+1}}\right\}, \quad (1')$$

qui correspond à (1) pour $\psi(z) = \omega_n(z)$, converge vers $\omega(z)$, uniformément dans $(\mathcal{D}_1)$. Il suffit, pour le voir, d'observer que $\omega_{nn}^{[0]}(z) = \omega_n(z)$ possède cette propriété.

---

[1] La fonction $\psi_n^{[r]}(z)$ pour $r \geqq 1$ est définie par (1) partout dans $(\mathcal{D})$, sauf pour $z = 0$ s'il appartient à $(\mathcal{D})$. Dans ce cas, on complète la définition en posant

$$\psi_n^{[r]}(0) = \lim_{z \to 0} \psi_n^{[r]}(z).$$

Considérons maintenant une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ qui convergent uniformément dans $(\mathcal{D})$ vers la fonction $f(z)$ et soit $\zeta \neq 0$ un zéro d'ordre de multiplicité k de $f(z)$, intérieur à $(\mathcal{D})$.

Posons

$$f(z) = f_n(z) + \varepsilon_n(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z). \tag{2}$$

On a

$$f_{nn}^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r} \left\{ \frac{f_n(z)}{z^{n+1}} \right\} \qquad (r \geqq 0)$$

ou, d'après (2),

$$f_{nn}^{[r]}(z) = (-1)^r \frac{z^{n+r+1}}{\binom{n+r}{r} r!} \frac{d^r}{dz^r} \left\{ (z-\zeta)^k \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} - \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}} \right\}.$$

Supposons $1 \leqq r \leqq k-1$, le traitement pour le cas $r \geqq k$ étant tout à fait analogue.

On a

$$\begin{aligned} f_{nn}^{[r]}(z) &= -\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) + \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \frac{z^s}{\binom{n+r}{s} s!} \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, (z-\zeta)^{k-s} \varphi_n^{[r-s]}(z) \\ &= \frac{z^k}{n^k} \left\{ \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s! \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{k-s} n^{k-s} \frac{\varphi_n^{[r-s]}(z)\, n^s}{\binom{n+r}{s} s!} - \frac{n^k \varepsilon_{nn}^{[r]}(z)}{z^k} \right\} \end{aligned}$$

En posant

$$Z = n\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) \qquad \text{ou} \qquad z = \frac{\zeta}{\left(1 - \frac{Z}{n}\right)},$$

$$\Phi_n^{(r-s)}(Z) = \frac{\varphi_n^{[r-s]}(z)\, n^s}{\binom{n+r}{s} s!} \qquad (0 \leqq s \leqq r),$$

$$E_{nn}^{[r]}(Z) = \varepsilon_{nn}^{[r]}(z),$$

il vient

$$\frac{n^k}{z^k} f_{nn}^{[r]}(z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, Z^{k-s} \Phi_n^{(r-s)}(Z) - \frac{n^k E_{nn}^{(r)}(Z) \left(1 - \frac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = \Lambda_{kr}^{(n)}(Z).$$

Considérons le polynome de degré k

$$\Lambda_{kr}(Z) = Z^{k-r} L_{kr}(Z),$$

où

$$L_{kr}(Z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \binom{k}{s} s!\, Z^{r-s}$$

et une région finie R du plan des Z qui contient tous les zéros du polynome $\Lambda_{kr}(Z)$ c'est-à-dire $\alpha_0 = 0$ d'ordre de multiplicité $k-r$ et $\alpha_i (1 \leq i \leq r)$ ordonnés selon leurs grandeurs croissantes, alors, *pourvu que dans cette région* $\dfrac{n^k E_{nn}^{(r)}(Z)\left(1-\dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k}$ *tende uniformément vers zéro*, on peut, comme précédemment, affirmer qu'il y a k zéros $Z_{ni} (1 \leq i \leq k)$ de $\Lambda_{kr}^{(n)}(Z)$ qui, ordonnés selon leurs modules croissants, satisfont à

$$\lim_{n \to \infty} Z_{ni} = \alpha_0 = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r),$$
$$\lim_{n \to \infty} Z_{n,k-r+i} = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Les zéros ζ_{ni} de $f_{nn}^{[r]}(z)$ qui leurs correspondent satisfont donc aux lois

$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{ni}}\right) = 0 \qquad (1 \leq i \leq k-r),$$
$$\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_{n,k-r+i}}\right) = \alpha_i \qquad (1 \leq i \leq r).$$

Il reste à examiner sous quelles conditions

$$\Delta_n^{(r)}(Z) = \frac{n^k E_{nn}^{(r)}(Z)\left(1 - \dfrac{Z}{n}\right)^k}{\zeta^k} = \frac{n^k \varepsilon_{nn}^{[r]}(z)}{z^k}$$

tend uniformément vers zéro dans R. Considérons $\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) = E_{nn}^{(r)}(Z)$. On a par la formule (1′)

$$\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \frac{z^s}{\dbinom{n+r}{s} s!} \varepsilon_n^{(s)}(z), \tag{3}$$

où $\varepsilon_n^{(s)}(z)$ désigne la dérivée d'ordre s de $\varepsilon_n(z)$.

De plus, les formules de Cauchy

$$\varepsilon_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-\zeta|=\rho} \frac{\varepsilon_n(t)}{t-z}\, dt, \qquad \varepsilon_n^{(s)}(z) = \frac{(-1)^s s!}{2\pi i} \oint_{|t-\zeta|=\rho} \frac{\varepsilon_n(t)}{(t-z)^{s+1}}\, dt,$$

où z est intérieur au cercle de centre ζ et de rayon ρ, lequel est intérieur à $(\mathcal{D})$, montrent que si λ_n est une borne supérieure pour $|\varepsilon_n(t)|$ sur la circonférence $|t-\zeta| = \rho$, on aura, pour z satisfaisant à $|z-\zeta| \leq \frac{\rho}{2}$,

$$|\varepsilon_n^{(s)}(z)| \leq \lambda_n \frac{s!\, 2^{s+1}}{\rho^s} \qquad (0 \leq s \leq r).$$

L'expression (3) montre alors que l'on a, dans les mêmes conditions,

$$|\varepsilon_{nn}^{[r]}(z)| \leq A_r \lambda_n,$$

où A_r est une constante indépendante de n.

On voit alors sur l'expression de $\Delta_n^{(r)}(Z)$ qu'il suffit de supposer $|\varepsilon_n(z)| = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, uniformément dans un voisinage de ζ ne contenant pas l'origine pour être sûr que, dans R, $\Delta_{nn}^{[r]}(Z)$ tend uniformément vers zéro.

