

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Sur les vibrations des fils élastiques et des fils parfaits

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 63 (1946), p. 185-254

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__185_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LES VIBRATIONS DES FILS ÉLASTIQUES

ET DES FILS PARFAITS

PAR M. J. HAAG.



INTRODUCTION.

Le présent travail est une étude des *petites vibrations* des fils élastiques ou des fils parfaitement flexibles. Elle repose sur la théorie du trièdre mobile à deux paramètres,

Dans le cas du fil élastique, le trièdre est lié à l'une quelconque des sections droites du fil et dépend donc de l'abscisse curviligne s de cette section et du temps t . Dans le cas du fil parfait, le trièdre est constitué par les axes de Frenet; il dépend encore de s et t .

Dans un premier chapitre, j'établis les *équations générales des petits mouvements des fils élastiques*. J'étudie d'abord le cas exceptionnel où la fibre neutre est immobile, c'est-à-dire le cas des *vibrations torsionnelles*. Je montre qu'il existe une infinité de solutions, dont la seule intéressante est la vibration torsionnelle classique des tiges cylindriques. J'envisage ensuite le cas général et montre qu'il est subordonné à l'intégration d'un système de *douze équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Ce système se décompose en *deux systèmes de six équations* dans le cas du *fil plan*. J'indique le principe de la détermination des mouvements *stationnaires* ou *entretenus*.

Dans le deuxième chapitre, j'établis de même les équations générales des *petits mouvements des fils parfaits*, en envisageant tout de suite le cas où il existe un *mouvement permanent* faisant glisser le fil sur lui-même. Le problème se ramène à un système de deux équations aux dérivées partielles d'ordres 2 et 4. Les variables se séparent dans le cas du *fil plan*. J'étudie aussi les mouvements d'un fil glissant sans frottement sur une surface.

Le Chapitre III est une courte étude du *flexible* rotatif ou coulissant.

Dans le Chapitre IV, j'applique la théorie générale du Chapitre I au *fil cylindrique* et à la *torsade*.

Le Chapitre V est consacré au cas important du *fil circulaire* et peut s'appliquer approximativement au *ressort à boudin* à spires très aplaties et au *spiral de montre*. Les fréquences propres sont déterminées par une équation transcendante compliquée, qui dépend des *liaisons imposées aux deux extrémités*, lesquelles donnent lieu à 36 combinaisons différentes.

Dans le Chapitre VI, j'étudie *l'équation de résonance* obtenue au chapitre précédent. Je donne des *formules asymptotiques* permettant le calcul de la fréquence, lorsque celle-ci n'est pas trop grande. La *résolution numérique* complète dans le cas des *vibrations planes du fil doublement encastré* me permet de contrôler la valeur pratique des dites formules asymptotiques. J'examine aussi le cas où l'angle au centre tend vers zéro, qui doit conduire au fil rectiligne. On trouve des solutions étrangères, qui s'expliquent par le fait que, pour chacune d'elles, *la tension ou les couples de flexion et de torsion deviennent infinis*. Le chapitre se termine par l'application à quatre *exemples concrets* ayant fait l'objet d'expériences déjà anciennes de M. Granier. L'accord est satisfaisant pour trois spiraux plans, mais pas pour le spiral cylindrique.

Le septième et dernier chapitre est consacré à quelques exemples de vibrations de fils parfaits. Je commence par étudier le cas du *fil pesant* ou de la *courroie de transmission*, en position verticale, horizontale ou oblique. Je traite un exemple numérique pour la courroie. Le cas de la *chaînette* est plus compliqué; il est cependant abordable dans les vibrations latérales. J'étudie aussi les vibrations d'un *fil tournant* et enfin d'un fil tendu sur une sphère, en totalité ou en partie.

Les questions d'Analyse soulevées par ces divers problèmes sont assez variées et font intervenir en particulier les *fonctions de Bessel* et la *fonction hypergéométrique*. J'ai eu aussi l'occasion d'utiliser certains travaux d'Émile Picard sur les équations différentielles.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PETITS MOUVEMENTS DES FILS ÉLASTIQUES.

1. *Choix du trièdre mobile*. — A chaque point M de la fibre neutre (Γ), nous ferons correspondre un trièdre trirectangle $Mxyz$ choisi de la manière suivante.

La fibre neutre étant orientée, l'axe Mz sera dirigé suivant la *tangente positive*. Les axes Mx et My seront *invariablement liés à la section droite* du fil et choisis de telle manière qu'ils se confondent respectivement avec la normale principale et la binormale de la fibre neutre, quand le fil est dans sa position d'équilibre.

Nous appellerons s l'*abscisse curviligne* de M sur la fibre neutre, comptée à partir d'un point *matériel* déterminé de cette fibre. Il s'ensuit que si s est constant, M est aussi un point matériel déterminé de la fibre neutre, puisque la dilatation de celle-ci est pratiquement nulle ⁽¹⁾. Il y a toutefois exception dans le cas particulier des vibrations longitudinales d'un fil cylindrique, qui sera traité à part au Chapitre IV.

2. *Choix des paramètres.* — Le fil étant rapporté à un trièdre de référence déterminé, nous supposons que son mouvement est tel qu'il reste indéfiniment dans le voisinage d'une certaine position d'équilibre (Γ_0) . Soient O le point de (Γ_0) correspondant au point M de (Γ) et $Ox_0y_0z_0$ le trièdre de Frenet en ce point. La déformation étant petite, le trièdre $Mxyz$ est voisin de $Ox_0y_0z_0$.

Nous appellerons u, v, w les coordonnées de M par rapport à $Ox_0y_0z_0$. Soit $Mx_1y_1z_1$ le trièdre déduit de $Ox_0y_0z_0$ par la translation \overrightarrow{OM} . Faisons tourner $Mx_1y_1z_1$ autour de Mx_1 jusqu'à ce que My_1 soit dans le plan xMy ; soit λ l'angle mesurant cette rotation et soit $Mx_2y_2z_2$ la nouvelle position de $Mx_1y_1z_1$. L'axe My_2 est perpendiculaire à Mz_2 et à Mz . On peut donc amener Mz_2 sur Mz par une rotation autour de My_2 ; soit μ l'angle mesurant cette rotation, qui amène $Mx_2y_2z_2$ en $Mx_3y_3z_3$. L'axe Mz_3 se confondant avec Mz , on peut amener $Mx_3y_3z_3$ sur $Mxyz$ par une rotation de l'angle ν autour de Mz_3 .

En utilisant les formules du changement de coordonnées résultant des trois rotations précédentes, on calcule aisément les cosinus directeurs des axes $Mxyz$ par rapport à $Mx_1y_1z_1$ (ou $Ox_0y_0z_0$); en voici le tableau :

	Ox_0	Oy_0	Oz_0
Mx	$\cos \mu \cos \nu$	$\cos \lambda \sin \nu + \sin \lambda \sin \mu \cos \nu$	$\sin \lambda \sin \nu - \cos \lambda \sin \mu \cos \nu$
My	$-\cos \mu \sin \nu$	$\cos \lambda \cos \nu - \sin \lambda \sin \mu \sin \nu$	$\sin \lambda \cos \nu + \cos \lambda \sin \mu \sin \nu$
Mz	$\sin \mu$	$-\sin \lambda \cos \mu$	$\cos \lambda \cos \mu$

Si les deux trièdres $Mxyz$ et $Ox_0y_0z_0$ ont des orientations infiniment voisines, les cosinus directeurs de Mz sont infiniment voisins de 0, 0, 1; donc, μ et λ sont très petits. Les cosinus directeurs de My sont infiniment voisins de 0, 1, 0; donc, ν est très petit ⁽²⁾.

Les six variables $u, v, w, \lambda, \mu, \nu$ déterminent la position du trièdre $Mxyz$ par rapport à $Ox_0y_0z_0$. Ce sont des fonctions des variables indépendantes s et t . Elles sont toutes très petites et seront regardées comme des infiniment petits du premier ordre. Dans tout ce qui va suivre, nous conviendrons de *négliger les infiniment petits du second ordre*. Moyennant quoi, les cosinus directeurs de Mx, My, Mz ont les valeurs respectives suivantes

$$(1) \quad 1, \quad \nu, \quad -\mu; \quad -\nu, \quad 1, \quad \lambda; \quad \mu, \quad -\lambda, \quad 1.$$

(1) Cf. J. HAAG. *Théorie des fils élastiques* (Journ. de Math., t. XXV, 1; 1946; n° 30).

(2) Les angles d'Euler ne possèdent pas cette propriété.

3. Si s varie et joue le rôle du temps, le trièdre $Ox_0y_0z_0$ a pour rotations et translations $0, q_0, r_0, 0, 0, 1$; $q_0 = \frac{1}{R}$ désignant la courbure et $-r_0$ la torsion de (Γ_0) . Le vecteur vitesse de M a pour composantes

$$\frac{\partial u}{\partial s} + q_0 w - r_0 u, \quad \frac{\partial v}{\partial s} + r_0 u, \quad \frac{\partial w}{\partial s} + 1 - q_0 u.$$

Or, ce vecteur est le vecteur unitaire de Mz . Les composantes ci-dessus sont donc les cosinus directeurs de Mz . En se reportant aux formules (1), on en déduit

$$(2) \quad \lambda = -\frac{\partial v}{\partial s} - r_0 u, \quad \mu = \frac{\partial u}{\partial s} + q_0 w - r_0 v;$$

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial s} = q_0 u.$$

4. *Rotations et translations du trièdre mobile.* — Si t varie, s restant constant, le vecteur vitesse de M a pour composantes $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ suivant les axes $Ox_0y_0z_0$. Le vecteur instantané de rotation du trièdre $Mxyz$ est la somme géométrique des vecteurs $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ porté par Mx_1 , $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ porté par My_2 , $\frac{\partial \nu}{\partial t}$ porté par Mz . On en conclut immédiatement que les rotations et translations du trièdre $Mxyz$ sont, au second ordre près ⁽¹⁾,

$$(4) \quad p_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad q_1 = \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad r_1 = \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad \xi_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \eta_1 = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Si s varie, t restant constant, les translations sont $0, 0, 1$. Le vecteur instantané de rotation est la somme géométrique des vecteurs $\frac{\partial \lambda}{\partial s}, \frac{\partial \mu}{\partial s}, \frac{\partial \nu}{\partial s}$ portés respectivement par Mx_1, My_2, Mz et du vecteur de composantes $(0, q_0, r_0)$ suivant $Ox_0y_0z_0$. Les rotations de $Mxyz$ sont donc, d'après (1) et au second ordre près ⁽²⁾,

$$(5) \quad p = \frac{\partial \lambda}{\partial s} + q_0 \nu - r_0 \mu, \quad q = q_0 + \frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda, \quad r = r_0 + \frac{\partial \nu}{\partial s} - q_0 \lambda.$$

5. *Équations indéfinies d'équilibre dynamique.* — Considérons les forces extérieures (F) appliquées à la portion de fil postérieure à la section droite (s). Elles comprennent d'abord les forces éventuellement appliquées à la section

(1) On peut facilement calculer les expressions exactes. Par exemple, les rotations ont les valeurs suivantes

$$\lambda' \cos \mu \cos \nu + \mu' \sin \nu, \quad -\lambda' \cos \mu \sin \nu + \mu' \cos \nu, \quad \lambda' \sin \mu + \nu',$$

les accents indiquant des dérivées par rapport à t .

(2) On vérifie facilement que les relations classiques (Cf. DABBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 49 et 66) entre les douze rotations et translations sont satisfaites identiquement.

terminale (s_1); puis les *forces d'inertie*; et enfin les *forces permanentes* provenant du *champ* auquel le fil est soumis. Ces dernières sont généralement négligeables devant les forces d'inertie. En outre, leur seul effet est de produire une *déformation statique* donnant à la fibre neutre la forme (Γ_0). Convenons de substituer cette forme à la forme naturelle; nous pourrions ainsi *négliger le champ*.

Appelons X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du système des forces (F) par rapport à $Mxyz$. Soient d'autre part X_v, Y_v, \dots, N_v les quotients par ds des coordonnées du système des forces d'inertie appliquées à l'élément de fil compris entre les sections droites (s) et ($s + ds$). On a ⁽¹⁾, au second ordre près,

$$(6) \quad \frac{\partial X}{\partial s} + q_0 Z - r_0 Y + X_v = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial s} + r_0 X + Y_v = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} - q_0 X + Z_v = 0;$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial s} + q_0 N - r_0 M - Y + L_v = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial s} + r_0 L + X + M_v = 0, \\ \frac{\partial N}{\partial s} - q_0 L + N_v = 0. \end{array} \right.$$

6. *Équations d'équilibre élastique*. — Soient Mx' et My' les axes principaux d'inertie de la section droite du fil et A', B' les moments d'inertie correspondants. Soient p', q', r les rotations du trièdre $Mx'y'z$ quand s joue le rôle du temps. On a ⁽²⁾

$$L' = EA'(p' - p_0), \quad M' = EB'(q' - q_0), \quad N = GI(r - r_0),$$

E et G désignant le *module de Young* et le *module de torsion* et I le *pseudo-moment d'inertie polaire* ⁽³⁾.

D'autre part, si l'on pose $\varphi = \widehat{Mx, Mx'}$, on a

$$\begin{aligned} L &= L' \cos \varphi - M' \sin \varphi, & M &= L' \sin \varphi + M' \cos \varphi; \\ p' &= p \cos \varphi + q \sin \varphi, & q' &= -p \sin \varphi + q \cos \varphi. \end{aligned}$$

On en déduit, au second ordre près et en tenant compte de (5),

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = EA \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} + q_0 \nu - r_0 \mu \right) - EC \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda \right), \\ M = -EC \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} + q_0 \nu - r_0 \mu \right) + EB \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda \right), \\ N = GI \left(\frac{\partial \nu}{\partial s} - q_0 \lambda \right), \end{array} \right.$$

avec

$$(9) \quad A = A' \cos^2 \varphi + B' \sin^2 \varphi, \quad B = A' \sin^2 \varphi + B' \cos^2 \varphi, \quad C = (B' - A') \sin \varphi \cos \varphi.$$

⁽¹⁾ Cf. J. HAAG, *loc. cit.*, n° 9.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, n° 39.

⁽³⁾ Rappelons que l'on a $0 < I \leq A' + B'$, le signe $=$ devant être pris dans le seul cas du fil rond [*loc. cit.*, équation (51)].

Ces dernières quantités sont les *moments et produits d'inertie* de la section droite relativement aux axes Mxy . Ce sont des *fonctions de s* en général, car il en est ainsi de l'angle φ . Seuls, les invariants $A + C$ et $AC - B^2$ sont toujours des constantes.

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons dorénavant l'indice de q_0, r_0 et il sera bien entendu que q et r se rapporteront à la courbe (Γ_0) et non à (Γ) . Convenons aussi de désigner par des accents les dérivées des fonctions dépendant uniquement de s .

7. *Calcul de la force d'inertie.* — Le vecteur accélération du point P de la section droite (s) qui a pour coordonnées $(x, y, 0)$ par rapport à $Mxyz$, a pour composantes suivant ces axes et au second ordre près

$$\gamma_x = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - y \frac{\partial r_1}{\partial t}, \quad \gamma_y = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + x \frac{\partial r_1}{\partial t}, \quad \gamma_z = \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + y \frac{\partial p_1}{\partial t} - x \frac{\partial q_1}{\partial t}.$$

Si ρ désigne la *masse spécifique* du fil, on a ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} X_v &= -\rho \iint_{(A)} h \gamma_x dx dy, & Y_v &= -\rho \iint_{(A)} h \gamma_y dx dy, \\ Z_v &= -\rho \iint_{(A)} h \gamma_z dx dy, \\ L_v &= -\rho \iint_{(A)} h y \gamma_z dx dy, & M_v &= \rho \iint_{(A)} h x \gamma_z dx dy, \\ N_v &= \rho \iint_{(A)} h (y \gamma_x - x \gamma_y) dx dy, \end{aligned}$$

où l'on a posé $h = 1 - qx$ et où (A) représente la section droite. En tenant compte des formules précédentes, il vient

$$(10) \left\{ \begin{aligned} X_v &= -\rho \left(S \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + C q \frac{\partial r_1}{\partial t} \right), & Y_v &= \rho \left(-S \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + B q \frac{\partial r_1}{\partial t} \right), \\ Z_v &= \rho \left(-S \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + C q \frac{\partial p_1}{\partial t} - B q \frac{\partial q_1}{\partial t} \right), \\ L_v &= \rho \left(C q \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - A \frac{\partial p_1}{\partial t} + C \frac{\partial q_1}{\partial t} \right), & M_v &= \rho \left(-B q \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + C \frac{\partial p_1}{\partial t} - B \frac{\partial q_1}{\partial t} \right), \\ N_v &= \rho \left[-C q \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + B q \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - (A + B) \frac{\partial r_1}{\partial t} \right], \end{aligned} \right.$$

S désignant l'aire de (A) . Signalons que nous avons négligé, dans L_v, M_v, N_v , des termes dont les coefficients sont des intégrales doubles portant sur des polynômes homogènes et du troisième degré en x, y .

