GASTON BENNETON

Configurations harmoniques et quaternions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 1-58
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONFIGURATIONS HARMONIQUES

ET

QUATERNIONS

PAR M. GASTON BENNETON.

INTRODUCTION.

Le présent Travail est l'exposé synthétique d'une théorie des *configurations harmoniques* dans l'espace à trois dimensions. Nous appelons ainsi les configurations de points et de plans autopolaires par rapport à une quadrique proprement dite. Cette famille géométrique très particulière comprend néanmoins les configurations le plus anciennement connues et les plus remarquables.

Dans une première Partie, nous montrons que la notion de quaternion donne un excellent procédé pour représenter les configurations harmoniques et pour rechercher les groupes d'homographies et de corrélations qui leur sont attachés. De la sorte, nous ramenons l'étude des propriétés projectives de ces figures à des questions purement algébriques et plus spécialement *arithmétiques* de la théorie des quaternions.

Une deuxième Partie est consacrée aux configurations remarquables, notamment celles, de nature tétraédrique, qu'on peut qualifier de *régulières :* les tétraèdres de Möbius, les tétraèdres desmiques, la configuration de Kummer, la configuration de Klein, et quelques autres obtenues par combinaisons des précédentes. Nous définissons toutes ces configurations au moyen de leurs propriétés géométriques usuelles; nous les réduisons à leur forme canonique par un choix convenable du tétraèdre de référence. Nous déterminons ensuite le groupe des transformations linéaires conservant globalement chaque configuration et sa quadrique directrice, puis nous rappelons quelques-unes des propriétés de la figure en une étude sommaire dépouillée de tout appareil analytique. Le mode de raisonnement adopté rappelle, par son caractère intrinsèque et ses notations condensées, les procédés classiques de la Géométrie vectorielle.

Ce Travail, qui renouvelle entièrement des questions connues sur les configurations, apporte en même temps des résultats inédits et ouvre la voie à certaines méthodes d'investigation. Nous souhaitons qu'il serve de point de départ à d'utiles recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

Opérations géométriques.

1, *Configurations de points et de plans.* — Un ensemble de points et de plans forme une *configuration* si par chaque point passe un même nombre de plans, et si dans chaque plan se trouve un même nombre de points. Les points et les plans sont aussi appelés *sommets* et *faces* de la configuration.

Nous considérons uniquement les figures comportant un nombre égal de points et de plans : *une configuration, représentée par le symbole (ou type) n_p est un ensemble de n points et de n plans tels que chaque plan contienne p points et que, par chaque point, passent p plans de l'ensemble.*

La figure la plus simple, relative à $n = 1$, est constituée par un point et un plan : nous la nommons *élément.* C'est une configuration 1_0 si le point est hors du plan, et une configuration 1_1 si le point est dans le plan. Deux éléments sont *en incidence* ou *unis* s'ils sont inscrits l'un dans l'autre, le plan de l'un passant par le point de l'autre, et inversement. On peut donc dire que tout élément 1_1 est en incidence avec lui-même.

Dans une configuration donnée, permutons les points entre eux, et les plans entre eux. Parmi toutes les permutations possibles, celles qui conservent la propriété d'incidence des éléments correspondants forment un groupe fini que l'on appelle *groupe des permutations* de la configuration [18]. On dit que deux points jouent un rôle *symétrique* dans la figure, ou encore qu'ils sont *similaires,* si l'un d'eux se substitue à l'autre [1] dans au moins une permutation du groupe. On définit de même les plans similaires. Une configuration est dite

---

[1] Il n'y a pas nécessairement échange des deux points.

régulière si tous ses points jouent un rôle symétrique, en même temps que tous ses plans : les points sont similaires et les plans sont similaires.

Deux configurations sont dites *semblables* (ou équivalentes), si elles sont de même type n_p et si, en outre, on peut établir entre elles une correspondance biunivoque de point à point et de plan à plan, de telle manière qu'à tout élément auto-incident 1_1 de l'une corresponde un élément auto-incident de l'autre. Les points et les plans vérifient alors les mêmes relations de coplanéité ou d'incidence dans les deux configurations. Un exemple simple est celui de configurations déduites l'une de l'autre par transformation homographique. Notons qu'une configuration régulière est semblable à elle-même de plusieurs manières.

Deux configurations n_p sont *réciproques* s'il existe entre elles une correspondance biunivoque de point à plan, telle qu'à tout élément auto-incident de l'une corresponde un élément auto-incident de l'autre : à des points coplanaires correspondent des plans concourants, et inversement. Les configurations qui se transforment l'une en l'autre par polarité par rapport à une quadrique, ou par rapport à un complexe linéaire, sont évidemment réciproques.

Au cours de ce travail, dès maintenant, *toutes les configurations étudiées seront supposées réciproques à elles-mêmes*. En voici une nouvelle définition que rend plus concise la notion d'élément : *Une configuration n_p, réciproque à elle-même, comprend n éléments distincts dont chacun est en incidence avec p éléments de l'ensemble*.

Par polarité par rapport à une quadrique ou un complexe linéaire, une telle configuration se transforme en une configuration semblable. Pour qu'elle soit régulière, il suffit que tous ses points soient similaires, car il en est alors de même de tous ses plans. Observons toutefois que deux éléments formés par deux points similaires et les plans correspondants (par réciprocité) ne jouent pas nécessairement un rôle symétrique dans la configuration.

2. *Diagrammes d'incidence*. — Précisons sur un exemple le sens des définitions précédentes et la nature de quelques problèmes qui se présentent pareillement pour toutes les configurations.

Considérons le cas de la configuration 4_2. Nommons ses éléments A, B, C, D et représentons les incidences mutuelles par le tableau rectangulaire

A	B
C	D

où nous convenons d'écrire les éléments en incidence dans la même ligne ou la même colonne : A et D sont en incidence avec B et avec C. Ce tableau constitue le *diagramme d'incidence*. Les éléments, et par suite les points, jouent un rôle symétrique puisqu'on peut échanger deux termes quelconques du diagramme (à condition d'échanger les deux autres). La configuration est donc régulière.

Elle est réalisée géométriquement par quatre plans formant tétraèdre, deux points sur une arête et deux autres points sur l'arête opposée.

La même configuration peut être aussi envisagée comme un système de quatre éléments auto-incidents 1_1 formant deux configurations 2_2 distinctes

$$\begin{array}{cccc} \underline{A'} & \underline{B'} & & \\ & & \underline{C'} & \underline{D'} \end{array}$$

les lettres soulignées désignant des éléments en incidence avec eux-mêmes.

Il existe encore une autre figure du type 4_2, constituée par quatre plans formant tétraèdre et quatre points répartis sur deux couples d'arêtes opposées : son diagramme s'écrit

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & B & \\ & C & \underline{D}. \end{array}$$

Le rôle des quatre éléments n'est plus symétrique, puisqu'il est impossible de permuter A et B. Mais cet ensemble représente néanmoins une configuration régulière, car les points sont similaires : on peut échanger les points A et B en permutant les points C et D entre eux, les plans B et C entre eux.

Les cas particuliers que nous venons d'examiner appellent une remarque importante concernant les diagrammes d'incidence en général : une configuration donnée peut admettre plusieurs diagrammes de formes différentes, selon la manière dont on associe les points et les plans qui composent ses éléments; mais inversement, si l'on se donne *a priori* un diagramme d'incidence, il n'existe pas obligatoirement de configuration correspondante réalisable géométriquement.

Étudions par exemple s'il existe des configurations, nécessairement régulières, qui possèdent un *diagramme linéaire*. Nous obtenons deux catégories :

les configurations n_n, ensembles de n points en ligne droite et de n plans concourants suivant cette droite

$$\underline{A} \quad \underline{B} \quad \underline{C} \quad \ldots \quad \underline{L};$$

les configurations n_{n-1}, qui n'existent que si n est inférieur ou au plus égal à 4 : configuration 2_1 formant un dièdre avec deux points sur l'arête, configuration 3_2 formant un trièdre avec un point sur chaque arête, configuration 4_3 formant un tétraèdre

$$A \quad B \quad C \quad D;$$

les trois premiers plans ne peuvent concourir suivant une même droite (celle-ci passerait alors par tous les points), et leur unique point commun détermine le quatrième et dernier sommet possible.

3. *Procédés de construction.* — A partir de configurations connues, par exemple celles dont le diagramme est linéaire, on peut obtenir de nouvelles

configurations au moyen d'opérations plus ou moins complexes. Voici quelques procédés usuels :

1° *Addition* de plusieurs configurations semblables. Nous réunissons k configurations n_p dont les diagrammes d'incidence (ou à défaut les diverses relations d'incidence) sont identiques. Si les éléments sont tous distincts, la somme obtenue est une configuration du type

$$kn_p.$$

Elle est régulière, s'il en est de même des k configurations composantes.

Par exemple, l'addition de deux configurations 4_2 à diagrammes rectangulaires donne une configuration 8_2 régulière de la forme

$$\begin{array}{cccc} A & B & & \\ C & D & & \\ & & A' & B' \\ & & C' & D'. \end{array}$$

2° *Soustraction* ou *réduction* d'une configuration par suppression de certains de ses éléments. Si le diagramme est linéaire, on peut en ôter des éléments quelconques. Si le diagramme est rectangulaire, on peut enlever plusieurs lignes ou colonnes. S'il est carré, on peut enlever les éléments d'une diagonale ou de plusieurs lignes (brisées) parallèles à cette diagonale. C'est ainsi, par exemple, que la configuration 16_6 à diagramme carré donne naissance aux configurations 12_5, 12_4, 8_4, 8_2, etc.

Des opérations analogues sont possibles dans un diagramme parallélépipédique ou cubique, par suppression de termes parallèlement aux bases ou aux plans diagonaux du diagramme.

3° *Duplication* d'une configuration par adjonction d'une nouvelle configuration inscrite à la première. Étant donnée une configuration n_p, transformons ses éléments par polarité par rapport à un complexe linéaire quelconque. Nous obtenons une nouvelle configuration n'ayant, en général, aucun point ou plan commun avec la première et du même type n_p puisque la transformation conserve la propriété d'incidence. En outre, puisque deux éléments quelconques conjugués par rapport au complexe sont en incidence, les deux configurations sont mutuellement *inscrites et circonscrites :* tout point de l'une est situé dans un plan de l'autre, et inversement. La figure totale constitue donc une configuration du type

$$2n_{p+1}.$$

Elle est régulière s'il en est de même de la configuration initiale.

Considérons par exemple un tétraèdre ABCD et le tétraèdre A'B'C'D' obtenu par polarité. L'ensemble est une configuration 8_4 représentable par le diagramme rectangulaire

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D'. \end{matrix}$$

C'est un couple de tétraèdres inscrits l'un dans l'autre ou *tétraèdres de Möbius*.

On peut répéter la même transformation polaire en utilisant un nouveau complexe linéaire. La configuration 8_4 donne naissance à une configuration 16_5 représentable par un diagramme parallélépipèdique dont les bases

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{matrix} \quad \left| \quad \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{matrix} \right.$$

ont leurs éléments en incidence deux à deux. De même on obtient les configurations 32_6, 64_7 correspondant à des diagrammes parallélépipédiques à quatre ou cinq dimensions. Et ainsi de suite.

4° *Multiplication* d'une configuration au moyen de plusieurs configurations mutuellement inscrites. Ce procédé, extension du précédent, utilise un système de k complexes linéaires choisis de telle sorte que, par polarité, les k transformés d'un élément quelconque de la configuration initiale soient en incidence mutuelle : les transformés A', A'', ... de A sont en incidence, de même que les transformés B', B'', ..., de B, etc.

$$\begin{matrix} A & B & C & \ldots \\ A' & B' & C' & \ldots \\ A'' & B'' & C'' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

On montre aisément que le nombre k ne dépasse pas 3. La structure des deux ou trois complexes utilisés dépend directement de la configuration initiale n_p qui, de ce fait, ne peut être prise absolument quelconque. Les n éléments, joints à tous leurs transformés, constituent trois ou quatre configurations n_p mutuellement inscrites et circonscrites dont la somme est une configuration du type

$$3n_{p+2} \qquad \text{ou} \qquad 4n_{p+3}.$$

Ce mode de multiplication est applicable à toute une famille de configurations que nous allons définir : les configurations *harmoniques*. Nous y trouverons notamment les systèmes de quatre tétraèdres mutuellement inscrits, configurations 16_6 à diagramme carré ou *configurations de Kummer*.

4. *Configurations harmoniques et quaternions*. — Dans toute configuration réciproque à elle-même il existe par définition une correspondance biunivoque de point à plan conservant la propriété d'incidence des éléments. L'exemple le plus simple d'une telle correspondance est la transformation polaire par rapport à une quadrique proprement dite. La configuration se transforme alors

globalement en elle-même par polarité : elle est *autopolaire par rapport à la quadrique*. Nous dirons, par abréviation, qu'elle est *harmonique*.

L'étude devient plus aisée, puisque la connaissance des points entraîne celle des plans, et inversement. Prenons, dans l'espace à trois dimensions, un système de coordonnées homogènes définissant la quadrique directrice ou *quadrique de base* par son équation canonique sous la forme

$$(\mathfrak{Q})\qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0.$$

Les éléments, points et plans, sont ainsi rapportés à un tétraèdre[1] de référence $\mathfrak{T}$ conjugué par rapport à la quadrique $\mathfrak{Q}$. A tout point de la configuration correspond le plan polaire ayant les mêmes coordonnées (ou paramètres directeurs), et inversement.

La notion de *quaternion* fournit un procédé extrêmement commode pour rechercher et étudier les configurations harmoniques :

Étant donné un point ou un plan A, dont les coordonnées (réelles ou imaginaires) par rapport à $\mathfrak{T}$ sont x_0, y_0, z_0, t_0, nous lui associons le quaternion

$$A=x_0+y_0 i+z_0 j+t_0 k,$$

défini à partir des quaternions unités 1, i, j, k. Nous désignons par la *même lettre* le quaternion, le point, le plan et l'élément correspondants : l'élément A comprend donc le point A et son plan polaire par rapport à la quadrique de base. Cette notation, qui sera employée systématiquement, permet de définir la somme et le produit de deux points (ou plans, ou éléments) par l'addition et la multiplication des quaternions correspondants. Notons que les points A et mA ne sont pas distincts lorsque m est un scalaire différent de zéro; pour cette raison, les quaternions seront généralement déterminés à un coefficient près et dépendront de trois paramètres seulement.

Les quatre points 1, i, j, k et les plans de même nom sont les sommets et les faces du tétraèdre de référence

$$(\mathfrak{T})\qquad 1\quad i\quad j\quad k.$$

Nous désignerons habituellement par J un élément quelconque de ce tétraèdre, ou encore l'un des quaternions unités, et par I une unité quelconque autre que 1 :

$$J=1,\ i,\ j,\ k;\qquad I=i,\ j,\ k.$$

Pour qu'un point A de coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 soit situé dans un plan B de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1, ou inversement, il faut et il suffit que

$$x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1+t_0t_1=0,$$

[1] Dont les sommets seront, le plus souvent, quatre points convenablement choisis de la configuration.

relation bilinéaire qui exprime aussi que les points A et B sont conjugués par rapport à la quadrique de base. La condition d'incidence de deux éléments A et B équivaut donc à l'*orthogonalité* des quaternions correspondants, c'est-à-dire

$$\text{p.scalaire } A\overline{B} = 0,$$

égalité signifiant que le produit d'un quaternion par le conjugué de l'autre a une partie scalaire nulle.

Le cas le plus intéressant est celui des quaternions orthogonaux de norme non nulle. L'expression générale des éléments B en incidence avec A s'écrit alors

$$B = AV, \qquad V = \lambda i + \mu j + \nu k.$$

Le quaternion B est le produit de A à droite (ou à gauche) par un *vecteur* V quelconque, quaternion ayant une partie scalaire nulle.

Si la norme du quaternion A est nulle, l'élément correspondant A, en incidence avec lui-même, est formé par un plan tangent à la quadrique de base et son point de contact. Tout autre élément B, en incidence avec lui-même et avec A, est de la forme

$$B = AQ \text{ ou } QA, \qquad N(A) = N(B) = 0,$$

Q désignant un quaternion quelconque. La multiplication de A par Q se fait à droite ou à gauche suivant que le point B se trouve sur l'une ou l'autre des deux génératrices de la quadrique qui passent par le point A.

Les considérations précédentes s'étendent à un nombre quelconque d'éléments. Nous pouvons donc énoncer ce principe général sur lequel nous baserons tout notre raisonnement à venir :

La recherche d'une configuration harmonique n_p équivaut à celle d'un tableau de n quaternions dont chacun est orthogonal à p quaternions du tableau (1).

Remarque. — Une méthode analogue serait applicable aux configurations autopolaires par rapport à un complexe linéaire.

Considérons par exemple le complexe obtenu en égalant deux coordonnées plückériennes

$$p_5 - p_6 = 0,$$

qui est l'un des six complexes de référence de la géométrie de Klein. Une droite du complexe joignant les points de coordonnées x, y, z, t et x', y', z', t' vérifie

$$zt' - z't - xy' + x'y = 0.$$

Au point A de coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 correspond donc le plan polaire de paramètres directeurs $-y_0$, x_0, t_0, $-z_0$.

(1) Il peut se faire que le quaternion soit orthogonal à $p-1$ autres et à lui-même.

Dans le langage des quaternions, nous pouvons dire que le point A a pour plan polaire Ai, formant un élément en incidence avec lui-même. Pour que les éléments relatifs à deux points A et B soient en incidence mutuelle, il faut que le point A soit situé dans le plan Bi, c'est-à-dire

$$\text{p.scalaire } \overline{A}Bi = 0;$$

la deuxième composante du produit $\overline{A}B$ doit être nulle.

5. *Multiplication des configurations harmoniques.* — Deux points A_1 et A_2 conjugués par rapport à la quadrique de base constituent avec leurs plans polaires deux éléments A_1 et A_2 en incidence mutuelle. Si nous multiplions les quaternions correspondants, à droite par exemple, par un même quaternion B, nous obtenons deux nouveaux éléments A_1B et A_2B qui sont aussi en incidence, puisque

$$\text{p.scalaire } A_1B.\overline{A_2B} = N(B) \quad \text{p.scalaire } A_1\overline{A_2}.$$

Au reste, ces éléments résultent des premiers par la transformation homographique définie par le multiplicateur B.

