ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SZOLEM MANDELBROJT

Une inégalité fondamentale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 63 (1946), p. 351-378
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__351_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR

UNE INÉGALITÉ FONDAMENTALE

PAR M. S. MANDELBROJT.

INTRODUCTION.

L'inégalité que nous démontrons dans ce travail permet de retrouver la presque totalité des résultats connus de plusieurs branches de la théorie des fonctions, ainsi que des résultats considérablement plus généraux que ceux déjà connus. Cette inégalité constitue un principe général, d'un caractère asymptotique, applicable au prolongement analytique, à la quasi-analyticité, aux problèmes gravitant autour du problème de Watson.

Les résultats de ce travail sont essentiellement plus généraux et, en même temps, plus simples que ceux que nous avons établis dans un Mémoire paru dans les *Transactions* (1).

Les inégalités de Cauchy portant sur les coefficients d'une série de Taylor, et transposés à une série de Dirichlet, fournissent une évaluation des coefficients d'une telle série par l'intermédiaire du maximum du module de la fonction correspondante sur une ligne verticale. Le point de départ de ce travail est d'évaluer les coefficients des expressions de la forme $\sum_{k=1}^{m} d_k e^{\lambda_k s}$ qui représentent, lorsque m tend vers l'infini, une fonction $F(s)$ seulement avec une « précision » suffisante. D'ailleurs, et ce point n'est pas moins important pour les applications, cette évaluation est faite en partant du maximum du module de $F(s)$ sur des cercles situés aussi loin à gauche que le prolongement analytique de $F(s)$ le permet, les rayons de ces cercles ne dépendant d'ailleurs que de la « fréquence » des λ_k.

(1) S. MANDELBROJT, *Quasi-analyticity and analytic continuation —a general principle* (*Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 55, n° 1, p. 96-131, janvier 1944).

Pour que nos inégalités soient valables, il suffit que les polynomes de Dirichlet représentent $F(s)$ avec une « précision » suffisante dans un domaine contenant des points s dont la partie réelle est arbitrairement grande. Cette précision doit être d'autant plus grande que la région est moins évasée à l'infini $(\mathcal{R}(s) \to \infty)$ et que la « fréquence » des λ_k est plus grande. Ce sont d'ailleurs des propriétés assez fines de distribution de la suite $\{\lambda_k\}$ qui jouent ici un rôle essentiel.

Le fait que la série $\Sigma d_k e^{-\lambda_k s}$ n'est pas supposée convergente (pour aucune valeur de s) est très important, car, par exemple, les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite fournissent pour leurs transformées de Fourier des séries qui ne représentent cette transformée qu'avec une précision qui est d'autant plus grande que la classe à laquelle appartient la fonction indéfiniment dérivable est plus restreinte. Ce ne sont que des fonctions d'un caractère bien trivial qui fournissent des transformées de Fourier à séries convergentes. Cette remarque fournit une nouvelle preuve, s'il en était encore besoin, qu'il est parfaitement arbitraire et beaucoup trop restrictif, au point de vue de la théorie des fonctions d'une variable réelle, de ne considérer que des séries de Dirichlet convergentes.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Nous allons commencer par quelques définitions. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs croissants $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \ldots$. Une telle suite sera souvent désignée par $(0 < \lambda_n \uparrow)$. Soit $N(\lambda)$ le nombre d'éléments de $\{\lambda_n\}$ inférieurs à $\lambda (\lambda > 0)$; cette fonction sera appelée *distribution* de $\{\lambda_n\}$. On a $N(\lambda) = 0$ pour $0 < \lambda \leqq \lambda_1$. La fonction $D(\lambda) = N(\lambda)/\lambda$ sera appelée *fonction de densité* de $\{\lambda_n\}$. La quantité $D^{\cdot} = \overline{\lim_{\lambda=\infty}} D(\lambda)$ est la *densité supérieure* de $\{\lambda_n\}$. La fonction $D^{\cdot}(\lambda) = \overline{\text{borne}}_{x \geqq \lambda} D(x)$ sera appelée *fonction de densité supérieure* de $\{\lambda_n\}$. Il est évident que $D^{\cdot}(\lambda)$ tend en décroissant vers $D^{\cdot}$. $D^{\cdot}(\lambda)$ est une fonction continue $(\lambda \geqq 0)$, à moins que l'on n'ait identiquement $D^{\cdot}(\lambda) \equiv \infty$.

La fonction $\overline{D}(\lambda) = \int_0^\lambda D(x)\,dx/\lambda (\lambda > 0)$ est appelée *fonction de densité moyenne*. $\overline{D}^{\cdot} = \overline{\lim_{\lambda=\infty}} \overline{D}(\lambda)$ est la *densité moyenne supérieure*. La fonction $\overline{D}^{\cdot}(\lambda) = \overline{\text{borne}}_{x \geqq \lambda} \overline{D}(x) (\lambda > 0)$ est appelée *fonction de densité moyenne supérieure*. On voit que $\overline{D}^{\cdot}(\lambda)$ tend en décroissant vers $\overline{D}^{\cdot}$. On a toujours $\overline{D}^{\cdot} \leqq D^{\cdot}$, mais il est très facile de construire des exemples où $\overline{D}^{\cdot} < D^{\cdot}$; voici une manière simple pour y parvenir : soit $\{\nu_n\}$ $(\nu_0 = 0)$ une suite d'entiers tendant vers l'infini en croissant. Posons

$$\lambda_n = \nu_k + (n - \nu_{k-1})/(\nu_k - \nu_{k-1}),$$

pour

$$\nu_{k-1}+1 \leqq n < \nu_k \qquad (k \geqq 1).$$

Si la suite $\{\nu_n\}$ tend vers l'infini assez rapidement, on a

$$\overline{D}^{\cdot} < D^{\cdot} = 1 \quad (^1).$$

Dans tout ce travail nous supposerons que $\overline{D}^{\cdot} < \infty$.

Si $D > \overline{D}^{\cdot}$, la fonction

$$\nu(D) = \overline{\text{borne}}_{\lambda>0}\, \lambda(\overline{D}(\lambda) - D) = \overline{\text{borne}}_{\lambda>0} \int_0^{\lambda} (D(x) - D)\, dx$$

est non négative, continue et décroissante. On peut dire que $\nu(D)$ indique le « nombre moyen » des termes de $\{\lambda_n\}$ qui empêchent la distribution d'être toujours inférieure ou égale à $D\lambda$. Cette fonction mesure une certaine irrégularité de la distribution $N(\lambda)$. Nous l'appellerons *fonction d'excès de la suite* $\{\lambda_n\}$.

2. Posons

$$(1) \qquad \Lambda(r) = \Pi(1 + r^2/\lambda_n^2) \qquad (r \geqq 0).$$

Comme nous supposons $\overline{D}^{\cdot} < \infty$, ce produit infini converge et l'on a

$$(2) \qquad \log \Lambda(r) = 2r^2 \int_0^{\infty} D(\lambda)\, d\lambda/(\lambda^2 + r^2) = -2r^2 \int_0^{\infty} \overline{D}(\lambda)\lambda\, d_\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2 + r^2}\right).$$

On a en effet en intégrant par parties

$$2\int_0^t D(\lambda) r^2\, d\lambda/(r^2 + \lambda^2) = -\log(1 + r^2/t^2) N(t) + \int_0^t \log(1 + r^2/\lambda^2)\, dN(\lambda).$$

Mais comme $\overline{D}^{\cdot} < \infty$, il existe une suite $0 < t_i \to \infty$, telle que $D(t_i) = O(1)$, et, pour cette suite $\{t_i\}$ et pour r fixe, on a

$$\log(1 + r^2/t_i^2) N(t_i) \sim r^2 N(t_i)/t_i^2 \to 0.$$

Donc

$$(3) \qquad 2r^2 \int_0^{\infty} D(\lambda)\, d\lambda/(\lambda^2 + r^2) = \int_0^{\infty} \log(1 + r^2/\lambda^2)\, dN(\lambda) = \Sigma \log(1 + r^2/\lambda_n^2).$$

En intégrant par parties de la seconde manière, on obtient

$$\int_0^t D(\lambda)\, d\lambda/(\lambda^2 + r^2) = \left(\int_0^t D(\lambda)\, d\lambda\right)\Big/(t^2 + r^2)$$
$$- \int_0^t \left(\int_0^x D(\lambda)\, d\lambda\right) d_x\left(\frac{1}{x^2 + r^2}\right)$$

(1) On peut d'ailleurs noter, comme me l'ont fait remarquer MM. J. Deny et A. Dvoretzky, que $D^{\cdot} \leqq e\overline{D}^{\cdot}$, la constante e étant ici la meilleure possible.

et il résulte de $\overline{D}^{\cdot} < \infty$ que

$$\int_0^\infty D(\lambda)\, d\lambda/(\lambda^2 + x^2) = -\int_0^\infty \overline{D}(\lambda)\lambda\, d_\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2 + r^2}\right).$$

Or la dernière expression a certainement une valeur finie, ce qui prouve, d'après (3), que la somme $\log\Lambda(r) = \Sigma \log(1 + r^2/\lambda_n^2)$ converge et que cette somme est représentée par chacune des intégrales dans (2). Il résulte immédiatement de (2) que

$$\overline{\lim} \log\Lambda(r)/r \leqq \pi\overline{D}^{\cdot}. \tag{4}$$

3. Posons

$$\Lambda_n(r) = \prod_{m \neq n} (1 + r^2/\lambda_m^2),$$

$$L_n(u) = \int_0^\infty e^{-ur}\Lambda_n(r)\, dr. \tag{5}$$

Il résulte de (4) que $L_n(u)$ est une fonction continue pour $u > \pi\overline{D}^{\cdot}$. En réalité $L_n(n)$ est analytique pour $u > \pi\overline{D}^{\cdot}$.

Nous allons maintenant démontrer que :

Pour $D > \overline{D}^{\cdot}$ *on a*

$$\log L_n(\pi D) \leqq \log(\pi\lambda_n/2) + 2\nu(D). \tag{6}$$

On a, en effet, d'après (5),

$$\begin{aligned} L_n(\pi D) &= \int_0^\infty e^{-\pi D r}\big(\Lambda(r)/(1 + r^2/\lambda_n^2)\big)\, dr \\ &= \lambda_n \int_0^\infty e^{-\pi\lambda_n D t}\Lambda(\lambda_n t)\, dt/(1 + t^2) \\ &\leqq (\pi\lambda_n/2)\, \overline{\text{borne}}_{x \geqq 0}\, e^{\log\Lambda(x) - \pi D x}. \end{aligned}$$

On a donc, d'après (2),

$$\begin{aligned} \log L_n(\pi D) &\leqq \log(\pi\lambda_n/2) - 2\,\overline{\text{borne}} \int_0^\infty \lambda\big(\overline{D}(\lambda) - D\big)\, d_\lambda\big(r^2/(\lambda^2 + r^2)\big) \\ &\leqq \log(\pi\lambda_n/2) + 2\,\overline{\text{borne}}\, \lambda\big(\overline{D}(\lambda) - D\big) \\ &= \log(\pi\lambda_n/2) + 2\nu(D). \end{aligned}$$

4. Nous ferons correspondre à la suite $\{\lambda_n\}$ la suite $\{\Lambda_n^*\}$ que nous appellerons *suite associée à la suite* $\{\lambda_n\}$, et qui est définie par

$$\Lambda_n^* = \prod_{m \neq n} \frac{\lambda_m^2}{|\lambda_n^2 - \lambda_m^2|} \qquad (n \geqq 1). \tag{7}$$

Puisque le produit dans (1) converge, on voit que Λ_n^* a une valeur finie non nulle.