Supposons maintenant qu'on rende le fil infiniment mince, en réduisant sa section droite par une homothétie de rapport k . Les termes que nous venons de

(1) *Loc. cit.*, n° 9.

négliger sont de l'ordre de k^3 . Nous avons maintenant deux cas à distinguer, suivant que X_v , Y_v , Z_v sont de l'ordre de k^2 ou de k^4 .

8. *Cas où la fibre neutre est immobile.* — Nous allons d'abord nous débarrasser du second cas ⁽¹⁾.

L'accélération de chaque point M de la fibre neutre est nulle. Donc, chacun de ces points est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Si le vecteur vitesse n'est pas le même pour tous les points, il y a rupture du fil au bout d'un temps plus ou moins long. Nous devons donc faire l'hypothèse contraire et, en choisissant convenablement le trièdre de référence, nous nous ramenons au cas où le vecteur vitesse est nul, c'est-à-dire au cas où *tous les points de la fibre neutre sont immobiles*. Nous avons alors $u = v = w = 0$; d'où $\lambda = \mu = 0$, d'après (2). Puis, d'après (8) et (10),

$$\begin{aligned} L &= EA q v, & M &= -EC q v, & N &= GI \frac{\partial v}{\partial s}; \\ X_v &= -\rho C q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & Y_v &= \rho B q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & Z_v &= L_v = M_v = 0, & N_v &= -\rho(A+B) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

9. Examinons d'abord le cas particulier $q = 0$ (fil *rectiligne*). On a $L = M = X_v = Y_v = 0$. Portant dans (6) et (7), on obtient $X = Y = \frac{\partial Z}{\partial s} = 0$,

$$GI \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho(A+B) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation classique des *vibrations torsionnelles* d'un cylindre.

10. Supposons maintenant $q \neq 0$ (fil *non rectiligne*). En éliminant X , Y , Z , L , M , N , X_v , Y_v , N_v entre les équations (6), (7) et (11), on obtient trois équations (E_1) , (E_2) , (E_3) linéaires et homogènes en v , $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial s^3}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$. En éliminant $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ entre ces trois équations, on obtient deux équations qui peuvent être considérées comme des équations différentielles vérifiées par v fonction de s . L'une est du second ordre et l'autre du troisième. Si elles ont une solution commune, cette solution est nécessairement de la forme

$$(12) \quad v = ST + S_1 T_1,$$

S , S_1 désignant des fonctions de s et T , T_1 des fonctions de t . En substituant cette expression dans (E_1) , (E_2) par exemple, on obtient deux équations aux variables mêlées, contenant linéairement T , T_1 , T'' , T_1'' . En donnant à s deux valeurs numériques telles que les valeurs numériques prises par S , S_1 ne

(1) Si les forces appliquées aux extrémités du fil forment un système dont les coordonnées sont de l'ordre de k^4 , la valeur $k = 0$ n'est pas un pôle pour la déformation (*loc. cit.*, n° 27). Le fil peut devenir infiniment mince sans qu'il y ait rupture.

soient pas proportionnelles, on obtient un système de deux équations linéaires à coefficients constants entre T , T_1 , T'' , T_1'' , et dont on ne peut retenir que les solutions sinusoïdales, si l'on veut que v reste fini quel que soit t . Portant dans (12), puis portant (12) dans (E_1) , (E_2) , (E_3) et écrivant que les équations sont vérifiées quel que soit t , on constate que *le mouvement cherché résulte nécessairement de la superposition de deux vibrations sinusoïdales stationnaires*. Il ne reste plus qu'à chercher ces vibrations, si elles existent.

Supposons donc qu'on ait $v = S \sin \omega t$. En portant dans (E_1) , (E_2) , (E_3) , on obtient trois équations différentielles linéaires que doit vérifier la fonction S et dont les coefficients dépendent de q , r , φ d'une manière compliquée. *Si le fil est quelconque*, ces équations n'ont pas de solution commune; *il n'y a pas de vibrations torsionnelles*.

Mais, on peut aussi considérer qu'on a affaire à un système de trois équations différentielles à quatre inconnues S , q , r , φ et l'on en conclut qu'*il existe une infinité de fils élastiques susceptibles de donner lieu à une vibration torsionnelle; ces fils et cette vibration dépendent d'une fonction arbitraire de s* . Leur détermination explicite paraît extrêmement compliquée et sans intérêt pratique. On peut toutefois chercher des solutions particulières simples.

Examinons par exemple le cas du *ressort à boudin*. Dans ce cas, q , r , φ sont des constantes. Les équations différentielles ci-dessus sont à coefficients constants et l'on est ramené à chercher si les trois équations caractéristiques ont une racine commune. Si l'angle φ est quelconque, il peut exister des solutions. Mais, dans la pratique, cet angle est nul ou du moins très petit. Si l'on admet que $\varphi = 0$, les trois équations différentielles sont du second ordre et très simples. Malheureusement, elles n'admettent *pas de solution commune* dans le domaine réel, sauf si $r = 0$.

Dans ce dernier cas, c'est-à-dire dans le *cas du cercle*, l'une des équations disparaît et la compatibilité des deux autres exige que l'on ait

$$(13) \quad \rho \omega^2 R^2 = \frac{EA(EA + GI)}{EA(A + B) + GI(A + 2B)}.$$

On a ensuite

$$(14) \quad S = a \operatorname{ch} m \theta + b \operatorname{sh} m \theta,$$

avec

$$s = R \theta, \quad m^2 = \frac{EAB}{EA(A + B) + GI(A + 2B)}.$$

La formule (13) détermine la *fréquence de la vibration*. Pour avoir une idée de sa grandeur, traitons un exemple concret. Supposons du *fil rond* en acier et adoptons les valeurs suivantes, dans le système d'unités habituel de la Résistance des matériaux

$$E = 25\,000, \quad G = 10\,000, \quad \rho = \frac{7,8}{9,81} \cdot 10^{-9}.$$

On a approximativement $\omega R = 3600000$. La fréquence est $\frac{3600000}{l}$, l désignant la longueur du fil en millimètres. Si $l = 1000$ par exemple, on a $f = 3600$. Comme on le voit, la fréquence est très élevée. Il est à remarquer qu'elle est indépendante de la grosseur du fil, pourvu toutefois que celui-ci soit assez mince pour qu'on puisse lui appliquer la théorie approchée des fils élastiques.

11. *Vibrations de la fibre neutre.* — Arrivons maintenant au cas général où la fibre neutre est en mouvement. Cette fois, X_v, Y_v, Z_v sont de l'ordre de k^2 (n° 7) et la valeur $k = 0$ est un pôle pour la déformation (1). Il en résulte que X, Y, Z, L, M, N sont aussi du second ordre (2). Comme L_v, M_v, N_v sont du quatrième ordre, on peut les négliger (3) dans les équations (7). Quant à X_v, Y_v, Z_v , nous les réduisons à leur partie principale; nous obtenons, en appelant dorénavant ρ la densité linéaire,

$$(15) \quad X_v = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y_v = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z_v = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Pour se rendre compte de l'ordre du système d'équations aux dérivées partielles dont dépend la recherche du mouvement, on peut procéder de la manière suivante. Prenons comme fonctions inconnues les douze fonctions $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \lambda, \mu, \nu, X, Y, Z, L, M, N$. Nous avons d'abord les six équations (6) et (7), qui sont du premier ordre; puis les trois équations (8), qui sont aussi du premier ordre. Enfin, en dérivant les équations (2) et (3) par rapport à t , nous obtenons trois équations, qui sont encore du premier ordre. On peut donc dire que la détermination du mouvement est subordonnée à l'intégration d'un système de douze équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à douze inconnues.

On peut aussi garder seulement les inconnues u, v, w, ν . D'après (8) et (2), on a

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{L}{E} = -C \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - A \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2r \left(C \frac{\partial v}{\partial s} - A \frac{\partial u}{\partial s} \right) - Cq \frac{\partial w}{\partial s} \\ \quad + (Cr^2 - Ar')u + (Ar^2 + Cr')v - (Aqr + Cq')w + Aq, \\ \frac{M}{E} = B \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + C \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2r \left(C \frac{\partial u}{\partial s} - B \frac{\partial v}{\partial s} \right) + Bq \frac{\partial w}{\partial s} \\ \quad + (Cr' - Br^2)u - (Br' + Cr^2)v + (Bq' + Cqr)w - Cqv, \\ N = GI \left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + q \frac{\partial v}{\partial s} + qru \right). \end{cases}$$

(1) *Loc. cit.*, n° 31. Il s'ensuit que le fil se rompt s'il devient infiniment mince.

(2) Cela résulte des équations (6) et (7). On peut le voir aussi en intégrant la somme géométrique des forces d'inertie et leur moment par rapport au point M d'abscisse curviligne s , le long de la portion de fil postérieure à la section droite (s). Il y a exception toutefois, dans le cas du fil cylindrique, pour N , qui est alors du quatrième ordre (*Cf.* n° 13).

(3) Sauf N_v dans le cas du fil cylindrique (n° 13).

En portant ces expressions dans la troisième équation (7), on obtient une équation (E_1) du second ordre. D'autre part, en tirant X, Y des deux premières équations (7) et portant dans la deuxième équation (6), on obtient une équation (E_2) du quatrième ordre. En éliminant Z entre les première et troisième équations (6), puis remplaçant, dans le résultat obtenu, X et Y par les expressions déduites de (7) comme ci-dessus, on obtient une équation (E_3) du cinquième ordre. Nous avons enfin l'équation (3), ou équation (E_4), qui est du premier ordre. On se trouve donc en présence d'un système de quatre équations linéaires aux dérivées partielles à quatre inconnues et dont les ordres respectifs sont 2, 4, 5 et 1.

Comme on le voit, le problème n'est pas simple.

12. *Cas du fil plan.* — Supposons en outre que le plan de la fibre neutre soit plan de symétrie pour les sections droites. On a $r = C = 0$, A et $B = \text{const.}$

Les formules (16) et les équations (6) et (7) deviennent

$$(17) \quad L = EA \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + qv \right), \quad M = EB \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + q \frac{\partial w}{\partial s} + q'w \right), \quad N = GI \left(\frac{\partial v}{\partial s} + q \frac{\partial v}{\partial s} \right);$$

$$(18) \quad \frac{\partial X}{\partial s} + qZ - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial s} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} - qX - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$(19) \quad \frac{\partial N}{\partial s} - qL = 0, \quad X = -\frac{\partial M}{\partial s}, \quad Y = \frac{\partial L}{\partial s} + qN.$$

Les équations (E_1), (E_2), (E_3), (E_4) prennent la forme suivante

$$(E_1) \quad GI \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + (EA + GI) q \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + GI q' \frac{\partial v}{\partial s} - EA q^2 v = 0;$$

$$(E_2) \quad EA \left[\frac{\partial^4 v}{\partial s^4} - \frac{\partial^2 (qv)}{\partial s^2} + q^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - q'^2 v \right] - GI q' \left(\frac{\partial v}{\partial s} + q \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$(E_3) \quad EB \frac{\partial}{\partial s} \left[R \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + R \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(q \frac{\partial w}{\partial s} + q'w \right) \right] + EB q \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + q \frac{\partial w}{\partial s} + q'w \right) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{d(Ru)}{ds} - w \right] = 0;$$

$$(E_4) \quad \frac{\partial w}{\partial s} - qu = 0.$$

Les deux premières ne contiennent que v et v et les deux autres que u et w . On voit donc que le système du douzième ordre se décompose en deux systèmes du sixième ordre. Le premier détermine v et v , c'est-à-dire les mouvements perpendiculaires au plan du fil et que nous appellerons *mouvements latéraux*; le second détermine les mouvements ayant lieu dans le plan du fil et que nous appellerons *mouvements plans*.

Connaissant v , ou bien u et w , on a λ ou μ par (2). On a ensuite L, M, N par (17); X, Y par (19); Z par la première équation (18); ce qui détermine le système de forces appliqué à chaque extrémité du fil.

13. *Cas du fil cylindrique.* — On a $q = 0$. De plus, la normale principale étant indéterminée, on peut toujours choisir Ox et Oy suivant les axes principaux d'inertie de la section droite, ce qui entraîne $C = 0$, A et $B = \text{const.}$, $r = 0$.

L'équation (E_1) nous redonne, en remarquant $(^1)$ que N_v est du même ordre que N , l'équation des *vibrations torsionnelles* (n° 9)

$$(20) \quad G I S \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho (A + B) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Les équations (E_2) et (E_3) deviennent $(^2)$

$$(21) \quad E A \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad E B \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

équations classiques des *vibrations transversales*.

L'équation (E_4) est remplacée par la suivante $(^3)$

$$(22) \quad E S \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

équation classique des *vibrations longitudinales*.

14. *Cas de la torsade* $(^4)$. — Ce cas diffère du précédent par le fait que la rotation r n'est pas nulle, mais simplement constante. L'équation (22) subsiste; mais, les autres sont modifiées. On a d'abord $(^5)$

$$N = G I \frac{\partial v}{\partial s} + G I' r \frac{\partial w}{\partial s},$$

avec

$$I' = 2(1 + k)(A + B) - (1 + 2k)I,$$

k désignant le *coefficient de Poisson*. Dès lors, l'équation (E_1) devient

$$(23) \quad G I \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + G I' r \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\rho}{S} (A + B) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Comme on le voit, *les vibrations torsionnelles sont liées aux vibrations longitudinales*.

$(^1)$ Cf. notes $(^2)$ et $(^3)$ de la page 193.

$(^2)$ L'équation (E_3) se déduit de la première équation (18) et de la deuxième équation (19).

$(^3)$ Elle résulte de la troisième équation (18) et de la formule $Z = E S \frac{\partial w}{\partial s}$. Dans ce cas, s désigne l'abscisse curviligne de O sur (Γ_0) .

$(^4)$ Cf. *loc. cit.*, n° 70.

$(^5)$ Cf. *loc. cit.*, formules (155) et (51).

Quant aux *vibrations transversales*, elles sont données par le système des équations (E_2) , (E_3) , qui s'écrivent

$$(24) \quad \begin{cases} A \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} - 2(A + 2B)r^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + Ar^4 v + \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2(A + B)r \left(\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} - r^2 \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0. \\ B \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} - 2(2A + B)r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + Br^4 u + \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2(A + B)r \left(\frac{\partial^3 v}{\partial s^3} - r^2 \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 0. \end{cases}$$

Les vibrations dans les deux directions principales ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, comme dans le cas du cylindre.

15. *Mouvements stationnaires.* — Un tel mouvement se caractérise par la condition que u , v , w , ν sont de la forme

$$(25) \quad u = UT, \quad v = VT, \quad w = WT, \quad \nu = HT,$$

T désignant une fonction de t et U , V , W , H des fonctions de s . En substituant ces expressions dans les équations générales, on voit, comme d'habitude, que T est une *fonction sinusoïdale*, par exemple $\sin \omega t$. Puis les fonctions U , V , W , H doivent satisfaire à un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, dont les coefficients sont des fonctions connues de s et que l'on ne sait pas intégrer en général. Ce système admet une infinité de solutions dépendant de douze constantes arbitraires. Une de ces solutions étant connue, on a L , M , N par les formules (16); puis, X , Y , Z par (7) et (6).

16. *Liaisons imposées aux extrémités du fil.* — Considérons une extrémité du fil et le trièdre $Mxyz$ qui lui est attaché. La position de ce trièdre dépend des six paramètres u , v , ..., ν . Les forces extérieures appliquées à la section droite terminale admettent pour coordonnées X , Y , ..., N par rapport à $Mxyz$.

Imaginons qu'on impose aux six paramètres u , v , ..., ν certaines équations de liaison

$$(26) \quad f_i(u, v, \dots, \nu, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p; p \leq 6).$$

A chaque instant t , les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons doivent vérifier p équations obtenues en différentiant les équations (26) à t constant

$$(27) \quad a_{i1} \delta u + a_{i2} \delta v + \dots + a_{i6} \delta \nu = 0.$$

Si les liaisons sont *sans frottement*, les équations (27) doivent entraîner la suivante

$$(28) \quad X \delta u + Y \delta v + \dots + N \delta \nu = 0;$$

ce qui se traduit par $6-p$ équations linéaires imposées à X , Y , ..., N . Le nombre

total des équations que doivent vérifier $u, v, \dots, \nu, X, Y, \dots, N$ est donc égal à six.