Considérons alors deux configurations autopolaires par rapport à une même quadrique choisie comme quadrique de base

$$\begin{array}{lll} A_\alpha, & \text{configuration } m_p & (\alpha = 1, 2, \ldots, m); \\ B_\beta, & \text{configuration } n_q & (\beta = 1, 2, \ldots, n). \end{array}$$

Multiplions les quaternions correspondants de la première par ceux de la deuxième : nous obtenons un ensemble de mn éléments $A_\alpha B_\beta$, que nous supposons distincts. Dans la première configuration l'élément A_α est en incidence avec p éléments A_λ, et dans la deuxième, B_β est en incidence avec q éléments B_μ. Il s'ensuit que l'élément $A_\alpha B_\beta$ est en incidence avec les $p+q$ éléments $A_\lambda B_\beta$ et $A_\alpha B_\mu$. S'il n'y a pas d'incidences particulières en dehors des précédentes, l'ensemble des mn éléments forme donc une configuration harmonique du type

$$A_\alpha B_\beta, \qquad \text{configuration } mn_{p+q}.$$

Nous l'appelons *produit à droite* de la configuration A_α par la configuration B_β. C'est aussi la somme des n configurations semblables

$$A_\alpha B_1, \quad A_\alpha B_2, \quad \ldots \quad A_\alpha B_n.$$

Le produit à gauche $B_\beta A_\alpha$ est une configuration semblable à $A_\alpha B_\beta$, sous la même réserve qu'il n'existe pas de coïncidences ou d'incidences particulières,

Ainsi, *étant données deux configurations m_p et n_q autopolaires par rapport à une même quadrique, il est généralement possible d'en déduire une nouvelle configuration harmonique correspondant à la multiplication du nombre des éléments mn et à l'addition du nombre des incidences $p+q$.*

Cette multiplication s'étend naturellement à un nombre quelconque de configurations autopolaires par rapport à une même quadrique; comme pour les quaternions, l'opération est associative. Notons que *le produit est une configuration régulière s'il en est de même des facteurs.*

En particulier, prenons comme multiplicateur une configuration harmonique simple 2_1, 3_2 ou 4_3 comprenant tout ou partie du tétraèdre

$$1 \quad V \quad V' \quad V'',$$

où les trois vecteurs V sont mutuellement orthogonaux. Le produit d'une configuration harmonique n_p par ce multiplicateur est, suivant le cas, une configuration du type

$$2n_{p+1}, \quad 3n_{p+2}, \quad 4n_{p+3}.$$

Cette opération équivaut à l'addition de deux, trois ou quatre configurations semblables, mutuellement inscrites et circonscrites; elle correspond à l'un des procédés de construction du numéro 3.

Remarque. — Nous avons supposé que les mn éléments $A_\alpha B_\beta$ étaient tous distincts et que chacun d'eux admettait au plus $p+q$ incidences. Dans l'hypothèse contraire, une étude directe est nécessaire. Toutefois, si l'on désire se ramener au cas normal, on peut substituer à la configuration A_α une configuration semblable $A_\alpha P$ convenablement choisie : pour que les éléments de la configuration résultante $A_\alpha P B_\beta$ soient distincts et ne présentent pas d'incidences particulières, il suffit que le point P ne soit pas situé sur certaines lignes ou surfaces simples (plans et quadriques) en nombre fini, qui dépendent des configurations données.

6. *Transformations linéaires.* — 1° Multiplions une configuration harmonique A_α à gauche par un élément P, à droite par un élément Q. Nous obtenons une configuration harmonique $PA_\alpha Q$ semblable à la première, dont elle résulte par transformation homographique.

Inversement, recherchons les transformations linéaires qui font correspondre à *toute* configuration autopolaire par rapport à une quadrique donnée (quadrique de base), une configuration semblable autopolaire par rapport à la même quadrique.

Désignons l'élément courant par

$$\xi = x + yi + zj + tk$$

et représentons la quadrique par son équation réduite (ponctuelle et tangentielle)

$$N(\xi) = 0.$$

Les transformations cherchées *conservent la propriété d'incidence* de deux éléments quelconques. En particulier, tout élément en incidence avec lui-même est tangent à la quadrique de base et se transforme en un élément tangent : la quadrique de base se transforme globalement en elle-même, ponctuellement et tangentiellement. Les transformations se présentent donc comme des substitutions linéaires conservant la norme à un coefficient près (¹), c'est-à-dire des *substitutions orthogonales* d'ordre 4. Elles se traduisent [28] par la multiplication du quaternion ξ ou de son conjugué, à gauche et à droite, par deux quaternions P et Q de *norme non nulle* (²)

$$P\xi Q \quad \text{ou} \quad P\bar{\xi}Q.$$

L'incidence de deux éléments A et B est bien conservée puisque

$$\text{p.scalaire}\,(PAQ.\overline{PBQ}) = N(P)N(Q)\ \text{p.scalaire}\ A\bar{B}.$$

Et la transformée d'une configuration harmonique est une configuration harmonique semblable.

Les précédentes transformations linéaires, puisqu'elles s'effectuent sur des éléments, peuvent être considérées à volonté comme des homographies ou des corrélations. Pour l'instant nous examinerons le seul cas des *homographies*.

2° Nous venons d'établir que les homographies conservant la quadrique de base constituent un groupe à six paramètres comprenant lui-même deux séries de transformations :

La première série est le groupe des *transformations propres* $P\xi Q$, homographies de type général, avec quatre points doubles situés sur la quadrique. En considérant deux points d'une même génératrice et leurs transformés (n° 4)

$$(A,\ AQ), \qquad (PAQ,\ PA), \qquad\qquad N(A) = 0,$$

nous voyons que les transformations conservent globalement chaque système de génératrices de la quadrique de base, à condition toutefois qu'aucun des quaternions P ou Q ne se réduise à un scalaire.

Si l'un des quaternions P ou Q est scalaire, les transformations se réduisent à

$$P\xi, \quad \xi Q$$

et déterminent des sous-groupes du groupe propre. Ainsi, *le groupe propre* $P\xi Q$ *contient deux sous-groupes à trois paramètres, conservant chacun les génératrices d'un même système*. Deux transformations $P\xi$ et ξQ appartenant respectivement aux deux sous-groupes sont permutables [20].

La seconde série, qui ne forme pas un groupe, comprend les transformations *impropres* $P\bar{\xi}Q$. Celles-ci permutent entre eux les deux systèmes

(¹) Transformations d'Hermite particulières.

(²) Norme que nous pouvons supposer égale à un.

de génératrices

$$(A, AP), \quad (P\bar{A}Q, \bar{A}Q), \qquad\qquad N(A) = 0,$$

quels que soient les quaternions P et Q.

3° Parmi toutes ces transformations, retenons particulièrement les homographies *involutives :* elles sont caractérisées par des quaternions P et Q qui ont leurs carrés scalaires, ou qui sont égaux, suivant que la transformation est propre ou impropre. Elles correspondent donc à l'une des formules

$$U\xi V, \quad U\xi, \quad \xi V, \quad P\bar{\xi}P,$$

U et V étant des vecteurs, P un quaternion.

La transformation $U\xi V$ représente une *homographie involutive biaxiale* dont les axes (ou directrices) sont deux droites conjuguées par rapport à la quadrique de base.

La transformation $U\xi$ ou ξU est aussi biaxiale, mais ses axes sont deux génératrices d'un même système de la quadrique de base, génératrices passant respectivement par les points

$$U + \varepsilon, \quad U - \varepsilon,$$

où ε désigne un scalaire imaginaire dont le carré vaut -1. Un point quelconque et son transformé sont conjugués harmoniques par rapport à la quadrique. Pour cette raison, nous dirons que l'homographie est *biaxiale harmonique* (par rapport à la quadrique de base). Cette propriété de conjugaison, jointe à l'invariance de la quadrique, est d'ailleurs caractéristique puisque toute homographie $P\xi Q$ pour laquelle l'égalité

$$\text{p.scalaire} \quad P\xi Q\bar{\xi} = 0$$

est vérifiée identiquement, quel que soit ξ, a nécessairement la forme $U\xi$ ou ξU.

La transformation $P\bar{\xi}P$ est une homographie centrale involutive ou *homologie involutive*. L'élément P constitue le centre et le plan de l'homologie, qui sont polaires réciproques par rapport à la quadrique.

Signalons en terminant ce résultat immédiat sur la décomposition d'une transformation d'Hermite en un produit d'homographies particulières : *Toute transformation propre* $P\xi Q$ *peut être considérée, d'une infinité de manières, comme le produit de deux homographies involutives biaxiales, et aussi comme le produit de quatre homographies biaxiales harmoniques permutables deux à deux.* En effet, tout quaternion P ou Q équivaut au produit de deux vecteurs. Dans le même ordre d'idées, *toute transformation impropre est le produit d'une transformation propre par une homologie involutive particulière,* $\bar{\xi}$ par exemple.

7. *Quelques groupes finis de transformations.* — Une famille de transformations homographiques qui laisse invariante une quadrique donnée et conserve

globalement une configuration autopolaire par rapport à cette quadrique, constitue en général un *groupe fini* de transformations.

1° Le cas le plus simple est celui des homographies qui conservent en même temps la quadrique de base et le tétraèdre de référence $1, i, j, k$. D'abord, elles s'écrivent $P\xi Q$ ou $P\bar{\xi}Q$. Puisque l'élément 1 se transforme en élément J, unité quelconque, les quaternions P et $\bar{Q}$ sont *associés à droite* (¹)

$$\bar{Q} = JP.$$

Pour que les éléments i, j, k se transforment en trois nouvelles unités, il faut en outre que les quaternions P et Q soient eux-mêmes unités ou sommes de deux ou quatre unités

$$J, \quad J \pm J', \quad 1 \pm i \pm j \pm k,$$

c'est-à-dire des quaternions *entiers* de norme 1, 2 ou 4. Désignons globalement de tels quaternions par la lettre K. Ils ont pour propriété essentielle d'être *permutables avec le facteur unité*, de sorte que

$$KJ = J''K.$$

En définitive, les homographies cherchées constituent un *groupe fini* G_{192} ayant pour formule

$$K\xi\bar{K}J, \quad K\bar{\xi}\bar{K}J,$$

dont les 192 opérations correspondent aux permutations et changements de signe des coordonnées, de toutes les manières possibles.

Si nous effectuons les changements de signe des coordonnées uniquement sur deux d'entre elles ou sur aucune, nous obtenons un sous-groupe G_{96}, moitié du précédent, qui comprend les seules transformations propres $K\xi\bar{K}J$.

Inversement, le groupe des 192 homographies peut être inclus dans un groupe fini six fois plus nombreux G_{1152} représenté par

$$K\xi K', \quad K\bar{\xi}K',$$

où K et K′ désignent tous les quaternions entiers de norme 1, 2 ou 4, associés ou non [22]. Les 576 (²) transformations propres qu'il contient forment un nouveau groupe décomposable en produit de deux sous-groupes d'ordre 24

$$K\xi, \quad \xi K$$

que nous appelons *groupes desmiques* G'_{24} et G''_{24}.

(¹) Certains auteurs les appellent associés *à gauche*. Chaque quaternion est le produit de l'autre par une unité à gauche. Si les quaternions sont entiers (à composantes réelles entières), chacun d'eux est diviseur à droite de l'autre.

(²) Ou 24^2.

2° Parmi les transformations précédentes liées au tétraèdre de référence se trouvent notamment les seize homographies propres *involutives*

$$J\xi J'$$

constituant le *groupe fondamental* G_{16}. Celui-ci comprend la transformation identique ξ, six homographies biaxiales harmoniques $I\xi$ et ξI, trois homographies biaxiales $I\xi I$ ayant pour axes deux arêtes opposées du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, enfin six homographies biaxiales dont les axes coupent chacun deux arêtes opposées de $\mathfrak{T}$.

Le groupe fondamental G_{16} équivaut au produit de deux sous-groupes $J\xi$ et ξJ d'ordre 4, eux-mêmes produits de sous-groupes d'ordre 2

$$(\xi, i\xi)(\xi, j\xi), \quad (\xi, \xi i)(\xi, \xi j).$$

Il s'obtient aussi par multiplications successives et répétées de quatre transformations convenablement choisies, telles que

$$i\xi, \quad j\xi, \quad \xi i, \quad \xi j.$$

Il existe encore un *second groupe fondamental* G_8 comprenant quatre homographies biaxiales et quatre homologies

$$J\xi J, \quad J\bar{\xi}J$$

et transformant en lui-même chaque sommet du tétraèdre $\mathfrak{T}$. Ce groupe peut s'obtenir par multiplication et répétition des trois transformations $i\xi i$, $j\xi j$, $\bar{\xi}$.

3° D'une manière générale, considérons une transformation propre $P\xi Q$ conservant la quadrique de base et transformant en elle-même une configuration n_p autopolaire par rapport à cette quadrique. Au sommet A_1 de la configuration, non confondu avec un point double de l'homographie, elle substitue par exemple le sommet A_2; au sommet A_2 elle substitue le sommet A_3, et ainsi de suite jusqu'au sommet A_m, premier point tel, qu'elle remplace par le point initial A_1. Le point A_1 est un point double de l'homographie $P^m\xi Q^m$ puisque

$$P^m A_1 Q^m = A_1$$

à un coefficient scalaire près.

Examinons spécialement le cas où la dernière égalité est vérifiée, non seulement pour A_1, mais pour un point quelconque de l'espace : la puissance $m^{\text{ième}}$ de la transformation $P\xi Q$ se réduit alors à la transformation identique et, pour cela, il faut et il suffit que les quaternions P^m et Q^m soient scalaires. Supposons les normes égales à un et écrivons les quaternions sous la forme

$$\begin{aligned} P &= \cos\theta + U\sin\theta, & Q &= \cos\theta' + V\sin\theta', \\ P^m &= \cos m\theta + U\sin m\theta, & Q^m &= \cos m\theta' + V\sin m\theta', \end{aligned}$$

U et V désignant eux-mêmes des vecteurs de norme un. Les sinus de $m\theta$ et $m\theta'$

doivent être nuls, ce qui donne la condition relative aux seules parties scalaires

$$\text{p.scalaire } P = \cos\frac{k\pi}{m}, \qquad \text{p.scalaire } Q = \cos\frac{k'\pi}{m},$$

k et k' désignant deux entiers positifs inférieurs à m, dont un au moins est premier avec m. Les puissances successives de l'homographie $P\xi Q$ constituent alors une *suite périodique* (¹)

$$\xi, \quad P\xi Q, \quad P^2\xi Q^2, \quad \ldots, \quad P^{m-1}\xi Q^{m-1}, \quad \xi, \quad \ldots.$$

En appliquant au point A_1 toutes les transformations de cette suite, on obtient un système de m points

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_m,$$

qu'on appelle *groupement cyclique fini* d'ordre m. *Les points de ce cycle appartiennent à une même quadrique* définie paramétriquement par la formule

$$(U+\lambda)A_1(V+\mu),$$

dont chaque système de génératrices correspond à une valeur constante de l'un des paramètres λ ou μ. Bien entendu cette quadrique reste invariante dans la transformation $P\xi Q$.

Pareillement, les homographies impropres $P\bar{\xi}Q$ définissent une périodicité d'ordre pair $2m$

$$(P\bar{Q})^m\xi(\bar{P}Q)^m = \xi$$

si les quaternions P et Q, supposés de norme un, satisfont à l'égalité

$$\text{p.scalaire } P\bar{Q} = \cos\frac{k\pi}{m}.$$

Le groupement cyclique d'ordre $2m$ engendré par les puissances d'une telle homographie se sépare en deux groupements d'ordre m, comprenant respectivement les points de rang pair et ceux de rang impair

$$(A_1, A_3, \ldots, A_{2m-1}), \quad (A_2, A_4, \ldots, A_{2m}).$$

Ces groupements se transforment l'un dans l'autre par l'homographie $P\bar{\xi}Q$ ou l'une de ses puissances impaires. Chacun d'eux est inscriptible dans une quadrique invariante dans la transformation $P\bar{Q}\xi\bar{P}Q$, carré de l'homographie précédente.

8. *Homographies permutables.* — Deux transformations propres $P\xi Q$ et $P'\xi'Q'$ ayant pour produit

$$P'P\xi QQ'$$

(¹) Si m est pair, la puissance $\frac{m}{2}^{\text{ième}}$ de la transformation est involutive.

ne sont pas permutables en général. Pour qu'elles le soient, il faut et il suffit que les quaternions correspondants aient un produit commutatif, c'est-à-dire, les normes étant différentes de zéro, que

$$P'P = \pm PP', \qquad QQ' = \pm Q'Q.$$

Plusieurs cas sont possibles : les quaternions P et P′ se réduisent à deux vecteurs orthogonaux, ou bien l'un d'eux est un scalaire, ou bien, s'ils ne sont ni scalaires, ni vecteurs, les deux quaternions ont leurs parties vectorielles proportionnelles (ils peuvent donc être conjugués). De même Q et Q′.

Dans ce dernier cas, qui est le plus général, *les transformations propres permutables avec* $P\xi Q$ *forment un groupe à deux paramètres*

$$(P + \lambda)\xi(Q + \mu).$$

Appliqué à un point donné, ce groupe engendre une double infinité de points situés sur une même quadrique.

Voici les critères de commutativité concernant les homographies involutives propres ou impropres :

Une homographie harmonique $U\xi$ est permutable avec toute homographie ξV; leur produit équivaut à une homographie biaxiale. Deux homographies harmoniques de même espèce, $U\xi$ et $U'\xi$, sont permutables si les vecteurs correspondants sont orthogonaux; leur produit est alors de la même espèce.

Deux homographies biaxiales $U\xi V$ et $U'\xi V'$ sont permutables, et ont pour produit une homographie biaxiale, si les vecteurs correspondants sont respectivement égaux ou orthogonaux.

Une homographie biaxiale $U\xi V$ est permutable avec une homologie involutive $P\bar{\xi}P$ si les quaternions satisfont à la relation

$$UP = mPV \qquad (m \text{ scalaire}).$$

Le point P est alors un point double de l'homologie involutive qui résulte des deux transformations.

Deux homologies involutives $P\bar{\xi}P$ et $Q\bar{\xi}Q$ sont permutables si les quaternions P et Q sont orthogonaux, et réciproquement. Leur produit est une homographie biaxiale admettant les points P et Q comme points doubles.

En particulier, *deux homographies quelconques du groupe fondamental* G_{16} *sont permutables, ainsi que deux homographies du second groupe fondamental* G_8.

La même propriété s'étend d'ailleurs à des systèmes semblables, tels que le groupe d'ordre 16 représenté par

$$PJ\bar{P}\xi\bar{Q}J'Q$$

(J et J′ désignant des unités quelconques) et le groupe d'ordre 8 représenté par

$$PJ\bar{P}\xi\bar{Q}JQ, \quad PJ'Q\bar{\xi}PJ'Q.$$

Ces deux groupes transforment en lui-même le tétraèdre PQ, PiQ, PjQ, PkQ conjugué par rapport à la quadrique de base, et peuvent être considérés comme les *transformés* des groupes fondamentaux G_{16} et G_8 par l'homographie PξQ.

9. *Polarités et quadriques fondamentales.* — 1° Envisageons maintenant les transformations linéaires liées à la quadrique de base comme des *corrélations*. Si elles sont involutives, elles prennent une forme plus concrète et deviennent des *polarités* par rapport à des quadriques et à des complexes linéaires que nous allons déterminer.

La polarité par rapport à un complexe linéaire se reconnaît immédiatement au fait qu'un élément quelconque ξ est en incidence avec son transformé

$$U\xi \quad \text{ou} \quad \xi V,$$

U et V désignant des vecteurs.

Les deux autres formes involutives

$$U\xi V, \quad P\bar{\xi}P$$

représentent chacune une polarité par rapport à une quadrique déterminée par les vecteurs U, V ou par le quaternion P. Ces quadriques, *que nous désignerons aussi par leur formule polaire* UξV ou P$\bar{\xi}$P, ont pour équations ponctuelles et tangentielles

$$\text{p.scalaire } U\xi V\bar{\xi} = 0, \qquad \text{p.scalaire } P\bar{\xi}P\bar{\xi} = 0;$$

par rapport à la quadrique de base, elles occupent une position remarquable que nous préciserons bientôt.