Bien que nous n'ayons pas à utiliser, dans ce Mémoire, la valeur de Λ_n^*, nous allons indiquer une manière rapide d'évaluer cette quantité, cette évaluation étant importante pour les applications de notre théorème fondamental à la théorie du prolongement analytique.

En posant $h_n = \min\limits_{0 \leq m \leq N(\sqrt{2}\lambda_n)} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\,(\lambda_0 = 0)$, *on a les deux inégalités suivantes* (A *étant une constante*) [1] :

$$\log \Lambda_n^* \leq \lambda_n \left[5\,D(\sqrt{2}\lambda_n) + 2\,D^{\cdot}(\sqrt{2}\lambda_n) - 3\log\big(\lambda_n D(\sqrt{2}\lambda_n)\big) D(\sqrt{2}\lambda_n) \right] + A,$$

$$\log \Lambda_n^* \leq \lambda_n \left[5\big(D(\sqrt{2}\lambda_n) + \bar{D}^{\cdot}(\sqrt{2}\lambda_n)\big) + 3\,\bar{D}(\sqrt{2}\lambda_n) - 3\log\big(h_n D(\sqrt{2}\lambda_n)\big) \bar{D}(\sqrt{2}\lambda_n) \right] + A.$$

Soit, en effet, $a > 1$. Pour simplifier l'écriture, n étant fixé, on posera

$$N(a\lambda_n) = N, \qquad \lambda_n = \lambda, \qquad h = h_n(a) = \min_{0 \leq m \leq N} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)\,(\lambda_0 = 0).$$

On a

$$\Lambda_n^* = A_n^{-1} . B_n^{-1},$$

avec

$$A_n = \prod_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^{N-1} |1 - \lambda^2/\lambda_m^2|, \qquad B_n = \prod_{m=N}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_m^2).$$

Mais

$$\begin{aligned}
\log A_n &\geq \sum_{k=1}^{N-1} \log\left[\big(\lambda/(\lambda - kh)\big)^2 - 1\right] + \sum_{k=1}^{N-n} \log\left[1 - \big(\lambda/(\lambda + kh)\big)^2\right] \\
&\geq \int_{1-n}^{N-n} \log[h\,|x|\,(2\lambda + xh)/(\lambda + xh)^2]\,dx \geq (1/h) \int_{h(1-n)}^{h(N-n)} \log[\,|t|/(\lambda + t)]\,dt \\
&\geq (N-1)\log\left[\lambda/\big(\lambda + (N-n)h\big)\right] + (1/h) \int_{h(1-n)}^{h(N-n)} \log(\,|t|/\lambda)\,dt.
\end{aligned}$$

Comme

$$Nh = N(a\lambda)h \leq a\lambda,$$

on a pour $|t| \leq hN$

$$|t| \leq a\lambda.$$

On a aussi

$$\log\big(1 + (N-n)h/\lambda\big) < (N-n)h/\lambda,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
(9) \qquad \log A_n &\geq (2/h) \int_0^{hN} \log(t/a\lambda)\,dt + (N-1)\log a - N(N-n)h/\lambda \\
&\geq \left[2\log\big(hD(a\lambda)\big) - (2 + a - \log a)\right] N + na - \log a.
\end{aligned}$$

---

[1] Si $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$, les inégalités qui suivent donnent immédiatement une inégalité asymptotique pour $\log \Lambda_n^*/\lambda_n$, qu'on obtient aussi, comme on le sait, par la théorie des fonctions, mais d'une manière bien pénible.

On a de même, en intégrant par parties,

$$(10)\qquad \log B_n = \int_{a\lambda}^{\infty} \log[1-(\lambda/x)^2]\, dN(x)$$
$$= -\log(1-1/a^2)N - 2\lambda^2 \int_{a\lambda}^{\infty} D(x)\, dx/(x^2-\lambda^2),$$

car, comme il existe une suite $\{k_i\}$ $(0 < k_i \to \infty)$ telle que $N(k_i)/k_i^2 \to 0$, on a

$$\lim_{i=\infty} \log[1-(\lambda/k_i)^2]N(k_i) = 0.$$

L'inégalité (10) fournit immédiatement

$$(11)\qquad \log B_n \geqq -\log(1-1/a^2)N - 2\lambda^2 D^{\cdot}(a\lambda)\int_{a\lambda}^{\infty} dx/(x^2-\lambda^2)$$
$$= -\log(1-1/a^2)N + \log[(a-1)/(a+1)]D^{\cdot}(a\lambda)\lambda.$$

Les inégalités (9) et (10) fournissent, lorsqu'on y pose $a=\sqrt{2}$, la première de nos inégalités.

En intégrant par parties l'intégrale dans (10), on a

$$\int_{a\lambda}^{\infty} D(x)\, dx/(x^2-\lambda^2) = \overline{D}(x)x/(x^2-\lambda^2)\Big]_{a\lambda}^{\infty} + 2\int_{a\lambda}^{\infty} \overline{D}(x)x^2\, dx/(x^2-\lambda^2)$$
$$\leqq a\overline{D}(a\lambda)/\lambda(1-a^2) + (2/\lambda)\overline{D}^{\cdot}(a\lambda)\int_{a}^{\infty} t^2\, dt/(t^2-1)^2.$$

En revenant alors à (10) et en tenant compte de (9), on obtient, en prenant $a=\sqrt{2}$, notre seconde inégalité.

5. Soit Δ un domaine contenant des points $s=\sigma+it$ avec σ arbitrairement grand, c'est-à-dire un domaine dont l'intersection avec aucun demi-plan $\sigma > \sigma_0$ n'est vide. Soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans Δ. Soit $\{d_n\}$ une suite de nombres réels ou complexes. Soit, enfin, $p_n(x)$ une fonction croissante vers l'infini telle qu'on ait pour $s \in \Delta$, x étant suffisamment grand

$$\underset{m \geqq n}{\text{borne}}\ \overline{\underset{\sigma \geqq x}{\text{borne}}} \left| F(s) - \sum_{k=1}^{m} d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leqq e^{-p_n(x)}.$$

On dira que *les sommes* $\sum_{k=1}^{m} d_k e^{-\lambda_n s}$, *avec* $m \geqq n$, *représentent* $F(s)$ *dans* Δ *avec la précision logarithmique* $p_n(\sigma)$. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k s}$ converge pour σ suffisamment grand vers $F(s)$, $s \in \Delta$, la précision logarithmique peut être prise comme égale à $+\infty$ pour tout n. Réciproquement, si $p_n(\sigma)=\infty$, pour $\sigma > c$ il y a ultra-convergence de la série dans $\Delta(\sigma > c)$ vers $F(s)$.

Nous désignerons par $C(a, R)$ le cercle $|s-a|<R$. La réunion des cercles $C(s, R)$ dont les centres s parcourent un arc de Jordan L est appelée *canal de largeur* $2R$. L'arc L est la *ligne centrale du canal.*

Soient Δ_1 et Δ_2 deux domaines (ouverts ou fermés) dans le plan s; si la fonction $F(s)$ est holomorphe dans la réunion de Δ_1, Δ_2 et d'un canal de largeur $2R$ dont les cercles extrêmes se trouvent respectivement dans Δ_1 et Δ_2, on dira que $F(s)$ peut être prolongée analytiquement de Δ_1 (ou de Δ_2) à travers un canal de largeur $2R$ jusqu'à Δ_2 (ou Δ_1).

ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental. Nous lui donnerons plusieurs formes, tout en indiquant plus loin les relations qui existent entre ces différentes formes. Ces formes d'énoncé ne diffèrent que par leurs hypothèses; la conclusion est toujours la même. Elle se traduit par l'inégalité (I).

On remarquera que nous n'avons souligné que les formes A, B et D qui sont les plus intéressantes pour les applications.

THÉORÈME F. *Forme* A. — *Hypothèse* I. — $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow)$ *est de densité supérieure* $D^{\cdot}<\infty$. Δ *est un domaine dans le plan* $s=\sigma+it$ *donné par* $\sigma>a_0$, $|t|<\pi g(\sigma)$, *où* $g(\sigma)$ *est une fonction continue, à variation bornée, et telle que* $g(\sigma)>D^{\cdot}$, $\lim g(\sigma)>D^{\cdot}$.

Hypothèse II. — $F(s)$ *est une fonction holomorphe dans* Δ *et peut être prolongée analytiquement de* Δ *à travers un canal plus large que* $2\pi D^{\cdot}$ *jusqu'au cercle* $\overline{C(s_0, \pi R)}$ (1).

Hypothèse III^a. — *La suite* $\{d_m\}$ *et l'entier* n *sont tels que les sommes* $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m\geqq n$, *représentent* $F(s)$ *dans* Δ *avec une précision logarithmique* $p_n(\sigma)$ *satisfaisant à la condition*

$$\text{(A)} \qquad \int^{\infty} p_n(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{du}{g(u)-D^{\cdot}(p_n(u))}}\, d\sigma=\infty \quad (2),$$

où $D^{\cdot}(\lambda)$ *est la fonction de densité supérieure de* $\{\lambda_n\}$.

CONCLUSION. — *On a*

$$\text{(I)} \qquad |d_n|\leqq(\pi^2\lambda_n R/2)e^{2\nu(R)}\Lambda_n^{*}M(s_0, R)e^{\lambda_n \mathcal{R}(s_0)},$$

(1) E étant un ensemble, $\overline{E}$ désigne son adhérence (sa fermeture).

(2) Lorsque, dans une intégrale définie, on omet une de ses limites, par exemple sa limite inférieure, c'est que la relation écrite doit avoir lieu lorsque cette limite est choisie suffisamment grande (s'il s'agit de la limite inférieure).

où $\nu(D)$ *est la fonction d'excès de* $\{\lambda_n\}$, $\{\Lambda_n^*\}$ *la suite associée à la suite* $\{\lambda_n\}$,

$$M(s_0, R) = \operatorname{Max} |F(s)| \left(s \in \overline{C(s_0, \pi R)}\right),$$

$\mathcal{R}(s_0)$ *la partie réelle de* s_0.