17. *Mouvements entretenus.* — Supposons en particulier qu'on se donne certains des paramètres u, v, \dots, ν en fonction sinusoïdale du temps, de pulsation déterminée ω . Nous obtenons p équations de la forme (26), mais dont chacune renferme un seul des paramètres. Chaque équation (27) exprime que la différentielle de ce paramètre est nulle. Dès lors, les coefficients, dans (28), des différentielles des paramètres non liés doivent être nuls. Quant aux autres coefficients, on peut les choisir arbitrairement en fonction du temps. Supposons encore qu'ils soient des fonctions sinusoïdales, de pulsation ω . Nous avons finalement, pour l'extrémité considérée, six équations de la forme

$$(29) \quad \varepsilon_1 u + \varepsilon'_1 X = \sin \omega t, \quad \varepsilon_2 v + \varepsilon'_2 Y = \sin \omega t, \quad \dots, \quad \varepsilon_6 \nu + \varepsilon'_6 N = \sin \omega t;$$

où les $\varepsilon_i, \varepsilon'_i$ désignent douze constantes astreintes à la condition que, pour chaque valeur de i , une seule des constantes ε_i et ε'_i soit nulle. Nous imposons des conditions analogues pour l'autre extrémité du fil, ce qui nous donne en tout douze équations (*conditions aux limites*).

18. Ces conditions ne déterminent évidemment pas le mouvement du fil, car il faudrait encore se donner les *conditions initiales* (position et vitesse de chaque point au temps zéro). Mais, nous admettons que, grâce aux frottements internes et conformément à la théorie classique des mouvements entretenus, le mouvement du fil, au bout d'un temps suffisamment long, est un des mouvements stationnaires envisagés au n° 15. Nous avons vu que ces mouvements dépendent de douze constantes arbitraires. En écrivant les douze conditions aux limites, on obtient douze équations du premier degré à douze inconnues, d'où l'on tire les constantes cherchées.

Chacune de ces constantes se présente sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est le déterminant $D(\omega)$ du système. Si la pulsation ω est telle que ce déterminant soit nul, les douze constantes deviennent infinies; *l'amplitude du mouvement entretenu est infiniment grande* pour chaque point du fil.

Ce résultat est d'ailleurs purement théorique, car il ne tient pas compte des frottements. Dans la réalité, l'amplitude est, non pas infinie, mais seulement *très grande* comparativement aux amplitudes obtenues pour d'autres valeurs de ω . C'est le phénomène bien connu de la *résonance*. Les *pulsations de résonance* sont données par l'équation $D(\omega) = 0$, que nous appellerons l'*équation de résonance*. Or, cette équation exprime la condition qui doit être remplie pour que puisse exister un mouvement stationnaire satisfaisant aux conditions déduites de (29) en remplaçant chaque second membre par zéro. Ces mouvements *libres* sont les *mouvements propres* du fil soumis aux liaisons ci-dessus. Les fréquences de résonance sont donc aussi les *fréquences propres*.

19. *Différentes espèces de liaisons.* — Les liaisons pour les mouvements libres se traduisent, pour chaque extrémité, par les six équations

$$(30) \quad \varepsilon_1 u + \varepsilon'_1 X = 0, \quad \dots, \quad \varepsilon_6 v + \varepsilon'_6 N = 0,$$

avec la condition précisée au n° 17 pour les $\varepsilon_i, \varepsilon'_i$. Le nombre des liaisons distinctes possibles est donc $2^6 = 64$ pour chaque extrémité. En combinant les liaisons des deux extrémités, on obtient 2080 combinaisons différentes.

Pour réaliser matériellement une des 64 liaisons imposables à une extrémité du fil, on peut encastrer cette extrémité dans un petit tube de masse négligeable, lequel est guidé de manière à conserver les degrés de liberté indiqués par les six équations de liaison. Ce guidage est facile à imaginer, en utilisant les procédés bien connus qui permettent de réaliser une translation ou une rotation.

Signalons en particulier l'*encastrement complet*, obtenu quand tous les ε'_i sont nuls. Le cas opposé est celui de la *liberté complète*, obtenu quand tous les ε_i sont nuls.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PETITS MOUVEMENTS DES FILS PARFAITS.

20. *Choix du trièdre mobile.* — Dans le cas du fil parfait, qui est assimilé à une ligne géométrique, la notion de section droite disparaît et nous ne pouvons plus lier un trièdre à cette section ⁽¹⁾. Nous prendrons alors comme trièdre mobile attaché à chaque point M du fil le *trièdre de Frenet* (Mz suivant la tangente, Mx suivant la normale principale, My suivant la binormale).

21. *Choix des paramètres.* — Nous nous proposons d'étudier les petits mouvements du fil au voisinage d'une *position d'équilibre* (Γ_0). L'équilibre dont il s'agit peut être un *équilibre véritable*, en ce sens que chaque point du fil est au repos par rapport au trièdre de référence. Mais, nous aurons aussi à envisager l'extension suivante.

Supposons que le fil puisse être animé d'un *mouvement permanent*, au cours duquel il *glisse sur lui-même*, de sorte qu'il occupe constamment la ligne fixe (Γ_0), chacun de ses points parcourant cette ligne avec la vitesse *constante* V_0 . Pour retomber sur le cas de l'équilibre véritable, il nous suffira de faire $V_0 = 0$.

Avec cette extension, le problème consiste à étudier les *mouvements voisins du mouvement permanent*. Le fil (F) ayant un tel mouvement, associons-lui un *fil fictif* (F_0) animé du mouvement permanent. Établissons entre les deux fils une correspondance ponctuelle conservant les longueurs ⁽²⁾ et telle que deux

⁽¹⁾ Il y a cependant exception dans le *problème du flexible* (Chap. III).

⁽²⁾ Nous supposons les fils *inextensibles*.

points homologues quelconques O et M soient constamment voisins l'un de l'autre ⁽¹⁾. Nous définirons la position du trièdre $Mxyz$ par rapport au trièdre voisin $Ox_0y_0z_0$ exactement comme au n° 2.

Appelons s l'abscisse curviligne de O sur (Γ_0) , comptée à partir d'une *origine fixe* sur cette ligne. Il s'ensuit que le point M de (F) correspondant à une valeur donnée de s est un point matériel du fil qui change avec le temps t et qui se déplace sur (F) avec la vitesse $-V_0$. Mais, dans l'espace, il reste voisin du point fixe O; de sorte que l'étude des fonctions u, v, w à s constant et t variable déterminera le mouvement de la ligne géométrique (Γ) occupée par (F) dans le voisinage de la ligne fixe (Γ_0) .

Dans le cas actuel, les variables λ, μ, ν n'ont pas d'intérêt en elles-mêmes, mais serviront d'auxiliaires.

Les six fonctions u, v, \dots, ν vérifient toujours les équations (2) et (3). De plus, comme $Mxyz$ est trièdre de Frenet pour (Γ) , la rotation p est nulle; on a donc, d'après (5), l'équation supplémentaire

$$(31) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s} + q\nu - r\mu = 0.$$

22. *Équations indéfinies d'équilibre dynamique.* — Dans le chapitre précédent, les vibrations étaient produites par les forces élastiques, devant lesquelles nous avons négligé le champ des forces extérieures. Dans le présent chapitre, ce sont au contraire ces dernières forces, jointes à la tension du fil, qui produisent les vibrations. Nous ne devons donc plus les négliger.

Nous appellerons X, Y, Z les composantes, suivant $Mxyz$, de la force extérieure (F) appliquée à l'unité de longueur du fil au voisinage de M.

Soient $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ les composantes du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ du point M. Avec les notations du n° 5, on a

$$X_v = X - \rho\gamma_x, \quad Y_v = Y - \rho\gamma_y, \quad Z_v = Z - \rho\gamma_z,$$

ρ désignant toujours la densité linéaire du fil.

Les coordonnées appelées X, Y, \dots, N au n° 5 sont toutes nulles ⁽²⁾, à l'exception de Z , qui devient la *tension du fil* en M et que nous représenterons maintenant par la lettre T. Les équations (6) s'écrivent alors

$$(32) \quad qT + X - \rho\gamma_x = 0, \quad Y - \rho\gamma_y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s} + Z - \rho\gamma_z = 0;$$

ce sont les *équations intrinsèques* bien connues de l'équilibre des fils parfaits.

⁽¹⁾ En vertu des hypothèses faites, il suffit que cette condition soit remplie au temps zéro pour qu'elle le soit constamment.

⁽²⁾ Cf. *loc. cit.*, n° 38.

Pour le fil fictif, nous avons de même,

$$(33) \quad q_0 T_0 + X_0 - \rho V_0^2 q_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad \frac{\partial T_0}{\partial s} + Z_0 = 0.$$

Appelons $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ les composantes suivant Ox_0, y_0, z_0 de l'accroissement infiniment petit subi par le champ extérieur quand on passe du point O au point voisin M . Si ce champ est une fonction analytique de M , ces composantes sont, au second ordre près, des fonctions linéaires de u, v, w , à coefficients fonctions connues de s . En tenant compte des formules (1), on a, au second ordre près,

$$\begin{aligned} X - X_0 &= \Delta X + Y_0 v - Z_0 \mu, & Y - Y_0 &= \Delta Y + Z_0 \lambda - X_0 v, \\ Z - Z_0 &= \Delta Z + X_0 \mu - Y_0 \lambda. \end{aligned}$$

La deuxième formule (5) nous donne d'autre part

$$q - q_0 = \frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda.$$

Posons enfin

$$(34) \quad T - T_0 = 0$$

et retranchons (33) de (32); il vient, au second ordre près,

$$(35) \quad \begin{cases} q_0 \theta + T_0 \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda \right) + \Delta X - Z_0 \mu - \rho (\gamma_x - V_0^2 q_0) = 0, \\ \Delta Y + Z_0 \lambda - X_0 v - \rho \gamma_y = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial s} + \Delta Z + X_0 \mu - \rho \gamma_z = 0. \end{cases}$$

Les composantes de $\vec{\gamma}$ suivant Ox_0, y_0, z_0 sont, au second ordre près,

$$\gamma_x, \quad \gamma_y + q_0 V_0^2 v, \quad \gamma_z - q_0 V_0^2 \mu.$$

Celles de $\vec{\gamma}_0$ sont $q_0 V_0^2, 0, 0$. Or, $\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_0 = \frac{d^2(\vec{OM})}{dt^2}$, cette dérivée étant prise *en suivant le mouvement* de O sur (Γ_0) , comme on le fait en Hydrodynamique. On a, par exemple,

$$\frac{du}{dt} = V_0 \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = V_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2 V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

La seconde expression n'est autre que $\gamma_x - V_0^2 q_0$ et l'on a $\gamma_y + q_0 V_0^2 v$ et $\gamma_z - q_0 V_0^2 \mu$ par des formules analogues.

Portons ces résultats dans (35); éliminons λ, μ, v au moyen des formules (2) et (31) et X_0, Y_0, Z_0 au moyen de (33); il vient, en supprimant les indices

de T_0 , q_0 , r_0 , pour simplifier l'écriture

$$(36) \quad q\theta + (T - \rho V_0^2) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + T \left(q \frac{\partial w}{\partial s} - 2r \frac{\partial v}{\partial s} \right) + T' \frac{\partial u}{\partial s} \\ + (Tq)'w - (Tr)'v - Tr^2u + \Delta X - \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) = 0,$$

$$(37) \quad (T - \rho V_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + T \left(2r \frac{\partial u}{\partial s} + r' u - r^2 v + rqw \right) \\ + T' \left(\frac{\partial v}{\partial s} + ru \right) + \Delta Y - \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \right) = 0,$$

$$(38) \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} - \rho V_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + qT \left(-\frac{\partial u}{\partial s} + rv - qw \right) + \Delta Z - \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} \right) = 0.$$

Reproduisons enfin l'équation (3)

$$(39) \quad u = R \frac{\partial w}{\partial s}.$$

On obtient ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues u , v , w , θ . En portant (39) dans (37), on obtiendrait une équation (E_1) en v et w , qui serait du second ordre. En opérant de même sur (36) et (38), puis éliminant θ , on obtiendrait une équation (E_2) du quatrième ordre.

Remarque. — D'après les équations (33), les conditions du mouvement permanent sont les mêmes que les conditions d'équilibre, à cela près que la tension T_0 doit être remplacée par $T_0 - \rho V_0^2$. Il revient au même de dire que *la courbe sur laquelle glisse le fil est une position d'équilibre; mais, la tension du fil mobile surpasse de ρV_0^2 la tension du fil au repos.*

23. Cas du fil plan. — On a $r = 0$. Supposons de plus que le plan de (Γ_0) soit *plan de symétrie pour le champ de forces*, de sorte que ΔX et ΔZ ne contiennent pas v , tandis que ΔY ne contient pas u et w . L'équation (37), ou (E_1), ne contient que l'inconnue v ; elle détermine les *mouvements latéraux*. Les équations (36) et (38) ne contiennent que u et w ; donc, l'équation (E_2) ne contient que w ; elle détermine les *mouvements plans*.

24. Cas du fil rectiligne. — On a $q = r = 0$. L'équation (39) nous donne d'abord $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$. Les équations (36) à (38) se réduisent à

$$(40) \quad (T - \rho V_0^2) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + T' \frac{\partial u}{\partial s} + \Delta X - \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) = 0,$$

$$(41) \quad (T - \rho V_0^2) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + T' \frac{\partial v}{\partial s} + \Delta Y - \rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \right) = 0,$$

$$(42) \quad \frac{\partial v}{\partial s} + \Delta Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Si l'on néglige le champ de forces et si l'on suppose $V_0 = 0$, on retrouve, en tenant compte de la troisième équation (33), l'équation bien connue des *cordes vibrantes*.

25. *Mouvements stationnaires.* — Pour un tel mouvement, on a

$$u = U \sin \omega t, \quad v = V \sin \omega t, \quad w = W \sin \omega t,$$

U, V, W désignant des fonctions de s . En portant dans (E_1) et (E_2) , on obtient un système de deux équations différentielles linéaires en V et W , qui sont respectivement du second et du quatrième ordre. L'intégrale générale comporte six constantes d'intégration. On a ensuite, d'après (39),

$$(43) \quad U = RW'.$$

Puis, d'après (2),

$$(44) \quad \lambda = -(V' + rU) \sin \omega t, \quad \mu = (U' + qW - rV) \sin \omega t.$$

On a θ par (36).

26. *Conditions aux limites.* — Nous envisagerons les liaisons suivantes :

A. *Une extrémité M du fil a un mouvement donné.* — On connaît u, v, w en fonction de t , pour la valeur s_0 de s correspondant à M.

B. *Une extrémité M du fil glisse sans frottement sur une courbe (C) donnée.* — L'absence de frottement exige que le fil soit orthogonal à (C). Il en est ainsi en particulier pour la position d'équilibre O. Il s'ensuit que la tangente en O à (C) est nécessairement dans le plan Ox_0y_0 . Soient (a, b, c) ses paramètres directeurs. On a, au second ordre près,

$$(45) \quad w = 0, \quad av - bu = 0, \quad a\mu - b\lambda = 0.$$

C. *Une extrémité M du fil glisse sans frottement sur une surface (S) donnée.* — Comme précédemment, le fil doit être orthogonal à (S), laquelle doit donc être tangente en O au plan x_0y_0 . On a d'abord

$$(46) \quad w = 0.$$

Supposons la surface analytique et le point O non singulier. L'équation de (S) au voisinage de O est de la forme

$$(47) \quad 2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots$$

La condition d'orthogonalité de Mz et de (S) nous donne

$$(48) \quad \lambda = Bu + Cv, \quad -\mu = Au + Bv.$$

D. *L'extrémité M est libre.* — Aucune condition n'est imposée à u , v , w . Mais, la tension en M doit être nulle. On a donc l'unique équation

$$(49) \quad 0 = 0.$$

E. *Le fil est enroulé partiellement sur une courbe (C) donnée.* — Il en est ainsi en particulier de (Γ_0) . Soit O le point où (Γ_0) quitte (C) tangentiellement. Soit de même A le point, voisin de O, où (Γ) quitte (C). Si nous prenons pour origine des arcs sur (Γ_0) et (Γ) un même point de la partie enroulée, le point M homologue de O se trouve, au second ordre près, sur la tangente en A à (C). Sa distance au point O est donc un infiniment petit du second ordre par rapport à l'arc AO ou, ce qui revient au même ⁽¹⁾, par rapport à l'angle des tangentes Oz_0 et Mz . Dès lors, les équations de liaison sont

$$(50) \quad u = v = w = 0.$$

27. *Mouvements entretenus. Équation de résonance.* — Imposons un mouvement sinusoïdal ⁽²⁾ de phase ωt à l'une des extrémités du fil. Nous avons trois équations de liaison du type A.