Quant aux *$k-r$ zéros ζ_n de $f_{nn}^{[r]}(z)$ qui tendent vers ζ suivant la loi*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right) = 0,$$

ils satisfont à

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k-r}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |\varepsilon_{nn}^{[r]}(\zeta_n)|^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

Il suffit pour le voir de considérer

$$f_{nn}^{[r]}(z) = -\varepsilon_{nn}^{[r]}(z) + \frac{z^r}{n^r}(z-\zeta)^{k-r} \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}\binom{k}{s} s!\, Z^{r-s} \Phi_n^{(r-s)}(Z)$$

et d'observer que pour $z = \zeta_n$ ou $Z = n\left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n}\right)$, Σ tend vers $(-1)^r \binom{k}{r} r!\, \varphi(\zeta) \neq 0$.

La formule (4) pourrait donner des informations additionnelles si l'on faisait des hypothèses supplémentaires sur le comportement de $\varepsilon_n(z)$ quand n tend vers l'infini.

Remarque, — Dans le cas où ζ *est réel* et où, dans un voisinage de ζ *pour* n assez grand, $f_n(z)$ *vérifie la condition* $f_n(z) = \overline{f_n(\bar{z})}$, *les zéros* ζ_{ni} *sont*, pour n assez grand, *réels, distincts, séparés de l'origine par* ζ, *pourvu que* $r \geqq k$*;* tandis que *pour* $r = k-1$, ils sont tous *réels et distincts*, $k-2$ d'entre eux étant séparés de l'origine par ζ.

CHAPITRE V.

Moyennes de Hölder associées a une série entière.

Posons

$$h_n^{(0)} = f_n,$$

$$(n+1) h_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(r-1)} \qquad (r \geqq 1).$$

On sait que les $h_n^{(r)}$ tendent uniformément vers f quand n tend vers l'infini.

Nous laisserons de côté l'étude de $h_n^{(0)}$ et celle de $h_n^{(1)}$ qui ont déjà été faites, car les $h_n^{(0)}$ représentent les *sommes partielles* et les $h_n^{(1)}$, les *moyennes de Cesàro d'ordre* 1 et nous étudierons séparément le *cas d'un zéro simple* et celui d'un *zéro multiple* de $f(z)$.

Cas d'un zéro simple. — Posons

$$f = (z-\zeta)\varphi, \qquad \varphi(\zeta) \neq 0,$$

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

On a

$$h_n^{(0)}(f) = h_n^{(0)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)h_n^{(0)}(\varphi) - b_n z^{n+1},$$

$$(n+1)h_n^{(1)}(f) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(0)}(f) = \sum_{\nu=0}^{n} \{(z-\zeta)h_\nu^{(0)}(\varphi) - b_\nu z^{\nu+1}\}$$
$$= (n+1)(z-\zeta)h_n^{(1)}(\varphi) - z h_n^{(0)}(\varphi)$$

et par suite

$$h_n^{(1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)h_n^{(1)}(\varphi) - \frac{z}{n+1}\mu_n^{(0)}(\varphi),$$

où

$$\mu_n^{(0)} = h_n^{(0)}.$$

Un calcul analogue montre que l'on a

$$(1) \qquad h_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1}\mu_n^{(r-1)}(\varphi),$$

où

$$\mu_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(r-1)}}{\nu+1} \qquad (r \geqq 1).$$

Nous avons maintenant à obtenir le comportement asymptotique de $\mu_n^{(r)}$. Pour cela, considérons

$$\mu_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(0)}}{\nu+1}$$

et

$$\psi_n^{(1)} = \frac{\mu_n^{(1)}}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(0)}}{\nu+1} \qquad (n \geqq 1).$$

Si l'on pose

$$a_{\nu n} = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu \log(n+1)} & \text{pour } \nu \leqq n+1, \\ 0 & \text{pour } \nu > n+1, \end{cases}$$

on voit que

$$\lim_{n\to\infty} a_{\nu n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_\nu a_{\nu n} = 1$$

et l'on peut alors appliquer le théorème de Tœplitz [1], de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{(1)}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^{(0)}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} h_n^{(0)}(\varphi) = \varphi.$$

---

[1] *Voir* seconde note chapitre III.

De même,

$$\mu_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(1)}}{\nu+1} = \mu_0^{(1)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\log(\nu+1)}{\nu+1} \psi_\nu^{(1)}$$

et, $\frac{\log x}{x}$ étant constamment décroissant à partir du point $x = e$, on en déduit que la série $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\log \nu}{\nu}$ est asymptotiquement égale à $\int_1^n \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2}(\log n)^2$, de sorte que si l'on pose

$$\psi_n^{(2)} = \frac{\mu_n^{(2)}}{\frac{1}{2}\left\{\log(n+1)\right\}^2} \qquad (n \geqq 1),$$

on aura, comme précédemment,

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n^{(2)}(\varphi) = \varphi.$$

Des calculs analogues montrent que

$$\psi_n^{(r)} = \frac{\mu_n^{(r)} r!}{\left\{\log(n+1)\right\}^r}$$

vérifie

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n^{(r)}(\varphi) = \varphi.$$

La relation (1) s'écrivant

$$(1') \qquad h_n^{(r)}\left\{(z-\zeta)\varphi\right\} = (z-\zeta) h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1} \frac{\left\{\log(n+1)\right\}^{r-1}}{(r-1)!} \psi_n^{(r-1)}(\varphi),$$

le changement de variable

$$\frac{(r-1)!\, n}{(\log n)^{r-1}} \left(\frac{z}{\zeta} - 1\right) = Z_n$$

montre que pour le zéro z de $h_n^{(r)}$ qui tend vers ζ, on a

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = 1.$$

Cas d'un zéro multiple. — Posons

$$f = (z-\zeta)^k \varphi(z), \qquad \varphi(\zeta) \neq 0$$

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu.$$

Nous introduirons des quantités à quatre indices entiers

$${}^{(s)}_{(l)}\varphi_n^{(r)}$$

définies par récurrence de la façon suivante

$$^{(1)}\varphi_n = \int_0^z \varphi_n(t)\,dt,$$

$$^{(s)}\varphi_n = \int_0^z {}^{(s-1)}\varphi_n(t)\,dt \qquad (s \geqq 2),$$

et

$$^{(s)}\varphi_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{^{(s)}\varphi_\nu^{(r-1)}}{\nu+1},$$

ou

$$^{(s)}\varphi_n^{(r)} = {}^{(s)}\varphi_{n-1}^{(r)} + \frac{1}{n+1}\,{}^{(s)}\varphi_n^{(r-1)}.$$

Ces deux dernières formules nous permettent de définir $^{(s)}\varphi_n^{(r)}$ pour r entier positif ou négatif, pourvu que l'on connaisse $^{(s)}\varphi_n^{(0)} = {}^{(s)}\varphi_n$. (Un indice supprimé doit en général être entendu comme égal à zéro.)