Signalons que les précédentes polarités transforment le tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ en tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base : elles conservent globalement cette quadrique et la famille de ses tétraèdres conjugués.

Examinons le cas des polarités permutables, dont le produit est commutatif par définition. *Deux complexes linéaires qui ont leurs polarités permutables sont dits en involution* (1); *nous dirons pareillement que deux quadriques sont en involution si elles déterminent des polarités permutables.*

Les résultats ci-après s'obtiennent immédiatement :

Tout complexe Uξ, faisant partie du réseau linéaire de complexes $i\xi$, $j\xi$, $k\xi$, est en involution avec tout complexe ξV du réseau ξi, ξj, ξk. Deux complexes d'un même réseau, tels que Uξ et U'ξ, sont en involution si les vecteurs U et U' sont orthogonaux, c'est-à-dire si les éléments U et U' sont en incidence.

Deux quadriques UξV et U'ξV' sont en involution si les vecteurs correspondants sont respectivement égaux ou orthogonaux. Deux quadriques UξV

(1) D'après Klein.

et $P\bar{\xi}P$ sont en involution si les points UP et PV sont confondus. Enfin deux quadriques $P\bar{\xi}P$ et $Q\bar{\xi}Q$ sont en involution si les quaternions P et Q sont orthogonaux. Ce résultat permet d'établir une correspondance entre certaines quadriques en involution et des éléments P, Q en incidence.

En particulier, *toute quadrique* $U\xi V$ *ou* $P\bar{\xi}P$ *est en involution avec la quadrique de base* ξ.

2° Les polarités qui conservent le tétraèdre de référence présentent une analogie avec les homographies des deux groupes fondamentaux.

Parallèlement au premier groupe fondamental, *les seize polarités* $J\xi J'$ *transforment le tétraèdre* $\mathcal{T}$ *en lui-même et sont permutables* (1). Elles définissent les complexes et quadriques que voici :

Les *six complexes fondamentaux en involution mutuelle*

$$i\xi,\quad j\xi,\quad k\xi,\quad \xi i,\quad \xi j,\quad \xi k,$$

dont les équations plückériennes s'écrivent

$$p_1 \pm p_4 = 0,\qquad p_2 \pm p_5 = 0,\qquad p_3 \pm p_6 = 0.$$

Ce sont les six complexes de référence de la géométrie réglée de Klein [10, 19, 21].

Les *dix quadriques fondamentales* $J\xi J'$, les unités J et J′ étant toutes deux choisies entre i, j, k, ou simultanément égales à 1. Ces quadriques, qui comprennent la quadrique de base, ont pour équations cartésiennes

$$x^2 \pm y^2 \pm z^2 \pm t^2 = 0,\qquad xy \pm zt = 0,\qquad xz \pm yt = 0,\qquad xt \pm yz = 0,$$

où la première équation, relative à $J = J'$, contient un nombre pair de signes moins. Elles sont en involution mutuelle et jouent un rôle parfaitement symétrique (n° 14). Chacune d'elles est conservée par les homographies du groupe fondamental G_{16}.

Parallèlement au second groupe fondamental d'homographies, on peut considérer huit polarités permutables qui définissent un système de *huit quadriques fondamentales* en involution mutuelle $J\xi J$ et $J\bar{\xi}J$. Leurs équations s'écrivent

$$x^2 \pm y^2 \pm z^2 \pm t^2 = 0.$$

Le tétraèdre de référence est conjugué commun. Chaque quadrique est conservée par les homographies du groupe fondamental G_8.

Les résultats sont analogues pour les systèmes de quadriques $U\xi V$ et $P\bar{\xi}P$ dont les polarités se déduisent des polarités fondamentales par une transformation homographique propre ou impropre. D'une manière précise, nous

(1) Ces polarités, jointes aux 16 homographies du groupe fondamental G_{16}, constituent un groupe de 32 transformations linéaires, ou *groupe de Kummer*.

montrerons que, par un choix convenable du tétraèdre de coordonnées, un ensemble quelconque de quadriques en involution mutuelle peut se transformer en quadriques fondamentales. Suivant le cas, cet ensemble pourra donc être inclus dans un système involutif de huit ou de dix quadriques.

DEUXIÈME PARTIE.

Figures remarquables.

10. *Vue d'ensemble.* — Les considérations de la Première Partie permettent de construire une classe étendue de configurations harmoniques.

Déjà, au n° 5, nous avons indiqué un procédé de multiplication qui, appliqué à deux configurations harmoniques données, engendre par produits successifs une suite illimitée de configurations de complexité croissante. Nous obtenons de cette manière, à partir du tétraèdre 4_3, des configurations du type

$$8_4, \quad 16_6. \quad 64_9, \quad 128_{10}, \quad \ldots,$$

qui représentent respectivement un couple de tétraèdres inscrits l'un dans l'autre ou *tétraèdres de Möbius* [3], un groupe de quatre tétraèdres mutuellement inscrits ou *configuration de Kummer* [7], et des ensembles de *configurations de Kummer mutuellement inscrites*. Ces configurations d'essence tétraédrique sont régulières. Celles de Möbius et de Kummer sont même *homographiquement régulières*, en ce sens que, par une transformation homographique conservant la configuration, on peut remplacer l'un quelconque de ses éléments par un autre arbitrairement choisi; autrement dit, le groupe des permutations de la configuration s'identifie précisément avec un groupe d'homographies.

Au n° 6, dans l'étude des homographies qui laissent invariante la quadrique de base, nous avons vu que toute transformation propre peut être considérée comme le produit de deux homographies biaxiales. Cette propriété est conforme aux résultats généraux de la géométrie de Cayley [26], où un déplacement équivaut au produit de deux retournements, la quadrique de base jouant alors le rôle de quadrique absolue. De ce point de vue, la théorie des configurations harmoniques est comparable à l'étude des figures polyédriques régulières dans l'espace non euclidien de la géométrie de Cayley. Les groupes de transformations liés aux configurations s'apparentent ainsi au groupe des déplacements, au sous-groupe des rotations et, plus particulièrement, à certains sous-groupes rotatifs discontinus (ou finis) conservant les polyèdres réguliers.

Inversement, la donnée de groupes finis de transformations homographiques ou de corrélations, notamment celles qui conservent le tétraèdre de référence (n° 7), permet de déduire les principales configurations harmoniques homographiquement régulières. Ainsi le groupe fondamental G_{16} appliqué à un élément quelconque de l'espace (un point quelconque et son plan polaire par rapport à la quadrique de base) engendre une *configuration de Kummer;* le second groupe fondamental G_8 engendre *deux tétraèdres desmiques* [13] et leurs polaires réciproques; le groupe desmique G'_{24} (ou G''_{24}) engendre une *configuration desmique* 24_9; le groupe total d'ordre 192 engendre un système de *douze configurations de Kummer* dont chacune est homologique de quatre autres; le groupe moitié, d'ordre 96, engendre un système de *six configurations de Kummer* dont chacune est homologique de trois autres,

Enfin, si l'on recherche tous les tétraèdres invariants dans les homographies du groupe fondamental G_{16}, on obtient un système remarquable de quinze tétraèdres qui est la *configuration* 60_{15} *de Klein* [10], intimement liée aux configurations desmiques et à la configuration de Kummer.

Nous allons étudier brièvement toutes ces configurations et établir leurs principales relations. Toutefois, pour rendre le raisonnement intuitif et en quelque sorte plus géométrique, nous définirons les configurations *a priori* par des propriétés usuelles. De même, pour matérialiser les homographies involutives liées à ces figures, nous leur substituerons le plus souvent des polarités par rapport à des quadriques associées. Aux groupes fondamentaux d'homographies et de corrélations correspondent ainsi des systèmes remarquables de huit ou dix quadriques en involution mutuelle.

11. *Tétraèdres de référence, tétraèdres conjugués.* — Un tétraèdre quelconque est une configuration 4_3 harmonique : il est *autopolaire* par rapport à une triple infinité de quadriques. Inversement, une quadrique donnée admet une sextuple infinité de tétraèdres autopolaires.

Étudions plus particulièrement les tétraèdres *conjugués*, c'est-à-dire les tétraèdres autopolaires n'ayant aucun sommet sur la quadrique, le plan polaire d'un sommet étant alors la face opposée.

Étant donnée une quadrique proprement dite, prenons l'un de ses tétraèdres conjugués comme tétraèdre de référence

$$(\mathfrak{T}) \qquad 1 \quad i \quad j \quad k$$

et choisissons le point unitaire des coordonnées de façon que la quadrique soit la quadrique de base ξ. Tout autre tétraèdre conjugué, nanti d'un point unitaire convenable, peut être pris comme tétraèdre de référence attribuant à la quadrique la même forme canonique ξ; il se déduit donc du précédent par substitution linéaire orthogonale des coordonnées, ou multiplication à gauche et à droite par des quaternions P et Q de norme non nulle

$$PQ \quad PiQ \quad PjQ \quad PkQ.$$

Cette expression canonique, écrite dans cet ordre, est manifestement valable *quel que soit l'ordre initial adopté pour les élements du tétraèdre*. D'ailleurs, en remplaçant P par un associé à gauche PJ, on peut faire en sorte que la formule PQ corresponde précisément au premier élément choisi du tétraèdre. Cela fait, pour que le deuxième élément prenne la forme PiQ, s'il ne la possède déjà, il suffit de multiplier P et $\overline{Q}$ à droite par $1+i$ ou $1+k$. S'il y a lieu, il suffit alors de multiplier les mêmes quaternions à droite par $1+i$ pour que le troisième élément devienne PjQ.

Rappelons que le tétraèdre précédent, qu'on peut écrire $P\mathfrak{T}Q$, se transforme en lui-même par les homographies propres ou impropres d'un groupe d'ordre 192 qui contient deux sous-groupes involutifs (n° 8), transformés des groupes fondamentaux G_{16} et G_8 par l'homographie $P\xi Q$.

Modifions l'écriture du tétraèdre conjugué $P\mathfrak{T}Q$ en posant $P=A\overline{Q}$ et en donnant ainsi le rôle principal à l'élément PQ devenu A. Nous obtenons

$$A \quad A\overline{Q}iQ \quad A\overline{Q}jQ \quad A\overline{Q}kQ.$$

Les trois derniers éléments sont le produit de A par trois vecteurs mutuellement orthogonaux, ce qui constitue bien l'expression usuelle de la configuration 4_3 harmonique

$$A \quad AV \quad AV' \quad AV''.$$

En particulier, si A se réduit à un scalaire, le tétraèdre possède trois sommets dans le plan 1 et le quatrième au point 1. Il est conjugué par rapport aux quadriques ξ et $\overline{\xi}$; il se déduit du tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ par la transformation $\overline{Q}\xi Q$ (1).

Ceci démontre que *trois vecteurs orthogonaux quelconques* V, V', V'' *sont décomposables en produits de quaternions conjugués de la forme*

$$V=\overline{Q}iQ, \qquad V'=\overline{Q}jQ, \qquad V''=\overline{Q}kQ.$$

La norme de ces vecteurs, différente de zéro, peut être supposée égale à un; leurs composantes, exprimées alors en fonctions symétriques de trois paramètres, définissent un tableau de neuf cosinus directeurs où l'on reconnaît les formules classiques d'O. Rodrigues [4].

12. *Tétraèdres autopolaires inscrits.* — Pour qu'un tétraèdre inscrit dans une quadrique soit en outre autopolaire, il faut que chaque sommet soit le point de contact d'une face. Deux couples d'arêtes opposées sont alors des génératrices de la quadrique sur laquelle ils forment un quadrilatère gauche : le tétraèdre est en même temps circonscrit.

---

(1) Cette homographie axiale correspond, dans la géométrie de Cayley, à une rotation autour de la droite 1, Q.

Supposons que la quadrique, par un choix convenable des coordonnées soit la quadrique de base ξ. L'expression générale des tétraèdres autopolaires inscrits dans la quadrique est

$$\begin{matrix} A & AQ \\ PA & PAQ \end{matrix} \qquad \mathrm{N}(A) = 0,$$

A désignant un quaternion de norme nulle, P et Q des quaternions quelconques. Puisque les points PA et AQ sont respectivement situés sur les deux génératrices passant par A, ils dépendent chacun d'un seul paramètre; ce qui permet de particulariser les quaternions P et Q et de supposer, par exemple, que deux de leurs composantes sont nulles. Les tétraèdres dépendent bien de quatre paramètres indépendants.

Inversement, à un tétraèdre donné correspond une infinité de quadriques l'admettant comme tétraèdre autopolaire inscrit : elles constituent trois faisceaux linéaires ponctuels (et tangentiels) déterminés par les trois quadrilatères gauches des arêtes du tétraèdre.

Dans les pages suivantes, nous verrons apparaître des ensembles simples de tétraèdres autopolaires inscrits formant des configurations harmoniques. Voici un premier aperçu sur ces figures.

Remarquons d'abord que, si nous nous donnons *a priori* un diagramme d'incidence à deux dimensions et de forme quelconque, il lui correspond sûrement une *configuration autopolaire inscrite* dans une quadrique donnée. Il suffit d'imaginer que les lignes du diagramme représentent autant de génératrices d'un même système de la quadrique, et que les colonnes représentent des génératrices de l'autre système. Par leurs intersections nous obtenons les sommets de la configuration, et aussi les faces par polarité.

Sur la quadrique de base, m génératrices d'un système et n génératrices de l'autre système déterminent ainsi un ensemble de mn éléments de formule

$$P_\alpha A Q_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m; \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

constituant une configuration harmonique à diagramme rectangulaire du type

$$mn_{m+n-1}.$$

Les cas les plus intéressants correspondent aux premières valeurs de m et n au plus égales à 6, notamment les configurations simples

$$4_3, \quad 8_5, \quad 12_7, \quad 16_7, \quad 24_9, \quad 36_{11}.$$

La configuration 4_3 est un tétraèdre inscrit. Un exemple de configuration 8_5 est donné par deux tétraèdres en liaison harmonique (n° 16). Trois tétraèdres qui sont mutuellement en liaison harmonique forment une configuration 12_7. Certaine configuration 16_7 à diagramme carré est liée aux tétraèdres de Möbius et peut être considérée comme une configuration de Kummer inscriptible. Les configurations autopolaires inscrites 24_9 et 36_{11} sont liées aux tétraèdres desmiques et à la configuration de Klein (n° 25). La configuration 36_{11} contient d'ailleurs les précédentes; par suppression de termes diagonaux de son diagramme, elle donne naissance à deux nouvelles configurations autopolaires inscrites, de types 24_7 et 16_5.

13. *Quadriques en involution.* — Considérons deux quadriques en involution, c'est-à-dire dont les polarités ont un produit commutatif. Ce produit équivaut à une homographie involutive dans laquelle tout élément tangent à l'une des surfaces (plan tangent et son point de contact) se transforme en élément tangent à la même surface. *Chaque quadrique est donc sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre quadrique.*

Prenons l'une des quadriques comme quadrique de base ξ. L'homographie résultant des deux polarités transforme la quadrique en elle-même, donc conserve $N(\xi)$ à un coefficient près : c'est une substitution orthogonale involutive (n° 6). De ce fait, la deuxième quadrique correspond nécessairement à une forme polaire du type

$$U\xi V \quad \text{ou} \quad P\bar{\xi}P.$$

Il convient par conséquent de distinguer deux espèces d'involution des quadriques respectivement aux deux formules précédentes.

1° Pour étudier la première involution, relative à la forme polaire $U\xi V$, décomposons les vecteurs U et V en produits de quaternions conjugués (n° 11)

$$U = \bar{Q}iQ, \qquad V = Q'i\bar{Q'}.$$

L'équation cartérienne de la quadrique $U\xi V$ devient

$$\text{p.scalaire } iQ\xi Q' i\bar{Q'}\bar{\xi}\bar{Q} = 0.$$

Effectuons alors l'homographie $Q\xi Q'$, que nous interprétons comme un changement de coordonnées (ce qui revient à appliquer la transformation inverse au tétraèdre de référence). La nouvelle équation s'écrit

$$\text{p.scalaire } i\xi i\bar{\xi} = 0,$$

et $U\xi V$ est finalement remplacé par $i\xi i$, qui est la formule d'une des dix quadriques fondamentales.

Ainsi, par un choix convenable des coordonnées, les deux quadriques en involution prennent la forme canonique

$$\xi, \quad i\xi i.$$

Les équations correspondantes prouvent aussitôt que les quadriques ont quatre génératrices communes formant quadrilatère gauche : elles sont tangentes aux sommets d'un *tétraèdre inscrit et circonscrit commun*, à savoir

$$1 \pm \varepsilon i, \quad j \pm \varepsilon k,$$

où ε désigne le scalaire dont le carré vaut -1.

Il existe une double infinité de tétraèdres conjugués communs, dont le tétraèdre de référence $1, i, j, k$. Leurs sommets, situés sur les droites conjuguées $(1, i)$ et (j, k), sont deux à deux conjugués par rapport aux sommets du tétraèdre inscrit et circonscrit commun.

Il existe aussi une double infinité de tétraèdres autopolaires inscrits à l'une des quadriques et conjugués par rapport à l'autre : pour obtenir quatre arêtes d'un tel tétraèdre, il suffit de mener deux génératrices coplanaires sur la première surface et d'en prendre les conjuguées par rapport à la seconde. Les quadriques sont donc *harmoniquement inscrites et circonscrites* l'une à l'autre [1].

2° Afin de réduire à sa plus simple expression l'involution de seconde espèce relative à la formule $P\bar{\xi}P$, effectuons l'homographie (ou changement de coordonnées) $\xi\overline{P}$. Les deux quadriques prennent la forme canonique

$$\xi, \quad \bar{\xi}.$$

Elles sont *circonscrites* (tangentes) le long d'une conique du plan 1 (qui est le plan P primitif).

Elles admettent une triple infinité de tétraèdres conjugués communs représentés par l'élément 1 et trois vecteurs mutuellement orthogonaux. Elles sont encore harmoniquement inscrites et circonscrites : il existe une double infinité de tétraèdres ayant pour arêtes deux génératrices non sécantes de la première quadrique et leurs conjuguées par rapport à la deuxième.

14. *Systèmes involutifs de quadriques.* — 1° Considérons plusieurs quadriques en involution mutuelle et supposons d'abord que ces involutions soient toutes de première espèce. L'une des quadriques étant prise comme quadrique de base ξ, toutes les autres ont des formules du type $U\xi V$. Les vecteurs respectifs U sont deux à deux égaux ou orthogonaux et s'expriment donc (n° 11) en fonction d'un *même quaternion* Q, pareillement les vecteurs V s'expriment en fonction d'un même quaternion Q', sous la forme

$$U = \overline{Q} I Q, \qquad V = Q' I' \overline{Q}',$$

I et I' désignant toujours des unités choisies entre i, j, k (et J une unité quelconque). L'homographie $Q\xi Q'$, considérée comme changement de coordonnées, conserve la quadrique ξ et donne aux autres les nouvelles équations

$$\text{p.scalaire } I\xi I'\bar{\xi} = 0,$$

Par rapport au nouveau tétraèdre de référence, nous obtenons ainsi, y compris la quadrique ξ, un ensemble de quadriques fondamentales $J\xi J'$ dont le nombre est au plus dix.

(1) On dit aussi qu'elles sont *harmoniques*.