Pour l'autre extrémité, nous pouvons supposer qu'on lui impose également un mouvement sinusoïdal de même phase; ou bien qu'elle est soumise à l'une des liaisons B et C. Nous obtenons, dans tous les cas, trois autres équations de liaison.

On peut déterminer un mouvement stationnaire satisfaisant à toutes ces conditions. Les six équations de liaison permettent de calculer les six constantes d'intégration. Le déterminant $D(\omega)$ du système est le même que dans le cas où les mouvements imposés aux extrémités sont nuls. Si $D = 0$; le mouvement entretenu a, théoriquement (cf. n° 18), une amplitude infinie. L'équation $D(\omega) = 0$ est donc l'équation de résonance.

Si la deuxième extrémité du fil est libre, on n'a plus que quatre équations de liaison; le mouvement n'est pas déterminé, du moins en apparence. Mais, il peut arriver (cf. nos 68 et 82) que l'existence d'une singularité de l'intégrale générale à l'extrémité libre réduise le nombre des constantes d'intégration, permettant ainsi la détermination du mouvement et le calcul des pulsations de résonance.

28. *Fil tendu sur une surface parfaitement polie.* — Négligeons le champ de forces. La force (F) du n° 22 se réduit à la réaction normale de la surface (S) sur le fil. Dans la position d'équilibre, la réaction en O est portée par Ox_0 et vaut $-qT$, d'après (33). En M, elle a une valeur infiniment voisine. On a donc,

(1) Nous admettons que le rayon de courbure de (C) en O n'est pas infiniment grand.

(2) On pourrait aussi imaginer qu'on fasse agir sur cette extrémité une force sinusoïdale. On obtiendrait alors des équations de liaison analogues à (30).

au second ordre près, $\Delta Y = -qT\beta$, en appelant β le deuxième cosinus directeur de la normale en M à (S) par rapport aux axes $Ox_0y_0z_0$. Soit

$$(51) \quad 2u = av^2 + 2bv\omega + c\omega^2 + \dots$$

l'équation de (S) au voisinage de O. On a $\beta = -av - b\omega$, au second ordre près. D'autre part, $\frac{\partial \omega}{\partial s} = qu$ est du second ordre, d'après (51). On peut donc écrire $\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0$. Nous supposons que *le fil a au moins un point fixe*; il s'ensuit que $\omega = 0$. Donc, $\beta = -av$ et $\Delta Y = qTav$.

Portons dans (37), où nous faisons en outre $u = \omega = V_0 = 0$; il vient, en remarquant que $T' = 0$, d'après (33)

$$T \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T(qa - r^2)v = 0$$

Il reste à évaluer $qa - r^2$. A cet effet, imaginons que la surface (S) soit rapportée à un système de coordonnées curvilignes orthogonales (s, s_1), les lignes $s_1 = \text{const.}$ étant des géodésiques comprenant (Γ_0), laquelle correspond par exemple à $s_1 = 0$. De plus, s représente, comme ci-dessus, l'abscisse curviligne de O sur (Γ_0). Considérons un trièdre mobile dépendant des deux paramètres s et s_1 , dont l'axe Ox est normal à la surface et l'axe Oz tangent à la ligne $s_1 = \text{const.}$ passant par O. Les translations de ce trièdre sont toutes nulles, sauf $\zeta = 1$ et η_1 . Quant aux rotations, elles satisfont aux deux conditions $(1) p = 0, q_1 + r\eta_1 = 0$.

Cela posé, en employant la méthode classique du trièdre mobile, on trouve que la courbure normale correspondant à la tangente OT définie par $\widehat{Oy, OT} = \varphi$ a pour valeur

$$-\frac{r_1}{\eta_1} \cos^2 \varphi - 2r \sin \varphi \cos \varphi + q \sin^2 \varphi.$$

Comme elle vaut aussi $a \cos^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \sin^2 \varphi$, on a $c = q, b = -r$; d'où $qa - r^2 = ac - b^2$. On sait que cette dernière expression représente la *courbure totale* Γ de la surface. En définitive, les petits mouvements du fil sur la surface sont déterminés par l'équation (2)

$$(52) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Gamma v = 0.$$

On vérifie, comme il fallait s'y attendre, que *cette équation se conserve quand on déforme la surface*. En particulier, *si la surface est développable*, on retrouve l'équation des cordes vibrantes.

(1) Elles résultent des relations rappelées au n° 4.

(2) On peut aussi obtenir cette équation en utilisant les *équations intrinsèques* de l'équilibre d'un fil sur une surface.

CHAPITRE III.

LE FLEXIBLE.

29. *Le flexible rotatif.* — C'est un fil qui a pour mission de transmettre une rotation uniforme entre deux axes dont les positions dans l'espace ne sont pas fixes l'une par rapport à l'autre. Une extrémité du fil est encastrée longitudinalement dans l'un des axes (*axe menant*); l'autre extrémité est encastrée de même dans le second axe (*axe mené*). Le *couple moteur* et le *couple résistant* appliqués aux deux axes sont *faibles*, mais *non nuls*. Ils se transmettent aux deux extrémités du fil sous la forme de *couples de torsion*.

On pourrait évidemment laisser le fil entièrement libre entre ses deux extrémités. Il pourrait alors prendre des mouvements latéraux plus ou moins compliqués, se superposant à la rotation qu'il est chargé de transmettre. Pratiquement, on évite ces mouvements latéraux en enfermant le fil dans une *gaine flexible*, qui l'oblige à *tourner sur lui-même*.

Nous allons examiner dans quelles conditions peut fonctionner ce dispositif.

30. Supposons d'abord que notre fil soit un *fil élastique* ordinaire, comme ceux dont nous nous sommes occupés au Chapitre I. Nous devons revenir au cas particulier où *la fibre neutre est immobile*. Mais, nous ne pouvons utiliser tels quels les résultats obtenus aux n^{os} 8 à 10, car, cette fois, *l'angle* $\nu = \omega t + \nu_0$ *ne reste pas très petit*, contrairement à ce que nous avons supposé au Chapitre I. Par contre, on a $\lambda = \mu = 0$.

Les formules (4) subsistent; mais, les formules (5) sont remplacées par les suivantes

$$(53) \quad p = q_0 \sin \nu, \quad q = q_0 \cos \nu, \quad r = r_0 + \nu'_0.$$

Supposons d'abord le *fil entièrement libre entre ses deux extrémités*. Les formules (8) sont remplacées par

$$L = EA q_0 \sin \nu, \quad M = EA q_0 (\cos \nu - 1), \quad N = 2 GA \nu'_0,$$

en supposant le *fil rond*. Les moments fléchissants L , M oscillent respectivement entre $EA q_0$ et $-EA q_0$, 0 et $-2EA q_0$. La fatigue maximum due à M est le produit de E par le rapport du diamètre du fil à son rayon de courbure. Elle n'est inférieure à la limite élastique que si ce rapport est très petit. Autrement dit, le fil doit être *très mince* ou *presque rectiligne*. La seconde hypothèse est à rejeter, en raison même des conditions d'emploi du flexible. Quant à la première, elle nécessite que le *couple de torsion* N soit *très petit*, si l'on veut éviter la rupture par cisaillement.

Supposons par exemple que le fil soit en acier et prenons $E = 25\,000$. Imposons-nous que la fatigue due à M ne dépasse pas 50 kg/mm^2 . Si R est le *rayon de courbure minimum* du flexible, le rayon du fil doit être $\frac{R}{1\,000}$. Si l'on veut que la fatigue au cisaillement ne dépasse pas 30^{kg} , N ne doit pas dépasser $15\pi R^3 \cdot 10^{-9} \text{ kg/mm}$. Si $R = 10^{\text{cm}}$, le maximum de N serait $0,015\pi$, soit environ $0,05 \text{ kg/mm}$. Pour $R = 10^{\text{mm}}$, le couple maximum serait 1000 fois plus petit, soit environ $0,05 \text{ gr/mm}$; il serait *extrêmement faible*.

Dans la pratique, on remédie à cet inconvénient en remplaçant le fil unique par un *câble constitué par plusieurs fils très minces*, donc très flexibles. La théorie exacte d'un tel câble ne paraît pas abordable. Mais on peut admettre que, pour un rayon donné du câble, la flexibilité est considérablement augmentée, sans que soit diminuée sensiblement la résistance au cisaillement. Tout se passe à peu près comme si le rapport $\frac{E}{G}$ devenait très petit.

Passons à la limite et supposons $E = 0$. Nous obtenons un *fil parfait en ce qui concerne la flexion*, mais *élastique en ce qui concerne la torsion* ⁽¹⁾. Nous avons alors

$$(54) \quad L = M = 0, \quad N = 2GA\varphi'_0.$$

31. Revenons maintenant au calcul du n° 7. On a cette fois ⁽²⁾

$$\gamma_x = -\omega^2 x, \quad \gamma_y = -\omega^2 y, \quad \gamma_z = 0, \quad h = 1 + py - qx.$$

On en déduit

$$X_v = -\rho\omega^2 Aq, \quad Y_v = \rho\omega^2 Ap, \quad Z_v = L_v = M_v = N_v = 0.$$

Les équations (7) nous donnent ensuite ⁽³⁾

$$(55) \quad X = pN, \quad Y = qN, \quad \frac{\partial N}{\partial s} = 0.$$

Les équations (6) deviennent

$$(56) \quad \frac{\partial X}{\partial s} + qH - rY = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial s} + rX - pH = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = 0, \quad H = Z - \rho A\omega^2.$$

La troisième équation (55) nous montre que *le couple de torsion a la même valeur tout du long du fil*. Cette valeur est déterminée par les couples moteur et

⁽¹⁾ Bien entendu, cette théorie n'a aucune prétention à la rigueur mathématique.

⁽²⁾ Les termes $-\omega^2 x$ et $-\omega^2 y$ avaient été négligés au n° 7, parce que $r_1 = \omega$ était très petit, ce qui n'est pas le cas actuellement.

⁽³⁾ Il faut y remplacer q_0 et r_0 par q et r ; de plus, il faut ajouter le terme $-pN$ au premier membre de la seconde équation. De même, il faut compléter les deuxième et troisième équations (6) par les termes respectifs $-pZ$ et pY .

résistant exercés aux extrémités. En se reportant à (54), on voit que $\nu'_0 = \text{const.}$, comme dans le problème classique de la torsion d'un cylindre.

En tenant compte de (55) et (53), les équations (56) deviennent

$$Nq'_0 \sin \nu + [H - N(r_0 + \nu'_0)]q_0 \cos \nu = 0,$$

$$Nq'_0 \cos \nu - [H - N(r_0 + \nu'_0)]q_0 \sin \nu = 0;$$

d'où

$$q'_0 = 0, \quad Z - \rho A \omega^2 = N(r_0 + \nu'_0).$$

Comme Z , ω , N , ν'_0 sont des constantes, il en est de même de r_0 . Comme $q'_0 = 0$, $q_0 = \text{const.}$ On en conclut que *si le flexible est libre entre ses deux extrémités, il a nécessairement la forme d'une hélice circulaire.*

32. Dans la pratique, *il doit pouvoir prendre une forme quelconque.* Ce résultat ne peut être atteint qu'en exerçant des forces sur la surface latérale. D'où la *nécessité de la gaine*, dont les réactions sur le flexible constituent les forces latérales ci-dessus. Ces réactions sont à peu près normales à la surface latérale du fil, grâce à une *lubrification intérieure* de la gaine. Aux premiers membres des première et deuxième équations (6) et (7), on doit alors ajouter les termes ⁽¹⁾ X_Σ , Y_Σ , L_Σ , M_Σ représentant les quotients par ds des composantes transversales de la somme géométrique et du moment résultant des réactions appliquées à la tranche (ds) du fil.

Ces quatre termes sont déterminés par les équations qui les contiennent, dès que l'on se donne q_0 et r_0 , c'est-à-dire la forme du fil.

Si le frottement n'est pas négligeable, il faut ajouter au premier membre de la troisième équation (58) un terme N_Σ représentant le couple de frottement s'exerçant sur l'unité de longueur du fil. Ce couple est négatif, si $\omega > 0$. Si l'on appelle N_1 le couple moteur et N_0 le couple résistant (pris en valeur absolue), on a

$$N_1 - N_0 = \int_0^{s_1} -N_\Sigma ds > 0.$$

Le couple moteur surpasse le couple résistant d'une quantité d'autant plus grande, pour un coefficient de frottement donné, que le fil est plus long. La lubrification doit donc être d'autant plus abondante que le flexible est plus long. Ce résultat, tout intuitif, est bien confirmé par l'expérience.

Signalons aussi que l'hypothèse de la flexibilité parfaite n'est pratiquement réalisée que si le diamètre du fil est petit vis-à-vis du rayon de courbure de la fibre neutre. Il faut donc éviter que ce rayon devienne trop petit; autrement dit, il faut *éviter les coudes*. Il y a d'ailleurs une autre raison qui s'ajoute à la précédente. C'est que la réaction normale de la gaine augmente avec la courbure.

(1) *Loc. cit.*, n° 9.

Il s'ensuit que *chaque coude* augmente notablement l'intégrale ci-dessus et par conséquent *accroît l'influence du frottement*.

33. *Flexible coulissant*. — Dans ce cas, le fil *glisse longitudinalement* sur lui-même. Pratiquement, le mouvement est assez lent pour qu'on puisse négliger les forces d'inertie. On est alors ramené à un simple problème de Statique.

Si le fil est *libre* et si son poids est négligeable devant les tractions exercées à ses deux extrémités, il doit être *rectiligne*. Si l'on veut qu'il puisse prendre une forme quelconque, il faut encore l'enfermer dans une *gaine*. Dans ce cas, $N_{\Sigma} = 0$; mais, il faut ajouter le terme Z_{Σ} au premier membre de la troisième équation (56). Si l'on appelle Z_1 et Z_0 les tractions exercées aux extrémités, on a

$$Z_1 - Z_0 = \int_0^{s_1} -Z_{\Sigma} ds.$$

On a des *conclusions analogues* à celles du numéro précédent.

CHAPITRE IV.

LE FIL ÉLASTIQUE RECTILIGNE.

34. *Vibrations torsionnelles du fil cylindrique*. — Les vibrations des fils cylindriques (ou *verges*) sont classiques. Nous en rappellerons néanmoins rapidement les résultats, parce que nous les retrouverons comme cas limites au Chapitre VI.

Dans le cas des vibrations torsionnelles, l'équation (20) nous donne, avec la notation (25),

$$H = a \cos ms + b \sin ms, \quad m^2 = \frac{\rho(A+B)}{GIS} \omega^2.$$

Les conditions aux limites sont de la forme $\varepsilon v + \varepsilon' N = 0$ ou $\varepsilon H + \varepsilon' H' = 0$. On a donc, en appelant s_1 la longueur du fil et affectant les ε de l'indice 0 pour $s = 0$ et de l'indice 1 pour $s = s_1$,

$$\varepsilon_0 a + \varepsilon'_0 m b = 0, \quad a(\varepsilon_1 \cos ms_1 - \varepsilon'_1 m \sin ms_1) + b(\varepsilon_1 \sin ms_1 + \varepsilon'_1 m \cos ms_1) = 0.$$

D'où l'équation de résonance

$$m(\varepsilon_0 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_0 \varepsilon_1) \cos ms_1 + (\varepsilon_0 \varepsilon_1 + m^2 \varepsilon'_0 \varepsilon'_1) \sin ms_1 = 0.$$

On a les trois combinaisons suivantes :

- A. $\varepsilon'_0 = 0, \quad \varepsilon'_1 = 0$ (double encastrement); $ms_1 = \lambda\pi, \quad \lambda$ entier;
- B. $\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0$ (extrémités libres); $ms_1 = \lambda\pi$;
- C. $\varepsilon'_0 = 0, \quad \varepsilon_1 = 0$ (un encastrement, une extrémité libre); $ms_1 = (2\lambda + 1) \frac{\pi}{2}$.

35. *Vibrations longitudinales du fil cylindrique.* — L'équation (22) nous donne des résultats analogues aux précédents, H étant remplacé par W et m^2 par $\frac{\rho\omega^2}{ES}$.