On posera enfin

$$(1'') \qquad \begin{cases} {}^{(1)}_{(s)}\varphi_n^{(r)} = {}^{(s)}\varphi_n^{(r)} + {}^{(s)}\varphi_n^{(r-1)}, \\ {}^{(s)}_{(l)}\varphi_n^{(r)} = l\,{}^{(s)}_{(l-1)}\varphi_n^{(r)} + {}^{(s)}_{(l-1)}\varphi_n^{(r-1)} \qquad (l \geqq 1). \end{cases}$$

Établissons maintenant la formule

$$(2) \qquad \mu_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\,\mu_n^{(r)}(\varphi) - {}^{(1)}\varphi_n^{(r-1)} \qquad (r \geqq 1).$$

On a

$$\mu_n^{(0)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\,\mu_n^{(0)}(\varphi) - b_n z^{n+1},$$

$$\mu_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(0)}}{\nu+1},$$

$$\mu_n^{(1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(z-\zeta)\,\mu_\nu^{(0)}(\varphi) - b_\nu z^{\nu+1}}{\nu+1},$$

ou

$$\mu_n^{(1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\,\mu_n^{(1)}(\varphi) - {}^{(1)}\varphi_n,$$

ce qui est la formule (2) pour $r = 1$.

La formule (2) supposée vraie pour $r = j$, il est facile de vérifier qu'elle est vraie pour $r = j + 1$. On a en effet,

$$\mu_n^{(j+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mu_\nu^{(j)}}{\nu+1},$$

$$\mu_n^{(j+1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(z-\zeta)\,\mu_\nu^{(j)}(\varphi) - {}^{(1)}\varphi_\nu^{(j-1)}}{\nu+1}$$

ou

$$\mu_n^{(j+1)}\{(z-\zeta)\varphi\} = (z-\zeta)\,\mu_n^{(j+1)}(\varphi) - {}^{(1)}\varphi_n^{(j)},$$

ce qui démontre la formule dans le cas général.

Établissons aussi la formule générale

$$(3) \qquad {}^{(s)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n^{(r)} = (z-\zeta)\,{}^{(s)}\varphi_n^{(r)} - s\,{}^{(s+1)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s+1)}\varphi_n^{(r-1)},$$

valable pour r positif, nul ou négatif.

Observons d'abord que l'on a par définition

$${}^{(1)}\varphi_n^{(-1)} = (n+1)\,({}^{(1)}\varphi_n - {}^{(1)}\varphi_{n-1}) = b_n z^{n+1}$$

et par suite

$$\{(z-\zeta)\varphi\}_n = (z-\zeta)\varphi_n - {}^{(1)}\varphi_n^{(-1)},$$

ce qui est la formule (3) écrite pour $r = 0$, $s = 0$.

Vérifions maintenant que si la formule (3) est vraie pour o et s, elle est encore vraie pour o et $s+1$.

On a, en effet,

$${}^{(s+1)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n = \int_0^z {}^{(s)}\{(t-\zeta)\varphi(t)\}_n\,dt = \int_0^z (t-\zeta)\,{}^{(s)}\varphi_n(t)\,dt - s\,{}^{(s+2)}\varphi_n - {}^{(s+2)}\varphi_n^{(-1)};$$

intégrant par parties et observant que pour $s \geqq 0$ on a ${}^{(s+1)}\varphi_n(0) = 0$, on obtient

$$\int_0^z (t-\zeta)\,{}^{(s)}\varphi_n(t)\,dt = [(t-\zeta)\,{}^{(s+1)}\varphi_n(t)]_0^z - \int_0^z {}^{(s+1)}\varphi_n(t)\,dt = (z-\zeta)\,{}^{(s+1)}\varphi_n - {}^{(s+2)}\varphi_n,$$

de sorte que

$${}^{(s+1)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n = (z-\zeta)\,{}^{(s+1)}\varphi_n - (s+1)\,{}^{(s+2)}\varphi_n - {}^{(s+2)}\varphi_n^{(-1)}.$$

Observant maintenant que la relation

$${}^{(s)}\varphi_n^{(r-1)} = (n+1)\,({}^{(s)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s)}\varphi_{n-1}^{(r)})$$

qui est linéaire, nous permet de passer, dans la formule (3), de r à $r-1$ et que cette même relation, écrite sous la forme

$${}^{(s)}\varphi_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{{}^{(s)}\varphi_\nu^{(r-1)}}{\nu+1}$$

nous permet de passer de r à $r+1$, on voit que la formule (3), établie pour $r = 0$, est vraie quelle que soit la valeur entière de r, positive, nulle ou négative.

Les relations (1″) permettent maintenant de déduire immédiatement de (3) la relation

$$(4) \qquad {}^{(s)}_{(l)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n^{(r)} = (r-\zeta)\,{}^{(s)}_{(l)}\varphi_n^{(r)} - s\,{}^{(s+1)}_{(l)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s+1)}_{(l)}\varphi_n^{(r-1)},$$

dont un cas particulier est

$$(5) \qquad {}^{(s)}_{(s-1)}\{(z-\zeta)\varphi\}_n^{(r)} = (z-\zeta)\,{}^{(s)}_{(s-1)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s+1)}_{(s)}\varphi_n^{(r)}.$$

Les relations (1), (2) et (5) nous serviront à *établir le développement, valable pour* r, $k \geqq 2$,

$$
\begin{aligned}
(6) \quad & h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^k\varphi\} \\
& = (z-\zeta)^k h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1}\Big\{\binom{k}{1}(z-\zeta)^{k-1}\mu_n^{(r-1)} - \binom{k}{2}(z-\zeta)^{k-2}\,{}^{(1)}\varphi_n^{(r-2)} + \dots \\
& \qquad + \binom{k}{j}(-1)^{j-1}(z-\zeta)^{k-j}\,{}^{(j-1)}_{(j-2)}\varphi_n^{(r-2)} + \dots \\
& \qquad + (-1)^{k-1}\,{}^{(k-1)}_{(k-2)}\varphi_n^{(r-2)}\Big\}.
\end{aligned}
$$

En effet, la formule (1) donne

$$h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^2\varphi\} = (z-\zeta)h_n^{(r)}\{(z-\zeta)\varphi\} - \frac{z}{n+1}\mu_n^{(r-1)}\{(z-\zeta)\varphi\},$$

puis, les formules (1) et (2) donnent

$$h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^2\varphi\} = (z-\zeta)^2 h_n^{(r)}(\varphi) - \frac{z}{n+1}\Big\{\binom{2}{1}(z-\zeta)\mu_n^{(r-1)}(\varphi) - {}^{(1)}\varphi_n^{(r-2)}\Big\}$$

et ceci est le développement (6) écrit pour $k=2$.