Forme B. — *Dans les hypothèses* I *et* II, $D^{\cdot}$ *est remplacé par la densité moyenne supérieure* $\overline{D}^{\cdot}$, *et dans l'intégrale* (A), $D^{\cdot}(p_n(u))$ *est remplacé par* $\overline{D}^{\cdot}(p_n(u))$, *où* $\overline{D}^{\cdot}(\lambda)$ *est la fonction de densité moyenne supérieure de* $\{\lambda_n\}$.

Même conclusion que dans la forme (A).

Forme C. — Mêmes hypothèses I et II que dans la forme B. L'hypothèse III^a est remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse III^c. — Les sommes $\sum^m d_k e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$, représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$ satisfaisant à la condition

$$\text{(C)} \qquad \int^{\infty} p_n(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - \nu^{-1}(\alpha p_n(u))}} d\sigma = \infty,$$

où α est une constante telle que $0 < \alpha < 1/2$, et où ν^{-1} est la fonction inverse de la fonction ν, c'est-à-dire

$$\nu^{-1}(x) = \underset{\nu(D) \leqq x}{\text{borne}}\ D \quad (^1).$$

Même conclusion que dans la forme A.

Forme D. — Mêmes hypothèses I et II que dans la forme B. L'hypothèse III^a est remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse III^d. — *Les sommes* $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m \geqq n$, *représentent* $F(s)$ *dans* Δ *avec une précision logarithmique* $p_n(\sigma)$ *telle qu'il existe une fonction continue décroissante* $h(\sigma)$, *avec* $\lim h(\sigma) = \overline{D}^{\cdot}$, *et une fonction croissante* $C(\sigma)$ *telles que*

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} 2\nu\big(h(\sigma)\big) - p_n(\sigma) < -C(\sigma), \\ \displaystyle\int^{\infty} C(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - h(u)}} d\sigma = \infty. \end{cases}$$

Même conclusion que dans la forme A.

---

(1) C'est-à-dire que, si $\lim\limits_{D \to \overline{D}^{\cdot}} \nu(D) = \infty$, on a, pour x suffisamment grand, $\nu^{-1}(x) = D$, où $D > \overline{D}^{\cdot}$ est tel que $\nu(D) = x$. Si, par contre, $\lim\limits_{D \to \overline{D}^{\cdot}} \nu(D) < \infty$, on a, pour x suffisamment grand, $\nu^{-1}(x) = \overline{D}^{\cdot}$

Forme E. — Mêmes hypothèses I et II que dans la forme B. L'hypothèse III^a est remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse IIIe. — Cette hypothèse diffère de l'hypothèse III^d par le fait que dans les relations (D) de III^d l'expression $2\nu\big(h(\sigma)\big)$ est remplacée par l'expression $\log L_n\big(\pi h(\sigma)\big)$, où la fonction L_n est définie par (5).

Même conclusion que dans la forme A.

2. Avant de comparer les différentes formes d'énoncés, remarquons que, dans toutes, la condition III s'exprime par une inégalité de la forme

$$\int A(\sigma)e^{-\int^{\sigma}\frac{du}{E(u)}}d\sigma=\infty,$$

où $E(u)\geqq k>0$ et où $A(\sigma)$ est une fonction croissante. Pour $A(\sigma)$ donnée, cette condition est d'autant plus restrictive que la fonction $E(u)$ est plus petite.

Il en résulte que si $\overline{D}^{\cdot}<D^{\cdot}$ la forme A est plus restrictive que la forme B, car, comme $\lim\overline{D}^{\cdot}(\lambda)=\overline{D}^{\cdot}$, $\lim D^{\cdot}(\lambda)=D^{\cdot}$, on a, pour u assez grand,

$$g(u)-D^{\cdot}\big(p_n(u)\big)<g(u)-\overline{D}^{\cdot}\big(p_n(u)\big).$$

Si, par contre, $D^{\cdot}=\overline{D}^{\cdot}$, il y a des cas où la forme A est plus générale que la forme B, car on construit alors facilement des exemples où $D^{\cdot}(\lambda)<\overline{D}^{\cdot}(\lambda)$ pour λ assez grand.

Les deux formes A et B sont des cas particuliers de la forme C. En effet, d'après la définition de la fonction $\nu(D)$, on a

$$\begin{aligned}\nu\big(\overline{D}^{\cdot}(p)\big)&=\overline{\text{borne}}_{\lambda>0}\,\lambda\big(\overline{D}(\lambda)-\overline{D}^{\cdot}(p)\big)\leqq\overline{\text{borne}}_{\lambda>0}\,\lambda\big(\overline{D}^{\cdot}(\lambda)-\overline{D}\,(p)\big)\\&=\overline{\text{borne}}_{0<\lambda\leqq p}\,\lambda\big(\overline{D}^{\cdot}(\lambda)-\overline{D}^{\cdot}(p)\big),\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{\lambda=\infty}\overline{D}^{\cdot}(\lambda)=\lim\limits_{p=\infty}\overline{D}^{\cdot}(p)=\overline{D}^{\cdot}$, on a évidemment

$$\nu\big(\overline{D}^{\cdot}(p)\big)=o(p)\qquad(p\to\infty).$$

On a de même, si $D^{\cdot}<\infty$,

$$\begin{aligned}\nu\big(D^{\cdot}(p)\big)&=\overline{\text{borne}}_{\lambda>0}\int_0^{\lambda}\big(D(x)-D^{\cdot}(p)\big)\,dx\leqq\overline{\text{borne}}_{\lambda>0}\int_0^{\lambda}\big(D^{\cdot}(x)-D^{\cdot}(p)\big)\,dx\\&=\int_0^{p}\big(D^{\cdot}(x)-D^{\cdot}(p)\big)\,dx=o(p)\qquad(p\to\infty).\end{aligned}$$

Comme $\lim p_n(\sigma)=\infty$, on voit que, quel que soit $\alpha>0$, on a, pour σ suffisamment grand, $\nu\Big(\overline{D}^{\cdot}\big(p_n(u)\big)\Big)<\alpha p_n(\sigma)$, et si $D^{\cdot}<\infty$ (comme c'est le cas dans la forme A), on a aussi $\nu\Big(D^{\cdot}\big(p_n(\sigma)\big)\Big)<\alpha p_n(\sigma)$. Mais comme ν est une fonction

décroissante pour $D > \overline{D}^{\cdot}$, on a $\nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma)) \leqq \overline{D}^{\cdot}(p_n(\sigma))$ et, si $D^{\cdot} < \infty$, $\nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma)) \leqq D^{\cdot}(p_n(\sigma))$. Donc les formes A et B sont des cas particuliers de la forme C.

La forme C est à son tour un cas particulier de la forme D; la forme C correspond en effet au cas où $h(\sigma) = \nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma))$, car, du fait que $0 < \alpha < 1/2$, on a

$$p_n(\sigma) - 2\nu\left(\nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma))\right) \geqq p_n(\sigma) - 2\alpha p_n(\sigma) = \gamma p_n(\sigma) \qquad (\gamma > 0),$$

par conséquent si la condition (C) est satisfaite, les conditions (D) sont également satisfaites. On voit enfin, d'après l'inégalité (6), que la forme D est un cas particulier de la forme E.

Nous donnons, à la fin de ce Mémoire, un théorème qui prouve que le théorème F (le théorème fondamental) ne peut être amélioré que dans des limites restreintes. A vrai dire, déjà les formes A et B du théorème F, bien qu'elles admettent comme généralisation les formes C, D, E, sont, au point de vue pratique, près de la meilleure forme possible.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. D'après ce que nous venons de voir, il suffit de démontrer le théorème F sous sa forme E. Avant d'aborder sa démonstration proprement dite, commençons par quelques lemmes.

Le lemme suivant a été démontré dans un Mémoire que nous avons publié en collaboration avec M. Mac Lane [1].

LEMME I. — *Soit* $G(\sigma) > 0$ *une fonction continue, à variation bornée pour* $\sigma \geqq d$, *où* $-\infty \leqq d < \infty$, *et soit* $\lim G(\sigma) = l > 0$. *Soit* c *une constante* $c > d$, *et posons*

$$S(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_c^{\sigma} \frac{du}{G(u)}.$$

Soit Δ_s *la région du plan* $s = \sigma + it$ *définie par* $\sigma > d$, $|t| < G(\sigma)$, *et soit* $F_1(s)$ *une fonction non identiquement nulle, holomorphe et bornée dans* Δ_s *et continue dans* $\overline{\Delta}_s$. *Soit, enfin,* $N(\sigma)$ *une fonction croissante telle que, pour* σ *suffisamment grand, on ait*

$$\log\left|F_1\left(\sigma + iG(\sigma)\right)\right| \leqq -N(\sigma). \tag{11}$$

On a alors

$$\int^{\infty} N(\sigma) e^{-S(\sigma)} d\sigma < \infty.$$

---

[1] *Voir* théorème I dans S. MANDELBROJT and G. R. MAC LANE, *On functions holomorphic in a strip, and an extension of Watson's problem* (*Transactions of American Mathematical Society*, vol. 61, 1947, pp. 454-467).

Ce lemme (théorème I dans le Mémoire cité) constitue une généralisation d'un théorème classique portant sur les fonctions holomorphes et bornées dans la bande $|t| < \pi/2$ (énoncé, en général, pour les fonctions holomorphes, bornées et non identiquement nulles dans un demi-plan). La démonstration du lemme I est basée, en partie, sur les inégalités d'Ahlfors. Pour cette démonstration nous renvoyons le lecteur au Mémoire cité.

LEMME II. — *Soit* $\Phi(s)$ *une fonction holomorphe dans le cercle* $C(s', \pi R)$, *et soit, dans ce cercle,* $|\Phi(s)| < M$. *Soit* $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow)$ *de densité moyenne supérieure* $\overline{D}^{\cdot} < R$, *et posons*

$$(12) \qquad \Lambda_n(iz) = \prod_{m \neq n} (1 - z^2/\lambda_m^2) = \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} z^{2k} \qquad (c_k^{(n)} > 0).$$

La série

$$\Sigma(-1)^k c_k^{(n)} \Phi^{(2k)}(z)$$

converge uniformément dans chaque cercle $\overline{C(s', \pi\rho)}$, *avec* $0 < \rho < R - \overline{D}^{\cdot}$, *et elle y représente une fonction holomorphe* $\Phi_n(s)$ *satisfaisant à l'inégalité*

$$|\Phi_n(s')| < \pi R L_n(\pi R) M,$$

où L_n *est la fonction définie par* (5).

D'après le théorème de Cauchy on a, pour $s \in \overline{C(s', \pi\rho)}$,

$$|\Phi^{(2k)}(s)| \leqq (2k)!\, M / \big(\pi(R - \rho)\big)^{2k},$$

et l'on a par conséquent dans ce cercle

$$|\Phi_n(s)| \leqq M \Sigma (2k)!\, c_k^{(n)} / \big(\pi(R - \rho)\big)^{2k}.$$

Or on sait (d'ailleurs l'intégration terme à terme le prouve immédiatement) que

$$\pi u \int_0^\infty e^{-\pi u r} (\Sigma c_k^{(n)} r^{2k})\, dr = \Sigma (2k)!\, c_k^{(n)} / (\pi u)^{2k},$$

et comme

$$\Lambda_n(r) = \Sigma c_k^{(n)} r^{2k} = \prod_{m \neq n} (1 + r^2/\lambda_m^2),$$

on voit, d'après (5) que, dans $\overline{C(s', \pi\rho)}$,

$$|\Phi_k(s)| \leqq \pi(R - \rho) L_n\big(\pi(R - \rho)\big),$$

ce qui prouve le lemme.