Dans le système complet des dix quadriques, celles-ci jouent un rôle parfaitement symétrique [16]. Il y a plus : *quel que soit l'ordre dans lequel on range les quadriques*, la figure totale reste semblable à elle-même et il existe un tétraèdre de coordonnées attribuant aux quadriques les *formules canoniques* $J\xi J'$ *dans un ordre quelconque choisi d'avance*. On peut en effet prendre n'importe quelle quadrique comme quadrique de base ξ et choisir arbitrairement l'ordre des trois unités I ou I′, en modifiant Q et Q′ en conséquence. Notons d'autre part que la figure se transforme globalement en elle-même par les homographies des deux groupes fondamentaux G_{16} et G_8.

Il est facile de déterminer tous les *tétraèdres fondamentaux*, c'est-à-dire les tétraèdres de coordonnées par rapport auxquels le système involutif prend la forme canonique $J\xi J'$. Il suffit de remarquer que l'un d'eux, 1, i, j, k, autopolaire par rapport aux dix quadriques, est inscrit et circonscrit à six d'entre elles $I\xi I'(I \neq I')$, ses arêtes étant des génératrices communes. En conséquence, et en vertu de la symétrie du système, un tétraèdre fondamental a pour propriété caractéristique d'avoir deux couples d'arêtes opposées situées en même temps sur deux des dix quadriques. Le nombre des tétraèdres fondamentaux est donc

$$\frac{10 \times 9}{2 \times 3} = 15.$$

Nous montrerons que leurs sommets et leurs faces forment une configuration 60_{15}, dite configuration de Klein (n° 23).

Signalons que tout tétraèdre autopolaire par rapport aux seules quadriques ξ, $i\xi i$, $j\xi j$, même s'il n'est pas fondamental, a nécessairement pour sommets et faces quatre des soixante éléments de la configuration précédente.

2° Considérons maintenant un ensemble involutif de quadriques dont au moins deux, circonscrites le long d'une conique, sont liées par une involution de seconde espèce. Mettons deux telles quadriques sous la forme canonique ξ et $\bar{\xi}$. Les autres ont alors nécessairement des formules du type

$$U\xi U \qquad \text{ou} \qquad U\bar{\xi}U.$$

Les vecteurs respectifs U sont mutuellement égaux ou orthogonaux et s'expriment à l'aide d'un même quaternion Q

$$U = \bar{Q} I Q.$$

L'homographie $Q\xi Q$ conserve les quadriques ξ et $\bar{\xi}$, et transforme les autres en $I\xi I$ ou $I\bar{\xi}I$. L'ensemble est donc transformé en quadriques fondamentales du type $J\xi J$ ou $J\bar{\xi}J$, dont le nombre est au plus huit.

Les huit quadriques du système total se répartissent en deux séries distinctes de quatre : l'involution est de première ou de seconde espèce suivant que les quadriques appartiennent ou non à la même série. La figure reste invariante par les homographies des deux groupes fondamentaux G_{16} et G_8.

Les tétraèdres autopolaires par rapport aux huit quadriques, le sont notamment par rapport à ξ, $i\xi i$, $j\xi j$, ξ. Leurs sommets figurent donc parmi les soixante sommets de la configuration de Klein. Mais seul le tétraèdre $1\,ijk$ peut être considéré comme fondamental qui donne aux huit quadriques les équations réduites

$$x^2 \pm y^2 \pm z^2 \pm t^2 = 0.$$

3° Résumons les principaux résultats : *tout ensemble de quadriques en involution mutuelle peut être incorporé, suivant le cas, à un système involutif de huit ou de dix quadriques invariant dans les homographies de deux groupes fondamentaux* G_{16} *et* G_8.

Dans le système involutif de dix quadriques, celles-ci jouent un rôle symétrique. Deux quadriques quelconques du système sont harmoniquement inscrites et circonscrites l'une à l'autre; elles sont aussi inscrites et circonscrites à un même tétraèdre fondamental par rapport auquel (¹) *les dix quadriques prennent la forme canonique* $J\xi J'$. *Les quinze tétraèdres fondamentaux, autopolaires par rapport aux quadriques, constituent une configuration* 60_{15} *de Klein.*

Le système involutif de huit quadriques se sépare en deux ensembles de quatre. Deux quadriques sont harmoniquement inscrites l'une à l'autre et ont quatre génératrices communes si elles appartiennent au même ensemble; sinon elles sont circonscrites le long d'une conique. Parmi les tétraèdres autopolaires, un seul tétraèdre de référence, contenant dans ses faces les seize coniques de contact, donne aux quadriques les formes canoniques $J\xi J$, $J\xi J$.

Remarque. — Dans le systéme des dix quadriques, trois polarités successives équivalent à une polarité par rapport à l'une des quadriques ou par rapport à un complexe linéaire. On est donc amené à compléter le système des quadriques par un système de six complexes en involution mutuelle qui, rapportés à l'un quelconque des tétraèdres fondamentaux, ont pour formules $I\xi$ et ξI.

Inversement, dans un système de six complexes en involution mutuelle, une triple polarité équivaut à une polarité par rapport à l'un des complexes ou par rapport à une quadrique. On peut ainsi associer aux six complexes un système involutif de dix quadriques. Il s'ensuit que le système des complexes possède aussi 15 tétraèdres fondamentaux formant une configuration de Klein.

D'une manière plus générale, on pourrait étudier des systèmes de n complexes ou quadriques dont chacun ou chacune serait en involution avec p autres. Citons notamment le cas de n quadriques dont chacune serait en involution de première espèce avec 9 autres, n ne devant être ni premier, ni double de nombre premier.

(¹) Avec un point unitaire convenablement choisi.

15. *Couple de tétraèdres conjugués.* — 1° Soient deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique choisie comme quadrique de base. Prenons le premier comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ et définissons le second par deux quaternions P et Q sous la forme

$$\mathfrak{T}, \quad P\mathfrak{T}Q.$$

L'homographie propre $P\xi Q$, ou son inverse $\bar{P}\xi\bar{Q}$, transforme un tétraèdre en l'autre, mais ne conserve le système des deux tétraèdres que si elle est involutive.

Les sommets des tétraèdres (et aussi leurs faces par corrélation) jouissent d'une importante propriété résultant du théorème classique de Hesse [5, 8] : par les huit sommets de deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique, il passe une double infinité de quadriques; *toute quadrique contenant sept des sommets contient nécessairement le huitième.*

Ce théorème se vérifie aisément sur la forme canonique des tétraèdres. Désignons en effet par

$$x_0, y_0, z_0, t_0; \quad x_1, y_1, z_1, t_1; \quad x_2, y_2, z_2, t_2; \quad x_3. y_3, z_3, t_3$$

les coordonnées respectives des sommets PQ, PiQ, PjQ, PkQ. Ces seize nombres sont les termes d'une matrice orthogonale d'ordre 4

$$\begin{Vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{Vmatrix}$$

où la somme des termes d'une ligne ou d'une colonne peut être supposée égale à 1, comme norme du quaternion PQ. Toute quadrique circonscrite au tétraèdre de coordonnées $\mathfrak{T}$ a pour équation

$$axy + bxz + cxt + dyz + eyt + fzt = 0$$

et, si elle passe par trois des sommets PJQ, elle passe nécessairement par le quatrième puisque la matrice des coefficients

$$\begin{Vmatrix} x_0y_0 & x_0z_0 & x_0t_0 & y_0z_0 & y_0t_0 & z_0t_0 \\ x_1y_1 & x_1z_1 & x_1t_1 & y_1z_1 & y_1t_1 & z_1t_1 \\ x_2y_2 & x_2z_2 & x_2t_2 & y_2z_2 & y_2t_2 & z_2t_2 \\ x_3y_3 & x_3z_3 & x_3t_3 & y_3z_3 & y_3t_3 & z_3t_3 \end{Vmatrix}$$

est *de rang* 3, tous ses déterminants d'ordre 4 étant nuls : la somme des termes vaut zéro dans chaque colonne, en vertu de l'orthogonalité des colonnes de la première matrice.

Ce théorème de Hesse met en évidence le rôle symétrique des sommets des tétraèdres qui forment ainsi un système de *huit points associés*. En effet, choisissons arbitrairement l'ordre des sept premiers points, dont quatre déterminent un tétraèdre et les trois autres un triangle. Il existe une quadrique admettant le tétraèdre comme tétraèdre conjugué et le triangle comme triangle conjugué. Le huitième point coïncide nécessairement avec le pôle du plan du triangle, puisque ce pôle appartient à toutes les quadriques passant par les sept premiers points. Ainsi, quelle que soit la façon dont on les associe quatre à quatre, les huit points associés constituent les sommets de deux tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique : ce sont les *sommets* de trente-cinq configurations 8_3 harmoniques.

Quel que soit l'ordre adopté pour les points, il existe donc un système de coordonnées tétraédriques leur attribuant la formule

$$1, \quad i, \quad j, \quad k, \quad \mathrm{PQ}, \quad \mathrm{P}i\mathrm{Q}, \quad \mathrm{P}j\mathrm{Q}, \quad \mathrm{P}k\mathrm{Q},$$

que l'on peut considérer comme la *forme canonique des huit points associés.*

2° Un cas intéressant est celui où la transformation propre $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$ est involutive, ce qui a lieu notamment si P et Q sont des *vecteurs.* (Il suffit d'ailleurs que P et Q aient une composante nulle; la multiplication de P et $\overline{\mathrm{Q}}$ à gauche par l'unité appropriée les transforme en vecteurs et conserve les tétraèdres). *Les tétraèdres* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathrm{P}\mathfrak{T}\mathrm{Q}$, *conjugués par rapport à la quadrique* ξ, *sont alors polaires reciproques par rapport à la quadrique* $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$ *en involution avec la première.*

Il y a deux manières de considérer ce couple de tétraèdres. Par rapport à la quadrique ξ, c'est une configuration harmonique 8_3 décomposable en deux configurations 4_3. Par rapport à la quadrique $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$, c'est une configuration harmonique 8_3 représentable par un diagramme cubique

$$\begin{array}{cc|cc} (1) & (\mathrm{P}i\mathrm{Q}) & (\mathrm{P}k\mathrm{Q}) & (j) \\ (\mathrm{P}j\mathrm{Q}) & (k) & (i) & (\mathrm{PQ}) \end{array}$$

chaque moitié de ce tableau constituant une face du cube, et chaque parenthèse désignant l'élément formé par le sommet de même nom et son plan polaire par rapport à la quadrique $\mathrm{P}\xi\mathrm{Q}$.

Les tétraèdres étant polaires réciproques par rapport à une quadrique, il résulte d'un théorème de Chasles [2, 8] qu'ils sont aussi *en situation hyperboloïdique :* les droites joignant les sommets homologues sont génératrices d'une même semi-quadrique, de même que les intersections des faces homologues.

Cette propriété peut aussi se vérifier par le calcul : pour que quatre droites soient génératrices d'une même semi-quadrique, il faut et il suffit que tout complexe linéaire contenant trois des droites contienne aussi la quatrième. Autrement dit, *la matrice relative aux coordonnées plückériennes est de rang* 3 et il existe entre elles une même relation linéaire et homogène. Pour les quatre droites qui joignent les sommets homologues J, PJQ des tétraèdres, cette matrice s'écrit avec les notations du 1°,

$$\left\|\begin{matrix} t_0 & 0 & 0 & 0 & -z_0 & y_0 \\ 0 & t_1 & 0 & z_1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & t_2 & -y_2 & x_2 & 0 \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Puisque P et Q sont des vecteurs, douze coordonnées sont deux à deux égales

$$x_3 = t_0, \quad y_3 = t_1, \quad z_3 = t_2, \quad y_2 = z_1, \quad x_2 = z_0, \quad x_1 = y_0.$$

Les termes ayant une somme nulle dans chaque colonne, la matrice est bien de rang 3.

La même propriété géométrique subsiste (en raison de la remarque faite pour des quaternions P et Q ayant une composante nulle) lorsque la transformation propre $P\xi Q$ se réduit à une homographie harmonique $U\xi$ ou ξU : les deux tétraèdres, polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire, sont alors polaires réciproques par rapport à chacune des trois quadriques $U\xi I$ ou $I\xi U$ et sont, par conséquent, en situation hyperboloïdique de trois manières différentes.

Remarque. — On obtient une écriture plus symétrique des tétraèdres $\mathfrak{T}$ et $P\mathfrak{T}Q$ en effectuant l'homographie $\overline{P}\xi$, ce qui revient à faire un changement de coordonnées. Le premier tétraèdre est alors représenté par des quaternions associés à gauche, et le deuxième par des quaternions associés à droite

$$\overline{P}, \quad \overline{P}i, \quad \overline{P}j, \quad \overline{P}k; \qquad Q, \quad iQ, \quad jQ, \quad kQ.$$

En particulier, si P et Q sont des vecteurs, les deux tétraèdres $P\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}Q$, polaires réciproques par rapport à la quadrique $P\xi Q$, sont en outre inscrits et circonscrits au nouveau tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$.

16. *Tétraèdres de Möbius.* — Ce sont *deux tétraèdres inscrits l'un dans l'autre* [3], de telle manière qu'un sommet quelconque et la face opposée du premier tétraèdre soient en incidence avec une face et le sommet opposé du second (¹).

1° Démontrons qu'une telle figure (nous savons qu'il en existe) constitue une *configuration harmonique*. Désignons par ABCD et EFGH les *sommets* des tétraèdres. Le point A est supposé situé dans le plan du triangle FGH sans être sur les côtés de ce triangle; le point E, homologue de A, est situé dans le plan du triangle BCD sans être sur les côtés; et ainsi de suite pour les autres sommets. Considérons la quadrique $\mathfrak{Q}$ admettant ABCD comme tétraèdre conjugué et EFG comme triangle conjugué. Le plan polaire de A passe par E; le

(¹) Il y a d'autres systèmes de tétraèdres inscrits et circonscrits.

plan polaire de E est le plan AFG qui contient H : le point E est donc conjugué harmonique de H par rapport à $\mathfrak{Q}$. On démontre également que les points F et G sont conjugués de H. Par conséquent le second tétraèdre, lui aussi conjugué par rapport à $\mathfrak{Q}$, forme avec le premier une configuration 8_4 autopolaire.

Prenons ABCD comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, et choisissons le point unitaire de telle sorte que $\mathfrak{Q}$ soit la quadrique de base. Les sommets et faces de $\mathfrak{T}$ sont représentés par 1, i, j, k. Le sommet E et la face opposée sont représentés par un vecteur V. Le point F, situé dans les plans i et V, est de la forme $\lambda i\mathrm{V} + \mu \mathrm{V} i$. Le point G, intersection des plans j, V, $\lambda i\mathrm{V} + \mu \mathrm{V} i$, est de la forme $\lambda i\mathrm{V} - \mu \mathrm{V} i$. Mais les quatre plans k, V, $\lambda i\mathrm{V} \pm \mu \mathrm{V} i$ étant concourants (en H), il est nécessaire que l'un des coefficients λ ou μ soit nul. Prenons par exemple $\mu = 0$. La configuration est alors représentée par l'*expression canonique*

$$\begin{array}{cccc} 1 & i & j & k \\ \mathrm{V} & i\mathrm{V} & j\mathrm{V} & k\mathrm{V}. \end{array}$$

(L'expression analogue, relative à $\lambda = 0$, se ramènerait à la précédente par l'homologie ξ appliquée au point unitaire des coordonnées.) La figure comprend le tétraèdre $\mathfrak{T}$ et son transformé par polarité par rapport au complexe linéaire $\xi\mathrm{V}$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\mathrm{V}.$$

C'est aussi le produit du tétraèdre $\mathfrak{T}$ par le dièdre 1, V, selon le procédé de multiplication des configurations harmoniques.

Sur la forme précédente, on voit immédiatement que la configuration de Möbius est autopolaire par rapport à quatre complexes linéaires et à quatre quadriques en involution mutuelle, à savoir

$$i\xi, \quad j\xi, \quad k\xi, \quad \xi\mathrm{V}; \qquad \xi, \quad i\xi\mathrm{V}, \quad j\xi\mathrm{V}, \quad k\xi\mathrm{V}.$$

Les trois premiers complexes et la première quadrique transforment chaque tétraèdre en lui-même; le quatrième complexe et les trois dernières quadriques échangent les tétraèdres entre eux ([1]). Ces transformations suffisent à montrer que la configuration est *homographiquement régulière*.

On peut obtenir une nouvelle expression de la figure en incorporant les complexes et les quadriques à un système involutif complet de seize polarités et en mettant celui-ci sous la forme fondamentale $\mathrm{J}\xi\mathrm{J}'$. Il suffit pour cela de décomposer V en un produit de quaternions conjugués $\mathrm{A}i\overline{\mathrm{A}}$ et d'effectuer l'homographie $\xi\mathrm{A}$. La configuration devient

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{A} & i\mathrm{A} & j\mathrm{A} & k\mathrm{A} \\ \mathrm{A}i & i\mathrm{A}i & j\mathrm{A}i & k\mathrm{A}i. \end{array}$$

([1]) Corrélativement, les mêmes formules définissent un groupe fini de 8 homographies conservant la configuration.

D'autres tétraèdres de Möbius correspondent visiblement au même système involutif $J\xi J'$. Nous les retrouverons dans l'étude de la configuration de Kummer.

2° Nous venons de voir qu'il existe quatre quadriques par rapport auxquelles les tétraèdres de Möbius ABCD et EFGH sont polaires réciproques ou conjugués. Ces quadriques, en involution mutuelle, jouent un rôle symétrique par rapport à la configuration 8_4 que forment les tétraèdres. En effet, les huits sommets et les huit faces, associés convenablement, constituent *de quatre manières différentes* un couple de tétraèdres de Möbius conjugués par rapport à l'une ou l'autre des quadriques, et l'on passe d'un couple à l'autre en échangeant deux sommets avec leurs homologues. Ainsi les tétraèdres

$$ABGH, \quad EFCD$$

forment un couple de Möbius par définition même; ils sont conjugués par rapport à la quadrique que nous avons appelée $i\xi V$ et sont polaires réciproques par rapport aux trois autres quadriques.

Utilisons la forme canonique. Les quatre quadriques ξ et $I\xi V$ ont en commun deux génératrices coupant chacune les droites

$$AE, \quad BF, \quad CG, \quad DH$$

qui joignent les sommets homologues des tétraèdres. Les huit points d'intersection correspondants sont représentés par les associés $J\Pi$ et ΠJ, à droite et à gauche respectivement, d'un même quaternion Π de norme nulle, *élément intrinsèque* de la configuration. Aux quatre manières différentes de considérer la figure comme tétraèdres de Möbius correspondent autant de formes canoniques $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}V$: les vecteurs V respectifs sont justement les parties vectorielles des associés du quaternion Π (à droite par exemple), à l'ordre et au signe près des coordonnées.