Si l'on suppose ce développement vrai pour $k=j$, les formules (1), (2) et (5) nous permettent de vérifier qu'il est vrai aussi pour $k=j+1$ et, par suite, qu'il est vrai dans le cas général.

Il nous faut maintenant examiner l'expression entre accolades dans le développement (6). Pour cela, observons que la relation

$${}^{(s)}_{(l)}\varphi_n^{(r)} = l\,{}^{(s)}_{(l-1)}\varphi_n^{(r)} + {}^{(s)}_{(l-1)}\varphi_n^{(r-1)}$$

permet d'écrire

$${}^{(j-1)}_{(j-2)}\varphi_n^{(r-2)} = (j-2)!\,{}^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2)} + \sum_i \alpha_i^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2-i)} \qquad (i>0),$$

où $r-2-i$ peut être positif, nul ou négatif et où les α_i sont des constantes indépendantes de n.

Le terme principal dans ce développement est le premier. En effet, pour $r-2-i<0$, on observera que ${}^{(1)}\varphi_n^{(-1)}$, étant égal à $b_n z^{n+1}$, tend vers zéro géométriquement et, par suite, que ${}^{(s)}\varphi_n^{(-1)}$ tend aussi vers zéro géométriquement. Faisant usage de la relation

$${}^{(s)}\varphi_n^{(r-1)} = (n+1)\left({}^{(s)}\varphi_n^{(r)} - {}^{(s)}\varphi_{n-1}^{(r)}\right)$$

on voit que, dans ce cas, ${}^{(j-1)}\varphi_n^{(r-2-i)}$ tend vers zéro géométriquement.

Pour $r-2-i=0$, on observera que ${}^{(s)}\varphi_n^{(0)} = {}^{(s)}\varphi_n$ tend uniformément vers ${}^{(s)}\varphi$ qui est fini.

Pour $r-2-i>0$, nous ferons usage de la formule

$${}^{(s)}\varphi_n^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{{}^{(s)}\varphi_\nu^{(r-1)}}{\nu+1}$$

et des calculs, analogues à ceux déjà faits pour $\mu_n^{(r)}$, montrent que ${}^{(j-1)}_{\ i}\varphi_n^{(r-2-i)}$ est asymptotiquement égal à $\dfrac{(\log n)^{r-2-i}}{(r-2-i)!}\,{}^{(j-1)}\varphi_n$.

Le terme principal est donc le premier et son ordre est $(\log n)^{r-2}$. De plus, $\mu_n^{(r-1)}$ est de l'ordre de $(\log n)^{r-1}$.

Le changement de variable

$$Z=\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)\left\{\frac{(r-2)!\,n}{(k-2)(\log n)^{r-2}}\right\}^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{z}{\zeta}-1\right)\rho_n^{\frac{1}{k}}$$

ou

$$z=\zeta\left(1+Z\rho_n^{-\frac{1}{k}}\right),\qquad \rho_n=\frac{(r-2)!\,n}{(k-2)!\,(\log n)^{r-2}}$$

donne alors pour le développement (6)

$$\begin{aligned}
&h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^k\varphi\}\\
&\quad=\rho_n^{-1}\Bigg[\zeta^k Z^k H_n^{(r)}(Z)-\frac{\zeta\left(1+Z\rho_n^{-\frac{1}{k}}\right)}{n+1}\\
&\qquad\times\Bigg\{\binom{k}{1}\zeta^{k-1}Z^{k-1}\rho_n^{\frac{1}{k}}M_n^{(r-1)}(Z)\\
&\qquad\quad-\binom{k}{2}\zeta^{k-2}Z^{k-2}\rho_n^{\frac{2}{k}}\,{}^{(1)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)+\ldots\\
&\qquad\quad+\binom{k}{j}(-1)^{j-1}\zeta^{k-j}Z^{k-j}\rho_n^{\frac{j}{k}}\,{}^{(j-1)}_{(j-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)+\ldots\\
&\qquad\qquad+(-1)^{k-1}\rho_n\,{}^{(k-1)}_{(k-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)\Bigg\}\Bigg]=\rho_n^{-1}\,\zeta\,B_n(Z),
\end{aligned}$$

où

$$H_n^{(r)}(Z)=h_n^{(r)}(\varphi),\qquad M_n^{(r-1)}(Z)=\mu_n^{(r-1)},$$
$${}^{(j-1)}_{(j-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)={}^{(j-1)}_{(j-2)}\varphi_n^{(r-2)}\qquad(2\leqq j\leqq k),$$

Considérons le binome

(7) $$B(Z)=\zeta^{k-1}Z^k\varphi(\zeta)+(-1)^{k(k-1)}\varphi(\zeta)$$

et une région finie R du plan Z contenant les k zéros α_i de $B(Z)$ $(1\leqq i\leqq k)$.

Il suit de ce qui précède que, dans cette région,

$$\frac{M_n^{(r-1)}(Z)\rho_n^{\frac{1}{k}}}{n+1}$$

qui est de l'ordre de

$$\frac{(\log n)^{r-1}n^{\frac{1}{k}}}{n(\log n)^{\frac{r-2}{k}}}=\frac{(\log n)^{\frac{(k-1)r-(k-2)}{k}}}{n^{\frac{k-1}{k}}},$$

tend uniformément vers zéro et aussi que

$$\frac{\rho_n^{\frac{j}{k}}\,{}^{(j-1)}_{(j-2)}\Phi_n^{(r-2)}(Z)}{n+1},\qquad (j<k),$$

qui est de l'ordre de

$$\frac{n^{\frac{j}{k}}(\log n)^{r-2}}{(\log n)^{\frac{(r-2)j}{k}}\, n} = \frac{(\log n)^{\frac{(r-2)(k-j)}{k}}}{n^{\frac{k-j}{k}}},$$

tend uniformément vers zéro, tandis que

$$\frac{\rho_n {}^{(\kappa-1)}_{(k-2)} \Phi_n^{(r-2)}(\mathrm{Z})}{n}$$

tend uniformément vers ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta)$.

De plus, $\mathrm{H}_n^{(r)}(\mathrm{Z})$ tend uniformément vers $\varphi(\zeta)$.