2. Nous allons maintenant passer à la démonstration proprement dite du théorème.

Posons

$$A_m(s) = F(s) - \sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s} \qquad (m \geqq n),$$

et soit

$$P_m(x) = \overline{\text{borne}}_{\substack{\sigma \geqq x \\ s \in \Delta}} |A_m(s)|.$$

Rappelons qu'il s'agit, en dernier lieu, de démontrer que si les hypothèses I et II de la forme B sont satisfaites et si l'on a

$$\overline{\text{borne}}_{m \geqq n} P_m(\sigma) \leqq e^{-p_n(\sigma)},$$

avec

$$\log L_n\big(\pi h(\sigma)\big) - p_n(\sigma) < -C(\sigma),$$

$$(13) \qquad \int^\infty C(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u)-h(u)}} d\sigma = \infty,$$

où $h(\sigma)$ est une fonction décroissante avec $\lim h(\sigma) = \overline{D}^{\cdot}$, et où $C(\sigma)$ est une fonction croissante, alors l'inégalité (I) a lieu.

Posons $\gamma(\sigma) = \min g(x)\big(|x-\sigma| \leqq \pi(\overline{D}^{\cdot}+1)\big)$ pour σ suffisamment grand. Soit p une constante positive, et désignons par $S_{\sigma'}$ (σ' étant suffisamment grand) le rectangle dont le contour est formé par les segments $t = \pm \pi\gamma(\sigma')$, $\sigma = \sigma' \pm \pi(\overline{D}^{\cdot}+1)$. Soit $\varepsilon(\sigma)$ une fonction positive, continue, décroissante et telle que $\int^\infty \varepsilon(\sigma)\, d\sigma < \infty$, et posons $h_1(\sigma) = h(\sigma) + \varepsilon(\sigma)$. Tout point $\sigma' + it$ du segment $l_{\sigma'}$ défini par $\sigma = \sigma'$, $|t| \leqq \pi\big(\gamma(\sigma') - h_1(\sigma' - p)\big)$ est le centre d'un cercle $C\big(\sigma' + it, \pi h_1(\sigma' - p)\big) \equiv C_{\sigma', t}$, où la fonction $A_m(s)$ $(m \geqq n)$ est holomorphe, et l'on a, dans ce cercle,

$$|A_m(s)| \leqq P_m\big(\sigma' - \pi(\overline{D}^{\cdot}+1)\big).$$

En posant alors

$$A_{m,n}(s) = \Sigma(-1)^k c_k^{(n)} A_m^{(2k)}(s),$$

on voit, d'après le lemme I, que pour $s \in l_{\sigma'}$, σ' étant suffisamment grand

$$(14) \qquad |A_{m,n}(s)| \leqq \pi h_1(\sigma' - p) L_n\big(\pi h_1(\sigma' - p)\big) P_m\big(\sigma' - \pi(\overline{D}^{\cdot}+1)\big),$$

la fonction $A_{m,n}(s)$ étant holomorphe dans le domaine qui est obtenu par la réunion des segments $\bar{l}_{\sigma'}$.

Mais on a

$$A_{m,n}(s) = \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} F^{(2k)}(s) - \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} \sum_{p=1}^m d_p \lambda_p^{2k} e^{-\lambda_p s}$$

$$= F_n(s) - \sum_{p=1}^m d_p e^{-\lambda_p s} \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} \lambda_p^{2k} = F_n(s) - \sum_{p=1}^m d_p \Lambda_n(i\lambda_p) e^{-\lambda_p s},$$

où $F_n(s) = \Sigma(-1)^k c_k^{(n)} F^{(2k)}(s)$. Mais, d'après (12), $\Lambda_n(i\lambda_p) = 0$ pour $p \neq n$. On voit aussi, d'après la définition de la suite associée $\{\Lambda_n^*\}$ que

$$\Lambda_n^* = \frac{1}{\Lambda_n(i\lambda_n)}.$$

On peut donc écrire

$$A_{m,n}(s) = F_n(s) - (d_n/\Lambda_n^*)e^{-\lambda_n s}. \tag{15}$$

On voit ainsi que, pour $m \geqq n$, $A_{m,n}(s)$ est *indépendante* de m. Posons alors $A_{m,n}(s) = B_n(s)$ (pour $m \geqq n$). Si donc on choisit convenablement la constante b_p, et si l'on désigne par $\overline{\Delta}_p$ le domaine fermé défini par les inégalités

$$\sigma \geqq b_p, \qquad |t| \leqq \pi\big(\gamma(\sigma) - h_1(\sigma - p)\big),$$

on a, pour $s \in \overline{\Delta}_p$, $m \geqq n$,

$$|B_n(s)| \leqq \pi h_1(\sigma - p) L_n\big(\pi h_1(\sigma - p)\big) P_m\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big),$$

et, dans les mêmes conditions,

$$\begin{aligned} |B_n(s)| &\leqq \pi h_1(\sigma - p) L_n\big(\pi h_1(\sigma - p)\big) \underset{m \geqq n}{\underline{\text{borne}}}\, P_m\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big) \\ &\leqq \pi h_1(\sigma - p) L_n\big(\pi h_1(\sigma - p)\big) e^{-p_n(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1))}. \end{aligned}$$

Comme $L_n(u)$ est, pour $u > \overline{D}^\cdot$, une fonction décroissante, et comme $h_1(\sigma) > h(\sigma)$, on a, en choisissant $p = \pi(\overline{D}^\cdot + 1)$ et en désignant le domaine correspondant $\overline{\Delta}_p$ par $\overline{\Delta}$ (C étant la fonction définie dans la condition IIIe)

$$\begin{aligned} |B_n(s)| &\leqq \pi h_1\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big) L_n\Big(\pi h\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big) e^{-p_n(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1))}\Big) \\ &\leqq \pi h_1\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big) e^{-C(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1))}, \end{aligned}$$

la fonction $B_n(s)$ étant holomorphe dans $\overline{\Delta}$.

Posons

$$N(\sigma) = C\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big) - \log h_1\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big) - \log \pi.$$

Comme C est une fonction croissante et h_1 une fonction décroissante, $N(\sigma)$ est une fonction croissante.

En posant

$$\pi\Big(\gamma(\sigma) - h_1\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big)\Big) = G(\sigma),$$

on peut résumer ce qui est acquis de la manière suivante : *La fonction*

$$B_n(s) = F_n(s) - (d_n/\Lambda_n^*)e^{-\lambda_n s}$$

est holomorphe dans la région fermée $\overline{\Delta}$, *définie par* $\sigma \geqq d$ (*où* d *est une certaine*

constante), $|t| \leqq G(\sigma)$, $G(\sigma) > 0$, *et dans cette région on a*

$$\log|B_n(\sigma + it)| < -N(\sigma),$$

où la fonction $N(\sigma)$ *est définie comme plus haut.*

D'après le lemme I il suffit de démontrer les deux faits :

1° $G(\sigma)$ est une fonction à variation bornée avec $\lim G(\sigma) = l > 0$;

2° en posant

$$S(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_d^\sigma \frac{du}{G(u)},$$

on a

$$\int^\infty N(\sigma) e^{-S(\sigma)}\, d\sigma = \infty, \tag{16}$$

pour qu'il en résulte que $B_n(s) \equiv 0$, c'est-à-dire que

$$\Lambda_n^* F_n(s) = d_n e^{-\lambda_n s}. \tag{17}$$

Cette égalité (17) constitue l'étape la plus importante de la démonstration.

Pour démontrer que $G(\sigma)$ est à variation bornée, il suffit de démontrer que $\gamma(\sigma)$ l'est (pour $\sigma \geqq d$, avec d convenablement choisi), car $h_1 = h + \varepsilon$, où h et ε sont des fonctions décroissantes.

Il résulte de la définition de $\gamma(\sigma)$ que si σ_i est suffisamment grand, on a $\gamma(\sigma_i) = g(x_i)$ avec $|x_i - \sigma_i| \leqq \pi(\overline{D}^\cdot + 1)$ et si $\sigma_{i+1} > \sigma_i$, on a $x_{i+1} \geqq x_i$. Si $\sigma_0 \leqq \sigma_1 < \ldots < \sigma_p \leqq b$, σ_0 étant suffisamment grand, on a

$$\sum_{i=1}^{p} |\gamma(\sigma_{i+1}) - \gamma(\sigma_i)| = \sum_{i=1}^{p} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

avec

$$\sigma_0 - \pi(\overline{D}^\cdot + 1) \leqq x_1 \leqq x_2 \ldots \leqq x_p \leqq b + \pi(\overline{D}^\cdot + 1).$$

Désignons alors par $V_\gamma(a, b)$ et $V_g(a, b)$ respectivement les variations de γ et g dans (a, b). On a, d'après ce qui précède,

$$V_\gamma(\sigma_0, b) \leqq V_g\big(\sigma_0 - \pi(\overline{D}^\cdot + 1),\ b + \sigma_0 + \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big),$$

ce qui prouve que $V_\gamma(d, \infty) \leqq V_g\big(d - \pi(\overline{D}^\cdot + 1), \infty\big)$. Il est aussi évident que $\lim G(\sigma) = (\lim g(\sigma) - \overline{D}^\cdot) = l > 0$. Ainsi 1° est démontré.

Pour démontrer 2°, écrivons les inégalités suivantes, pour d suffisamment grand :

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \int_d^\infty \big(g(\sigma) - \gamma(\sigma)\big)\, d\sigma \leqq \int_d^\infty V_g\big(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1), \sigma + \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\big)\, d\sigma \\
&\leqq \pi(\overline{D}^\cdot + 1) \sum_{p=-1}^{\infty} V_g\big[d + p\pi(\overline{D}^\cdot + 1),\ d + (p+2)(\overline{D}^\cdot + 1)\big] \\
&\leqq 3\pi(\overline{D}^\cdot + 1)\, V_g\big(d - \pi(\overline{D}^\cdot + 1), \infty\big) < \infty.
\end{aligned}$$

On voit immédiatement que

$$0 \leqq \int_d^\infty \left(h_1\left(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\right) - h(\sigma)\right) d\sigma < \infty.$$

Les deux dernières inégalités donnent aussitôt

$$(18) \qquad S(\sigma) = \frac{\pi}{2}\int_d^\sigma \frac{du}{G(u)}$$

$$= \frac{1}{2}\int_d^\sigma \frac{du}{\gamma(u) - h_1\left(\sigma - \pi(\overline{D}^\cdot + 1)\right)} = \frac{1}{2}\int_d^\sigma \frac{du}{g(u) - h(u)} + O(1).$$

De (13), de la définition de $N(\sigma)$ et de (18) résulte alors immédiatement (16). Donc (17) a lieu.