36. *Vibrations transversales du fil cylindrique.* — La première équation (21) nous donne

$$V''' - m^2 V = 0, \quad m^2 = \frac{\rho\omega^2}{EA}.$$

D'où

$$V = a \cos ms + b \sin ms + a' \operatorname{ch} ms + b' \operatorname{sh} ms.$$

Les conditions aux limites sont

$$\varepsilon v + \varepsilon' Y = 0, \quad \varepsilon_1 \lambda + \varepsilon'_1 L = 0$$

ou, d'après (7), (8) et (2),

$$\varepsilon V + \varepsilon' V''' = 0, \quad \varepsilon_1 V' + \varepsilon'_1 V'' = 0.$$

Pour chaque extrémité, nous avons les quatre espèces suivantes de liaisons

- | | | |
|----|---|--------------------|
| A. | $\varepsilon' = \varepsilon'_1 = 0$, encastrement complet; | $V = V' = 0$; |
| B. | $\varepsilon' = \varepsilon_1 = 0$, pivotement; | $V = V'' = 0$; |
| C. | $\varepsilon = \varepsilon'_1 = 0$, translation; | $V''' = V' = 0$; |
| D. | $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$, liberté complète; | $V''' = V'' = 0$. |

Il en résulte six combinaisons distinctes, pour chacune desquelles l'élimination des constantes a, b, a', b' est très facile. On obtient ainsi les équations suivantes, où l'on a posé $ms_1 = x$:

- | | |
|---------|--|
| AA, DD. | $\cos x \operatorname{ch} x = 1$; |
| AD. | $\cos x \operatorname{ch} x = -1$; |
| AB, BD. | $\operatorname{tg} x = \operatorname{th} x$; |
| AC, CD. | $\operatorname{tg} x = -\operatorname{th} x$; |
| BC. | $x = (2\lambda + 1) \frac{\pi}{2}$; |
| BB, CC. | $x = \lambda\pi$. |

Signalons que les équations de la première ligne se décomposent respectivement en

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \pm \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \text{et} \quad \operatorname{th} \frac{x}{2} = \pm \cot \frac{x}{2}.$$

Toutes ces équations admettent une infinité de racines positives (Cf. *Jahnke und Emde, Funktionentafeln*, p. 3).

37. *Vibrations longitudinales et torsionnelles de la torsade.* — Les vibrations *longitudinales* sont les mêmes que pour le fil cylindrique (n° 14). On a

$$(57) \quad W = a \cos ms + b \sin ms, \quad m^2 = \frac{\rho \omega^2}{ES}.$$

Quant aux vibrations *torsionnelles*, l'équation (23) nous donne

$$H'' + m'^2 H = -\lambda r W'',$$

avec

$$\lambda = \frac{I'}{I} = 2(1+k) \frac{A+B}{I} - 1 - 2k \geq 1, \quad m'^2 = \frac{\rho(A+B)}{GIS} \omega^2.$$

D'où

$$(58) \quad H = a' \cos m's + b' \sin m's + \mu W, \quad \mu = \frac{\lambda r m^2}{m'^2 - m^2}.$$

Signalons tout de suite que $m'^2 - m^2$ est toujours > 0 , car $A+B \geq I$ et $G < E$. Donc, μ est fini.

Les conditions aux limites sont $\varepsilon W + \varepsilon' Z = 0$, $\varepsilon_1 v + \varepsilon'_1 N = 0$ ou

$$(59) \quad \varepsilon W + \varepsilon' W' = 0, \quad \varepsilon_1 H + \varepsilon'_1 H' = 0.$$

La première équation est la même que pour le cylindre. Si ω n'est pas une des pulsations de résonance déterminées au n° 35, on a nécessairement $a = b = 0$, $W = 0$. En portant (58) dans la deuxième équation (59), on obtient des formules analogues à celles du n° 35, m étant simplement remplacé par m' . Dans ce cas, on a une *vibration torsionnelle pure*.

Si ω est une des pulsations de résonance du n° 35, la fonction W n'est pas nulle; elle est déterminée à un facteur constant près. La deuxième équation (59) permet ensuite le calcul de a' , b' , si ω n'est pas en même temps une pulsation des vibrations torsionnelles pures. On a, dans ce cas, la *superposition d'une vibration longitudinale et d'une vibration torsionnelle*, ayant la fréquence des vibrations longitudinales du cylindre et déterminées à un facteur constant près.

Il peut arriver que ω soit simultanément une pulsation des vibrations longitudinales et des vibrations torsionnelles (1). Dans ce cas, le système déterminant a' et b' est incompatible ou indéterminé. Si le déterminant caractéristique n'est pas nul, il faut prendre $W = 0$ et l'on retombe sur la vibration torsionnelle pure. S'il est nul, on a la superposition des deux vibrations, mais avec deux constantes arbitraires au lieu d'une.

Il est facile de former un tableau analogue à celui du n° 36, et donnant, pour chacune des dix combinaisons possibles, les valeurs de m et de m' .

(1) Ceci exige que le rapport $\frac{E(A+B)}{GI}$ soit le carré d'un nombre commensurable.

38. *Vibrations transversales de la torsade.* — Les équations (24) nous donnent un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants en U et V ; chacune de ces équations est du quatrième ordre. Si l'on cherche une solution en e^{ms} , on obtient une équation caractéristique du quatrième degré en m^2 . Connaissant ses quatre racines, on peut écrire l'intégrale générale, qui contient huit constantes arbitraires. En éliminant ces constantes entre les huit conditions aux limites, on obtient l'équation de résonance sous une forme compliquée. Nous n'insistons pas davantage sur cette question, en raison de son faible intérêt pratique.

CHAPITRE V.

LE FIL ÉLASTIQUE CIRCULAIRE.

39. *Vibrations planes.* — Reprenons les équations (E_3) , (E_4) du n° 12, mais en supposant R et q constants. A la variable s , substituons l'angle polaire θ défini par $s = R\theta$. L'équation (E_4) devient

$$(60) \quad u = \frac{\partial w}{\partial \theta}.$$

Portant dans (E_3) , nous obtenons

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EB} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = 0.$$

Si l'on pose $w = W \sin \omega t$, on a l'équation différentielle

$$(61) \quad W^{(6)} + 2 W^{(4)} + W'' + \frac{\rho R^4 \omega^2}{EB} (W - W'') = 0;$$

dont l'intégrale générale est

$$(62) \quad W = a \operatorname{ch} m \theta + b \operatorname{sh} m \theta + a' \operatorname{ch} m' \theta + b' \operatorname{sh} m' \theta + a'' \operatorname{ch} m'' \theta + b'' \operatorname{sh} m'' \theta,$$

a, b, \dots, b'' désignant des constantes arbitraires et m^2, m'^2, m''^2 les racines de l'équation

$$(63) \quad y(x-1) = x(x+1)^2,$$

en posant

$$(64) \quad y = \frac{\rho R^4 \omega^2}{EB}.$$

La courbe représentée par l'équation (64) a la forme ci-contre. Elle nous montre que pour $y < 0,1135$, m, m', m'' sont des imaginaires pures; pour $0,1135 < y < 17,64$, m est imaginaire pure, m' et m'' sont de la forme $\alpha \pm i\beta$; pour $17,64 < y$, m est imaginaire pure, m' et m'' sont réels.

Connaissant W , on a $U = W'$. Puis, par les formules (2), (17), (19) et (18),

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{W'' + W}{R} \sin \omega t, & M &= \frac{EB}{R^2} (W''' + W') \sin \omega t, & X &= -\frac{EB}{R^3} (W''' + W'') \sin \omega t, \\ Z &= \frac{EB}{R^3} [W^{(5)} + W''' - \gamma W'] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Les équations de liaison (30) deviennent

$$(65) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 W' + \varepsilon'_1 (W''' + W'') = 0, & \varepsilon_3 W + \varepsilon'_3 [W^{(5)} + W''' - \gamma W'] = 0, \\ \varepsilon_5 (W'' + W) + \varepsilon'_5 (W''' + W') = 0. \end{cases}$$

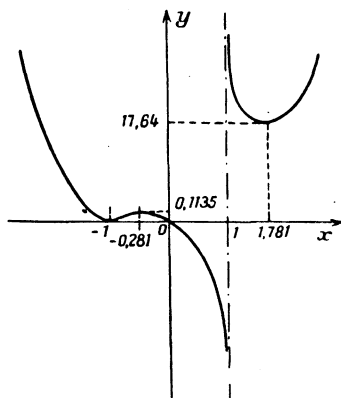


Fig. 1.

Elles sont de la forme

$$(66) \quad \sum_{j=0}^5 a_{ij} W^{(j)} = 0; \quad i = 1, 2, 3.$$

Dans chacune d'elles, tous les j ont même parité et nous dirons que *la liaison est paire ou impaire* suivant que les j sont tous pairs ou tous impairs. Convenons en outre d'appeler a_{ij} les coefficients correspondant à l'extrémité $\theta = 0$ et b_{ij} ceux qui correspondent à l'extrémité $\theta = \theta_1$. Posons

$$(67) \quad \sum_j a_{ij} m^j = \alpha_i, \quad \sum_j b_{ij} m^j = \beta_i$$

et

$$(68) \quad f = \operatorname{ch} m \theta_1, \quad g = \operatorname{sh} m \theta_1.$$

Nos équations de liaison deviennent

$$(69) \quad \begin{cases} a \alpha_i + a' \alpha'_i + a'' \alpha''_i = 0, & \text{liaison paire;} \\ b \alpha_i + b' \alpha'_i + b'' \alpha''_i = 0, & \text{liaison impaire;} \end{cases}$$

$$(70) \quad \begin{cases} \beta_i (af + bg) + \beta'_i (a'f' + b'g') + \beta''_i (a''f'' + b''g'') = 0, & \text{liaison paire;} \\ \beta_i (ag + bf) + \beta'_i (a'g' + b'f') + \beta''_i (a''g'' + b''f'') = 0, & \text{liaison impaire.} \end{cases}$$

Convenons d'écrire en premier lieu, dans chaque groupe, les liaisons de même parité.

Le déterminant $D(\omega)$ se présente sous différentes formes, selon la parité des liaisons à chaque extrémité. Remarquons d'ailleurs que l'on peut toujours intervertir les deux extrémités et, par conséquent, choisir arbitrairement celle qui correspond à $s = 0$.

Dans tous les cas, chacune des trois premières lignes du déterminant comprend trois éléments nuls, tandis que les éléments des trois dernières lignes sont tous non nuls. Dès lors, nous développerons $D(\omega)$ par la règle de Laplace. Appelons D_{ijk} le déterminant constitué par les éléments appartenant aux trois premières lignes et aux colonnes de rangs i, j, k ; appelons Δ_{ijk} le déterminant complémentaire, c'est-à-dire constitué par les éléments appartenant aux trois dernières lignes et aux colonnes dont les rangs sont différents de i, j, k . On a

$$(71) \quad D(\omega) = \Sigma (-1)^{i+j+k} D_{ijk} \Delta_{ijk}.$$

Cela posé, passons en revue les différents cas.

40. Convenons d'appeler cas C_{pq} tout cas pour lequel il y a p liaisons paires à la première extrémité ($\theta = 0$) et q liaisons paires à l'autre extrémité ($\theta = \theta_1$). D'après une remarque faite plus haut, nous pouvons supposer $p \geq q$.

Le cas $C_{3-p, 3-q}$ se déduit de C_{pq} en intervertissant les lettres a et b dans les équations (69) et (70), ce qui ne change pas $D(\omega)$. Le cas $C_{p, 3-q}$ se déduit de C_{pq} en intervertissant les lettres f et g dans (70), donc aussi dans $D(\omega)$. Il résulte de ces remarques que nous pouvons, dans la discussion qui va suivre, ne donner à p et q que les valeurs 3 et 2.

Nous poserons

$$\gamma = \alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha''_1 \alpha'_2, \quad \delta = \beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2$$

et les formules déduites de celles-ci par permutation circulaire des accents. Convenons de désigner par le symbole Σ une somme obtenue par cette permutation circulaire.

Cas C_{33} . — On a immédiatement

$$D(\omega) = ABgg'g'', \quad A = \|\alpha_i \quad \alpha'_i \quad \alpha''_i\|, \quad B = \|\beta_i \quad \beta'_i \quad \beta''_i\|.$$

On en déduit que les pulsations de résonance sont données par les formules

$$(72) \quad im\theta_1 = \lambda\pi, \quad im'\theta_1 = \lambda'\pi, \quad im''\theta_1 = \lambda''\pi,$$

où $\lambda, \lambda', \lambda''$ désignent des nombres entiers réels arbitraires.

On a les mêmes formules pour le cas C_{00} . Dans le cas C_{30} , il suffit d'intervertir f et g , ce qui donne

$$(73) \quad im\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi, \quad im'\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \lambda'\pi, \quad im''\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \lambda''\pi.$$

CAS C_{32} . — On a

$$(74) \quad D(\omega) = A(\Sigma \beta \delta f g' g'').$$

L'équation de résonance s'obtient en annulant la parenthèse.

Dans le cas C_{31} , il suffit de permuter f et g . Les cas C_{01} et C_{02} donnent la même équation que C_{32} et C_{31} .

CAS C_{22} . — On a

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \\ \beta_1 f & \beta'_1 f' & \beta''_1 f'' & \beta_1 g & \beta'_1 g' & \beta''_1 g'' \\ \beta_2 f & \beta'_2 f' & \beta''_2 f'' & \beta_2 g & \beta'_2 g' & \beta''_2 g'' \\ \beta_3 f & \beta'_3 f' & \beta''_3 f'' & \beta_3 g & \beta'_3 g' & \beta''_3 g'' \end{vmatrix}.$$

On calcule facilement les D_{ijk} et Δ_{ijk} et l'on obtient finalement

$$(75) \quad D(\omega) = \Sigma g(\alpha'_3 \beta''_3 \gamma'' \delta' + \alpha''_3 \beta'_3 \gamma' \delta'') - \Sigma g f' f'' (\alpha'_3 \beta''_3 \gamma' \delta'' + \alpha''_3 \beta'_3 \gamma'' \delta') - g g' g'' (\Sigma \alpha_3 \beta_3 \gamma \delta).$$

Si l'on considère les f, g, \dots comme des variables indépendantes, la première somme doit être remplacée par

$$\Sigma g [\alpha'_3 \beta''_3 \gamma'' \delta' (f'^2 - g'^2) + \alpha''_3 \beta'_3 \gamma' \delta'' (f'^2 - g'^2)].$$

Le cas C_{11} donne le même $D(\omega)$ que C_{22} .

Dans le cas C_{21} , on doit permuter f et g dans l'expression homogène en f, g, \dots, g'' . Ceci revient à faire la même permutation dans (75), mais en changeant le signe de la première somme.

41. On peut calculer les *coefficients des mouvements entretenus*. Il suffit en effet de remplacer les seconds membres des équations (69) et (70) par des constantes données c_i et d_i , puis de résoudre le système par rapport à a, a', a'', b, b', b'' . Cela revient à calculer les mineurs du déterminant $D(\omega)$. Le mineur correspondant à l'élément α_i se déduit de $D(\omega)$ en y remplaçant α_i par un et α'_i, α''_i par zéro. Les mineurs correspondant aux éléments $\beta_i f$ ou $\beta_i g$ s'obtiennent en remplaçant β_i par un et β'_i, β''_i par zéro, puis prenant le coefficient de f ou le coefficient de g . Toutefois, cette dernière opération n'est justifiée que si l'on considère f, g, \dots, g'' comme des variables indépendantes. Par conséquent, dans le cas où $D(\omega)$ a la forme (75), il faut utiliser l'expression homogène indiquée au n° 40. Par exemple, les mineurs correspondant aux éléments $\beta_3 f$ et $\beta_3 g$ sont respectivement

$$\gamma f (\alpha''_3 \delta'' g' + \alpha'_3 \delta' g'') - \delta (\alpha''_3 \gamma'' g' f'' + \alpha'_3 \gamma' g'' f') \quad \text{et} \quad -\gamma (\Sigma \alpha_3 \delta g' g'').$$

42. *Vibrations latérales.* — Les équations (E_1) , (E_2) du n° 12 deviennent

$$\begin{aligned} \text{GIR} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (EA + \text{GI}) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - EA R v &= 0, \\ EA \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - R \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - R v \right) + \rho R^4 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$(76) \quad (EA + \text{GI}) R v = \text{GI} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + (EA + 2 \text{GI}) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \rho \frac{\text{GI}}{EA} R^4 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

$$(77) \quad \frac{\partial^6 v}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EA} \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{\rho R^4}{\text{GI}} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Si l'on pose $v = V \sin \omega t$, on a l'équation différentielle

$$V^{(6)} + 2 V^{(4)} + V'' + \frac{\rho R^4 \omega^2}{EA} (k V - V'') = 0,$$

avec

$$(78) \quad k = \frac{EA}{\text{GI}}.$$

L'intégrale générale de cette équation est de la forme (62); mais, l'équation (63) est remplacée par

$$(79) \quad y(x - k) = x(x + 1)^2,$$

avec

$$(80) \quad y = \frac{\rho R^4 \omega^2}{EA}.$$

La courbe représentée par (79) a même allure que celle du n° 39. Les seules différences sont que l'asymptote a pour équation $x = k$ et que les racines de y' autres que -1 sont données par l'équation

$$2x^2 - 3kx - k = 0.$$

En ce qui concerne la réalité de m , m' , m'' , on a des conclusions analogues à celles du n° 39; la seule différence est que les valeurs limites de y dépendent de k .