Il s'ensuit que $\mathrm{B}_n(\mathrm{Z})$ tend vers le binome $\mathrm{B}(\mathrm{Z})$, uniformément dans R et, par suite, qu'il y a k zéros Z_{ni} de $\mathrm{B}_n(\mathrm{Z})$ qui tendent vers les k zéros α_i de $\mathrm{B}(\mathrm{Z})$, lesquels sont les sommets d'un polygone régulier de k côtés et de centre O, quand ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta) \neq 0$, et coïncident avec l'origine quand ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta) = 0$.

Aux k zéros $\mathrm{Z}_{ni}(1 \leqq i < k)$ de $\mathrm{B}_n(\mathrm{Z})$ correspondent, par la transformation

$$z = \zeta\left(1 + \mathrm{Z}\rho_n^{-\frac{1}{k}}\right),$$

k zéros z_{ni}, pour le polynome $h_n^{(r)}\{(z-\zeta)^k\varphi\}$, qui tendent vers ζ et pour lesquels on a, par suite,

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{z_{ni}}{\zeta} - 1\right)\rho_n^{\frac{1}{k}} = \alpha_i \qquad (1 \leqq i \leqq k).$$

C'est la loi que nous avions en vue d'établir.

Remarque. — Dans le cas des Moyennes de Cesàro et dans celui des polynomes de Jensen, les zéros de l'équation limite étaient sur l'axe réel et cela nous a permis de déduire que dans le voisinage d'un zéro réel ζ de $f(z)$, à coefficients réels, les zéros des fonctions d'approximation étaient réels.

Dans le cas actuel, on ne peut faire une telle déduction; l'équation limite $\mathrm{B}(\mathrm{Z}) = 0$ implique que, quel que soit ζ, les z_{ni} sont « presque » régulièrement distribués autour de ζ, à moins que ${}^{(k-1)}\varphi(\zeta) = 0$.

Degré d'approximation, en un point, par les moyennes de Hölder.

Dans le cas d'un zéro simple ζ, la relation (1′) donne

$$h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} = \frac{-\zeta}{n+1}\,\frac{\{\log(n+1)\}^{r-1}}{(r-1)!}\,\psi_n^{(r-1)}(\varphi),$$

de sorte que

$$\lim_{n \to \infty} h_n^{(r)}\{f(\zeta)\}\frac{n}{(\log n)^{r-1}} = \frac{-\zeta}{(r-1)!}f'(\zeta) \qquad (r \geqq 2)$$

et dans le cas d'un zéro d'ordre $k \geqq 2$, la formule (6) donne

$$h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} = (-1)^k \frac{\zeta}{n+1}\, {}^{(k-1)}_{(k-2)}\varphi_n^{(r-2)}(\zeta)$$

et ${}^{(k-1)}_{(k-2)}\varphi_n^{(r-2)}$ étant asymptotiquement égal à $(k-2)!\,\frac{(\log n)^{r-2}}{(r-2)!}\,{}^{(k-1)}\varphi_n$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} h_n^{(r)}\{f(\zeta)\}\,\frac{n}{(\log n)^{r-2}} = (-1)^k \zeta\,\frac{(k-2)!}{(r-2)!}\,{}^{(k-1)}\varphi(\zeta).$$

Si maintenant ζ *est un point quelconque du cercle de convergence* de $f(z)$ et si l'on pose

$$\mathrm{F}(z) = f(z) - f(\zeta),$$

ζ sera un zéro de $\mathrm{F}(z)$ et l'on aura

$$h_n^{(r)}\{\mathrm{F}(z)\} = h_n^{(r)}\{f(z)\} - f(\zeta).$$

Si ζ est un zéro simple, on aura

$$\lim_{n\to\infty} [h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} - f(\zeta)]\,\frac{n}{(\log n)^{r-1}} = \frac{-\zeta}{(r-1)!} f'(\zeta) \qquad (r \geqq 2)$$

et *si ζ est un zéro d'ordre de multiplicité $k \geqq 2$, on aura*

$$\lim_{n\to\infty} [h_n^{(r)}\{f(\zeta)\} - f(\zeta)]\,\frac{n}{(\log n)^{r-2}} = (-1)^k \zeta\,\frac{(k-2)!}{(r-2)!}\,{}^{(k-1)}\varphi(\zeta) \qquad (r \geqq 2).$$

CHAPITRE VI.

Sur les zéros des polynomes de convergence maximale.

Introduction et notations (¹). — Soit C un ensemble fermé et borné du plan des z dont le complémentaire K est connexe et régulier en ce sens qu'il possède une fonction de Green $\mathrm{G}(x, y)$ ayant un pôle à l'infini. La fonction

$$w = \varphi(z) = e^{\mathrm{G}+i\mathrm{H}},$$

où H est conjuguée de G dans K, réalise la représentation conforme de K sur l'extérieur du cercle-unité dans le plan des w, de sorte que les points à l'infini se correspondent.

Appelons C_R la courbe du plan des z définie par $|\varphi(z)| = \mathrm{R} > 1$. Cette courbe est composée d'un nombre fini de courbes analytiques de Jordan, bornées et extérieures les unes aux autres ou bien ayant un nombre fini de points communs.

(¹) *Voir* J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, p. 65 et suiv., New-York, 1935.

Soit $f(z)$ une fonction analytique et uniforme dans C. Il existe alors un plus grand nombre (fini ou infini), que nous désignerons toujours par ρ, tel que $f(z)$ soit analytique et uniforme en chaque point intérieur à C_ρ.

Nous dirons qu'une suite de polynomes $f_n(z)$, de degrés respectifs n, converge maximalement vers $f(z)$ sur C si à tout nombre R, tel que $\rho > R > 1$, il correspond un nombre fini M qui dépend de R mais non de n ni de z et tel que

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{M}{R^n} \qquad (z \in C). \tag{1}$$

De (1), on peut déduire [1]

$$|f(z) - f_n(z)| \leq M_1 \left(\frac{\sigma}{R}\right)^n \qquad (z \in C_\sigma), \tag{2}$$

où $1 < \sigma < R$ et M_1 est indépendant de n et de z mais peut dépendre de σ et de R.