Cela prouve que la série $\Sigma(-1)^k c_k^{(n)} F^{(2k)}(s)$ converge uniformément dans $\overline{\Delta}$, et elle y est égale à $(d_n/\Lambda_n^\star) e^{-\lambda_n s}$. Il est clair, d'après le lemme II, que la somme de cette série, $F_n(s)$, peut être prolongée analytiquement le long de la ligne centrale de tout canal dont la largeur est supérieure à $2\pi\overline{D}^\cdot$ et à travers duquel $F(s)$ peut être prolongée analytiquement. On voit ainsi, d'après l'hypothèse II du théorème (dans n'importe quelle forme de l'énoncé) que

$$(19) \qquad \Lambda_n^\star F_n(s_0) = d_n e^{-\lambda_n s_0}.$$

Mais, d'après le lemme II, on a aussi

$$|F_n(s_0)| \leqq \pi R L_n(\pi R) M(s_0, R),$$

où $M(s_0, R) = \operatorname{Max} |F(s)| \left(s \in \overline{C(s_0, \pi R)}\right)$. L'égalité (19) et l'inégalité (6) fournissent alors

$$|d_n| e^{-\lambda_n \mathcal{R}(s_0)} \leqq (\pi^2/2) R M(s_0, R) \Lambda_n^\star \lambda_n e^{2\nu(R)},$$

ce qui est l'égalité (I). Le théorème F est donc complètement démontré.

APPLICATIONS DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. Si la série de Dirichlet $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ possède une abscisse de convergence $\sigma_c < \infty$, cette série converge uniformément dans tout domaine défini par $|\arg s - \sigma_0| \leqq \gamma < \pi/2$, où $\sigma_0 > \sigma_c$. Elle converge donc uniformément dans le domaine $\Delta(a, b) : \sigma \geqq a, |t| \leqq b$, quel que soit $a > \sigma_c$, et quel que soit $b > 0$. Si $F(s)$ est la somme de cette série, on voit que, pour tout entier $n \geqq 1$, les sommes $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$, représentent $F(s)$ dans $\Delta(a, b)$ avec la précision logarithmique égale à $+\infty$. La condition III du théorème fondamental est donc réalisée automatiquement (sous chacune de ses formes),

si $\overline{D}^{\cdot} < \infty$, dans tout domaine Δ défini dans l'énoncé du théorème, c'est-à-dire quelle que soit la fonction $g(\sigma)(\sigma > a > \sigma_c)$ et quelle que soit la fonction de densité $D(\lambda)$. Pour une série de Dirichlet convergente, l'énoncé du théorème fondamental devient donc très simple. On a, en effet, le théorème suivant :

THÉORÈME *a*. — *Supposons que la densité moyenne supérieure* $\overline{D}^{\cdot}$ *de* $\{\lambda_n\}(0 < \lambda_n \uparrow)$ *soit finie, et supposons que* $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ *admette une abscisse de convergence* $\sigma_c < \infty$. *Si, pour* $\sigma > \sigma_c$ *la somme de cette série représente une fonction* $F(s)$ *qui peut être prolongée analytiquement à travers un canal plus large que* $2\pi\overline{D}^{\cdot}$ *jusqu'au cercle* $\overline{C(s_0, \pi R)}$ *avec* $R > \overline{D}^{\cdot}$, *alors les inégalités* (I) *ont lieu pour tout entier positif* n.

Ce cas particulier du théorème F peut être démontré directement et beaucoup plus facilement que le cas général. Nous avons d'ailleurs démontré ce cas-ci, il y a plusieurs années, sous une forme, il est vrai, plus restrictive et moins précise (¹).

Le théorème *a* fournit un grand nombre de résultats concernant le prolongement analytique des séries de Dirichlet convergentes : la position des points singuliers, la distribution des valeurs prises par la fonction, l'ordre de grandeur de la fonction dans une bande curviligne, etc.

Comme un tel passage au prolongement analytique a déjà été fait dans nos travaux antérieurs (²), et bien que l'on puisse le faire maintenant avec plus de précision ($\overline{D}^{\cdot}$ remplaçant $D^{\cdot}$, convergence ordinaire au lieu de convergence absolue, etc.), nous laissons au lecteur le soin d'adapter cette nouvelle forme du théorème sur les séries de Dirichlet convergentes à l'étude du prolongement analytique.

Remarquons cependant que le théorème fondamental permet de fournir des renseignements sur le prolongement analytique des fonctions qui ne sont représentées par une série de Dirichlet qu'avec une certaine précision (sans que la série admette une abscisse de convergence). On peut avoir, pour ces cas généraux, des théorèmes du type de Liouville, Weierstrass, Picard, etc. Ainsi, par exemple, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME *b*. — *Supposons que l'hypothèse* I *et l'hypothèse* III^a *du théorème fondamental soient satisfaites, la dernière pour tout* $n \geq 1$ *et supposons que* $F(s)$ *soit une fonction holomorphe dans* Δ, *pouvant être prolongée jusqu'à chaque cercle* $\overline{C(s_i, \pi R)}$ *avec* $R > D^{\cdot}$, *à travers un canal plus large que* $2\pi D^{\cdot}$, *la suite* $\{s_i\}$ *étant telle que* $\lim \mathcal{R}(s_i) = -\infty$, *et supposons que, dans tous ces cercles,* $|F(s)| < M$. *Dans ces conditions* $F(s)$ *est identiquement nulle.*

(¹) *Voir* S. MANDELBROJT, *Séries lacunaires* (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, Hermann, Paris, 1936).

(²) Voir aussi le mémoire cité dans les *Transactions* de 1944.

La conclusion subsiste si, dans tout ce qui précède, on remplace $D^{\cdot}$ *par* $\overline{D}^{\cdot}$ (*aussi dans les hypothèses* I *et* III^{a}).

Il résulte en effet du théorème F que les inégalités (I) ont lieu pour chaque n, et lorsqu'on remplace s_0 par s_i $(i \geqq 1)$. En fixant n et en faisant tendre i vers l'infini, on voit que $d_n = 0$ $n \geqq 1$. On a, par conséquent, dans $\Delta : |F(s)| < e^{-p_n(\sigma)}$ (σ assez grand), et la condition (A) [1] donne alors, en vertu du lemme I, $F(s) \equiv 0$.

2. Nous n'insistons pas sur les autres applications du théorème F au prolongement analytique des « séries asymptotiques ». Nous préférons passer au cas où l'emploi des séries non convergentes est essentiel. Nous allons voir que la notion de précision logarithmique d'une représentation par une série de Dirichlet (non convergente) est bien adaptée à l'étude des fonctions indéfiniment dérivables.

Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable dans $I \equiv [0, \infty)$, bornée ainsi que chacune de ses dérivées dans I et soit $m_n = \overline{\text{borne}}_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$. La fonction $C_f(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geqq 1} (n\sigma - \log m_n)$ sera appelée le *caractère* de la fonction f. Le caractère joue un rôle très important dans la théorie des fonctions indéfiniment dérivables.

Remarquons que si $\underline{\lim}\, m_n^{1/n} = A < \infty$, on a $C_f(\sigma) = \infty$ pour $\sigma > \log A$. Si, par contre, $\lim m_n^{1/n} = \infty$, $C_f(\sigma)$ est une fonction convexe avec $\lim C_f(\sigma)/\sigma = \infty$. Ces propriétés sont faciles à démontrer.

Nous allons maintenant étudier des propriétés qui généralisent celle de la quasi-analyticité. Par exemple le théorème de Denjoy-Carleman apparaîtra comme un cas très particulier d'un théorème général.

3. Commençons par le lemme suivant :

Lemme III. — *Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle* $I \equiv [0, \infty)$, *avec* $|f(x)| < M < \infty$ $(x \in I)$, *et dont chaque dérivée est bornée dans* I. *Soit* $C_f(\sigma)$ *le caractère de* $f(x)$. *Soit* $\{\nu_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs tels que*

$$f^{(\nu_n)}(0) = 0 \qquad (n \geqq 1).$$

Soit $\{q_n\}$ *la suite d'entiers non négatifs complémentaire à la suite* $\{\nu_n\}$

$$\left(\{\nu_n\} \cup \{q_n\} = \{n\} \qquad (n \geqq 0), \qquad \{\nu_n\} \cap \{q_n\} = 0\right).$$

Pour chaque a réel, la fonction

$$F_a(s) = \int_0^\infty e^{-xe^s - a} f(x)\, dx \tag{20}$$

---

[1] Ou la condition correspondante à la forme B de l'énoncé du théorème F, si $D^{\cdot}$ est remplacé par $\overline{D}^{\cdot}$.

est holomorphe dans la région $\overline{\Delta}_0$ *définie par* $e^\sigma \cos t \geqq 1$. *On a, dans cette région* $|F_a(s)| \leqq M e^a$, *et quel que soit l'entier* $n \geqq 1$, $F_a(s)$ *est représenté dans* $\overline{\Delta}_0$ *par* $\sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m \geqq n$, *où* $d_k^{(a)} = e^{\lambda_k a} f^{(q_k)}(0)$, $\lambda_k = q_k + 1$, *avec une précision logarithmique égale à* $C_f(\sigma - a) - a$ (¹).

En intégrant par parties q fois l'intégrale dans (20), nous obtenons, pour s tel que $\mathcal{R}(e^{s-a}) > 0$

$$F_a(s) = \sum_1^q f^{(m-1)}(0)\, e^{-m(s-a)} + e^{-q(s-a)} \int_0^\infty f^{(q)}(x)^{-xe^{s-a}} dx.$$

Mais si $e^\sigma \cos t \geqq 1$, on a $\mathcal{R}(e^{s-a}) \geqq e^{-a}$; on voit donc que pour $s \in \overline{\Delta}_0$

$$(21) \qquad \left| F_a(s) - \sum_1^q f^{(m-1)}(0)\, e^{-m(s-a)} \right| \leqq m_p e^{(q+1)a - q\sigma},$$

où $m_q = \overline{\text{borne}}_{x \geqq 0} |f^{(q)}(x)|$. Mais comme $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ $(n \geqq 1)$, on a dans $\overline{\Delta}_0$

$$(22) \qquad \left| F_a(s) - \sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leqq m_q e^{a + q(a-\sigma)},$$

où les suites $\{d_k^{(a)}\}$, $\{\lambda_k\}$ sont celles définies dans l'énoncé, et où q prend toutes les valeurs entières telles que $q_m + 1 = \lambda_m \leqq q < \lambda_{m+1} = q_{m+1} + 1$ (s'il n'existe qu'un nombre fini N de q_n on donnera à q_{N+1} la valeur $+\infty$) (²).