Deux tétraèdres de Möbius étant polaires réciproques par rapport à trois quadriques sont en situation hyperboloïdique de trois manières différentes. Pour le voir directement, choisissons deux arêtes opposées du premier tétraèdre, AB et CD par exemple, et associons-leur les deux systèmes de quatre droites

$$AB, \quad CD, \quad EF, \quad GH; \qquad AF, \quad BE, \quad CH, \quad DG.$$

De la définition des tétraèdres il résulte que toute droite du premier système coupe les quatre droites du second, et inversement. Ces droites sont donc situées sur une même quadrique Σ; elles se coupent mutuellement en seize points, *sommets* d'une configuration 16_7 autopolaire inscrite dans Σ que nous écrivons

$$\begin{matrix} A & B & D' & C' \\ F & E & G' & H' \\ B' & A' & C & D \\ E' & F' & H & G \end{matrix}$$

les points d'une même ligne ou d'une même colonne appartenant à une même génératrice. En vertu de la propriété harmonique de la configuration, le plan polaire de A par rapport à la quadrique $\mathfrak{Q}$ coïncide avec le plan tangent en A′ à la quadrique Σ. Il en est ainsi pour deux points quelconques du tableau précédent représentés par la même lettre, accentuée ou non. La quadrique Σ se transforme donc en elle-même par polaires réciproques par rapport à $\mathfrak{Q}$.

Aux trois manières possibles de choisir deux arêtes opposées de $\mathfrak{T}$ correspondent trois quadriques Σ, qui sont d'ailleurs les mêmes pour les autres couples de tétraèdres. Leurs équations et leurs formules polaires sont respectivement

$$\text{p. scalaire } \mathrm{I}\xi\mathrm{IV}\bar{\xi} = 0, \qquad \mathrm{I}\xi(\mathrm{IV} - \mathrm{VI}),$$

où I désigne l'une des unités i, j, k. Observons que les quadriques Σ et les quatre quadriques décomposées en les couples de plans homologues J, JV appartiennent à un même réseau linéaire ponctuel dont les huit points associés sont les sommets des tétraèdres. Corrélativement, les quadriques Σ et les quadriques dégénérées en les couples de points homologues J, JV appartiennent à un même réseau tangentiel admettant les faces des tétraèdres comme plans tangents communs.

Résumons les principaux résultats :

Deux tétraèdres de Möbius forment une configuration harmonique 8_4, *homographiquement régulière. Celle-ci, autopolaire par rapport à quatre quadriques* $\mathfrak{Q}$ *en involution mutuelle, représente un couple de tétraèdres de Möbius de quatre manières différentes. Les tétraèdres de chaque couple sont conjugués par rapport à l'une des quadriques* $\mathfrak{Q}$ *et sont polaires réciproques par rapport aux trois autres. Ils sont, par suite, en situation hyperboloïdique de trois manières; les hyperboloïdes correspondants, inscrits et circonscrits aux tétraèdres, sont en involution de première espèce avec chaque quadrique* $\mathfrak{Q}$.

3° *Cas particulier : tétraèdres en liaison harmonique.* — Lorsque le vecteur V a seulement deux composantes non nulles, les tétraèdres $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}$V ont deux couples d'arêtes colinéaires : les sommets de l'un sont situés sur deux arêtes opposées de l'autre, cas particulier que nous avions exclu de prime abord. Les huit sommets, répartis sur deux droites, forment deux divisions harmoniques, et les huit faces forment corrélativement deux faisceaux harmoniques. Pour abréger, nous dirons que deux tels tétraèdres sont *en liaison harmonique*.

On démontre aisément sur la forme canonique que ces tétraèdres, conjugués par rapport à la quadrique de base ξ, sont aussi *autopolaires inscrits* (et circonscrits) relativement à deux autres quadriques fondamentales du type IξI′. Ils constituent donc une configuration 8_5 qui est harmonique de six manières.

17. *Tétraèdres desmiques.* — 1° Deux tétraèdres sont dits *desmiques* (ou en liaison desmique) si *une arête quelconque de l'un coupe deux arêtes opposées de l'autre* [6, 13, 15, 17].

Dans une telle figure, la surface d'un tétraèdre découpe sur une face quelconque de l'autre un quadrilatère complet dont les diagonales sont les arêtes de cette face; une arête quelconque détermine donc, par ses intersections avec les autres arêtes, quatre points d'une division harmonique. Par conséquent, si l'on se donne l'un des tétraèdres, on peut construire l'autre à partir d'un seul de ses sommets A : il suffit de mener du point A les trois droites qui coupent chacune deux arêtes opposées du tétraèdre donné et, sur chaque droite, de prendre le conjugué harmonique de A par rapport aux deux points d'intersection obtenus.

Choisissons le premier tétraèdre comme tétraèdre $\mathfrak{T}$ de référence

$$1, \quad i, \quad j, \quad k.$$

Les *sommets* du second ont alors pour formule

$$A, \quad iAi, \quad jAj, \quad kAk.$$

On voit aisément que les deux tétraèdres possèdent la propriété remarquable d'être en perspective par rapport à quatre centres différents, à savoir

$$\overline{A}, \quad i\overline{A}i, \quad j\overline{A}j, \quad k\overline{A}k,$$

qui sont les transformés des sommets précédents dans l'homologie involutive ξ. Cette *quadruple perspective*, que nous préciserons tout à l'heure, est une propriété caractéristique des tétraèdres desmiques et pourrait servir de définition.

Démontrons que *deux tétraèdres desmiques forment une configuration harmonique* 8_3 et cherchons-en la forme canonique. Pour que le deuxième tétraèdre soit, comme le premier, conjugué par rapport à la quadrique de base, il faut et il suffit que les quatre quaternions JAJ soient mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire que les composantes de A soient égales ou opposées deux à deux. Pour cela il suffit de choisir A comme point unitaire des coordonnées, lequel sera représenté par le quaternion ρ (1) de norme 1

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + i + j + k).$$

Les associés de ce quaternion le sont en même temps à droite et à gauche, de sorte que par exemple

$$\rho i = j\rho, \qquad i\rho i = k\rho, \qquad j\rho j = i\rho, \qquad k\rho k = j\rho.$$

(1) Suivant une notation de Hurwitz.

Les sommets et les *faces* des tétraèdres se présentent alors sous la forme canonique

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\rho,$$

et constituent une configuration 8_3 harmonique, couple de tétraèdres particuliers conjugués par rapport à la quadrique de base.

La configuration est *homographiquement régulière* : chaque tétraèdre se transforme en lui-même par les homographies du groupe fondamental G_{16} et se transforme en l'autre tétraèdre par quatre homologies involutives dont les centres (et les plans) sont $J\bar{\rho}$. Ces vingt transformations s'écrivent

$$J\xi J', \quad J\bar{\rho}\xi J\bar{\rho}.$$

Corrélativement, les tétraèdres sont autopolaires par rapport aux *dix quadriques fondamentales* $J\xi J'$ (ils sont conjugués par rapport à la seule quadrique de base) et sont polaires réciproques par rapport à quatre quadriques en involution mutuelle (n° 13). Remarquons que la configuration est *autopolaire inscrite* de trois manières : les deux tétraèdres sont simultanément inscrits (et circonscrits) à trois quadriques fondamentales.

La transformation propre $\xi\rho$, qui fait passer du premier tétraèdre au second, est une *homographie cyclique d'ordre* 3 puisque le quaternion ρ vérifie les relations

$$\rho^2 = -\bar{\rho}, \qquad \rho^3 = -1.$$

Il en résulte que le couple desmique $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\rho$ est projectivement équivalent à $\mathfrak{T}\rho$, $\mathfrak{T}\bar{\rho}$ dont les huit éléments sont représentés par les quaternions entiers de norme 4

$$1 \pm i \pm j \pm k.$$

Cette formule très symétrique peut être considérée comme une nouvelle forme canonique du couple de tétraèdres desmiques.

2° *Systèmes desmiques.* — Étant donnés deux tétraèdres desmiques mis sous la forme canonique $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\rho$, il leur correspond un troisième tétraèdre $\mathfrak{T}\bar{\rho}$ qui forme avec eux un *groupe cyclique* de trois tétraèdres

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\rho, \quad \mathfrak{T}\bar{\rho}.$$

Cette configuration harmonique non inscriptible sera appelée *système desmique* ; ses trois tétraèdres, qui jouent un rôle symétrique, sont conjugués (et non seulement autopolaires) par rapport à une même quadrique. Deux tétraèdres quelconques de l'ensemble sont desmiques [1] et sont en correspondance homologique de quatre manières différentes; les centres et les plans d'homologie forment le troisième tétraèdre.

---

[1] Nous verrons qu'il existe un autre ensemble de trois tétraèdres mutuellement desmiques formant une configuration autopolaire inscrite.

Sous leur forme canonique, les douze éléments du système desmique sont représentés par les douze unités de l'arithmétique de Hurwitz [27]

$$1,\quad i,\quad j,\quad k,\quad \frac{1}{2}(1 \pm i \pm j \pm k),$$

quaternions de norme 1 dont les composantes sont des entiers ou des moitiés de nombres impairs : nous les désignerons ci-après par la lettre H.

Les douze éléments jouent un rôle symétrique et déterminent une configuration homographiquement régulière puisqu'il suffit de multiplier l'un quelconque d'entre eux, à droite ou à gauche, par les douze unités H pour obtenir le système total. Les transformations linéaires correspondantes

$$\xi \mathrm{H} \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}\xi$$

conservent globalement le système et constituent un groupe fini d'ordre 12, moitié d'un groupe desmique. Elles résultent, par multiplications successives, de trois d'entre elles convenablement choisies, par exemple ξi, ξj, $\xi\rho$ pour le groupe ξH.

Certaines transformations involutives, tout en conservant la figure, permettent d'en *échanger* deux éléments quelconques. Ce sont les transformations

$$\mathrm{J}\xi\mathrm{J}',\quad \mathrm{H}\bar{\xi}\mathrm{H},$$

c'est-à-dire seize homographies fondamentales conservant chaque tétraèdre et douze homologies involutives qui échangent deux tétraèdres et conservent le troisième. Les polarités correspondant aux mêmes formules représentent d'une part un système involutif de six complexes et dix quadriques et, d'autre part, une douzaine de quadriques qui, associées aux précédentes, constituent de nouveaux systèmes involutifs.

Résumons-nous :

Le système desmique comprend trois tétraèdres conjugués par rapport à une même quadrique (quadrique de base) et constitue une configuration harmonique 12_3 *homographiquement régulière. Il se transforme en lui-même par polarité par rapport aux six complexes linéaires et aux vingt-deux quadriques distinctes du système involutif d'ordre* 16 *et des trois systèmes involutifs d'ordre* 8 *que déterminent respectivement la quadrique de base et chacun des tétraèdres pris comme tétraèdre de référence.*

Les arêtes des tétraèdres forment une figure symétrique de dix-huit droites dans laquelle chacune d'elles en coupe huit autres. Plus exactement, chaque arête du premier tétraèdre est divisée harmoniquement par deux arêtes opposées du deuxième et, *aux mêmes points*, par deux arêtes opposées du troisième. Il en résulte que trois arêtes convenablement choisies, appartenant chacune à un tétraèdre différent, sont concourantes. Corrélativement, les trois arêtes conjuguées des précédentes par rapport à la quadrique de base, leurs opposées dans chaque tétraèdre, sont coplanaires et portent six sommets d'un quadrilatère complet dont elles sont diagonales.

D'autre part, la quadruple homologie des tétraèdres démontre que leurs douze sommets sont alignés par trois sur seize droites, quatre droites passant par chaque sommet. Corrélativement, dans chaque face, se trouvent quatre droites appartenant chacune à deux nouvelles faces.

18. *Configuration desmique* 24_9. — Donnons-nous un système desmique $\mathfrak{S}$ et mettons ses trois tétraèdres sous la forme canonique $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}\rho, \mathfrak{T}\bar{\rho}$. Nous savons que les arêtes prises par trois sont concourantes en un point qui est commun à six faces et, corrélativement, que les sommets groupés par six sont coplanaires.

Étudions les douze points par chacun desquels passent trois arêtes et les douze plans contenant chacun six sommets. On obtient tous ces éléments en appliquant à l'un d'eux, $j+k$ par exemple, les transformations qui laissent invariant le système $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire en multipliant cet élément (à gauche par exemple) par les douze unités H de Hurwitz, ce qui donne

$$\mathrm{H}(j+k).$$

Il revient au même de multiplier les douze éléments de $\mathfrak{S}$ à droite par le vecteur $j+k$. Les points et les plans considérés forment donc un nouveau système desmique $\mathfrak{S}'$ représenté par la formule

$$\mathrm{J} \pm \mathrm{J}',$$

somme ou différence de deux unités quelconques. Les trois tétraèdres de ce système

$$(1 \pm i, j \pm k), \quad (1 \pm j, k \pm i), \quad (1 \pm k, i \pm j)$$

ont les arêtes communes avec ceux du système $\mathfrak{S}$: ils sont en *liaison harmonique* (n° 16) avec chaque tétraèdre de $\mathfrak{S}$. C'est ainsi, par exemple, que les arêtes $(1, i)$ et $(1+i, 1-i)$ sont portées par la même droite, sur laquelle elles déterminent une division harmonique.

En réunissant les deux systèmes desmiques $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, nous obtenons une *configuration harmonique* 24_9 *homographiquement régulière* [1] que nous appelons *configuration desmique*. En effet, d'une part les éléments de la figure jouent un rôle symétrique : ils s'obtiennent à partir de l'un d'eux par les homographies d'un groupe desmique G'_{24} ou G''_{24} correspondant à la multiplication à droite ou à gauche par les quaternions K (n° 7). D'autre part, chaque plan contient bien neuf sommets, le plan 1 par exemple contenant les points

$$i, \quad j, \quad k, \quad i \pm j, \quad j \pm k, \quad k \pm i,$$

intersections des côtés et des diagonales d'un même quadrilatère complet.

---

[1] Certains auteurs réservent le nom de *configuration harmonique* à cette seule figure.

La moitié des transformations du groupe desmique, à savoir la multiplication à droite (ou à gauche) par une unité H, conserve chacun des systèmes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, l'autre moitié, correspondant à la multiplication par $J \pm J'$, échange les systèmes entre eux. Le groupe desmique total résulte lui-même des multiplications répétées de trois transformations seulement qui sont, pour G'_{24} par exemple,

$$\xi(1+i), \quad \xi(1+j), \quad \xi(1+k)$$

ou encore, si l'on préfère utiliser des homographies involutives,

$$\xi(j+k), \quad \xi(k+i), \quad \xi(i+j).$$

La configuration desmique 24_9 *peut donc être obtenue à partir d'un quelconque de ses éléments au moyen de polarités successives et répétées par rapport à trois complexes linéaires convenablement choisis.*

Les six tétraèdres de la figure, tous *conjugués* par rapport à la quadrique de base, jouent le même rôle : on passe de l'un à l'autre par une transformation du groupe desmique. Rappelons que *chaque tétraèdre est en liaison desmique avec deux autres et en liaison harmonique avec les trois derniers*. La configuration totale est autopolaire par rapport aux systèmes involutifs d'ordre 16 et d'ordre 8 déterminés par la quadrique de base et chacun des six tétraèdres.

Remarque. — Déjà Poncelet [1] avait étudié la configuration que forment les douze centres d'homothétie de quatre sphères prises deux à deux, les quatre faces du tétraèdre déterminé par leurs centres et leurs huit plans d'homothétie. C'est là une configuration 12_6, réciproque à elle-même mais non harmonique ([1]), qui peut être considérée comme la « moitié » d'une configuration desmique. Si nous choisissons en effet les centres des sphères comme sommets du tétraèdre de coordonnées, avec un point unitaire approprié, les douze centres d'homothétie prennent la forme $J \pm J'$. En transformant la figure par polaires réciproques par rapport à la quadrique de base, nous obtenons une nouvelle configuration 12_6 qui, jointe à la première, forme une configuration desmique 24_9.

19. *Configuration de Kummer.* — C'est l'ensemble de *quatre tétraèdres inscrits l'un dans l'autre, tétraèdres de Möbius deux à deux* [7]. De façon équivalente, c'est une *configuration* 16_6 *ayant un diagramme d'incidence de forme carrée.*

1° Un exemple type de configuration harmonique 16_6 résulte immédiatement de la propriété algébrique des quaternions que voici :

Tout quaternion A est orthogonal à ses trois associés à gauche, Ai, Aj, Ak, et à ses trois associés à droite iA, jA, kA. D'une manière plus générale, J et J'

([1]) Ou configuration de Reye.

désignant deux unités quelconques, le produit JAJ' est orthogonal aux six quaternions

$$JAJ'i,\quad JAJ'j,\quad JAJ'k,\quad iJAJ',\quad jJAJ',\quad kJAJ'$$

qui sont les associés de A divisibles à gauche par JA, ou à droite par AJ'. Nous obtenons ainsi le *tableau d'orthogonalité des seize quaternions associés*

$$\begin{array}{cccc} A & iA & jA & kA \\ Ai & iAi & jAi & kAi \\ Aj & iAj & jAj & kAj \\ Ak & iAk & jAk & kAk. \end{array}$$

Deux quaternions d'une même ligne sont associés à droite, deux quaternions d'une même colonne sont associés à gauche. Deux quaternions d'une même ligne ou d'une même colonne sont orthogonaux.

Les seize points et les seize plans correspondant aux quaternions associés forment une configuration 16_6, et le tableau d'orthogonalité représente aussi bien un *diagramme d'incidence* : tout élément du tableau est en incidence avec les six éléments situés dans la même ligne ou la même colonne [9].

Les quaternions, et par suite les éléments, sont tous distincts si les carrés des composantes de A ne sont pas deux à deux égaux ou opposés, et si au moins trois composantes ne sont pas nulles. En outre, pour que la configuration soit effectivement du type 16_6, il est nécessaire que la norme de A soit différente de zéro.

C'est ainsi qu'on obtient un exemple simple en prenant pour A la somme de trois unités; la configuration particulière qui en résulte prend l'expression intéressante

$$J \pm J' \pm J'',$$

où les J sont trois unités distinctes quelconques choisies entre $1, i, j, k$,

2° Nous allons montrer que *toute configuration de Kummer est nécessairement harmonique et se ramène à la forme canonique des seize quaternions associés par un choix convenable du système de coordonnées.*

Considérons quatre tétraèdres mutuellement inscrits et circonscrits, tétraèdres de Möbius l'un à l'autre. Les deux premiers constituent une configuration harmonique qui, rapportée à sa quadrique de base, s'écrit

$$\mathfrak{C},\quad \mathfrak{C}V.$$

Les sommets homologues 1 et V sont situés dans une face du troisième tétraèdre : celle-ci est représentée par un vecteur V' orthogonal à V. Les trois sommets de la face V' sont les intersections des plans respectifs

$$(i, iV, V'),\quad (j, jV, V'),\quad (k, kV, V')$$

et sont justement les points iV', jV', kV' mutuellement conjugués harmoniques par rapport à la quadrique de base déjà définie. Cette propriété de conjugaison est évidemment valable pour le quatrième sommet qui est donc le pôle de la face V' : le vecteur V' représente simultanément le plan d'une face et le sommet opposé. Le troisième tétraèdre est conjugué par rapport à la quadrique de base et prend la forme $\mathfrak{T}V'$.

Il en est de même du quatrième tétraèdre, qui s'écrit $\mathfrak{T}V''$. La configuration de Kummer est alors de la forme

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}V, \quad \mathfrak{T}V', \quad \mathfrak{T}V'',$$

où V, V', V'' désignent des vecteurs mutuellement orthogonaux. C'est, si l'on veut, le produit de deux tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base, au sens de la multiplication des configurations harmoniques.