Lemme. — *Soit* C *un ensemble fermé et borné dont le complémentaire* K *est connexe et régulier. Soit $f(z)$ une fonction analytique et uniforme dans* C *et ζ un zéro d'ordre de multiplité k de $f(z)$, qui est à l'intérieur de C_ρ mais n'appartient pas à* C. *Soit $f_n(z)$ une suite de polynomes convergeant maximalement vers $f(z)$ sur* C, *et ζ_{nj} l'un des k zéros de $f_n(z)$ qui tendent vers ζ. Alors, si $w = \varphi(z)$ est la fonction qui réalise la représentation conforme de* K *sur l'extérieur du cercle $|w| \leq 1$ du plan des w, de sorte que les points à l'infini se correspondent, on a*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{nj} - \zeta|^{\frac{1}{n}} \leq \left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}} \qquad (1 \leq j \leq k).$$

Choisissons une courbe équipotentielle $C_\sigma (1 < \delta < R < \rho)$ telle que C_σ contienne le point ζ en son intérieur et posons

$$f(z) = (z - \zeta)^k g(z), \qquad g(\zeta) \neq 0.$$

On a, avec les notations du lemme et en tenant compte de (2),

$$\begin{aligned} |(\zeta_{nj} - \zeta)^k g(\zeta_{nj})| &= |f(\zeta_{nj})| = |f(\zeta_{nj}) - f_n(\zeta_{nj})| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_\sigma} \left|\frac{f(z) - f_n(z)}{z - \zeta_{nj}}\right| |dz| \leq \frac{1}{2\pi} L(C_\sigma) \frac{1}{\delta_n} M\left(\frac{\sigma}{R}\right)^n, \end{aligned} \tag{3}$$

où $L(C_\sigma)$ désigne la longueur de C_σ et δ_n le minimum de $|z - \zeta_{nj}|$ quand z est sur C_σ.

ζ étant à l'intérieur de C_σ et ζ_{nj} tendant vers ζ, le nombre δ_n a une limite inférieure positive. De plus, $g(\zeta_{nj})$ tend vers $g(\zeta) \neq 0$ et l'on déduit de (3)

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_{nj} - \zeta|^{\frac{k}{n}} \leq \frac{\sigma}{R}. \tag{4}$$

---

[1] Walsh, *loc. cit.*, p. 81.

Mais R peut être pris aussi voisin que l'on veut de ρ et C_σ étant soumis à la seule condition que ζ soit en son intérieur, on peut prendre $\sigma > |\varphi(\zeta)|$ mais aussi voisin que l'on veut de $|\varphi(\zeta)|$ et (4) donne alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj}-\zeta|^{\frac{k}{n}} \frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho}. \tag{5}$$

Remarque. — Il est évident que dans (5) *le signe d'inégalité n'est pas toujours exclu;* car, considérons encore

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z), \qquad g(\zeta) \neq 0,$$

où $g(z)$ est analytique dans C. Soit $g_n(z)$ une suite de polynomes qui convergent maximalement vers $g(z)$ sur C.

On a, d'après (1),

$$|g(z)-g_n(z)| \leqq M_1\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad R > 1, \qquad z \in C.$$

et par suite

$$|(z-\zeta)^k \{g(z)-g_n(z)\}| \leqq \delta^k M_1\left(\frac{1}{R}\right)^n,$$

où δ est le maximum de $|z-\zeta|$ pour $z \in C$.

Cette relation peut s'écrire

$$|(z-\zeta)^k g_n(z) - f(z)| \leqq M_2\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad z \in C.$$

Posons

$$f_{n+k}(z) = (z-\zeta)^k g_n(z),$$

on aura

$$|f_n(z) - f(z)| \leqq M_3\left(\frac{1}{R}\right)^n, \qquad z \in C.$$

La suite de polynomes $f_n(z)$ converge donc maximalement vers $f(z)$. Mais $f_n(z)$ admet le zéro $\zeta_n = \zeta$ et l'on a

$$|\zeta_n-\zeta)^{\frac{k}{n}} = |\zeta-\zeta|^{\frac{k}{n}} = 0,$$

ce qui montre que dans (5) c'est l'inégalité qui est vraie.

Le théorème suivant donne une classe de polynomes, de convergence maximale, pour lesquels on a exactement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj}-\zeta|^{\frac{k}{n}} = \frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho} \qquad (1 \leqq j \leqq k).$$

THÉORÈME. — *Supposons, avec les notations du lemme, que $f_n(z)$ soit de la forme*

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu p_\nu(z),$$

où les a_ν *sont des constantes et les* $p_\nu(z)$ *des polynomes de degré* ν. *Supposons de plus* [ρ et $\varphi(z)$ ayant leurs sens usuels] *que l'on ait*

$$(c_1) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\alpha\rho},$$

$$(c_2) \qquad \lim_{n\to\infty} |p_n(z)|^{\frac{1}{n}} = \alpha|\varphi(z)|$$

uniformément dans un voisinage de ζ, *extérieur à* C, α *étant une constante.*

Dans ces conditions, on a exactement

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\zeta_{nj} - \zeta|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}, \qquad (1 \leqq j \leqq k).$$

Posons

$$f(z) = (z-\zeta)^k g(z);$$

les polynomes $f_{n+1}(z)$ ayant exactement k zéros $\zeta_{n+1,j} (1 \leqq j \leqq k)$ tendant vers ζ, on posera aussi

$$(6) \qquad f_{n+1}(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - \zeta_{n+1,j}) g_{n+1}(z).$$

Montrons que $g_n(z)$ tend vers $g(z)$, uniformément dans un voisinage assez petit de ζ intérieur à C_ρ.

On a

$$g_n(z) - g(z) = \frac{f_n(z)}{\prod_j (z-\zeta_{nj})} - \frac{f(z)}{(z-\zeta)^k} = \frac{(z-\zeta)^k f_n(z) - f(z)\prod_j (z-\zeta_{nj})}{(z-\zeta)^k \prod_j (z-\zeta_{nj})}$$

$$= \frac{\left\{(z-\zeta)^k - \prod_j (z-\zeta_{nj})\right\} f_n(z) + \prod_j (z-\zeta_{nj}) \left\{ f_n(z) - f(z) \right\}}{(z-\zeta)^k \prod_j (z-\zeta_{nj})}.$$

On voit sur cette formule que $|g_n(z) - g(z)|$ tend uniformément vers zéro sur la frontière d'un petit cercle de centre ζ, intérieur à C_ρ (chacune des deux accolades tend vers zéro). Mais $g(z)$ et $g_n(z)$ étant holomorphes, on en conclut, par le principe du module maximum, que $|g(z) - g_n(z)|$ tend uniformément vers zéro dans un voisinage de ζ.

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} g_{n+1}(\zeta_{nj}) = g(\zeta) \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |g_{n+1}(\zeta_{nj})|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Considérons maintenant la formule (6), on a, si l'on désigne par ζ_{ni} l'un des k zéros de $f_n(z)$ qui tendent vers ζ,

$$f_{n+1}(\zeta_{ni}) = a_{n+1} p_{n+1}(\zeta_{ni}) = \prod_{j=1}^{k} (\zeta_{ni} - \zeta_{n+1,j}) g_{n+1}(\zeta_{ni}),$$

et par suite,

$$(7)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\prod_j(\zeta_{ni}-\zeta_{n+1,j})\right|^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}|p_{n+1}(\zeta_{ni})|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\alpha\rho}\alpha\,|\varphi(\zeta)|=\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|,$$

en tenant compte de (c_1) et (c_2) et en particulier de l'uniformité de la convergence dans (c_2).