Connaissant V , on a, d'après (76), (2), (17) et (19),

$$\begin{aligned} Rv &= \frac{V''' + (2 + k)V'' - yV}{1 + k} \sin \omega t, & R\lambda &= -V' \sin \omega t, \\ L &= \frac{EA}{(1 + k)R^2} (V''' + V'' - yV) \sin \omega t, \\ N &= \frac{\text{GI}}{(1 + k)R^2} [V^{(5)} + (2 + k)V''' + (1 + k - y)V'] \sin \omega t, \\ Y &= \frac{\text{GI}}{R^3} [V^{(5)} + 2V''' + V'(1 - y)] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Les équations de liaison (30) deviennent

$$(81) \quad \begin{cases} \varepsilon_2 V + \varepsilon'_2 [V^{(5)} + 2V''' + V'(1 - \gamma)] = 0, \\ \varepsilon_4 V' + \varepsilon'_4 (V''' + V'' - \gamma V) = 0, \\ \varepsilon_6 [V^{(4)} + (2 + k)V'' - \gamma V] + \varepsilon'_6 [V^{(5)} + (2 + k)V''' + (1 + k - \gamma)V'] = 0. \end{cases}$$

Elles sont encore de la forme (66) et l'on continue comme dans le cas des vibrations planes.

43. *Tableau des liaisons.* — Pour chaque extrémité, on peut avoir une des liaisons ci-après. Dans ce tableau, nous indiquons les équations de liaison, avec leur interprétation concrète et leur expression par la fonction W ou V . Nous indiquons ensuite ⁽¹⁾ les expressions de $\alpha = \alpha_3$ et de γ . Lorsque α , α' , α'' ont un facteur commun, nous l'avons supprimé, car cela ne change pas l'équation de résonance. Nous avons fait de même pour γ . Nous avons posé $m^2 = x$, comme aux n^{os} 39 et 42. Enfin, nous avons quelquefois simplifié l'expression de α ou de γ , en tenant compte de (63) ou (79).

Vibrations planes.

- A. $u = v = \mu = 0$; encastrement complet; $W = W'' = W' = 0$; m ; $x'' - x'$.
- B. $X = v = \mu = 0$; translation suivant Ox ; $W = W'' = W''' = 0$.
- C. $u = Z = \mu = 0$; translation suivant Oz ; $W' = W''' + W^{(5)} = W + W'' = 0$;
 $1 + x$; $m' m'' (1 + x) (x' - x'')$.
- D. $u = v = M = 0$; rotation autour de Oy ; $W' = W''' = W = 0$; 1 ;
 $m' m'' (x'' - x')$.
- E. $u = Z = M = 0$; translation suivant Oz et rotation autour de Oy ;
 $W' = W''' = W^{(5)} = 0$.
- F. $X = v = M = 0$; translation suivant Ox et rotation autour de Oy ;
 $W = W'' + W''' = W' + W'' = 0$; $m(1 + x)$; $(1 + x)(x' - x'')$.
- G. $X = Z = \mu = 0$; translation arbitraire dans πOx ;
 $W + W'' = W'' + W''' = W''' + W^{(5)} - \gamma W' = 0$; $m(x + x^2 - \gamma)$ ou $\frac{mx(1 + x)}{1 - x}$;
 $(1 + x')(1 + x'')(x' - x'')$.
- H. $X = Z = M = 0$; liberté; $W' + W''' = W''' + W^{(5)} - \gamma W' = W'' + W''' = 0$;
 $x(1 + x)$; $m' m'' (1 + x - x' x'' - \gamma)(x' - x'') = m' m'' [(1 + x')(1 + x'') + \gamma](x'' - x')$.

Vibrations latérales.

- A. $\nu = \lambda = \nu = 0$; encastrement complet; $V = (2 + k)V'' + V''' = V' = 0$;
 m ; $(k - x)(x'' - x')$.
- B. $\nu = L = \nu = 0$; rotation autour de Ox ; $V = V'' = V''' = 0$.

(1) Sauf pour les liaisons B et E, pour lesquelles ces expressions sont inutiles.

- C. $Y = \lambda = \nu = 0$; translation suivant Oy ;
 $V' = 2V''' + V^{(5)} = -\gamma V + (2+k)V'' + V'''' = 0$;
 $-\gamma + (2+k)x + x^2$ ou $\frac{x}{x-k}$; $m(x'' - x')$.
- D. $\nu = \lambda = N = 0$; rotation autour de Oz ; $V' = (2+k)V''' + V^{(5)} = V = 0$; 1;
 $m' m'' (k-x)(x'' - x')$.
- E. $Y = \lambda = N = 0$; translation suivant Oy et rotation autour de Oz ;
 $V' = V''' = V^{(5)} = 0$.
- F. $Y = L = \nu = 0$; translation suivant Oy et rotation autour de Ox ;
 $V'' = \gamma V - V'''' = (1-\gamma)V' + 2V''' + V^{(5)} = 0$; $\frac{1}{m}$; $(\gamma + x'x'')(x' - x'')$.
- G. $\nu = L = N = 0$; pivotement autour de O ;
 $V = V'' + V'''' = (1+k-\gamma)V' + (2+k)V''' + V^{(5)} = 0$; $\frac{m(x+1)}{k-x}$;
 $(1+x)(x' - x'')$.
- H. $Y = L = N = 0$; liberté; $V' + V''' = (1+\gamma)V'' + V^{(5)} = -\gamma V + V'' + V'''' = 0$;
 $x(1+x) - \gamma$; $m(1+x)(x'' - x')$.

On en déduit les 36 combinaisons suivantes, rangées suivant les catégories indiquées au n° 40 :

$$\begin{aligned} C_{22} : BB; \quad C_{00} : EE; \quad C_{30} : BE; \\ C_{32} : BA, BF, BG; \quad C_{31} : BC, BD, BH; \quad C_{01} : EC, ED, EH; \quad C_{02} : EA, EF, EG; \\ C_{21} : AC, AD, AH, FC, FD, FH, GC, GD, GH. \end{aligned}$$

En utilisant les formules du n° 40 et les tableaux ci-dessus, on peut immédiatement écrire l'équation de résonance correspondant à chacun de ces cas. Nous nous occuperons de sa résolution au Chapitre suivant.

44. *Ressort hélicoïdal.* — Dans ce cas, q et r sont des constantes quelconques. Les équations (E_1) , (E_2) , (E_3) , (E_4) du n° 11 sont des équations linéaires à coefficients constants. En cherchant les *solutions stationnaires*, on est conduit à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce système est du douzième ordre et son équation caractéristique se ramène à une équation du sixième degré. On pourrait, en principe, former l'équation de résonance par une méthode analogue à celle que nous venons d'employer pour le fil circulaire. Mais, les calculs seraient extrêmement compliqués.

Si, comme il arrive généralement dans la pratique, le ressort est à *spires très aplaties*, r est très petit vis-à-vis de q et l'on peut approximativement assimiler le ressort à un fil circulaire et lui appliquer les résultats précédemment obtenus dans le présent chapitre.

Signalons en particulier le cas du *ressort de soupape* d'un moteur à explosion. Le ressort est fortement comprimé entre une cuvette fixe et une cuvette mobile animée d'une translation alternative suivant l'axe du ressort. Il est vraisemblable d'admettre que le frottement s'oppose à toute rotation de chaque extré-

mité autour de la tangente Oz ou autour de l'axe du ressort. On a dès lors la liaison A dans chaque cuvette. On se trouve donc dans le cas AA des vibrations latérales.

45. *Spiral*. — Dans le cas du *spiral de montre*, on a un *fil plan*, dont le rayon de courbure est approximativement de la forme $R = R_0 - h\theta$, h désignant une constante très petite vis-à-vis de R et θ l'angle polaire de la normale.

On peut former l'équation différentielle linéaire du sixième ordre qui détermine les vibrations planes ou latérales. Mais, cette équation ne s'intègre pas par les méthodes élémentaires. En tenant compte du fait que h est petit vis-à-vis de R , on pourrait calculer l'intégrale générale sous la forme d'une série entière en h , qui convergerait rapidement. Mais, l'équation de résonance, déjà compliquée pour $h = 0$, serait inextricable. Le seul moyen pratique pour obtenir approximativement les pulsations de résonance consiste à *remplacer le spiral par un fil circulaire, dont le rayon est la moyenne arithmétique des rayons extrêmes*. Il resterait à voir quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise; cela paraît difficile.

La même méthode peut s'appliquer au *ressort conique* à spires très aplaties et de faible pas radial.

Dans le cas du *spiral de montre*, on peut se poser le problème suivant. Imaginons que *la montre soit soumise à un mouvement vibratoire sinusoïdal* et que, pour simplifier, nous supposons réduit à une translation. Proposons-nous de calculer les pulsations de résonance.

Chacune des deux extrémités du spiral est animée du mouvement vibratoire de la montre. En outre, l'extrémité encastrée dans le balancier est animée du mouvement de rotation de ce dernier autour de son axe, lequel est très sensiblement sinusoïdal, mais de grande amplitude. Comme nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les vibrations sont très petites, il ne semble pas qu'on puisse appliquer notre théorie aux oscillations du balancier, à moins de s'en tenir au cas de très petites oscillations.

En appliquant le principe de la superposition des petits mouvements, on peut alors décomposer le problème en *trois problèmes simples* :

- I. *Oscillations du balancier, montre au repos;*
- II. *Vibration de la montre parallèlement au plan du spiral, balancier calé;*
- III. *Vibration de la montre perpendiculairement au plan du spiral, balancier calé.*

On a une vibration plané dans les deux premiers problèmes, latérale dans le troisième. L'équation de résonance est chaque fois donnée par le cas AA.

Nous verrons, au chapitre suivant, que *la plus basse fréquence de résonance est très supérieure à celle du balancier*. Comme le mouvement de ce dernier est

pratiquement dénué d'harmoniques, *la résonance est impossible dans le problème I*. Mais, elle est possible dans les deux autres problèmes, si la fréquence des vibrations de la montre est convenablement choisie.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE RÉSONANCE DU FIL ÉLASTIQUE CIRCULAIRE.

46. *Méthode générale.* — Étant donné la valeur numérique de γ dans le cas des vibrations planes, ou les valeurs numériques de γ et de k dans le cas des vibrations latérales, on peut se proposer de calculer les valeurs de θ qui annulent $D(\omega)$. La seule méthode pratique pour atteindre ce but nous paraît être la méthode rudimentaire qui consiste à faire des substitutions convenablement échelonnées, de manière à séparer les racines; puis à resserrer chaque intervalle jusqu'à ce que la méthode des parties proportionnelles donne une approximation suffisante.

On peut montrer facilement que, dans chacun des 36 cas énumérés au n° 43, il existe une infinité de racines en θ . On en déduit ensuite que, pour une valeur donnée de θ , il existe une *infinité de pulsations de résonance*.

Mais, les calculs numériques sont très longs et je me suis contenté de les faire dans le cas AA des vibrations planes. Les résultats de ce calcul seront donnés au n° 59.

Une autre méthode consiste à établir des *formules asymptotiques* permettant la résolution approchée de l'équation pour les valeurs de γ d'un certain domaine. Pour découvrir ce domaine, il y a lieu de chercher *quel est, dans la pratique, l'ordre de grandeur de γ .*

47. *Ordre de grandeur de γ .* — Considérons d'abord le cas des *vibrations planes*, de sorte que γ est donné par la formule (64). Adoptons pour unités le kilogramme-poids, le millimètre et la seconde. Si S est évalué en millimètres carrés et si d est la densité du fil par rapport à l'eau, on a

$$\rho = \frac{Sd}{9,81} \cdot 10^{-9}.$$

Appelons K le rayon de giration de la section droite par rapport à Oy . On a

$$\gamma = \frac{dR^2 \omega^2 \cdot 10^{-9}}{9,81 EK^2}.$$

Supposons par exemple un *ressort à boudin* à spires très aplaties (n° 44) et fabriqué avec du *fil rond* de rayon r , de sorte que $K = \frac{r}{2}$. Si le ressort est en

acier, le rapport $\frac{d}{E}$ est de l'ordre de $\frac{1}{3000}$. Donc, γ est de l'ordre de $\frac{R^3 \omega^2}{r^2} \cdot 10^{-13}$. Admettons que le rapport $\frac{R}{r}$ soit de l'ordre de 10; γ est alors de l'ordre de $r^2 \omega^2 \cdot 10^{-9}$. Supposons que r ne dépasse pas 5^{mm} et que la fréquence ne dépasse pas 100, de sorte que $\omega^2 < 4 \cdot 10^3$. Dans ces conditions, γ ne dépasse pas $\frac{1}{100}$.

Si le ressort est fabriqué avec du *fil plat* d'épaisseur e , on a $K^2 = \frac{e^2}{12}$.

Si l'on admet que le rapport $\frac{R}{e}$ est de l'ordre de 10, γ est trois fois plus grand que précédemment, donc de l'ordre de $\frac{3}{100}$.

On peut dès lors admettre que γ ne dépasse pas quelques centièmes. Bien entendu, cette hypothèse peut se trouver en défaut si la fréquence est très supérieure à 100 ou si le rayon du ressort est très supérieur à 10 fois l'épaisseur du fil qui le constitue. Il en est de même si le métal est très mou. Par exemple, si le ressort est en *bronze*, $\frac{d}{E}$ est de l'ordre de $\frac{1}{600}$, soit cinq fois plus grand que précédemment.

Dans le cas des *vibrations latérales*, γ est donné par la formule (80). Si l'on a du fil rond, rien n'est à changer dans les conclusions précédentes. Si l'on a du fil plat, $K^2 = \frac{h^2}{12}$ au lieu de $\frac{e^2}{12}$. Nos conclusions sont renforcées, car γ est réduit dans le rapport $\frac{e^2}{h^2}$.

Cette discussion nous montre que le cas particulier où γ est très petit présente un certain intérêt pratique. Nous allons donc en faire l'étude.

48. *Cas où γ est très petit.* — L'équation (63) étant un cas particulier de l'équation (79), obtenu pour $k = 1$, occupons-nous seulement de cette dernière. Posant $\gamma = 2\varepsilon^2$, elle s'écrit

$$x(x+1)^2 = 2\varepsilon^2(x-k).$$

Ses trois racines x , x' , x'' sont fonctions holomorphes de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$. Un calcul élémentaire donne, en posant

$$(82) \quad 2h = \sqrt{2(k+1)}, \quad h' = \sqrt{2k};$$

$$(83) \quad \begin{cases} x = -1 - 2h\varepsilon + k\varepsilon^2 - \frac{k(5k+4)}{4h}\varepsilon^3 + \dots, \\ x'' = -2k\varepsilon^2[1 + 2(2k+1)\varepsilon^2 + 4(7k^2+6k+1)\varepsilon^4 + \dots]; \end{cases}$$

x' se déduit de x en changeant ε en $-\varepsilon$.

Les fonctions x'' et $x+x' = -2-x''$ sont paires; $x-x'$ est impaire. On a ensuite

$$(84) \quad m = in, \quad m' = in', \quad m'' = in'';$$

$$(85) \quad n = p + q\varepsilon, \quad n' = p - q\varepsilon, \quad n'' = r\varepsilon;$$

p, q, r désignant trois fonctions *paires* :

$$(86) \quad p = 1 - p_1 \varepsilon^2 + \dots, \quad q = h(1 + q_1 \varepsilon^2 + \dots), \quad r = h'(1 + r_1 \varepsilon^2 + r_2 \varepsilon^4 + \dots);$$

$$(87) \quad p_1 = \frac{3k+1}{4}, \quad q_1 = \frac{8k^2+8k+1}{4(k+1)}, \quad r_1 = 2k+1, \quad r_2 = \frac{24k^2+20k+3}{2}, \dots$$

Dans le cas particulier $k = 1$, on a

$$(88) \quad \begin{cases} h = 1, & h' = \sqrt{2}, & x = -1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{9}{4}\varepsilon^3 + \dots, \\ x'' = -2\varepsilon^2(1 + 6\varepsilon^2 + 56\varepsilon^4 + \dots); \\ p_1 = 1, & q_1 = \frac{17}{8}, & r_1 = 3, & r_2 = \frac{47}{2}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant chercher à résoudre approximativement l'équation de résonance dans les différents cas énumérés au n° 40.