Il résulte immédiatement de (22) que

$$(23) \qquad \underline{\text{borne}}_{m \geqq n}\, \overline{\text{borne}}_{\sigma \geqq x} \left| F_a(s) - \sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leqq \underline{\text{borne}}_{q \geqq \lambda_n} m_q e^{a + q(a-x)}.$$

Mais il résulte de la définition de $C_f(\sigma)$ que, quel que soit l'entier positif p, on a pour σ suffisamment grand $(\sigma \geqq \sigma_p)$

$$C_f(\sigma) = \overline{\text{born}}_{n \geqq p} (n\sigma - \log m_n).$$

Ceci est évident si $\overline{\lim}\, m_n^{1/n} = A < \infty$, car alors $C_f(\sigma) = \infty$ pour $\sigma > \log A$, et, dans le cas où $\lim m_n^{1/n} = \infty$, cette égalité résulte de $\lim C_f(\sigma)/\sigma = \infty$. On voit donc, d'après (23), qu'il existe une suite $\{a_n\}$ telle que, pour $s \in \Delta_0$, $\sigma \geqq a_n$

$$\underline{\text{borne}}_{m \geqq n}\, \overline{\text{borne}}_{\sigma \geqq x} \left| F_a(s) - \sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leqq e^a e^{-C_f(x-a)}.$$

(¹) Si la suite $\{q_n\}$ est vide cela voudra dire que, dans $\overline{\Delta}$: $|F_a(s)| \leqq e^{a - C_f(\sigma - a)}$.

(²) Si $\{q_n\}$ est vide, on posera dans (22) : $1 \leqq q < \infty$.

Il résulte d'autre part, directement de (20), que

$$|F_a(s)| \leqq M \int_0^\infty e^{-x\mathcal{R}(e^{s-a})} dx \leqq M e^a.$$

Le lemme III est donc démontré.

4. Nous passons maintenant à l'énoncé du théorème principal concernant la quasi-analyticité générale. Ici encore nous donnons plusieurs formes de l'énoncé, mais nous ne soulignons que celles de ces formes qui nous paraissent intéressantes. La conclusion dans toutes ses formes est la même, $f(x)$ est identiquement nulle.

THÉORÈME (Q-A) (*Forme* A). — *Hypothèse* I. — *$f(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle* $I \equiv [0, \infty)$, *bornée ainsi que chacune de ses dérivées dans* I. $\{\nu_n\}$ *est une suite d'entiers non négatifs, avec* $\nu_1 = 0$; *la suite* $\{q_n\}$ *d'entiers positifs complémentaires à la suite* $\{\nu_n\}$ *est de densité supérieure* $D^\cdot < 1/2$ *et l'on a*

$$f^{(\nu_n)}(0) = (0) \qquad (n \geqq 1).$$

Hypothèse II^a. — *En désignant par* $C_f(\sigma)$ *le caractère de* f, *et par* $D^\cdot(q)$ *la fonction de densité supérieure de* $\{q_n\}$, *on a*

$$\text{(Q)} \qquad \int^\infty C_f(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{du}{1-2D^\cdot(C_f(u))}} d\sigma = \infty.$$

Conclusion. — *La fonction* $f(x)$ *est identiquement nulle.*

Forme B. — *Dans tout ce qui précède, le symbole* $D^\cdot$ *est remplacé par* $\overline{D}$ (densité et fonction de densité moyennes supérieures de $\{q_n\}$).

Forme C. — Même hypothèse I que dans la forme B. L'hypothèse II^a est remplacée par la suivante :

Hypothèse II^c. — $\nu(D)$ étant la fonction d'excès de $\{q_n\}$ et ν^{-1} la fonction inverse de ν, il existe une constante $0 < \alpha < 1/2$ telle que

$$\int^\infty C_f(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{du}{1-2\nu^{-1}(\alpha C_f(u))}} d\sigma = \infty.$$

Forme D. — *Même hypothèse* I *que dans la forme* B. *L'hypothèse* II^a *est remplacée par la suivante :*

Hypothèse II^d. — *Il existe une fonction continue décroissante* $h(\sigma)$ *telle que* $\lim h(\sigma) = \overline{D}^\cdot$ *et une fonction croissante* $C(\sigma)$ *telle que*

$$(Q_1) \qquad \begin{cases} 2\nu\big(h(\sigma)\big) - C_f(\sigma) < -C(\sigma), \\ \displaystyle\int^\infty C(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{du}{1-2h(u)}} d\sigma = \infty. \end{cases}$$

Forme E. — Même hypothèse I que dans la forme B. L'hypothèse II^a est remplacée par la suivante :

Hypothèse IIe. — Cette hypothèse diffère de l'hypothèse II^d par le fait que, dans les relations (Q_1), l'expression $2\nu(h(\sigma))$ est remplacée par

$$\mathrm{R}(h(\sigma)) = \log \int_0^\infty e^{-\pi h(\sigma) r} \mathrm{Q}(r)\, dr,$$

où

$$\mathrm{Q}_1^*(r) = \prod_{m>1} (1 + r^2/q_m^2) \quad (^1).$$

5. *Démonstration.* — Supposons $\overline{\mathrm{D}}^* < 1/2$, et choisissons les deux quantités positives ξ et R de la manière suivante :

$$\pi \overline{\mathrm{D}}^* < \arccos e^{-\xi} = \pi \mathrm{R} < \pi/2. \tag{24}$$

Le cercle $\overline{\mathrm{C}(\xi + \pi\mathrm{R}, \pi\mathrm{R})}$ appartient évidemment au donmaine $\overline{\Delta}_0$ défini par $e^\sigma \cos t \geqq 1$. D'après le lemme III, la fonction $\mathrm{F}_a(s)$ définie par (20), avec $a > 0$ arbitraire, est holomorphe dans $\overline{\Delta}$; on a, dans ce domaine, $|\mathrm{F}_a(s)| \leqq \mathrm{M} e^a$, et en posant $d_k^{(a)} = e^{\lambda_k a} f^{(q_k)}(0)$, $\lambda_k = q_k + 1$, $\sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$ (n entier positif arbitraire) représente $\mathrm{F}_a(s)$ dans $\overline{\Delta}$ avec la précision logarithmique $\mathrm{C}_f(\sigma - a) - a$. Si, au lieu d'avoir $\overline{\mathrm{D}}^* < 1/2$, on avait $\mathrm{D}^* < 1/2$, on pourrait remplacer, dans (24), $\overline{\mathrm{D}}^*$ par D^*.

Le domaine Δ est défini par $\sigma > a_0 > 0$, $|t| < \arccos e^{-\sigma} = \pi g(\sigma)$. On voit que $g(\sigma)$ est à variation bornée et, si a_0 est assez grand, $\lim g(\sigma) > g(\sigma) > \overline{\mathrm{D}}^*$, $(\sigma > a_0)$. Comme $1 - 2g(\sigma) \sim (2/\pi) e^{-\sigma}$, on voit immédiatement que la condition (Q) est équivalente à la suivante :

$$\int^\infty \mathrm{C}_f(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^\sigma \frac{du}{g(u) - \overline{\mathrm{D}}^*(\mathrm{C}_f(u))}}\, d\sigma = \infty. \tag{25}$$

Comme on peut écrire $\mathrm{C}_f(\sigma - a) = p_n(\sigma) + a$, où $p_n(\sigma)$ est la précision logarithmique de la représentation de $\mathrm{F}_a(s)$ par $\sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$, pour chaque n, on voit que si les hypothèses de la forme A du théorème (Q-A) sont satisfaites, les hypothèses de la forme A du théorème F sont satisfaites, avec $\mathrm{F}(s) = \mathrm{F}_a(s)$, $s_0 = \xi + \pi\mathrm{R}$, $\mathrm{M}(s_0, \mathrm{R}) \leqq \mathrm{M} e^a$, $\{\lambda_n\} = \{q_n + 1\}$ $(^2)$, n étant un entier positif quelconque.

---

(1) Si la suite $\{\nu_n\}$ est composée de tous les entiers non négatifs, on posera $\mathrm{R}(u) \equiv 0$. La fonction $h(\sigma)$, elle-même, peut alors être prise comme étant identiquement nulle.

(2) Il est clair que la fonction de densité supérieure correspondant à $\{q_n\}$ est supérieure à la fonction de densité supérieure correspondant à $\{\lambda_n\}$.

On peut donc écrire, pour chaque $n \geqq 1$,

$$|d_n^{(a)}| = e^{(q_n+1)a}|f^{(q_n)}(0)| \leqq (\pi^2 \lambda_n R/2)\, e^{2\nu(R)} \Lambda_n^* M e^a e^{(q_n+1)(\xi+\pi R)}.$$

En fixant n et ξ (et, par conséquent, aussi R) et en faisant tendre a vers $+\infty$, on voit (puisque $q_n > 0$) que $f^{(q_n)}(0) = 0$. On a donc dans $\bar{\Delta}$, quel que soit a positif fixe

$$|F_a(s)| < e^{a - C_f(\sigma - a)} = e^{-p_n(\sigma)},$$

avec, d'après (25),

$$\int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u)}} d\sigma = \infty.$$

Le lemme I fournit alors immédiatement $F_a(s) \equiv 0$. Ce qui prouve aussi, bien entendu, que $f(x) \equiv 0$.

Il est de même évident que si les hypothèses de la forme B du théorème (Q-A) sont satisfaites, on arrive par l'intermédiaire de la forme B du théorème F à $f(x) \equiv 0$. De même les hypothèses de la forme C de (Q-A) conduisent à la même conclusion par l'intermédiaire de la forme C du théorème F, etc. [1]. On voit d'ailleurs que, tout comme pour le théorème fondamental, la forme E est encore ici la plus générale.

6. Il est évident que le théorème (Q-A) contient comme cas très particulier le théorème sur les classes quasi analytiques. Ainsi, par exemple, si dans la forme A de (Q-A) on suppose que la suite $\{\nu_n\}$ est composée de tous les entiers non négatifs, c'est-à-dire si

$$(a) \qquad f^{(n)}(0) = 0 \qquad (n \geqq 0),$$

on a $D^*(q) \equiv 0$, et la condition (Q) devient la condition

$$(Q_2) \qquad \int^{\infty} C_f(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = \infty.$$

Autrement dit, on a, en particulier, l'énoncé suivant : Si (a) et (Q_2) ont lieu, $f(x) \equiv 0$. En particulier, si en posant $A(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geqq 1}(n\sigma - \log M_n)$, on a $\int^{\infty} A(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = \infty$, $|f^{(n)}(x)| < M_n (n \geqq 0)$, et si (a) a lieu, $f(x) \equiv 0$ [on a évidemment $A(\sigma) \leqq C_f(\sigma)$]. C'est le théorème de Denjoy-Carleman. La forme de cet énoncé relève de celle donnée par Ostrowski.

---

[1] Pour passer de la forme E du théorème (Q — A) à la forme E du théorème F, on remarquera que si l'hypothèse IIe du théorème (Q — A) est satisfaite, elle l'est aussi lorsqu'on y remplace $Q(r)$ par $Q_n(r) = \prod_{m \neq n}(1 + r^2/q_m^2)$, n étant un entier positif quelconque.