On a, de plus, d'après le lemme,

$$(8)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta|^{\frac{1}{n}}\leqq\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}\qquad(1\leqq i\leqq k),$$

$$(9)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{n+1,j}-\zeta|^{\frac{1}{n}}\leqq\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}\qquad(1\leqq j\leqq k).$$

On déduit de (8) et (9),

$$(10)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{ni}-\zeta_{n+1,j}|^{\frac{1}{n}}\leqq\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}\qquad(1\leqq i,j\leqq k).$$

Supposons que pour un zéro ζ_{nj_0} on ait

$$(11)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{nj_0}-\zeta|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}},$$

on en déduirait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{nj_0}-\zeta_{n+1,j_0}|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|^{\frac{1}{k}}$$

et par suite, d'après (10),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\prod_{j=1}^{k}|\zeta_{nj_0}-\zeta_{n+1,j}|\right|^{\frac{1}{n}}\leqq\prod_{j=1}^{k}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\zeta_{nj_0}-\zeta_{n+1,j}|^{\frac{1}{n}}<\left|\frac{\varphi(\zeta)}{\rho}\right|,$$

contrairement à (7). L'inégalité (11) est donc impossible et le théorème est démontré.

Applications.

Les conditions du théorème sont, par exemple, vérifiées dans les cas suivants.

Cas des polynomes orthogonaux. — C est supposé limité par une courbe rectifiable de Jordan Γ. Les polynomes $p_\nu(z)$ sont orthogonaux et normaux sur la courbe Γ. Si l'on détermine les a_ν par les relations

$$a_\nu=\int_\Gamma f(z)\overline{p_\nu(z)}\,dz\qquad(\nu=0,1,2,\ldots),$$

les fonctions

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu p_\nu(z)$$

convergeront maximalement vers $f(z)$.

De plus, on a [1]

$$(c_1) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho},$$

$$(c_2) \qquad \lim_{n \to \infty} |p_n(z)|^{\frac{1}{n}} = |\varphi(z)|,$$

uniformément dans un voisinage de ζ, pourvu que ζ ne soit pas un zéro de $\varphi'(z)$. Toutes les conditions du théorème sont donc satisfaites.

Cas des polynomes d'interpolation. — Soit $\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)}, \ldots, \beta_{n+1}^{(n)}$ un ensemble de $n+1$ points $z_k^{(n)}$ de C (points de Fekete) tels que le module du produit (déterminant de Vandermonde)

$$V_n(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_{n+1}^{(n)}) = \prod_{i<j=1}^{n+1} (z_i^{(n)} - z_j^{(n)})$$

soit maximum.

Ordonnons les points du tableau

$$\begin{array}{llll}
\beta_1^{(0)}, & & & \\
\beta_1^{(1)}, & \beta_2^{(1)}, & & \\
\ldots, & \ldots, & & \\
\beta_1^{(n)}, & \beta_2^{(n)}, & \ldots & \beta_{n+1}^{(n)}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,
\end{array}$$

en une suite simple $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$, les éléments étant pris suivant leur ordre dans chaque ligne et les lignes étant prises dans leur ordre.

Dans ces conditions, on a

$$(c_2) \qquad \lim_{\nu \to \infty} |(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_\nu)|^{\frac{1}{\nu}} = \Delta |\varphi(z)|,$$

uniformément dans tout ensemble fermé et borné, intérieur à K, Δ étant la capacité (diamètre transfini) de C [2].

De plus, la série d'interpolation

$$(12) \qquad a_0 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)(z - z_2) + \ldots$$

de la fonction $f(z)$ aux points z_ν converge maximalement vers $f(z)$ sur C [3].

Enfin, on peut montrer que l'on a

$$(c_1) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\Delta \rho}.$$

---

(1) Walsh, *loc. cit.*, p. 128 et 132.
(2) Walsh, *loc. cit.*, p. 157.
(3) Walsh, *loc. cit.*, p. 159.

En effet, la série (12) étant convergente en tout point z intérieur à C_ρ, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n(z-z_1)\ldots(z-z_n)|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\Delta\,|\varphi(z)|\leqq 1,$$

et par suite,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{\Delta\,|\varphi(z)|}.$$

z pouvant être pris aussi voisin qu'on le veut de la courbe C_ρ, définie par

$$|\varphi(z)| = \rho,$$

on obtient ainsi

$$\overline{\lim_{n\to\infty n}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{\Delta\rho}.$$

Il est de plus facile, en faisant directement usage de deux théorèmes de Walsh ([1]), de voir que l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \lneqq \frac{1}{\Delta\rho}$$

est impossible.

Les conditions de notre théorème sont donc satisfaites.

Cas des sommes partielles d'une série entière. — ζ étant un zéro de multiplicité k pour la fonction $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, intérieur au cercle de convergence de rayon ρ_1 de la série, choisissons pour C un cercle centré à l'origine et de rayon $\alpha < |\zeta|$.

La fonction $\varphi(z)$, qui réalise la représentation conforme de l'extérieur de C sur l'extérieur du cercle $|w| \leqq 1$, est évidemment $\varphi(z) = \frac{z}{\alpha}$. La courbe C_ρ est définie par

$$|\varphi(z)| = \rho, \qquad \left|\frac{z}{\alpha}\right| = \rho, \qquad |z| = \alpha\rho$$

et l'on a évidemment $\rho_1 = \alpha\rho$.

Les $f_n(z)$ étant les sommes partielles $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ et les $p_n(z)$ étant z^n, on a

$$(c_1) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\alpha\rho},$$

$$(c_2) \qquad \lim_{n\to\infty}\,|z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| = \alpha\left|\frac{z}{\alpha}\right| = \alpha\,|\varphi(z)|.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de M. Fekete concernant les sommes partielles des séries entières.

([1]) WALSH, *loc. cit.*, p. 83 et 157.

CHAPITRE VII.

Sur un problème inverse.