Selon une méthode déjà utilisée, décomposons les vecteurs en produits de quaternions conjugués

$$V = Ai\bar{A}, \qquad V' = Aj\bar{A}, \qquad V'' = Ak\bar{A},$$

et effectuons l'homographie ξA considérée comme changement de coordonnées. Les tétraèdres s'écrivent alors

$$\mathfrak{T}A, \quad \mathfrak{T}Ai, \quad \mathfrak{T}Aj, \quad \mathfrak{T}Ak$$

et sont représentés par les seize quaternions JAJ' associés à A. La configuration devient identique à celle du 1° : nous dirons qu'elle est mise sous la *forme canonique*, ou encore qu'elle est rapportée à un *tétraèdre fondamental*.

Ainsi, la configuration de Kummer la plus générale dépend de dix-huit paramètres : quinze servent à déterminer le tétraèdre de coordonnées (tétraèdre fondamental) et son point unitaire; les trois autres paramètres, qui déterminent le quaternion A, sont liés aux éléments intrinsèques de la configuration invariants dans toute transformation linéaire.

3° Sur la forme canonique JAJ' on voit aussitôt que *la configuration de Kummer se transforme en elle-même par les homographies du groupe fondamental* G_{16}, *homographies qui permettent d'échanger deux quelconques de ses éléments : la figure est donc homographiquement régulière. Elle est autopolaire par rapport au système involutif correspondant de six complexes et dix quadriques* et, de cette manière, peut être construite tout entière à partir d'un quelconque de ses sommets.

Les tétraèdres fondamentaux du système involutif sont aussi ceux de la configuration. *Il y a donc quinze tétraèdres fondamentaux, formant une configuration de Klein, par rapport à chacun desquels la configuration de Kummer prend la forme canonique des seize quaternions associés.*

20. *Seize formes linéaires.* — Ouvrons une parenthèse et, pour quelques instants, ayons recours aux procédés ordinaires de la géométrie analytique. L'utilisation directe des coordonnées, au lieu de quaternions, permet de simplifier l'étude de certaines questions, celles par exemple qui font intervenir les seuls sommets d'une configuration de Kummer (ou les seules faces, par corrélation), et non les éléments eux-mêmes.

Définissons un point A, ou un plan, par quatre coordonnées homogènes, x_0, y_0, z_0, t_0 et, en leur adjoignant les coordonnées courantes x, y, z, t, utilisons la forme linéaire

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z + t_0 t$$

qui, égalée à zéro, donne l'équation du point ou du plan.

Aux seize sommets JAJ′ d'une configuration de Kummer rapportée à son tétraèdre fondamental correspondent alors seize formes linéaires. Nous allons montrer qu'on peut les considérer comme les *seize termes d'une matrice orthogonale d'ordre* 4.

Désignons par ξ le quaternion relatif aux coordonnées courantes. L'élément du diagramme d'incidence situé dans la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et la $\beta^{\text{ième}}$ colonne est $J_\beta A J_\alpha$, produit de A par les unités J_α et J_β. La forme linéaire correspondante s'écrit

$$\text{p. scalaire } J_\beta A J_\alpha \xi = \text{p. scalaire } A J_\alpha \xi J_\beta,$$

somme des produits respectifs des composantes de AJ_α par celles de $J_\beta \xi$. La matrice des seize formes linéaires est donc le produit de deux matrices. Les lignes de la première sont les composantes des quaternions AJ_α associés à gauche et forment la matrice à gauche [29] du quaternion A, matrice orthogonale (au produit près de tous les termes par un même nombre); les colonnes de la seconde correspondent aux associés à droite de ξ et forment aussi une matrice orthogonale :

$$\begin{Vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ -y_0 & x_0 & t_0 & -z_0 \\ -z_0 & -t_0 & x_0 & y_0 \\ -t_0 & z_0 & -y_0 & x_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x & y & z & t \\ y & -x & -t & z \\ z & t & -x & -y \\ t & -z & y & -x \end{Vmatrix}.$$

Le produit est une matrice orthogonale, au produit près de tous les termes par un même nombre.

On peut donc appliquer aux seize formes linéaires les propriétés connues des matrices orthogonales : égalité de la somme des carrés des termes dans les lignes et dans les colonnes, orthogonalité des lignes ou des colonnes, égalité des mineurs complémentaires. Nous avons ainsi procédé au n° 15 pour les tétraèdres conjugués. Au reste, les seize formes linéaires peuvent être considérées comme les coordonnées successives des quatre points

$$\xi \overline{A}, \quad \xi i \overline{A}, \quad \xi j \overline{A}, \quad \xi k \overline{A},$$

sommets d'un tétraèdre (variable avec ξ) conjugué par rapport à la quadrique de base.

Cette méthode permet d'établir ou de vérifier par le calcul d'importants résultats géométriques sur la configuration de Kummer. Nous allons rappeler les propriétés qui nous semblent le mieux adaptées à notre théorie des configurations harmoniques.

21. *Quelques propriétés de la configuration de Kummer.* — En vue de préciser la structure de la configuration de Kummer, nous allons étudier certains groupements de ses points et de ses plans caractérisés par une propriété géométrique simple. Dans les cas les plus intéressants, ces groupements restent invariants dans l'un des sous-groupes d'homographies conservant la configuration ; les homographies du groupe fondamental G_{16} les transforment alors en groupements semblables dont l'ensemble contient la configuration entière une ou plusieurs fois [12, 25].

D'abord nous supposons que la configuration de Kummer est rapportée à un tétraèdre fondamental particulier $\mathfrak{T}_0$ et, par conséquent, qu'elle est représentée par seize quaternions associés JA_0J'. Nous pouvons substituer au quaternion A_0 l'un quelconque de ses associés A_1, ce qui correspond à l'invariance de la figure par les homographies du groupe G_{16} et à l'isomorphie du diagramme d'incidence dont on peut choisir arbitrairement le premier terme. Nous pouvons aussi effectuer une permutation quelconque ou changement de signe des coordonnées, notamment la transformation homologiqne $\bar{\xi}$ qui, avec la nouvelle formule $J'\bar{A}_0J$, permet l'échange global des lignes et des colonnes du diagramme. Enfin, nous pouvons prendre comme qnadrique de base l'une quelconque des dix quadriques fondamentales et comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ l'un des six tétraèdres fondamentaux conjugués par rapport à cette quadrique.

Il y a donc un grand nombre de formes canoniques liées à toutes les transformations qui conservent la configuration. Nous désignerons leur formule générale par JAJ', et nous remettons à plus tard la détermination des quaternions A en fonction de l'un d'eux A_0.

1° Étudions en premier lieu les tétraèdres, dits *tétraèdres de Rosenhain, dont tous les sommets et toutes les faces sont des points et des plans de la configuration.*

Considérons trois sommets d'un tel tétraèdre, situés par exemple dans la face A_1, le quaternion A_1 étant associé à A_0. Deux cas se présentent :

Si les trois sommets figurent dans la même ligne du diagramme (ou la même colonne, mais il suffit alors d'effectuer la transformation $\bar{\xi}$), ils s'écrivent iA_1, jA_1, kA_1. Le quatrième sommet est alors A_1. Le tétraèdre considéré s'écrit donc

$$A_1, \quad iA_1, \quad jA_1, \quad kA_1$$

et il est conjugué par rapport à la quadrique de base. Cette formule ainsi ordonnée est d'ailleurs valable quel que soit l'ordre adopté pour les sommets du tétraèdre : il suffit d'appeler A_1 le plan des trois derniers sommets puis, s'il y a lieu, de faire une permutation convenable des coordonnées en modifiant A_1 en conséquence.

Si deux sommets seulement figurent dans la même ligne, par exemple iA_1, jA_1, et le troisième $A_1 j$, le tétraèdre est du type

$$iA_1, \quad jA_1, \quad A_1 j, \quad kA_1 j.$$

Il est conjugué par rapport à l'une des quadriques fondamentales (en l'occurence la quadrique $k\xi j$). Prenons celle-ci comme quadrique de base, en modifiant le tétraèdre de référence. Dans le nouveau diagramme d'incidence les quatre éléments du tétraèdre figurent dans la même ligne ou la même colonne : nous sommes ramené au cas précédent.

Ainsi, étant donné un tétraèdre de Rosenhain, dont *les sommets sont rangés dans un ordre quelconque*, il existe un tétraèdre fondamental par rapport auquel la configuration s'écrit JAJ' et qui donne aux sommets et faces du tétraèdre la *formule canonique*

$$A, \quad iA, \quad jA, \quad kA.$$

Ce tétraèdre, conjugué par rapport à l'actuelle quadrique de base, reste invariant dans le sous-groupe $J\xi$ d'ordre 4. Les seize homographies fondamentales le transforment en *quatre tétraèdres associés*, dont lui-même, qui correspondent aux quatre lignes du diagramme d'incidence. Ces tétraèdres reforment à eux quatre toute la configuration, ils sont conjugués par rapport à la même quadrique, ils sont mutuellement inscrits et circonscrits ([1]).

Le raisonnement s'applique également aux colonnes du diagramme et, d'autre part, il est valable pour chacune des dix quadriques fondamentales du système involutif. A chaque quadrique correspondent ainsi deux groupes de quatre tétraèdres associés, conjugués par rapport à cette quadrique. Il y a donc au total 80 tétraèdres de Rosenhain : *la configuration de Kummer est, de vingt manières différentes, un ensemble de quatre tétraèdres de Rosenhain mutuellement inscrits et circonscrits* [24].

2° Considérons *six sommets coplanaires* quelconques, par exemple ceux de la face A_1. Ils sont représentés par des quaternions IA_1 et $A_1 I$, respectivement associés de A_1 à droite et à gauche.

Rangeons ces sommets dans un ordre arbitraire. Les trois premiers pouvant être considérés comme sommets d'un tétraèdre de Rosenhain, il existe un tétraèdre fondamental de réference leur attribuant la formule iA_2, jA_2. kA_2.

([1]) Cette propriété de conjugaison et inscription résulte, si l'on veut, de l'orthogonalité de la matrice des seize formes linéaires relativement aux lignes.

Les trois derniers sommets s'écrivent alors $A_2 i$, $A_2 j$, $A_2 k$, à l'ordre près. Pour les mettre exactement dans cet ordre, s'il ne le sont pas, il suffit d'opérer le changement de coordonnées ξK et de remplacer A_2 par $A_2 K$, où K désigne l'un des cinq quaternions $1+I$, ρ, $\bar{\rho}$, quaternions entiers de norme 2 ou 4 (nº 7). Cette transformation revient d'ailleurs à remplacer le tétraèdre de référence par l'un des cinq autres tétraèdres fondamentaux conjugués par rapport à la quadrique de base.

Par conséquent, étant donnés *six sommets coplanaires rangés dans un ordre quelconque*, il est possible de trouver un tétraèdre de coordonnées par rapport auquel la configuration prend la forme canonique JAJ' et qui donne aux six sommets respectifs la formule

$$iA,\quad jA,\quad kA,\quad Ai,\quad Aj,\quad Ak.$$

Les sommets coplanaires jouissent de la remarquable propriété d'*être situés sur une même conique*. On peut le montrer de diverses manières. En effet, les triangles

$$(iA, jA, kA),\quad (Ai, Aj, Ak)$$

sont tous deux conjugués par rapport à la conique section de la quadrique de base par le plan A; ils sont donc inscriptibles dans une même conique, d'après le théorème classique de Poncelet. On peut aussi dire que les côtés opposés de l'hexagone

$$iA,\quad Aj,\ kA,\quad Ai,\quad jA,\quad Ak$$

se coupent en trois points alignés sur l'intersection du plan A et du plan diagonal contenant les points iAi, jAj, kAk; l'hexagone est donc inscriptible dans une conique d'après le théorème de Pascal. Enfin, si l'on préfère utiliser les formes linéaires relatives aux six points, celles-ci figurent dans la première ligne et la première colonne d'une même matrice orthogonale; leurs carrés vérifient une relation linéaire; les six points se trouvent donc sur une conique, selon un résultat dû à P. Serret [8].

On passe d'une face à l'autre de la configuration par une transformation homographique du groupe G_{16}. Il en résulte que la *situation projective des six points coplanaires sur leur conique est la même dans les seize faces de la configuration*. Cette situation se traduit par trois rapports anharmoniques, éléments intrinsèques de la figure [11, 14].

3º Groupons par deux les six points contenus dans une face et considérons la nouvelle face passant par chaque couple de points. Les trois faces ainsi obtenues forment avec la première un tétraèdre dont les sommets n'appartiennent pas à la configuration : nous l'appelons *tétraèdre « planaire » de Göpel*. Chaque arête de ce tétraèdre passe par deux sommets de la configuration et chacune de ses faces contient six sommets sur une même conique. Les quatre faces contiennent *douze sommets* distincts situés sur une même quadrique Σ.

Les quatre sommets restants déterminent un tétraèdre dont les faces ne font pas partie de la configuration : nous l'appelons *tétraèdre ponctuel* de Göpel, complémentaire du précédent.

Puisqu'il y a quinze manières de grouper six points par deux, chaque face de la configuration appartient à quinze tétraèdres planaires. Par suite, il y a en tout *soixante* tétraèdres planaires et un nombre égal de tétraèdres ponctuels ou de quadriques Σ.

Les trois couples de points coplanaires qui ont servi à définir le tétraèdre de Göpel peuvent s'écrire, par un choix convenable du tétraèdre de référence,

$$(i\mathrm{A}, \mathrm{A}i), \quad (j\mathrm{A}, \mathrm{A}j), \quad (k\mathrm{A}, \mathrm{A}k).$$

Ils sont situés dans la face A, et respectivement, dans les faces $i\mathrm{A}i, j\mathrm{A}j, k\mathrm{A}k$. Nous obtenons ainsi une *forme canonique du tétraèdre planaire*, quel que soit l'ordre adopté pour ses faces,

$$\mathrm{A}, \quad i\mathrm{A}i, \quad j\mathrm{A}j, \quad k\mathrm{A}k.$$

Le tétraèdre ponctuel complémentaire est justement représenté par les mêmes quaternions : il est le transformé du précédent par polaires réciproques par rapport à la quadrique de base. Ce tétraèdre ponctuel reste invariant dans le sous-groupe des quatre homographies $\mathrm{J}\xi\mathrm{J}$; il se transforme en *quatre tétraèdres ponctuels associés*, dont lui-même, par les homographies du groupe fondamental G_{16}.

Quatre tétraèdres ponctuels associés ont pour sommets les seize sommets de la configuration. Leurs faces se déduisent de l'une d'elles par les homographies du groupe G_{16} et appartiennent à une nouvelle configuration de Kummer ayant les mêmes tétraèdres fondamentaux que la précédente. Les quatre tétraèdres sont, d'autre part, en *liaison desmique* avec le même tétraèdre fondamental (qui, relativement à la forme canonique, est le tétraèdre de référence); si l'on complète par un troisième tétraèdre les systèmes desmiques correspondants, on obtient quatre nouveaux tétraèdres dont les sommets constituent une configuration de Kummer $\mathrm{J}\bar{\mathrm{A}}\mathrm{J}'$ quadruplement homologique de la configuration initiale (n° 26).

4° Étudions un autre groupement remarquable de six points, l'*hexade de Weber*. On l'obtient en considérant un tétraèdre de Rosenhain et un tétraèdre ponctuel de Göpel ayant un sommet commun : les six autres sommets constituent l'hexade [12, 14, 17].

Mettons d'abord le tétraèdre de Rosenhain sous sa forme canonique A, $i\mathrm{A}$, $j\mathrm{A}$, $k\mathrm{A}$ et désignons le sommet commun par A. On voit tout de suite que les sommets du tétraèdre de Göpel sont en dehors du plan A et que deux quelconques d'entre eux ne peuvent figurer dans une même ligne ou une même colonne du diagramme d'incidence; ils s'écrivent donc

$$\mathrm{A}, \quad i\mathrm{A}i', \quad j\mathrm{A}j', \quad k\mathrm{A}k',$$

i', j', k' désignant, à l'ordre près, les unités i, j, k. Pour les mettre exactement dans cet ordre, il suffit d'opérer, s'il y a lieu, le changement de coordonnées ξK utilisé au 2°. Il en résulte alors cette *forme canonique* de l'hexade de Weber

$$iA, \quad jA, \quad kA, \quad iAi, \quad jAj, \quad kAk.$$

Seule, la transformation identique laisse l'hexade invariante; les homographies du groupe G_{16} la transforment en seize hexades distinctes.

En s'aidant de la forme canonique et du diagramme, on montre que l'un quelconque des dix autres sommets de la configuration peut être pris comme sommet commun des deux tétraèdres définissant l'hexade. Pour ces dix manières, les tétraèdres de Rosenhain sont respectivement conjugués par rapport aux dix quadriques fondamentales. En conséquence, toutes les hexades contenues dans la configuration de Kummer résultent, si l'on veut, de tétraèdres de Rosenhain conjugués par rapport à une seule et même quadrique fondamentale arbitrairement choisie : elles peuvent être représentées sur *le même diagramme* d'incidence, chacune par six éléments dont trois dans une même ligne ou une même colonne, les trois autres dans des lignes et des colonnes différentes. Il y a donc au total 192 hexades.

L'hexade de Weber possède deux propriétés remarquables : les six points étant placés sur une cubique gauche, on établit aisément que, sur cette courbe, leur situation projective (définie par les paramètres correspondants) est identique à celle des six sommets coplanaires sur leur conique. D'autre part, comme le montre aussitôt le diagramme d'incidence, les six points d'une hexade permettent à eux seuls de construire *linéairement* toute la configuration : par groupes de trois, ils déterminent dix faces qui, à leur tour, déterminent les dix derniers sommets.

Cette construction linéaire est d'ailleurs possible à partir de points quelconques : on peut considérer *six points quelconques* de l'espace $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ comme constituant l'une des hexades de Weber d'une configuration de Kummer. Prenons en effet P_1, P_2, P_3 pour sommets i, j, k d'un tétraèdre de coordonnées et choisissons le quatrième sommet 1 à l'intersection des plans $P_1P_2P_6$, $P_2P_3P_4$, $P_1P_3P_5$. Les six points ont alors pour formule

$$i, \quad j, \quad k, \quad iV, \quad jV', \quad kV''$$

dans laquelle les vecteurs V, V', V'' peuvent être supposés mutuellement orthogonaux, par un choix convenable du point unitaire. Si nous remplaçons ces vecteurs par des produits de quaternions conjugués $Ai\bar{A}$, $Aj\bar{A}$, $Ak\bar{A}$, et si nous effectuons l'homographie ξA, nous obtenons précisément comme expression des six points la forme canonique de l'hexade de Weber.

Les 720 permutations des six points donnent naissance à plusieurs configurations de Kummer. Chaque configuration correspond à 60 permutations puisqu'il y a dix manières de choisir le tétraèdre de Rosenhain et, pour chacun d'eux, six manières de choisir l'ordre des trois premiers sommets. Par conséquent, *à partir de six points quelconques de l'espace, on peut construire linéairement douze configurations de Kummer :* c'est le *théorème de Weber* [12].

Remarque. — Signalons l'existence de deux autres hexades. La première est définie par deux tétraèdres ponctuels de Göpel qui ont un sommet commun, ce sommet étant exclu. Les six points obtenus sont situés deux à deux sur trois droites concourantes, arêtes d'un tétraèdre planaire.