49. *Cas BB, EE, BE.* — Les formules (72) et (73) nous donnent les solutions *exactes*

$$\text{BB, EE.} \quad 0 = \frac{\lambda\pi}{n}, \quad \frac{\lambda'\pi}{n'}, \quad \frac{\lambda''\pi}{n''}.$$

$$\text{BE.} \quad 0 = \frac{2\lambda+1}{2n}\pi, \quad \frac{2\lambda'+1}{2n'}\pi, \quad \frac{2\lambda''+1}{2n''}\pi.$$

50. *Cas C₃₂, C₀₄, C₃₄, C₀₂.* — Posons

$$(89) \quad \varphi = \alpha\gamma, \quad \varphi' = \alpha'\gamma', \quad \varphi'' = \alpha''\gamma'',$$

les α, \dots, γ'' étant donnés par les tableaux du n° 43 et se rapportant à la seconde liaison. Posons ensuite

$$(90) \quad 2a = \varphi + \varphi', \quad 2b = \varphi - \varphi', \quad c = \varphi'';$$

$$(91) \quad \varepsilon\theta = x, \quad p\theta = u, \quad qx = v, \quad rx = w.$$

De l'équation (74), nous déduisons les suivantes :

Cas C₃₂ et C₀₄

$$(92) \quad \sin w(a \sin 2u - b \sin 2v) + c \cos w(\sin^2 u - \sin^2 v) = 0.$$

Cas C₃₄ et C₀₂

$$(93) \quad \cos w(a \sin 2u + b \sin 2v) + c \sin w(\cos^2 u - \sin^2 v) = 0.$$

51. *Cas* C_{22} , C_{11} , C_{21} . — Affectons de l'indice ϵ les quantités relatives à la deuxième liaison et posons

$$(94) \quad \begin{cases} 4A = \alpha' \gamma'' \alpha_1' \gamma_1'' + \alpha'' \gamma' \alpha_1' \gamma_1'' + \alpha'' \gamma \alpha_1 \gamma_1'' + \alpha \gamma'' \alpha_1'' \gamma_1, & 2B = ca_1 + ac_1, \\ 4A' = \alpha' \gamma'' \alpha_1' \gamma_1'' + \alpha'' \gamma' \alpha_1' \gamma_1'' - \alpha'' \gamma \alpha_1 \gamma_1'' - \alpha \gamma'' \alpha_1'' \gamma_1, & 2B' = cb_1 + bc_1, \\ 4C = 4aa_1 + cc_1, & 4C' = 4bb_1 + cc_1, & 4D = (\alpha_1 \alpha' - \alpha \alpha_1') (\gamma_1 \gamma' - \gamma \gamma_1'). \end{cases}$$

De (75), on déduit

Cas C_{22} et C_{11} . —

$$(95) \quad \sin u (A \cos v - B \cos u \cos v) \\ + \sin v (A' \cos u + B' \cos v \cos v) - \sin v (D - C \sin^2 u + C' \sin^2 v) = 0.$$

Cas C_{21} . —

$$(96) \quad \cos u (-A \cos v + B \sin u \sin v) \\ + \sin v (A' \sin u + B' \cos v \sin v) + \cos v (D - C \cos^2 u + C' \sin^2 v) = 0.$$

REMARQUES. — 1° Chacun des coefficients $a, b, c, A, A', B, B', C, C', D$ est une fonction paire ou impaire de ϵ .

2° Dans les *cas symétriques* AA, CC, ..., HH, on a $A = B, A' = -B', D = 0$.

3° Chaque coefficient est une fonction holomorphe de ϵ au voisinage de $\epsilon = 0$. Il peut donc être développé en série *convergente* suivant les puissances de ϵ . J'ai calculé le premier terme de chacun de ces développements ⁽¹⁾. Pour ne pas allonger ce Mémoire, je ne les reproduirai pas.

52. *Cas où θ reste fini quand ϵ tend vers zéro.* — En utilisant les parties principales des coefficients des équations (92), (93), (95) et (96), on obtient immédiatement l'équation limite.

On trouve d'abord ⁽²⁾, en affectant d'un accent les liaisons correspondant aux vibrations latérales,

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta = 0, & \quad \text{pour BF, EC, ED, CC, B'F', B'G', E'D', F'F';} \\ 1 - \cos \theta = 0, & \quad \text{pour DD, FF, D'D', G'G';} \\ (1 - \cos \theta)^2 = 0, & \quad \text{pour FD, D'G';} \\ \cos^2 \theta = 0, & \quad \text{pour BC, FC, E'F', D'F'.} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Dans les cas DF (vibrations planes) et DG (vibrations latérales), j'ai dû calculer deux termes pour trois des coefficients.

⁽²⁾ On peut trouver ces solutions *a priori*, en cherchant les mouvements stationnaires de fréquence nulle. Un tel mouvement est un *déplacement uniforme, sans déformation*, de vitesse infiniment petite. Il suffit de chercher, dans chaque cas, s'il existe un tel déplacement qui soit compatible avec les liaisons imposées aux deux extrémités du fil. On retrouve les cas énumérés ci-dessus. Mais, on en trouve d'autres, pour lesquels l'angle θ est indéterminé. Ces cas sont à rejeter. Dans chacun d'eux, le déterminant $D(\omega)$ est infiniment petit d'ordre supérieur à 3 par rapport à ϵ , tandis qu'il est seulement d'ordre 3 dans les autres cas.

Dans les autres cas, le premier membre de l'équation est une combinaison à coefficients positifs ⁽¹⁾ des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} P(x) &= x - \sin x, \\ Q(x) &= x + \sin x, \\ F(x) &= x(2 + \cos x) - 3 \sin x, \\ G(x) &= 3x + \sin x(\cos x - 4), \\ H(x) &= x(1 + 2 \sin^2 x) + \sin x(3 \cos x - 4), \\ K(x) &= x(3 + \cos x) - 4 \sin x, \\ R(x) &= x^2 + x \sin x - 4(1 - \cos x), \\ S(x) &= 3x^2 - 2x \sin x(2 + \cos x) - (1 - \cos x)(1 - 7 \cos x), \\ T(x) &= 2x^2 - x \sin x(2 - \cos x) - \sin^2 x, \\ U(x) &= x^2 - x \sin x \cos x - 2(1 - \cos x)^2; \end{aligned}$$

où l'on doit remplacer x par 0 , 2θ ou $\frac{\theta}{2}$. Toutes ces fonctions étant positives ⁽²⁾ avec x , les équations n'ont pas de racines.

53. *Formules asymptotiques.* — Si l'on pose $u = p\theta$, $v = qx$, $w = rx$, $x = \varepsilon\theta$, l'équation de résonance est toujours de la forme

$$(97) \quad F(u, v, w, \varepsilon) = 0,$$

F désignant un polynôme en $\sin u$, $\cos u$, $\sin v$, $\cos v$, $\sin w$, $\cos w$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$.

⁽¹⁾ Pour les vibrations latérales, ordonner suivant les puissances de k . Dans le cas AA, le premier membre de l'équation admet le facteur $P(\theta)$ ou $kP(\theta) + Q(\theta)$. Dans les cas DD (vibrations planes ou latérales), FF (vibrations planes), GG (vibrations latérales), il admet le facteur $1 - \cos \theta$.

⁽²⁾ Pour F et K, on est ramené à prouver que la fonction $y = x - \frac{a \sin x}{b + \cos x}$ est positive quand $a = b + 1$ et $b \geq 2$. La dérivée a le signe de $(1 - u)(b^2 - a - u)$, avec $u = \cos x$. Le second facteur est positif, car $b^2 - a = b^2 - b - 1 \geq 4 - 2 - 1 = 1$.

La dérivée de G est $2(1 - \cos x)^2 > 0$.

Pour H, la fonction $y = x + \frac{\sin x(3 \cos x - 4)}{1 + 2 \sin^2 x}$ est > 0 . En effet, sa dérivée a le signe de $u(1 - u)(1 + u - u^2)$. Pour les valeurs de x annulant u , $y = x - \frac{4}{3} \sin x \geq \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} > 0$. Pour les valeurs de x annulant le troisième facteur, on a

$$y = x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sin x. \quad \text{Comme } \cos x < -\frac{1}{2}, x > \frac{2\pi}{3}, y > \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} > 0.$$

Donc, la fonction est toujours positive.

On a ensuite

$$R'(x) = F(x), \quad S'(x) = 4(1 - u)F(x), \quad U'(x) = H(x).$$

Toutes ces dérivées sont positives, donc aussi les fonctions R, S, U. Enfin, $T'(x)$ est le produit du facteur positif $D = 3 - 2u + 2u^2$ par la fonction $y = x - \frac{\sin x(2 + u)}{D}$, dont la dérivée a le signe de $(1 - u)^2(8 + 3u + 2u^2) > 0$. Donc, $y > 0$, $T' > 0$, $T > 0$.

Si l'on remplace u, v, w par leurs valeurs en fonction de θ et ε , l'équation (97) peut s'écrire

$$(98) \quad G(\theta) = \varepsilon^{2\alpha} H(\theta, \varepsilon^2), \quad \alpha \geq 1,$$

G et H désignant des fonctions holomorphes ⁽¹⁾. Dans les cas énumérés au n° 52, l'équation $G(\theta) = 0$ admet une infinité de racines. Ces racines sont doubles, sauf dans les cas FD, D'G', où elles sont quadruples. Soit θ_0 l'une d'elles. En posant $u = \theta_0 + \varphi$, on peut développer φ suivant les puissances de ε ou de $\sqrt{\varepsilon}$ (cas FD, D'G') et ce développement est *convergent* pour ε assez petit. On en déduit le développement de $\theta = \frac{u}{p}$.

Je n'ai calculé effectivement que la partie principale de φ , qui est toujours de l'ordre de ε ou de $\sqrt{\varepsilon}$. Dans ce cas, on a

$$\theta = \theta_0 + \varphi.$$

Nous appellerons ce cas le *cas I*.

Si l'équation $G(\theta) = 0$ n'a pas de racines, x ne peut tendre vers zéro avec ε . On cherche alors les solutions pour lesquelles x tend vers une limite finie x_0 .

Développons F suivant les puissances de ε , en considérant u, v, w comme des constantes. En divisant par une certaine puissance de ε , l'équation prend la forme

$$(99) \quad f(u, v, w) = \varepsilon^\nu g(u, v, w) + \dots,$$

f, g, \dots étant des polynômes trigonométriques en u, v, w . La série du second membre est uniformément convergente quels que soient u, v, w , pour ε assez petit. La fonction $f(u, v, w)$ a l'une des formes suivantes, où α, β désignent des constantes

$$(100) \quad \begin{cases} \sin w \sin 2v, & \cos w \sin 2v, & \sin w \cos^2 v, & \sin w \sin^2 v, & \cos w \cos^2 v, \\ & \cos w \sin^2 v, & \sin v(\operatorname{tg} v - \alpha \operatorname{tg} w), & \cos v(\operatorname{tg} v - \alpha \operatorname{tg} w), \\ & \sin v(\cot v - \beta \operatorname{tg} w), & \cos v(\cot v - \beta \operatorname{tg} w); \end{cases}$$

$$(101) \quad \sin^2 \theta - \sin v(\sin v + \alpha \cos v \cot w), \quad \cos^2 \theta - \sin v(\sin v + \beta \cos v \cot w).$$

Si elle est de l'une des formes (100), l'équation limite admet une *infinité de racines en x* . Soit x_0 l'une d'elles. Si l'on exprime le second membre de (99) en fonction de ε et de x , on obtient une fonction z qui admet $\varepsilon = 0$ comme *point singulier essentiel*. Il n'est donc *pas question de développer* $\varphi = x - x_0$ *suivant les puissances de ε* . Toutefois, on peut développer φ suivant les puissances de ε^2 et de z ou \sqrt{z} et ensuite remplacer z par son développement. Mais ces deux développements doivent être *limités*. En prenant un *seul terme* dans chacun d'eux, on obtient une *formule asymptotique* de la forme

$$(102) \quad \varphi = \varepsilon^m G(u, v, w).$$

(1) Le déterminant $D(w)$ est toujours une fonction paire ou impaire de ε .

Dans le second membre, on peut remplacer v et w par $v_0 = hx_0$ et $w_0 = h'x_0$; on commet sur G une erreur infiniment petite. Quant à u , sa valeur exacte est $u = \frac{x_0}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{\varepsilon}$.

Si $m > 1$, $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ est infiniment petit et la partie principale de φ s'écrit

$$\varepsilon^m G\left(\frac{x_0}{\varepsilon}, v_0, w_0\right).$$

Dans la pratique, x_0 résulte de la connaissance directe de v_0 ou w_0 ou de la résolution d'une équation transcendante de la forme

$$\alpha \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} v \quad \text{ou} \quad \beta \operatorname{tg} w = \cot v.$$

Suivant le cas, nous poserons $\varphi = v - v_0$, ou $w - w_0$, ou $x - x_0$. L'ordre m de φ sera au plus 3, 4 ou 2. Connaissant la partie principale de φ , on aura l'une des trois formules

$$(103) \quad \begin{cases} \theta = \frac{v_0}{\varepsilon} (1 - q_1 \varepsilon^2) + \frac{\varphi}{\varepsilon h}, & \theta = \frac{w_0}{\varepsilon} [1 - r_1 \varepsilon^2 + (r_1^2 - r_2) \varepsilon^4] + \frac{\varphi}{\varepsilon' h}, \\ & \theta = \frac{x_0}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Dans les deux premières, on ne devra garder, bien entendu, que les termes d'ordre $\leq m - 1$.

Nous appellerons ce cas le *cas II*.

Si $m = 1$, $z = \frac{\varphi}{\varepsilon}$ n'est plus infiniment petit. Sa limite finie pourrait être obtenue en résolvant l'équation transcendante

$$z = G\left(\frac{x_0}{\varepsilon} + z, v_0, w_0\right).$$

Mais, il est plus simple d'écrire cette équation sous la forme

$$\theta - \frac{x_0}{\varepsilon} = G(\theta, v_0, w_0) = H(\theta)$$

et d'en tirer

$$(104) \quad \varepsilon = \frac{x_0}{\theta - H(\theta)}.$$

Dans cette formule, on peut choisir arbitrairement θ , pourvu que le second membre soit assez petit. On obtient ainsi ε en fonction de θ . Ce cas sera appelé le *cas III*.

Il reste le cas où $f(u, v, w)$ a l'une des formes (101). L'équation limite s'écrit

$$(105) \quad \begin{cases} \sin^2 \theta = \sin v_0 (\sin v_0 + \alpha \cos v_0 \cot w_0) \\ \text{ou} \quad \cos^2 \theta = \sin v_0 (\sin v_0 + \beta \cos v_0 \cot w_0). \end{cases}$$

On choisit arbitrairement x , sous réserve que le second membre, où l'on remplace v_0 et w_0 par hx et $h'x$, soit compris entre zéro et un; ce qui est évidemment toujours possible. On calcule ensuite θ , en adoptant une *détermination très grande* par rapport à x . On a ensuite $\varepsilon = \frac{x}{\theta}$.

On obtient ainsi θ et ε en fonction du paramètre x . Ce cas sera appelé le cas IV.

Dans les quatre cas, on pourrait améliorer l'approximation en poussant plus loin les développements; mais, nous ne l'avons pas fait en général et nous nous contenterons de donner les résultats concernant la première approximation.

54. *Résultats.* — On trouvera, dans les tableaux ci-après, les résultats obtenus par les méthodes précédentes ⁽¹⁾. Dans chaque cas, on indique d'abord, entre parenthèses, le cas correspondant à la solution considérée. On donne ensuite la valeur de θ_0 , ou de v_0 , ou de w_0 , ou de α , ou de β ; puis la valeur de φ ; ceci pour les cas I ou II. Pour le cas III, on donne la fonction $H(\theta)$. Pour le cas IV, on donne simplement la valeur de α ou de β .