7. Mais, outre que notre théorème (Q-A) n'exige que l'inégalité $D^{\cdot} < 1/2$ pour permettre de conclure que $f(x) \equiv 0$, si une condition convenable [la condition (Q) par exemple] concernant $C_f(\sigma)$ est satisfaite, nous pouvons affirmer que, même si la condition (Q) est réduite à la condition classique de la quasi-analyticité [condition (Q_2)], nous n'exigeons nullement que la fonction et *toutes* ses dérivées soient nulles en un point pour pouvoir conclure que $f(x)$ est identiquement nulle.

Considérons les deux exemples suivants (dont le premier illustre le cas analytique) :

1° Soit $f(x)$, $x \in I \equiv [0, \infty)$ une fonction indéfiniment dérivable, bornée ainsi que chacune de ses dérivées sur I et telle que $C_f(\sigma) \geqq c e^{\sigma} (c > 0)$ pour σ suffisamment grand [soit, par exemple $|f^{(n)}(x)| \leqq n!\ (n \geqq 1)$, $|f(x)| < M < \infty$; on a alors $C_f(\sigma) \sim e^{\sigma}$]. Soit en plus $f^{(\nu_n)}(0) = 0\ (\nu_1 = 0)\ (n \geqq 1)$, la suite $\{q_n\}$, complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$, étant telle qu'en désignant par $D^{\cdot}(q)$ la fonction de densité supérieure de $\{q_n\}$ on ait, pour q suffisamment grand

$$D^{\cdot}(q) < b/\log q\ (0 < b < 1/2).$$

Ceci a lieu par exemple si $q_n \geqq a n \log n\ (a > 2)$. On a, dans ces conditions, $2D^{\cdot}(C_f(u)) < 1/u$ (pour u suffisamment grand) et, pour $\sigma > \sigma_0$

$$C_f(\sigma)\, e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{du}{1-2D^{\cdot}(C_f(u))}} \geqq c e^{\sigma} e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{u\,du}{u-1}} \geqq A/\sigma,$$

où $A > 0$. Donc la condition (Q) du théorème (Q-A) est satisfaite et $f(x) \equiv 0$. Par conséquent, si $C_f(\sigma) > c e^{\sigma}$ on conclut que la fonction est identiquement nulle sans rien supposer *a priori* sur les dérivées dont les exposants q_n satisfont à la condition $q_n \geqq a n \log n$.

2° On voit de même que si $C_f(\sigma) \geqq (c e^{\sigma}/\sigma)\ (c > 0)$ pour σ suffisamment grand [par exemple si $f(x) \in C\{n \log n)^n\}$, $|f(x)| < M < \infty$ dans $[0, \infty)$], il suffit de supposer que $f^{(\nu_n)}(0) = 0\ (\nu_1 = 0)$, la suite $\{q_n\}$ complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$ étant telle que, pour q suffisamment grand, on ait

$$D^{\cdot}(q) < b/\log q\,(\log\log q),$$

avec $0 < b < 1/2$ (par exemple $q_n > a n \log n\,(\log\log n)\ (a > 2)$ pour pouvoir déjà conclure que $f(x)$ est identiquement nulle.

Car alors

$$C_f(\sigma)\, e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{du}{1-2D^{\cdot}(C_f(u))}} > A/\sigma \log\sigma,$$

et la condition (Q) est satisfaite.

Si dans le théorème F on pouvait remplacer dans la condition (A) la fonction $D^{\cdot}(p_n(u))$ par la constante $D^{\cdot}$, on pourrait aussi remplacer dans la condition (Q) du théorème (Q-A), $D^{\cdot}(C_f(u))$ par $D^{\cdot}$ et il suffirait alors que dans

chacun des cas 1° et 2° qu'on vient de citer [1] on suppose que $D^{\cdot} = \lim D^{\cdot}(q) = 0$ (c'est-à-dire que $\lim n/q_n = 0$) pour pouvoir déjà conclure que $f(x) \equiv 0$. Or ceci n'est pas le cas. En réalité nous verrons dans le théorème R du chapitre suivant qu'on ne peut pas remplacer dans (Q) la fonction $D^{\cdot}(C_f(u))$ par une fonction $h(u)$ bien inférieure (même si $D^{\cdot} = 0$) pour que la conclusion, $f(x) \equiv 0$, continue à subsister.

Ainsi, par exemple, avec les notations utilisées dans les exemples 1° et 2° on peut affirmer qu'il existe des fonctions non identiquement nulles pour lesquelles $C_f > ce^{\sigma}/\sigma$, mais pour lesquelles $D^{\cdot}(q) \leqq b/\log q$ $(q_n \geqq a\, n \log n)$.

THÉORÈME RÉCIPROQUE.

1. Soit $R(\sigma)$, $\sigma \in I \equiv [0, \infty)$ une fonction bornée inférieurement. Il existe une fonction $\varphi(\sigma)$ convexe dans I jouissant des propriétés suivantes : $\varphi(\sigma) \leqq R(\sigma)$, $\sigma \in I$, et, quelle que soit la fonction convexe $\psi(\sigma)$ telle que $\psi(\sigma) \leqq R(\sigma)$, $\sigma \in I$, on ait $\psi(\sigma) \leqq \varphi(\sigma)$. On écrira

$$\varphi(\sigma) = cnv\, R(\sigma).$$

On démontre facilement qu'en posant, pour $-\infty < u < \infty$

$$A(u) = \overline{\text{borne}}_{\sigma \geqq 0} \big(\sigma u - R(\sigma)\big),$$

on a

$$\varphi(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{-\infty < u < \infty} \big(\sigma u - A(u)\big).$$

Si $\lim R(\sigma)/\sigma = \infty$, on a aussi $\lim A(u)/u = \infty$, et quel que soit σ_0 on a, pour u suffisamment grand,

$$A(u) = \overline{\text{borne}}_{\sigma \geqq \sigma_0} \big(\sigma u - R(\sigma)\big),$$

de même que, quel que soit u_0, on a, pour σ suffisamment grand,

$$\varphi(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{u \geqq u_0} \big(\sigma u - A(u)\big).$$

Si $\lim R(\sigma)/\sigma = \infty$, $A(u)$ est aussi une fonction convexe.

2. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME R. — *Soit* $\{\nu_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs* $(\nu_1 = 0)$, *et soit* $\{q_n\}$ *la suite d'entiers positifs complémentaires à la suite* $\{\nu_n\}$. *Soit* $N(q)$ *la distribution de la suite* $\{q_n\}$. *Supposons que* $\lim \log q_n/n = 0$.

---

(1) C'est-à-dire les cas où $C_f(\sigma) > ce^{\sigma}$ et $C_f(\sigma) > ce^{\sigma}/\sigma$.

(2) *Voir* S. MANDELBROJT, *Duke Mathematical Journal*, vol. 9, n° 4, décembre 1942, p. 647-661.

Il existe une fonction $f(x)$, non identiquement nulle, indéfiniment dérivable sur l'intervalle $I \equiv [0, \infty)$, bornée, ainsi que chacune de ses dérivées sur I, telle que $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ $(n \geqq 1)$, et telle que, si l'on désigne par $C_f(\sigma)$ son caractère, on ait, pour σ suffisamment grand,

$$C_f(\sigma) \geqq C\, cnv\, N(e^\sigma) + \int_0^\sigma N(e^u du),$$

où C *est une constante positive arbitraire donnée inférieure à* $\log 2$.

Dans cet énoncé $N(e^\sigma)$ est considéré comme fonction de σ. Autrement dit, en posant $N(e^\sigma) = R(\sigma)$, on a $cnv\, N(e^\sigma) = cnv\, R(\sigma)$.

Posons

$$M(iz) = \Pi(1 - z^2/\nu_n^2) = \Sigma(-1)^n l_n z^{2n} \qquad (l_n > 0),$$
$$Q(iz) = \Pi(1 - z^2/q_n^2) = \Sigma(-1)^n r_n z^{2n} \qquad (r_n > 0).$$

$N(q)$ ayant la signification de l'énoncé, on a

$$\log Q(r) = \log \Pi(1 + r^2/q_n^2) = 2r^2 \int_0^\infty N(x) \frac{dx}{x(x^2 + r^2)} \geqq \int_1^r \frac{N(r)}{x} dx + N(r) \log 2 = N_1(r),$$

où r est une quantité positive quelconque.

Mais, comme $\sin i\pi r = r M(r) Q(r)$, on voit que

$$\log M(r) \leqq \pi r - N_1(r),$$

et les inégalités de Cauchy pour les coefficients de Taylor donnent, pour chaque entier n et chaque $r > 0$,

$$\log l_n \leqq \pi r - N_1(r) - 2n \log r.$$

Posons $\pi r = 2n$, ce qui donne

$$l_n \leqq e^{2n}(2n)^{-2n} \pi^{2n} e^{-N_1(2n/\pi)} \leqq \left(R\, n^{\frac{1}{2}} \pi^{2n}/(2n)!\right) e^{-N_1(2n/\pi)}, \tag{26}$$

où R est une constante positive.

Soit $\omega(z)$ $(z = x + iy)$ une fonction holomorphe dans tout le plan z, sauf sur la demi-droite $y = 0$, $x < -1$, telle que $|\omega(z)| < 1$, $\omega(0) = 0$, $\omega^{(q_1)}(0) \neq 0$. Une telle fonction existe : si la fonction $\alpha = \alpha(z)$ réalise la représentation conforme de la région décrite sur $|\alpha| < 1$, avec $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, et si $\alpha^{(q_1)}(0) \neq 0$, on posera $\omega(z) = \alpha(z)$; sinon, il existe une constante $b > -1$, telle que la fonction $\omega(z) = 1/2\,[\alpha((1+b)z + b) - \alpha(b)]$ jouit des propriétés voulues [1].

Posons $z = e^s$, $F(s) = \omega(e^s)$. La fonction $F(s)$ est holomorphe et bornée dans le domaine $\mathcal{D}$ défini par la réunion du demi-plan $\sigma < 0$ et de la bande $|t| < \pi$.

---

[1] En réalité on peut poser $\omega(z) = \alpha(z)$. Notre procédure nous permet d'éviter quelques calculs.

On a donc dans $\mathcal{D}$, $|F(s)| < 1$. Écrivons $D_p^{(n)}F(s) = \frac{d^p}{d(e^s)^p}(F^{(n)}(s))$. Pour tout s tel que $|s - \sigma_1| = \gamma (0 < \gamma < \pi)$, où σ_1 est réel quelconque, on a, d'après les inégalités de Cauchy,

$$|F^{(n)}(s)| \leqq n!/(\pi - \gamma)^n.$$

On a de même pour s tel que $\sigma < -\pi$, $|F^{(n)}(s)| < n!/\pi^n$.