La seconde hexade est définie par deux tétraèdres ponctuels ayant deux sommets communs; les six sommets obtenus permettent de construire linéairement la moitié de la configuration.

5° Par application du principe de dualité, on déduit aisément les propriétés corrélatives des précédentes concernant les hexades de plans, les quadriques tangentes à douze faces de la configuration, etc.

22. *Configurations de Kummer mutuellement inscrites.* — Donnons-nous une configuration de Kummer JAJ' rapportée à un tétraèdre fondamental. Multiplions-la (à droite par exemple) par un vecteur V, ce qui revient à la transformer par polarité par rapport à un complexe linéaire. Le produit

$$JAJ'V$$

est une configuration semblable, inscrite et circonscrite à la première. Les deux figures constituent une configuration du type 32_7.

En remplaçant V par deux ou trois vecteurs orthogonaux V, V', V'', nous obtenons pareillement plusieurs configurations de Kummer mutuellement inscrites et circonscrites

$$JAJ', \quad JAJ'V, \quad JAJ'V', \quad JAJ'V''$$

dont l'addition, partielle ou totale, engendre une configuration du type 32_7, 48_8 ou 64_9.

Considérons notamment la *configuration totale* 64_9. Pour lui donner une expression plus symétrique remplaçons les trois vecteurs orthogonaux par leurs valeurs usuelles $Bi\bar{B}$, $Bj\bar{B}$, $Bk\bar{B}$, puis effectuons le changement de coordonnées ξB. La configuration prend la forme

$$JAJ'BJ'',$$

où J, J', J'' désignent des unités quelconques. Elle est représentée par un diagramme d'incidence parallélépipédique (cubique) et peut être considérée, de *trois manières différentes*, comme un ensemble de quatre configurations de Kummer mutuellement inscrites. Une de ces manières

$$JABJ'', \quad JAiBJ'', \quad JAjBJ'', \quad JAkBJ''$$

correspond à quatre configurations de Kummer possédant les *mêmes tétraèdres fondamentaux.* On peut donc obtenir la figure totale en appliquant les polarités d'un système involutif de six complexes et dix quadriques à un tétraèdre conjugué par rapport à l'une de ces quadriques. La configuration est régulière, mais non homographiquement régulière.

Considérons neuf points coplanaires de la configuration 64_9, par exemple ceux du plan AB (¹). Ils déterminent trois triangles

$$\mathrm{IAB}, \quad \mathrm{AIB}, \quad \mathrm{ABI} \qquad (\mathrm{I} = i, j, k)$$

conjugués par rapport à la quadrique de base et, par suite, inscriptibles deux à deux dans la même conique : groupés par six, les points déterminent donc trois coniques harmoniquement circonscrites à une même conique. Les neuf points définissent aussi une cubique plane; on peut montrer, par une représentation paramétrique uniforme de la courbe, que les sommets de chaque triangle sont les trois points de contact d'une conique tritangente. Si la cubique possède un point double, les conjugués paramétriques des neuf points (qu'on obtient en prenant les conjugués harmoniques de leurs paramètres par rapport à ceux du point double) sont des points alignés par trois sur la courbe.

Signalons que toute la configuration 64_9 peut être construite *linéairement* à partir de neuf de ses sommets convenablement choisis, tels que

$$\mathrm{AB}, \quad \mathrm{AB}i, \quad \mathrm{A}i\mathrm{B}, \quad \mathrm{A}j\mathrm{B}, \quad i\mathrm{AB}i, \quad i\mathrm{AB}j, \quad i\mathrm{A}j\mathrm{B}, \quad j\mathrm{A}i\mathrm{B}, \quad k\mathrm{A}i\mathrm{B};$$

toutefois, la configuration dépendant de 21 paramètres, ces neuf points ne sont pas indépendants et ne peuvent être choisis arbitrairement dans l'espace.

2° Réunissons deux, trois ou quatre configurations 64_9 mutuellement inscrites. Le résultat est une configuration du type 128_{10}, 192_{11} ou 256_{12}.

La configuration 256_{12} possède un diagramme d'incidence parallélépipédique à quatre dimensions et, par suite d'un raisonnement identique, correspond à la formule

$$\mathrm{JAJ'BJ''CJ'''}.$$

Elle peut être considérée, de quatre manières différentes, comme un ensemble de quatre configurations 64_9. Douze points coplanaires quelconques sont les sommets de quatre triangles conjugués par rapport à une même conique. Si par ces douze points on fait passer une quartique de genre 1 (²), les sommets des triangles sont les points de contact de coniques tritangentes à la quartique.

D'une manière générale, la configuration harmonique

$$\mathrm{J}_1\mathrm{A}_1\mathrm{J}_2\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{J}_n$$

est du type 4^n_{3n}. Elle est régulière (non homographiquement) et son diagramme d'incidence est un parallélépipède à n dimensions. On peut la considérer, de n manières différentes, comme un ensemble de quatre configurations $4^{n-1}_{3(n-1)}$

(¹) Pour passer aux autres plans il suffit de remplacer A et B par les quaternions associés.

(²) Ou même une quartique quelconque de genre 2.

mutuellement inscrites et circonscrites. Les points coplanaires, sommets de n triangles conjugués par rapport à une même conique, peuvent être placés sur une courbe du premier genre de degré n, aux points de contact de n coniques tritangentes à la courbe.

23. *Configuration de Klein.* — La configuration de Klein est la figure formée par les *quinze tétraèdres fondamentaux* d'une configuration de Kummer ou d'un système involutif de dix quadriques [10]. Ce sont donc les tétraèdres de coordonnées qui donnent la forme canonique JAJ' à la configuratiou de Kummer, et la formule $J\xi J'$ aux dix quadriques ou aux homographies du groupe G_{16} correspondant.

De préférence nous utiliserons le système involutif des dix quadriques. Comme celui-ci, la configuration de Klein la plus générale de l'espace dépend de quinze paramètres.

Choisissons l'un des tétraèdres fondamentaux comme tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, conjugué par rapport à l'une des quadriques considérée comme quadrique de base. Nous avons noté (n° 14) que dans tout tétraèdre fondamental deux couples d'arêtes opposées sont génératrices communes de deux quadriques du système. Cette remarque, qui a déjà donné le nombre des tétraèdres, permet aussi de déterminer l'expression des sommets et faces de la configuration

$$J, \quad J \pm J', \quad J \pm \varepsilon J', \quad 1 \pm i \pm j \pm k, \quad J \pm J' \pm \varepsilon J'' \pm \varepsilon J''',$$

les J désignant des unités quelconques et ε un scalaire dont le carré vaut -1.

Les quinze tétraèdres, et aussi bien leurs soixante éléments, jouent un rôle symétrique. En effet, on peut prendre n'importe quel tétraèdre fondamental comme tétraèdre de référence qui donne au système involutif la forme canonique et, d'autre part, on peut permuter arbitrairement les sommets de ce tétraèdre. Il en résulte que la configuration est *régulière*, puisque les soixante sommets ou faces sont similaires. Elle est *harmonique* de dix manières puisque le tétraèdre $\mathfrak{T}$, et par suite tous les autres, sont autopolaires par rapport aux dix quadriques. Enfin elle est du *type* 60_{15} puisque l'une des faces, par exemple le plan 1, contient quinze sommets

$$i, \quad j, \quad k, \quad i \pm j, \quad j \pm k, \quad k \pm i, \quad i \pm \varepsilon j, \quad j \pm \varepsilon k, \quad k \pm \varepsilon i,$$

et, corrélativement, chaque sommet appartient à quinze faces.

Les homographies du groupe G_{16} conservant chaque quadrique, conservent aussi chaque tétraèdre puisque les arêtes sont des génératrices communes. Or, ces transformations reviennent à remplacer tout quaternion (ou élément) par l'un quelconque de ses associés. Il en résulte cette autre définition de la figure, d'un caractère purement arithmétique : *la configuration de Klein est représentée par les* 60 *quaternions qui ne possèdent seulement que quatre associés chacun ; quatre quaternions associés correspondent au même tétraèdre fondamental.*

Il suffit donc de quinze quaternions pour représenter toute la configuration

$$1,\quad \rho,\quad \bar{\rho},\quad 1+i',\quad 1+\varepsilon i',\quad 1+i'+\varepsilon j'+\varepsilon k',\quad 1-i'+\varepsilon j'+\varepsilon k',$$

où, i', j', k' désignent une permutation circulaire des unités i, j, k; chaque tétraèdre est alors représenté par l'un de ses sommets.

Dans la formule précédente, les quatre premiers quaternions, six par permutation, ont une norme non nulle et leurs associés peuvent être considérés comme des associés à droite. Les six tétraèdres correspondants peuvent donc s'écrire

$$\mathfrak{T},\quad \mathfrak{T}\rho,\quad \mathfrak{T}\dot{\bar{\rho}},\quad \mathfrak{T}(1+i),\quad \mathfrak{T}(1+j),\quad \mathfrak{T}(1+k).$$

Ils sont conjugués par rapport à la quadrique de base et constituent une configuration desmique 24_9. Les trente-six sommets des autres tétraèdres sont alignés par six sur des génératrices de la quadrique de base et, en même temps, sont situés sur les arêtes des six premiers tétraèdres. Nous obtenons ainsi la construction géométrique suivante :

Étant donnée une configuration desmique 24_9, *comprenant six tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique, les intersections des dix-huit arêtes avec la quadrique et les plans tangents menés par ces mêmes arêtes déterminent une configuration inscrite* 36_{11} *qui, avec la configuration donnée, forme une configuration de Klein.*

Considérons l'un des tétraèdres, $\mathfrak{T}$ par exemple. Il est conjugué par rapport aux quatre quadriques fondamentales $J\xi J$, à chacune desquelles correspondent six tétraèdres conjugués formant une configuration desmique 24_9. Inversement, comme nous le préciserons au numéro suivant, deux quelconques des quadriques admettent deux tétraèdres conjugués communs. Il en résulte cette propriété (*cf.* n^{os} 16, 18) :

De la configuration de Klein on peut extraire dix configurations desmiques 24_9. *Chaque tétraèdre appartient à quatre d'entre elles qui ont deux à deux un nouveau tétraèdre commun et qui, par conséquent, contiennent la totalité des quinze tétraèdres. Deux tétraèdres quelconques de la figure sont donc desmiques ou en liaison harmonique.*

Sur chaque arête de tétraèdre se trouvent six sommets formant trois couples en *division harmonique* mutuelle, par exemple

$$1,\quad i,\quad 1\pm i,\quad 1\pm\varepsilon i.$$

Corrélativement, chaque arête est située dans six faces formant des faisceaux harmoniques. Deux arêtes opposées d'un tétraèdre appartiennent donc à deux nouveaux tétraèdres en liaison harmonique avec le premier. Par suite, *chaque tétraèdre fondamental est en liaison harmonique avec six autres et en liaison desmique avec les huit derniers.*

Enfin, puisque tout tétraèdre fait partie de quatre systèmes desmiques, par un sommet quelconque de la configuration on peut mener seize droites, distinctes des arêtes, contenant chacune deux nouveaux sommets (n° 17). Le nombre total de ces droites est 320. Corrélativement, dans chaque face se trouvent seize droites qui sont chacune l'intersection de deux nouvelles faces.

24. *Permutation des tétraèdres fondamentaux.* — 1° *Le groupe des homographies* conservant globalement les dix quadriques d'un système involutif conserve aussi la configuration de Klein correspondante en permutant les tétraèdres fondamentaux [23].

Ce groupe contient le sous-groupe des homographies propres et impropres qui conservent l'une des quadriques choisie comme quadrique de base

$$K\xi K', \quad K\bar{\xi}K',$$

K et K′ désignant des quaternions entiers quelconques de norme 1, 2 ou 4; ces 1152 homographies permettent de transformer une quadrique quelconque du système en une autre, à l'exclusion de la quadrique de base. Pour obtenir les homographies du groupe total, il suffit de considérer neuf homographies particulières transformant la quadrique de base en chacune des neuf autres quadriques, et de les composer avec toutes les transformations du sous-groupe précédent.

L'ensemble des homographies conservant le système involutif de quadriques (et la configuration de Klein) constitue donc un groupe fini d'ordre 11520 ou $48^2.5$. Si l'on ajoute les corrélations correspondantes, on obtient naturellement un groupe d'ordre double.

Précisons davantage et faisons appel à certaines homographies particulières : les *transformations affines* qui, en conservant le tétraèdre de coordonnées $\mathfrak{T}$, font passer de la quadrique de base à chacune des trois quadriques $I\xi I$ qui admettent $\mathfrak{T}$ comme tétraèdre conjugué commun. Nous désignerons ces trois transformations par des indices i, j, k : l'homographie ξ_i relative à la multiplication des deuxième et quatrième coordonnées (¹) par le scalaire ε

$$\xi_i = x + \varepsilon y i + z j + \varepsilon t k$$

transforme la quadrique de base en la quadrique $j\xi j$; les homographies ξ_j et ξ_k, obtenues par permutation circulaire de i, j, k et de y, z, t, la transforment respectivement en les quadriques $k\xi k$ et $i\xi i$. Avec ces notations, toutes les homographies qui transforment la quadrique de base en quadrique $j\xi j$ ont pour formule

$$(K\xi K')_i, \quad (K\bar{\xi}K')_i.$$

Par multiplication à droite par ρ ou $\bar{\rho}$, on déduit celles qui la transforment en quadrique $i\xi k$ ou $i\xi j$.

(¹) Cette notation est intentionnellement dyssymétrique.

En définitive, le groupe des $48^2.5$ homographies lié au système involutif et à la configuration de Klein peut s'écrire

$$K\xi K', \quad K\bar{\xi}K', \quad (K\xi K')_I L, \quad (K\bar{\xi}K')_I L,$$

l'indice I représentant l'une des transformations affines relatives à i, j, k, et L désignant l'un des quaternions du groupe cyclique 1, ρ, $\bar{\rho}$.

2° *Application à la configuration de Kummer.* — Supposons une configuration de Kummer rapportée à l'un de ses tétraèdres fondamentaux, c'est-à-dire mise sous la forme canonique particulière JAJ'. Recherchons les diverses expressions canoniques que prend cette configuration lorsqu'on la rapporte successivement à chacun des quinze tétraèdres fondamentaux et que pour chacun d'eux, par déplacement du point unitaire, on effectue toutes les permutations et changements de signe des coordonnées. Ces opérations équivalent aux $48^2.5$ homographies conservant l'ensemble des quinze tétraèdres. Les diverses formes canoniques de la configuration de Kummer s'écrivent donc

$$KJAJ'K', \quad K\overline{JAJ'}K', \quad (KJAJ'K')_I L, \quad (K\overline{JAJ'}K')_I L.$$

Abstraction faite de l'ordre des éléments, elles se déduisent de la forme particulière JAJ' par substitution au quaternion A de l'un des $48^2.5$ quaternions

$$KAK', \quad K\bar{A}K', \quad (KAK')_I L, \quad (K\bar{A}K')_I L.$$

Par rapport à des tétraèdres de coordonnées absolument quelconques, les dernières formules définissent 720 configurations de Kummer *projectivement équivalentes*. Si l'on rapporte celles-ci à un seul et même tétraèdre de référence, la figure totale constitue une configuration harmonique de 11520 éléments sur laquelle nous reviendrons.

3° *Application à la configuration de Klein.* — Le groupe des $48^2.5$ homographies permet de passer d'un tétraèdre fondamental quelconque à un autre, et même d'un élément quelconque (sommet et face opposée) à un autre : la configuration de Klein est donc *homographiquement régulière*.

Parmi toutes les homographies du groupe, choisissons les plus simples qui suffisent à transformer le tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$ en chacun des quinze tétraèdres fondamentaux. Il y a d'abord les transformations propres

$$\xi, \quad \xi\rho, \quad \xi\bar{\rho}, \quad \xi(1+i), \quad \xi(1+j), \quad \xi(1+k)$$

qui, appliquées à $\mathfrak{T}$, donnent les six tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base ; afin de condenser encore les formules, nous y remplacerons les trois dernières parenthèses par $\sqrt{i}$, $\sqrt{j}$, $\sqrt{k}$. Il y a ensuite les transformations affines ξ_i, ξ_j, ξ_k, qui, appliquées aux six tétraèdres précédents, donnent les neuf derniers tétraèdres de la configuration. De cette manière, nous pouvons représenter la totalité des tétraèdres fondamentaux par les seules formules

$$\mathfrak{T},\quad \mathfrak{T}\rho,\quad \mathfrak{T}\bar{\rho},\quad \mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}},\quad (\mathfrak{T}\rho)_{\mathrm{I}},\quad (\mathfrak{T}\bar{\rho})_{\mathrm{I}},\quad (\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}},$$

I désignant comme d'habitude l'une des unités i, j, k.

Utilisons cette notation pour déterminer les dix configurations desmiques contenues dans la configuration de Klein. Appliquons d'abord les homographies ξ_1 aux six tétraèdres conjugués par rapport à la quadrique de base. Nous obtenons les quatre configurations desmiques 24_9 dont fait partie le tétraèdre de référence et qui contiennent au total les quinze tétraèdres fondamentaux

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{T} & \mathfrak{T}\rho & \mathfrak{T}\bar{\rho}\;, & \mathfrak{T}\sqrt{i} & \mathfrak{T}\sqrt{j} & \mathfrak{T}\sqrt{k} \\
\mathfrak{T} & (\mathfrak{T}\rho)_i & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_i, & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & \mathfrak{T}\sqrt{j} & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k \\
\mathfrak{T} & (\mathfrak{T}\rho)_j & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_j, & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j & \mathfrak{T}\sqrt{k} \\
\mathfrak{T} & (\mathfrak{T}\rho_k) & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_k, & \mathfrak{T}\sqrt{i} & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k
\end{array}$$

où, dans chaque ligne, la virgule sert à séparer deux systèmes desmiques de trois tétraèdres.

Les six autres configurations desmiques peuvent être considérées comme les transformées de la première par les homographies $\xi_1\rho$ et $\xi_1\bar{\rho}$. Elles s'écrivent

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{T}\rho & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k, & (\mathfrak{T}\rho)_i & \mathfrak{T}\sqrt{k} & (\mathfrak{T}\rho)_k \\
\mathfrak{T}\bar{\rho} & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & (\mathfrak{T}\rho)_k\;, & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_j & \mathfrak{T}\sqrt{i} & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_i
\end{array}$$

avec les expressions analogues obtenues par permutation circulaire de i, j, k.

Le tableau des quatre configurations desmiques qui contiennent $\mathfrak{T}$ permet de vérifier aussitôt la propriété énoncée précédemment. Le tétraèdre $\mathfrak{T}$ est desmique avec les huit tétraèdres figurant à gauche de la virgule, et il est en liaison harmonique avec les six tétraèdres figurant à droite. En outre deux des quatre configurations desmiques ont deux tétraèdres communs. Les mêmes propriétés sont valables pour tout autre tétraèdre fondamental et pour les autres couples de configurations desmiques, en raison du rôle symétrique des tétraèdres et de celui des quadriques fondamentales.