Soit une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$ qui tendent, uniformément dans un domaine $(\mathcal{D})$, vers la fonction $f(z) \not\equiv 0$, ayant au point ζ un zéro d'ordre k de multiplicité et λ_n, une borne supérieure de $|f_n(z) - f(z)|$ quand z appartient à $(\mathcal{D})$. Si l'on pose

$$f(z) = (z-\zeta)^k \varphi(z), \qquad \varphi(\zeta) \neq 0,$$

on aura

$$f_n(z) - f(z) = f_n(z) - (z-\zeta)^k \varphi(z),$$

et, par suite, ζ_n étant un zéro de $f_n(z)$,

$$|(\zeta_n - \zeta)^k \varphi(\zeta_n)| = |f_n(\zeta_n) + f(\zeta_n)| \leq \lambda_n,$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k}{n}} \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} (\lambda_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Cette formule donne une *limitation de la distance des zéros quand on possède une limitation de la distance des fonctions*, c'est-à-dire de la rapidité de l'approximation.

Inversement, on peut se poser le problème suivant :

Étant donné une opération $U(f)$ *qui associe, à toute fonction* f *d'une famille* $(\mathcal{F})$ *de fonctions holomorphes dans un domaine* $(\mathcal{D})$, *une suite* $\{f_n\}$ *de fonctions qui tendent vers* f *uniformément dans* $(\mathcal{D})$; *si l'on possède une limitation de l'écart des zéros de* f *et* f_n, *valable pour toutes les fonctions* f *de la famille, trouver des propriétés d'approximation de l'opération* U.

Il est évident que si l'on ne sait rien sur la famille $(\mathcal{F})$, ni sur la structure de l'opération U, le problème reste vague; on peut le préciser.

Posons

$$U(f) = \{f_n\}.$$

Nous supposerons que *la famille* $(\mathcal{F})$ *contienne, avec* f, *toutes les fonctions* $f + \alpha$ où α est une constante et que, de plus,

$$U(f+\alpha) = \{f_n + \alpha\}.$$

Enfin, on supposera donnée une *fonction positive* $u(z)$, *inférieure ou égale à* 1 *dans* $(\mathcal{D})$ *et telle que,* ζ *étant un zéro d'ordre k de multiplicité de* $f(z)$, *on ait*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |\zeta_n - \zeta|^{\frac{k}{n}} \leq u(\zeta).$$

Avec ces hypothèses, on peut affirmer que, *pour toutes les fonctions $f(z)$ non constantes, on a l'inégalité*

$$\overline{\lim} \, |f_n(z) - f(z)|^{\frac{1}{n}} \leqq u(z).$$

Soit, en effet,

$$h(z) = (z - \zeta)^k \varphi(z), \qquad \varphi(\zeta) \neq 0,$$

une fonction de la famille $(\mathcal{F})$ et $U(h) = \{h_n(z)\}$. Posons

$$h_n(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - \zeta_{ni}) \varphi_{(n)}(z),$$

$\varphi_{(n)}(z)$ tend vers $\varphi(z)$, uniformément dans le voisinage de ζ, et par suite $\varphi_{(n)}(\zeta_{ni})$ tend vers $\varphi(\zeta) \neq 0$.

On a donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, |h_n(\zeta)|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \prod_{i=1}^{k} (\zeta - \zeta_{ni}) \right|^{\frac{1}{n}} \leqq \prod_{i=1}^{k} \overline{\lim_{n \to \infty}} \, |\zeta - \zeta_{ni}|^{\frac{1}{n}} \leqq u(\zeta).$$

Soient maintenant $f(z)$ une fonction non constante de la famille $(\mathcal{F})$ et ζ un point de $(\mathcal{D})$.

La fonction $h(z) = f(z) - f(\zeta)$ appartient à $(\mathcal{F})$. Par hypothèse,

$$h_n(z) = f_n(z) - f(\zeta),$$

et par suite,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, |f_n(\zeta) - f(\zeta)|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \, |h_n(\zeta)|^{\frac{1}{n}} \leqq u(\zeta),$$

ce qui démontre notre assertion.

On peut particulariser davantage et considérer la famille $(\mathcal{F})$ des *séries entières* ayant le cercle C_ρ, de centre zéro et de rayon ρ pour, cercle de convergence, puis *choisir pour $u(z)$ la fonction* $\frac{|z|}{\rho}$ pour $|z| < \rho$.

L'opération $U(f)$ sera définie par l'intermédiaire de la matrice de Tœplitz

$$\begin{matrix} b_{00}, & b_{01}, & b_{02}, & \ldots, & b_{0m}, & \ldots, \\ b_{10}, & b_{11}, & b_{12}, & \ldots, & b_{1m}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ b_{n0}, & b_{n1}, & b_{n2}, & \ldots, & b_{nm}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

dont tous les éléments sont positifs et vérifient

$$\lim_{n \to \infty} b_{nm} = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_m b_{nm} = 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Soit la fonction

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

de la famille ($\mathcal{F}$), posons

$$s_m(z) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu z^\mu.$$

La suite $\{f_n(z)\}$ *sera obtenue, à partir de la matrice de Tœplitz, par l'opération*

$$f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m(z).$$

Les fonctions $f_n(z)$ convergent vers $f(z)$, uniformément dans tout cercle $C_r(|z| \leqq r < \rho)$ et l'on a

$$f_n(z) + \alpha = \sum_m b_{nm}[s_m(z) + \alpha],$$

α désignant une constante.

Nous allons montrer que, dans ces conditions, *les fonctions* $f_n(z)$ *convergent géométriquement vers* $f(z)$ en ce sens que, σ *et* r *étant deux nombres soumis aux conditions* $0 < \sigma < r < \rho$, *on peut leur associer une constante* M *indépendante de* n *et de* z, *mais pouvant dépendre de* σ *et de* r, *telle que*

$$|f_n(z) - f(z)| \leqq M\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n, \qquad |z| \leqq \sigma.$$

La démonstration est immédiate. On a, comme on l'a vu plus haut,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |f_n(z) - f(z)|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{\sigma}{\rho}, \qquad |z| \leqq \sigma.$$

La fonction

$$F(z) = |a_0| + |a_1| z + |a_2| z^2 + \ldots,$$

appartient à la famille ($\mathcal{F}$), donc,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |F_n(z) - F(z)|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{\sigma}{\rho}, \qquad |z| \leqq \sigma.$$

$F(z) - F_n(z)$ est une série entière à coefficients positifs et supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la série $f(z) - f_n(z)$. On a, par suite,

$$F(\sigma) - F_n(\sigma) \geqq |f(z) - f_n(z)|, \qquad |z| \leqq \sigma.$$

De l'inégalité

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |F_n(\sigma) - F(\sigma)|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{\sigma}{\rho},$$

on déduit,

$$F(\sigma) - F_n(\sigma) \leqq M\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n,$$

quel que soit $r < \rho$, M étant une constante qui ne dépend que de σ et de r et non de n. Donc

$$|f_n(z) - f(z)| \leqq M\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n, \qquad |z| \leqq \sigma.$$