Mais si $|s - \sigma_1| = \gamma$, on a pour $\sigma_1 \geqq \sigma_0$

$$|e^s - e^{\sigma_1}| = e^{\sigma_1}|e^{s-\sigma_1} - 1| > k|s - \sigma_1| = k\gamma,$$

avec $k = k(\sigma_0) > 0$. La courbe $L(\sigma_1, \gamma)$ située dans $|t| < \pi$ et donnée par $|e^s - e^{\sigma_1}| = k\gamma$ est, par conséquent, à l'intérieur du cercle $C(\sigma_1, \gamma)$, et sur $L(\sigma_1, \gamma)$ on a encore $|F^{(n)}(s)| \leqq n!/(\pi - \gamma)^n$.

On a, par conséquent, pour $\sigma_1 > \sigma_0$,

$$(27) \qquad |D_p^{(n)}F(\sigma_1)| = \frac{p!}{2\pi}\left|\oint_{L(\sigma_1,\gamma)} \frac{F^{(n)}(s)\,de^s}{(e^s - e^{\sigma_1})^{p+1}}\right| \leqq k^{-p}p!\,n!/(\pi - \gamma)^n\gamma^p.$$

Il est aussi clair que pour $\sigma < \alpha$, avec $\alpha < -\pi$, on a

$$(28) \qquad |D_p^{(n)}F(s)| = \frac{p!}{2\pi}\left|\oint_{|e^\xi - e^s| = e^{-\pi} - e^\sigma} \frac{F^{(n)}(\xi)\,de^\xi}{(e^\xi - e^s)^{p+1}}\right| \leqq L^p p!\,n!/\pi^n,$$

où $L = (e^{-\pi} - e^\alpha)^{-1}$.

En posant, dans (27), $\gamma = p\pi/(n+p)$, on a, pour $\sigma > \sigma_0$,

$$|D_p^{(n)}F(\sigma)| \leqq k^{-p}n!\,p!\,(n+p)^{n+p}/p^p n^n \pi^{n+p} \leqq C^p n!\,(n+p)^p/\pi^n,$$

où $C = C(\sigma_0)$. Si, par conséquent, on choisit $\sigma_0 < \alpha$, on a, pour *tout* σ,

$$(29) \qquad \begin{cases} |D_p^{(n)}F(s)| \leqq A^p n!\,n^p/\pi^n & \text{si } n \geqq p, \\ |D_p^{(n)}F(s)| \leqq A^p n!\,p!/\pi^n & \text{si } p \geqq n, \end{cases}$$

où A est une constante. On posera $D_p^{(n)}F(-\infty) = \omega^{(p)}(0)p^n$.

Nous allons maintenant montrer qu'en posant, pour $x \geqq 0$,

$$f_1(x) = \Sigma(-1)^n l_n F^{(2n)}(\sigma),$$

où $\sigma = \log x$, il existe une constante k_1 telle que la fonction $f(x) = f_1(k_1 x)$ satisfait aux conditions voulues.

Les inégalités (26) et (29) fournissent, pour $p \geqq 0$,

$$(30) \qquad |f_1^{(p)}(x)| \leqq \sum l_n |D_p^{(2n)}F(\sigma)| \leqq RA^p \sum_{n=0}^{\infty}\left((2n)^p + p!\right) n^{\frac{1}{2}} e^{-N_1(2n/\pi)}.$$

Posons $cnv\,N(e^\sigma) = B(e^\sigma)$ et $N_1(r) - \varepsilon B(r) = A(\varepsilon, r)$.

Comme $\lim N(e^\sigma)/\sigma = \infty$, les séries (30) convergent, et l'on peut écrire

$$|f_1^{(p)}(x)| \leqq R_1 A^p p! + RA^p \max_{n \geqq 1}\left(e^{-A(\varepsilon, 2n/\pi)}(2n)^p\right) \Sigma n^{\frac{1}{2}} e^{-\varepsilon B(2n/\pi)},$$

où $R_1 > 0$ et où ε est arbitraire tel que $0 < \varepsilon < \log 2$.

On peut donc écrire, pour $p \geqq 1$,

$$|f_1^{(p)}(x)| \leqq B^p(p! + e^{\max(p\sigma - A(\varepsilon, e^\sigma))}) = B^p(p! + M_p),$$

où B est une constante et où $\log M_p = \max_{\sigma \geqq 0}(p\sigma - A(\varepsilon, e^\sigma))$.

Comme $N(q) \leqq q$ (les q_n étant des entiers positifs strictement croissants), c'est-à-dire $N(e^\sigma) \leqq e^\sigma$, on a

$$\log M_p \geqq \max_{\sigma \geqq 0}(p\sigma - Pe^\sigma) \geqq \log p! + pS,$$

où S et P sont des constantes. On a ainsi

$$|f_1^{(p)}(x)| \leqq g^n M^p \qquad (p \geqq 1,\ x \in I),$$

où g est une constante. Posons $f(x) = f_1(k_1 x)$ $(k_1 = 1/g)$.

Comme $A(\varepsilon, e^\sigma)$ est une fonction convexe de σ, en posant

$$A(u) = \max_{\sigma \geqq 0}\left(u\sigma - A(\varepsilon, e^\sigma)\right),$$

on a, d'après ce qu'on a vu au début de ce chapitre,

$$A(\varepsilon, e^\sigma) = \max_u\left(u\sigma - A(u)\right) = u(\sigma)\sigma - A\left(u(\sigma)\right),$$

avec $\lim_{\sigma = \infty} u(\sigma) = \infty$.

Comme $A(u)$ est une fonction croissante, et comme $A(p) = \log M_p$ on a, en désignant par p le plus petit entier supérieur à $u(\sigma)$, et en posant $m_p = \overline{\text{borne}}\,|f^{(p)}(x)|$ $(x \in I)$ (pour σ suffisamment grand)

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, e^\sigma) &\leqq p\sigma - A(p-1) = p\sigma - \log M_{p-1} \\ &\leqq \sigma + (p-1)\sigma - \log m_{p-1} \leqq \sigma + \overline{\text{borne}}_{n \geqq 1}(n\sigma - \log m_n) = \sigma + C_f(\sigma). \end{aligned}$$

On a, par conséquent,

$$C_f(\sigma) > A(\varepsilon, e^\sigma) - \sigma.$$

Mais comme $\lim cnv\, N(e^\sigma)/\sigma = \infty$, on a bien $C_f(\sigma) > A(\varepsilon/2, e^\sigma)$, ce qui constitue l'inégalité de l'énoncé si ε est choisi de sorte que $\log 2 - \varepsilon/2 = C$.

Il reste à démontrer que $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ et que $f(x) \not\equiv 0$ pour voir que $f(x)$ est bien la fonction cherchée.

Supposons alors que

$$\omega(z) = \Sigma a_n z^n \left(\overline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1\right),$$

et soit $F_1(s) = \Sigma |a_n| e^{ns}$. On voit immédiatement que pour $\sigma \leqq a < -\pi$ on a

$$|F_1^{(n)}(s)| \leqq M n!/\pi^n,$$

où M est une constante [on opère sur $F_1(s)$ comme on l'a fait sur $F(s)$]. On peut donc, par conséquent, écrire pour $\sigma \leqq a$

$$|F_1^{(2n)}(\sigma)| = \Sigma |a_p| p^{2n} e^{p\sigma} \leqq M(2n)!/\pi^{2n},$$

et l'inégalité (26) prouve encore que la série double

$$\sum l_n F_1^{(2n)}(\sigma) = \sum_n l_n \sum_p |a_p| p^{2n} e^{p\sigma}$$

converge.

On peut donc écrire, pour $x \leqq e^a$ $(\sigma \leqq a)$,

$$f(x) = \sum_n (-1)^n l_n \sum_p a_p p^{2n} e^p = \sum_p a_p e^{p\sigma} \sum_n (-1)^n l_n p^{2n} = \sum a_p M(ip) e^{p\sigma}.$$

Mais $M(i\nu_n) = 0$ $(n \geqq 1)$ et $M(iq_n) \neq 0$, donc, pour $x \leqq e^a$;

$$f(x) = \Sigma a_{q_n} M(iq_n) e^{q_n \sigma} = \Sigma a_{q_n} M(iq_n) x^{q_n}.$$

Mais on a, rappelons-le, $a_{q_1} = \omega^{(q_1)}(0)/q_1! \neq 0$. Donc $f(x)$ n'est pas identiquement nulle, et le théorème est complètement démontré.

3. Soit, par exemple, $\{\nu_n\}$ une suite d'entiers non négatifs $(\nu_1 = 0)$, telle que la suite complémentaire q_n satisfasse à la condition $q_n \sim dn \log n$ avec $0 < d < 2$, on a alors $2N(q) > q/\log q$ (pour q suffisamment grand), et $2N(e^\sigma) > e^\sigma/\sigma$ (pour σ suffisamment grand). Par conséquent, d'après le théorème R, il existe une fonction $f(x)$, indéfiniment dérivable sur I, bornée ainsi que chacune de ses dérivées sur cet intervalle, telle que $C_f(\sigma) > e^\sigma/\sigma$ pour σ suffisamment grand, telle que $f^{(\nu_n)}(0) = 0$, avec $D^\cdot(q) < b/\log q$ [$D^\cdot(q)$ est la fonction de densité supérieure de la suite $\{q_n\}$) et pourtant, non identiquement nulle. Ainsi notre remarque de la fin du chapitre dernier est justifiée. Nos théorèmes [F et (Q-A)] ne sont donc pas très profondément perfectibles.

4. La fonction f qui vérifie les conditions du théorème R appartient à la classe $C\{M_n\}$ avec

$$\log M_n = \max_{\sigma \geqq 0} (p\sigma - A(\varepsilon, e^\sigma)) \leqq \max_{\sigma \geqq 0} \left(p\sigma - \int_0^\sigma N(e^u)\, du\right).$$

Or, d'après un lemme du Mémoire cité (Mandelbrojt et Mac Lane, lemme VII), on a

$$\int_0^\sigma N(e^u)du = \max_{n\geqq 1}[n\sigma - \log(q_1 q_2 \ldots q_n)],$$

et, comme la suite $\{q_n\}$ est croissante, on a aussi

$$\log(q_1 q_2 \ldots q_n) = \max_{\sigma\geqq 0}\left(n\sigma - \int_0^\sigma N(e^u)\,du\right).$$

Par conséquent $M_n \leqq q_1 q_2 \ldots q_n$ $(n \geqq 1)$. La fonction f appartient donc à la classe $C(q_1 q_2 \ldots q_n)$.

Ainsi on a le théorème suivant :

Théorème R'. — *Si la suite d'entiers positifs* $\{q_n\}$, *complémentaire à la suite d'entiers non négatifs* $\{\nu_n\}$ $(\nu_1 = 0)$, *est telle que*, $\lim \log q_n/n = 0$, *il existe une fonction* $f(x)$, *non identiquement nulle sur* $I \equiv [0, \infty)$, *indéfiniment dérivable et bornée sur* I, *telle que* $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ *et appartenant à la classe* $C\{q_1 q_2 \ldots q_n\}$.