25. *Configurations extraites de la configuration de Klein.* — Parmi les quinze tétraèdres fondamentaux, recherchons les figures de n tétraèdres tels que chacun d'eux soit en liaison desmique avec p autres, et en liaison harmonique avec les $n-p-1$ tétraèdres restants. Une telle figure constitue une configuration harmonique de dix manières, puisqu'elle est autopolaire par rapport aux dix quadriques du système involutif. Elle comprend $4n$ faces dont chacune contient $2(n-p-1)+3$ sommets, et réciproquement par corrélation; elle est donc du type

$$4n_{2n+1-2p}.$$

L'obtention de toutes les figures possibles résulte d'un raisonnement exhaustif assez long, que nous ne reproduirons pas ici, où des remarques de détail viennent réduire notablement les calculs. Disons seulement que le cas $p=7$ est impossible, que $p=6$ entraîne que n soit égal à 10 ou à 12, que $n-p=5$ ne peut avoir lieu que si n égale 9. La liste complète que nous donnons ci-après comprend d'abord les configurations autopolaires inscrites, plus faciles à déterminer puisque neuf tétraèdres fondamentaux sont inscriptibles dans la même quadrique :

Configuration autopolaire inscrite 36_{11}, représentable par un diagramme carré. Chacun des neuf tétraèdres est desmique avec quatre autres et en liaison harmonique avec les quatre derniers. La configuration inscrite dans la quadrique de base peut s'écrire

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{T}\rho)_i & (\mathfrak{T}\rho)_j & (\mathfrak{T}\rho)_k \\ (\mathfrak{T}\bar{\rho})_i & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_j & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_k \\ (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i \end{array}$$

où les tétraèdres de ce tableau, s'ils sont desmiques, figurent dans la même ligne ou la même colonne. La configuration de Klein contient dix configurations 36_{11} respectivement inscrites dans les dix quadriques fondamentales.

Configurations autopolaires inscrites 24_9, 24_7, 16_5, extraites de la configuration 36_{11} et se déduisant successivement du tableau ci-dessus par suppression d'une diagonale, d'une ligne ou d'une colonne, d'une ligne et d'une colonne.

Configuration 16_7 *ou configuration de Kummer inscrite*, dont les quatre tétraèdres forment deux couples desmiques en liaison harmonique. On la déduit du tableau des neuf tétraèdres en supprimant par exemple les diagonales. Un autre exemple simple est donné par

$$\mathfrak{T} \quad \mathfrak{T}\rho, \quad \mathfrak{T}\sqrt{i} \quad \mathfrak{T}\sqrt{j}.$$

Configurations autopolaires inscrites 8_5, 12_7, formées par deux ou trois tétraèdres en liaison harmonique mutuelle, par exemple

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\sqrt{i}, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i.$$

Leurs sommets sont alignés sur deux génératrices d'une quadrique fondamentale et leurs faces sont les plans tangents en ces points. La configuration de Klein contient quinze configurations 12_7.

Configurations autopolaires incrites 8_3, 12_3, formées par deux ou trois tétraèdres mutuellement desmiques et appartenant à une même configuration inscriptible 36_{11} (ligne ou colonne du tableau des neuf tétraèdres).

Configuration 12_3 non inscriptible dans une quadrique, système desmique de trois tétraèdres tels que

$$\mathfrak{T} \quad \mathfrak{T}\rho \quad \mathfrak{T}\bar{\rho}.$$

Configurations 16_3, 20_3, qui prolongent la configuration inscriptible 12_3 pour former quatre ou cinq tétraèdres mutuellement desmiques, par exemple

$$\mathfrak{T} \quad \mathfrak{T}\bar{\rho} \quad (\mathfrak{T}\rho)_i \quad (\mathfrak{T}\rho)_j \quad (\mathfrak{T}\rho)_k.$$

Trois quelconques de ces tétraèdres sont inscrits dans une même quadrique fondamentale. La configuration de Klein donne naissance à six configurations 20_3, dans chacune desquelles deux tétraèdres suffisent à déterminer les trois autres.

Configuration 20_7, constituée par une chaîne de cinq tétraèdres desmiques de proche en proche : chacun d'eux, desmique avec deux autres, est en liaison harmonique avec les deux derniers. Ainsi

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{T} & \mathfrak{T}\rho & & & \\ & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & \mathfrak{T}\sqrt{j} & & \\ & & (\mathfrak{T}\rho)_j & \mathfrak{T}. & \end{array}$$

Configuration desmique 24_9, déjà étudiée, formée par trois tétraèdres desmiques, en liaison harmonique avec trois autres tétraèdres desmiques. C'est la figure complémentaire d'une configuration 36_{11} autopolaire inscrite (qu'elle complète pour former la configuration de Klein).

Configuration 24_5, ensemble des six tétraèdres en liaison harmonique avec l'un des tétraèdres fondamentaux, par exemple

$$\mathfrak{T}\sqrt{i}, \quad \mathfrak{T}\sqrt{j}, \quad \mathfrak{T}\sqrt{k}, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k.$$

Chaque tétraèdre est desmique avec quatre autres et en liaison harmonique avec le tétraèdre restant.

Configuration 32_9, ensemble des huit tétraèdres desmiques avec un même tétraèdre fondamental, par exemple

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{T} & (\mathfrak{T}\rho)_i & (\mathfrak{T}\rho)_j & (\mathfrak{T}\rho)_k \\ \mathfrak{T}\rho & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i. \end{array}$$

Chaque tétraèdre est desmique avec quatre autres de l'ensemble.

Configuration 36_{11} *non inscriptible* dans une quadrique, complémentaire d'une configuration 24_9 autopolaire inscrite. Ainsi

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}\rho, \quad \mathfrak{T}\bar{\rho}, \quad \mathfrak{T}\sqrt{i}, \quad \mathfrak{T}\sqrt{j}, \quad \mathfrak{T}\sqrt{k}, \quad (\mathfrak{T}\rho)_i, \quad (\mathfrak{T}\bar{\rho})_j, \quad (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i.$$

Chacun des neuf tétraèdres, desmique avec quatre autres, est en liaison harmonique avec les quatre derniers.

Configuration 40_9, complémentaire d'une configuration 20_7. On peut aussi la considérer comme la somme de configurations 16_3 et 24_5 convenablement choisies.

Configuration 48_{13}, complémentaire de l'une des quinze configurations 12_7.

Configuration de Klein 60_{15}, qui englobe évidemment toutes les précédentes, et pour laquelle nous indiquerons, en terminant, les diverses relations desmiques entre tétraèdres. Dans le tableau ci-après, le plus simple du genre, deux tétraèdres desmiques quelconques figurent au moins une fois dans la même ligne ou dans la même colonne, en sorte que chacun d'eux soit desmique avec huit autres :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{T} & \mathfrak{T}\bar{\rho} & (\mathfrak{T}\rho)_i & (\mathfrak{T}\rho)_j & (\mathfrak{T}\rho)_k \\
\mathfrak{T} & \mathfrak{T}\rho & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_i & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_j & (\mathfrak{T}\bar{\rho})_k \\
 & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i & \mathfrak{T}\sqrt{k} & \mathfrak{T}\sqrt{j} & \mathfrak{T}\sqrt{k} \\
 & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{j})_j & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k & (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i \\
 & (\mathfrak{T}\sqrt{k})_k & \mathfrak{T}\sqrt{i} & \mathfrak{T}\sqrt{i} & \mathfrak{T}\sqrt{j}.
\end{array}$$

Les colonnes et les deux premières lignes de ce tableau résultent immédiatement de la détermination des six configurations 20_3 contenues dans la configuration de Klein.

26. *Configurations de Kummer homologiques.* — 1° Considérons d'abord les deux configurations de Kummer ayant pour formules

$$\mathrm{JAJ}', \quad \mathrm{J\bar{A}J}'.$$

Elles admettent les mêmes tétraèdres fondamentaux, dont le tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$. En outre, elles sont involutivement homologiques de quatre manières, les centres et les plans d'homologie étant les sommets et les faces opposées du tétraèdre $\mathfrak{T}$: par exemple les sommets JAJ' et $i\mathrm{J}'\mathrm{\bar{A}J}i$ sont homologiques par rapport au point et au plan i.

Nous dirons que les configurations précédentes sont *homologiques par rapport au tétraèdre fondamental* $\mathfrak{T}$. Leurs tétraèdres de Rosenhain ou de Göpel, leurs hexades de Weber sont respectivement homologiques. Ceux de leurs tétraèdres de Göpel qui sont desmiques avec le tétraèdre $\mathfrak{T}$ sont aussi respectivement desmiques : les deux tétraèdres

$$\mathrm{JAJ}, \quad \mathrm{J\bar{A}J} \qquad (\mathrm{J} = 1,\ i,\ j,\ k)$$

sont desmiques entre eux, et il en est de même des trois couples obtenus par substitution au quaternion A de ses associés à droite $i\mathrm{A}$, $j\mathrm{A}$, $k\mathrm{A}$.

2° Cherchons la condition que doivent vérifier A et A_1 pour que les configurations de Kummer correspondantes

$$\mathrm{JAJ}', \quad \mathrm{JA_1J}'$$

soient homologiques par rapport à un tétraèdre fondamental autre que $\mathfrak{T}$, par exemple $\mathfrak{T}\sqrt{i}$. L'homographie $\xi(1-i)$ transforme le tétraèdre $\mathfrak{T}\sqrt{i}$ en $\mathfrak{T}$, et rend les configurations homologiques par rapport au tétraèdre de référence. Il s'ensuit immédiatement que l'élément A_1, ou l'un de ses associés, a pour expression

$$A_1 = (1+i)\bar{A}(1+i),$$

ce qui fait que A et A_1 ont les mêmes coordonnées à l'ordre et au signe près

$$A = x_0 + y_0 i + z_0 j + t_0 k, \qquad A_1 = x_0 + y_0 i + t_0 j + z_0 k.$$

Une permutation circulaire des coordonnées donne aussitôt la formule des configurations homologiques par rapport à $\mathfrak{T}\sqrt{j}$ et $\mathfrak{T}\sqrt{k}$.

Un raisonnement analogue conduit aux configurations homologiques de JAJ′ par rapport à l'un quelconque des autres tétraèdres fondamentaux, par exemple

$$(\mathfrak{T}\sqrt{i})_i, \quad \mathfrak{T}\rho, \quad \mathfrak{T}\bar{\rho}, \quad (\mathfrak{T}\rho)_i, \quad (\mathfrak{T}\bar{\rho})_i.$$

Ces nouvelles configurations JA_2J', JA_3J', ..., JA_6J' sont respectivement définies par les quaternions

$$A_2 = [(1+i)\bar{A}_i(1+i)]_i, \qquad A_3 = \rho\bar{A}\rho,$$
$$A_4 = \bar{\rho}\bar{A}\bar{\rho}, \qquad A_5 = (\rho\bar{A}_i\rho)_i, \qquad A_6 = (\bar{\rho}\bar{A}_i\bar{\rho})_i$$

qui s'écrivent encore, au produit près par une unité,

$$\begin{aligned}
A_2 &= x_0 + y_0 i + \varepsilon t_0 j - \varepsilon z_0 k,\\
A_3 &= -x_0 + y_0 + z_0 + t_0 + (x_0 - y_0 + z_0 + t_0)i + (x_0 + y_0 - z_0 + t_0)j + (x_0 + y_0 + z_0 - t_0)k,\\
A_4 &= x_0 + y_0 + z_0 + t_0 + (x_0 + y_0 - z_0 - t_0)i + (x_0 - y_0 + z_0 - t_0)j + (x_0 - y_0 - z_0 + t_0)k,\\
A_5 &= -x_0 + y_0 + \varepsilon z_0 + \varepsilon t_0 + (x_0 - y_0 + \varepsilon z_0 + \varepsilon t_0)i + (\varepsilon x_0 + \varepsilon y_0 + z_0 - t_0)j + (\varepsilon x_0 + \varepsilon y_0 - z_0 + t_0)k,\\
A_6 &= x_0 + y_0 + \varepsilon z_0 + \varepsilon t_0 + (x_0 + y_0 - \varepsilon z_0 - \varepsilon t_0)i + (\varepsilon x_0 - \varepsilon y_0 - z_0 + t_0)j + (\varepsilon x_0 - \varepsilon y_0 + z_0 - t_0)k.
\end{aligned}$$

3° Nous venons de voir, sur l'expression de A_1, que deux configurations de Kummer homologiques par rapport à l'un des trois tétraèdres $\mathfrak{T}\sqrt{I}$ se déduisent l'une de l'autre par l'échange de deux coordonnées convenablement choisies.

Considérons alors la formule, prise avec un nombre pair de signes moins,

$$x \pm yi \pm zj \pm tk,$$

où x, y, z, t désignent une permutation quelconque des coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0. Elle représente 96 éléments formant un système de *six configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *trois* autres, par rapport aux tétraèdres fondamentaux respectifs $\mathfrak{T}\sqrt{I}$. Les centres et les plans d'homologie constituent donc un système desmique de trois tétraèdres.

Complétons la figure précédente en lui adjoignant les configurations homologiques par rapport au tétraèdre $\mathfrak{T}$, ce qui revient à changer le signe d'une coordonnée supplémentaire. Nous obtenons un total de 192 éléments représentés par la même formule

$$x \pm yi \pm zj \pm tk$$

prise avec tous les signes possibles. Cette figure comprend *douze configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *quatre* autres, par rapport aux tétraèdres respectifs $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$. Les trois tétraèdres fondamentaux $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$, mutuellement desmiques, sont en liaison harmonique avec le quatrième $\mathfrak{T}$. Les résultats sont manifestement analogues si l'on remplace ces tétraèdres par quatre autres projectivement équivalents.

On peut dire, dans le même ordre d'idées, que le groupe des 192 homographies correspondant aux permutations et changements de signe des coordonnées (n° 7), et dont fait partie le groupe G_{16}, résulte, par multiplications successives et répétées, de seize homologies involutives définies par les sommets et les faces opposées de quatre tétraèdres fondamentaux convenablement choisis.

Faisons intervenir maintenant les tétraèdres $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}}$. Quoique mutuellement desmiques, ils ne sont pas projectivement équivalents aux tétraèdres $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ puisque, contrairement à ces derniers, ils sont inscriptibles dans une même quadrique et peuvent être intégrés dans un groupe de cinq tétraèdres mutuellement desmiques. Partant de la configuration de Kummer JAJ′, construisons alors, successivement *de proche en proche*, les figures homologiques par rapport aux trois tétraèdres

$$(\mathfrak{T}\sqrt{i})_i,\quad (\mathfrak{T}\sqrt{j})_i,\quad (\mathfrak{T}\sqrt{i})_i.$$

Nous aboutissons à une configuration qui est homologique de JAJ′ par rapport au tétraèdre $\mathfrak{T}\sqrt{k}$. Il en résulte que, par multiplications successives, les homologies involutives définies par les sommets et les faces opposées des six tétraèdres $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ et $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}}$ engendrent un groupe fini. La formule correspondante

$$x + \eta y i + \eta' z j + \eta'' t k \qquad (\eta\eta'\eta'' = 1)$$

où chaque η désigne un scalaire quelconque de carré ± 1, représente un système de 24 *configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *six* autres, par rapport aux tétraèdres respectifs $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ et $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}}$. Bien entendu, ces six tétraèdres fondamentaux, qui forment une configuration 24_5, peuvent être remplacés par un ensemble équivalent tel que $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$, $(\mathfrak{T}\rho)_{\mathrm{I}}$.

Quant à la même formule prise avec

$$\eta\eta'\eta'' = \pm 1,$$

elle représente un système de 48 *configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *sept* autres, par rapport aux tétraèdres respectifs $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$ $(\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}}$ dont le premier $\mathfrak{T}$ est en liaison harmonique avec les six autres. On étudierait de même les configurations homologiques par rapport à des ensembles de sept tétraèdres fondamentaux ayant la même situation relative et, de ce fait, projectivement équivalents aux précédents, par exemple $\mathfrak{T}\rho$, $\mathfrak{T}\sqrt{\mathrm{I}}$, $(\mathfrak{T}\rho)_{\mathrm{I}}$.

Tous ces groupements de configurations font visiblement partie de la figure totale des configurations de Kummer possédant les mêmes tétraèdres fondamentaux et projectivement équivalentes (n° 24) : c'est là un ensemble de 720 *configurations de Kummer* dont chacune est homologique de *quinze* autres par rapport aux quinze tétraèdres fondamentaux, respectivement.

Parallèlement, on peut dire que le groupe des 11520 homographies conservant la configuration de Klein résulte, par multiplications successives, des *soixante homologies involutives* dont les centres et les plans d'homologie sont les sommets et les faces opposées des quinze tétraèdres de la configuration.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE ET HISTORIQUE.

[1]. J. V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822, p. 409.
[2]. M. Chasles, *Ann. math. pures appl.*, **19**, 1828, p. 65.
[3]. A. F. Möbius, *J. f. Math.*, **3**, 1828, p. 273; *Werke*, **1**, p. 437.
[4]. O. Rodrigues, *J. math. pures appl.*, **5**, 1840, p. 405.
[5]. L. O. Hesse, *J. f. Math.*, **20**, 1840, p. 297; *Werke*, p. 39.
[6]. O. Hermes, *J. f. Math.*, **56**, 1859, p. 218.
[7]. E. Kummer, *Berliner Monatsberichte*, 1864, p. 247.
[8]. P. Serret, *Géométrie de direction*, Paris, 1869, p. 132, 181, 317.
[9]. C. Jordan, *J. f. Math.*, **70**, 1869, p. 182.
[10]. F. Klein, *Math. Ann.*, **2**, 1870, p. 198, 212; **4**, 1871, p. 356; **23**, 1884, p. 539.
[11]. A. Cayley, *J. f. Math.*, **83**, 1877, p. 210; *Papers*, **10**, p. 157.
[12]. H. Weber, *J. f. Math.*, **84**, 1878, p. 332.
[13]. C. Stephanos, *Bull. sc. math.*, (2), **3**, 1879, p. 424.
[14]. Th. Reye, *J. f. Math.*, **86**, 1879, p. 84, 209.
[15]. Th. Reye, *Acta math.*, **1**, 1882, p. 97.
[16]. D. Montesano, *Ann. Mat. pur. appl.*, (2), **14**, 1886, p. 131.
[17]. H. Schröter, *J. f. Math.*, **100**, 1887, p. 231 ; **109**, 1892, p. 341.
[18]. A. Schoenflies, *Math. Ann.*, **31**, 1888, p. 43.
[19]. R. Sturm, *Liniengeometrie*, **1**, Leipzig, 1892, p. 234, 316.
[20]. S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, **3**, Leipzig, 1893.
[21]. G. Kœnigs, *La géométrie réglée*, Paris, 1895, p. 92.
[22]. J. Feder, *Math. Ann.*, **47**, 1896, p. 375.
[23]. E. Hess, *Nova acta Leop. Carol.*, **55**, 1890, p. 97; **75**, 1899, p. 5.
[24]. V. Martinetti, *Palermo Rend.*, **16**, 1902, p. 196.
[25]. R. Hudson, *Kummer's quartic surface*, Cambridge, 1905.
[26]. G. Darboux. *Principes de géométrie analytique*, Paris, 1917.
[27]. A. Hurwitz, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin, 1919
[28]. G. B., *Bull. Soc. math. France*, **71**, 1943, p. 78.
[29]. G. B., *Bull. sc. math.*, **68**, 1944, p. 190; *C. R. Acad. Sc.*, **220**, 1945, p. 548, 640.