Dans toutes les formules, λ désigne un nombre entier positif arbitraire. Pour simplifier l'écriture, on a posé

$$\begin{aligned} \frac{kh'}{h} &= h'', & \frac{3k+1}{2} &= k', & \frac{k-1}{k+1} &= k''; \\ K &= \frac{\cos v_0 - (-1)^\lambda \cos \theta_0}{\sin v_0}, & P &= \frac{\cos^2 \theta_0 - \sin^2 v_0}{\sin 2 v_0}, & P' &= \frac{\sin^2 \theta_0 - \sin^2 v_0}{\sin 2 v_0}, \\ {}_2Q &= \frac{1}{k' + \cos^2 v_0}, & {}_2Q' &= \frac{1}{k' + \sin^2 v_0}, \\ R &= 2 \frac{kh' \sin^2 \theta_0 - h'(2k+1) \sin^2 v_0 - 4kh(-1)^\lambda \cos \theta_0 \sin v_0}{h \sin 2 v_0}, \\ R' &= \frac{\cos^2 \theta_0 + \cos 2 v_0 - 2(-1)^\lambda \cos \theta_0 \cos v_0}{\sin 2 v_0}, \\ S &= P' \sin \theta \left(4 \frac{\cos v_0}{\cos w_0} - \cos \theta \right), & S' &= Q' \sin \theta \left[4k \frac{\cos v_0}{\cos w_0} + (1-k) \cos \theta \right], \\ T &= \sqrt{3\theta_0^2 - 4\theta_0(-1)^\lambda}, & T' &= \sqrt{\theta_0^2 + 4(-1)^\lambda - 4}, & T'' &= \sqrt{\theta_0^2 - 2}. \end{aligned}$$

On a rangé les différentes liaisons par ordre alphabétique, afin qu'on puisse retrouver rapidement la solution correspondant à une combinaison quelconque.

Vibrations planes.

AA.	(II)	$w_0 = \lambda\pi,$	$\varphi = 4K\varepsilon^2\sqrt{2};$	(III)	$v_0 = \lambda\pi,$	$H = \pm \sin \theta.$
AB.	(II)	$w_0 = \lambda\pi,$	$\varphi = 4P'\varepsilon^2\sqrt{2};$	(III)	$2v_0 = \lambda\pi,$	${}_2H = -(-1)^\lambda \sin 2\theta.$
AC.	(II)	$v_0 = \lambda\pi,$	$\varphi = 4R'\varepsilon^2\sqrt{2};$	(III)	$2v_0 = \lambda\pi,$	${}_2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta,$
AD.	(III)	$v_0 = \lambda\pi,$	${}_2H = \sin 2\theta;$	(III)	$\alpha = -\sqrt{2},$	$H = S.$
AE.	(II)	$2w_0 = (2\lambda+1)\pi,$	$\varphi = 4P\varepsilon^2\sqrt{2};$	(III)	$2v_0 = \lambda\pi,$	${}_2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta.$

(1) Les calculs étant assez fastidieux, je ne réponds pas de leur complète exactitude, malgré les vérifications et recoupements auxquels je les ai soumis.

- AF. (III) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $2H = \sin 2\theta$; (III) $\alpha = -\sqrt{2}$, $H = S$.
- AG. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = -2\varepsilon^2\sqrt{2}\operatorname{tg}\nu_0$; (II) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = \varepsilon\varepsilon^2$,
avec $\varepsilon^2 \sin \omega_0 - 2\varepsilon\sqrt{2} \cos \omega_0 + \frac{5}{2} \sin \omega_0 \sin^2 \theta_0 - 4(-1)^\lambda \sqrt{2} \cos \theta_0 = 0$.
- AH. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = -\varepsilon^2 \operatorname{tg} \nu_0 \left[4(-1)^\lambda \frac{\sin \theta_0}{\cos \nu_0} + 3\sqrt{2} \right]$;
(III) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $H = \pm 4 \sqrt{(-1)^\lambda \frac{\sin \theta}{\cos \omega_0}}$.
- BB. $\theta = \lambda\pi$ (solution exacte).
- BC. (I) $2\theta_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon T''$.
- BD. (IV) $2\beta = \sqrt{2}$.
- BE. $2\theta = (2\lambda + 1)\pi$ (solution exacte).
- BF. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{3}$.
- BG. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 16P'\varepsilon^4\sqrt{2}$; (II) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = -\frac{5}{4}(-1)^\lambda \varepsilon^3 \sin 2\theta_0$.
- BH. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = 2P\varepsilon^2\sqrt{2}$;
(II) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = (-1)^\lambda \varepsilon^2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \omega_0 (\sin^2 \nu_0 - \cos^2 \theta_0)$.
- CC. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon T'$.
- CD. (IV) $2\alpha = -\sqrt{2}$.
- CE. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0$.
- CF. (I) $2\theta_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon T$.
- CG. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = -2\varepsilon^2\sqrt{2}\operatorname{tg}\nu_0$;
(II) $\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \frac{5}{4}\varepsilon^3 \sin 2\theta_0$ ou $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = 2\varepsilon^2\sqrt{2} \cot \omega_0$.
- CH. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = R\varepsilon^2$;
(II) $\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = -\varepsilon^2\sqrt{2}\operatorname{tg}\omega_0 \sin^2 \theta_0$ ou $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$,
 $\varphi = \varepsilon^2 \left[\sqrt{2} \operatorname{tg} \omega_0 (\sin^2 \theta_0 - 3) - 8(-1)^\lambda \cos \theta_0 \sec \omega_0 \right]$.
- DD. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{2}$.
- DE. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{2}$.
- DF. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi$, $\varphi = \pm \sqrt{\varepsilon(24\theta_0^2 - 14)} \frac{1}{4}$.
- DG. (II) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = -\varepsilon^2 \sin \theta_0 [2,5 \cos \theta_0 + 6\sqrt{2}(-1)^\lambda \operatorname{cosec} \omega_0]$;
(II) $\beta = \sqrt{2}$, $\varphi = -8\varepsilon^2 Q' \cos \theta_0 \sin \omega_0 \sec \nu_0$.
- DH. (II) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = \varepsilon^2 \left[\sqrt{2} \operatorname{tg} \omega_0 \sin^2 \theta_0 - 3(-1)^\lambda \cos \theta_0 \sec \omega_0 \right]$;
(III) $2\alpha = -\sqrt{2}$, $H = 4Q' \sin \theta \cos \nu_0 \sec \omega_0$.
- EE. $\theta = \lambda\pi$ (solution exacte).
- EF. (IV) $\beta = -\sqrt{2}$.
- EG. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = 16P\varepsilon^4\sqrt{2}$;
(II) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \frac{5}{4}(-1)^\lambda \varepsilon^3 \sin 2\theta_0$.

- EH. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 2P'\varepsilon^2\sqrt{2}$.
 (II) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = (-1)^\lambda \varepsilon^2 \sqrt{2} P' \sin 2\nu_0 \cot \omega_0$.
- FF. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{3}$.
- FG. (II) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = -8\varepsilon^2 (-1)^\lambda \cos \theta_0 \sec \omega_0$;
 (II) $\alpha = \sqrt{2}$, $\varphi = 16\varepsilon^2 P' \cos \theta_0 \sin \nu_0 \sec \omega_0$.
- FH. (II) $\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \varepsilon^2 \sqrt{2} [\cot \omega_0 (1 + \cos^2 \theta_0) - 2(-1)^\lambda \cos \theta_0 \operatorname{cosec} \omega_0]$.
 (III) $2\alpha = -\sqrt{2}$, $H = 4Q' \sin \theta \cos \nu_0 \sec \omega_0$.
- GG. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 16K\varepsilon^4 \sqrt{2}$; (II) $\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm 2,5\varepsilon^2 \sin \theta_0$.
- GH. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = \varepsilon^2 \sqrt{2} \cot \omega_0$;
 (II) $\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \varepsilon^2$ avec $\varepsilon^2 + \varepsilon \sqrt{2} \operatorname{tg} \omega_0 - 46 = 0$.
- HH. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 2K\varepsilon^2 \sqrt{2}$; (II) $\nu_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \varepsilon^2$
 avec $\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \sqrt{2} [\cot \omega_0 - (-1)^\lambda \cos \theta_0 \operatorname{cosec} \omega_0] - 2 \sin^2 \theta_0 = 0$.

Vibrations latérales.

- AA. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 2h''K\varepsilon^2$; (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $H = \pm k'' \sin \theta$.
- AB. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 2h''P'\varepsilon^2$; (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = -(-1)^\lambda k'' \sin 2\theta$.
- AC. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = h''\varepsilon^2 \cot \nu_0$; (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $H = \pm k'' \sin \theta$.
- AD. (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = k'' \sin 2\theta$; (III) $\alpha = -\frac{h'}{2h}$, $H = S'$.
- AE. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = \frac{4kh'}{k+1} P\varepsilon^2$;
 (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^\lambda k'' \sin 2\theta$.
- AF. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = R\varepsilon^2$; (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = -(-1)^\lambda k'' \sin 2\theta$.
- AG. (III) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $2H = k'' \sin 2\theta$; (III) $\alpha = -\frac{h'}{2h}$, $H = S'$.
- AH. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = -h'\varepsilon^2 \left[\frac{2k+1}{h} \operatorname{tg} \nu_0 + (-1)^\lambda h' \cos \theta_0 \sec \nu_0 \right]$.
 (III) $2\nu_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $H = \pm h \sqrt{-k''} \cos \theta$.
- BB. $\theta = \lambda\pi$ (solution exacte).
- BC. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = 8hh'(k+1)P\varepsilon^4$;
 (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta$.
- BD. (IV) $\beta = -\frac{2h}{h'}$.
- BE. $2\theta = (2\lambda + 1)\pi$ (solution exacte).
- BF. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon h \theta_0$.
- BG. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{k'}$.
- BH. (II) $2\omega_0 = (2\lambda + 1)\pi$, $\varphi = 4hh'P\varepsilon^2$; (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta$.
- CC. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 8hh'(k+1)K\varepsilon^2$; (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $H = \pm k'' \sin \theta$.
- CD. (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = k'' \sin 2\theta$; (III) $\beta = \frac{2h}{h'}$, $2H = (1-k)Q' \sin 2\theta$.

- CE. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 8hh'(k+1)P'\varepsilon^4$;
 (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^k k'' \sin 2\theta$.
- CF. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = -2hh'\varepsilon^2 \operatorname{tg} \nu_0$;
 (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = -(-1)^k k'' \sin 2\theta$.
- CG. (III) $2\nu_0 = (2\lambda+1)\pi$, $2H = k'' \sin 2\theta$;
 (III) $\beta = \frac{2h}{h'}$, $2H = (1-k)Q' \sin 2\theta$.
- CH. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = -2hh'\varepsilon^2 \operatorname{tg} \nu_0$;
 (III) $2\nu_0 = (2\lambda+1)\pi$, $H = \pm \sqrt{k''} \sin \theta$.
- DD. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon h \theta_0 \sqrt{3}$.
- DE. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{k'}$.
- DF. (I) $2\theta_0 = (2\lambda+1)\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon h T$.
- DG. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi$, $\varphi^4 h^2 = \varepsilon^2 [k^2(5\theta_0^2 - 6) + 8k(\theta_0^2 - 1) + 3\theta_0^2]$.
- DH. (III) $2\nu_0 = (2\lambda+1)\pi$, $2H = \sin 2\theta$; (III) $\alpha = -\frac{2h}{h'}$, $H = (k+1)S$.
- EE. $\theta = \lambda\pi$ (solution exacte).
- EF. (I) $2\theta_0 = (2\lambda+1)\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon h T''$.
- EG. (IV) $\beta = \frac{h'}{2h}$.
- EH. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 4hh'P'\varepsilon^2$; (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = -(-1)^k \sin 2\theta$.
- FF. (I) $\theta_0 = \lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon h T'$.
- FG. (IV) $\alpha = \frac{h'}{2h}$.
- FH. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 2hh'R'\varepsilon^2$; (III) $2\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^k \sin 2\theta$.
- GG. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi$, $\varphi = \pm \varepsilon \theta_0 \sqrt{k'}$.
- GH. (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $2H = \sin 2\theta$; (III) $\alpha = -\frac{2h}{h'}$, $H = -h^2 P' \sin 2\theta$.
- HH. (II) $\omega_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 4hh'K\varepsilon^4$; (III) $\nu_0 = \lambda\pi$, $H = \pm \sin \theta$.

55. *Cas où le rayon du cercle devient infini.* — Supposons que, la longueur s du fil demeurant constante, son rayon R croisse indéfiniment. Si l'on pose $\frac{1}{R} = \varepsilon$, on peut calculer les développements de m , m' , m'' suivant les puissances de ε . Les premiers termes de ces développements sont $i\eta$, η et $h\varepsilon$, en posant $\eta^4 = \gamma\varepsilon^4 = \frac{\rho\omega^2}{EB}$ ou $\frac{\rho\omega^2}{EA}$. On peut ensuite chercher l'équation de résonance limite.

A priori, on doit évidemment s'attendre à retrouver les équations de résonance de la tige cylindrique relatives aux différentes liaisons (Chap. IV). La question n'est toutefois pas aussi simple. On retrouve bien, dans leur ensemble, toutes les équations prévues; mais, on en obtient d'autres, que nous appelons provisoirement les équations (E). L'explication de cette anomalie est la suivante.

Dans le cas des vibrations planes, on constate que la tension Z du fil devient infinie, toutes les fois que ω vérifie une équation (E). Dans le cas des

vibrations latérales, ce sont *l'effort tranchant Y, le moment fléchissant L et le couple de torsion N qui deviennent infinis*. On en conclut que *les solutions des équations (E) sont physiquement inacceptables*.

J'ai calculé l'équation limite dans tous les cas et séparé chaque fois la solution véritable de la solution étrangère. Mais, il me paraît inutile de reproduire ces calculs, dont l'intérêt est purement théorique ⁽¹⁾. Je me bornerai à indiquer l'équation limite, à titre d'exemple, dans le cas AA.

Pour les vibrations planes, on trouve, en posant $\gamma s = x$,

$$\left(\operatorname{th} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \left[4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - x \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{th} \frac{x}{2} \right) \right] = 0.$$

Pour les vibrations latérales on obtient

$$1 - \cos x \operatorname{ch} x = 0, \quad \text{soit } \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Dans le premier cas, les solutions véritables sont fournies par le premier facteur; le deuxième facteur donne les solutions étrangères. Dans le deuxième cas, il n'y a pas de solutions étrangères.

Je signalerai enfin que, *si ω est une solution véritable, w et v tendent toujours vers zéro; autrement dit, la dilatation longitudinale et la torsion disparaissent*.

56. *Étude complète du double encastrement pour les vibrations planes.* — J'ai résolu numériquement l'équation de résonance, en limitant supérieurement θ par 24π (douze spires). Les calculs sont de difficulté différente, suivant la nature des racines de l'équation (63).

1° *Les trois racines sont négatives.* Autrement dit, γ est compris entre zéro et

$$\frac{71 - 17\sqrt{17}}{8} = 0,1134005.$$

Au lieu de se donner la valeur de γ , il est plus commode de se donner la valeur de l'une des racines ou, ce qui revient au même, de $n = \sqrt{-x}$. Convenons par exemple que n correspondra à la plus petite racine. La résolution d'une équation du second degré permet le calcul de n' et n'' . De plus, n doit varier entre un et

$$n_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} = 1,199353.$$

J'ai calculé θ en donnant à n des valeurs échelonnées de centième en centième, depuis 1,03 jusqu'à 1,19. Pour chaque valeur de n , il y a une infinité de racines en θ ; mais, leur nombre est limité si l'on s'impose la condition $\theta < 24\pi$. Dans ce cas, elles n'existent que pour $n \geq 1,03$.

(1) Sauf pour servir de guide aux calculs numériques, si l'on voulait résoudre complètement l'équation de résonance.

Voici maintenant la méthode employée pour leur calcul. Pour diminuer les tâtonnements, je me suis guidé par la formule asymptotique (n° 54) $\omega = \lambda\pi$, avec $\omega = n''\theta$. On pourrait aussi se guider sur la formule $\nu = \lambda\pi$. J'avais d'abord songé à mener de front les deux formules, ce qui devait me donner deux séries de racines. Mais, je me suis vite aperçu que les deux séries empiétaient l'une sur l'autre pour $n \leq 1,13$. Dès lors, j'ai abandonné la seconde.

Posons (nos 50, 48, 51)

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda\pi + \varphi, & u &= \frac{n + n'}{2n''}\omega, & \nu &= \frac{n - n'}{2n''}\omega; \\ a &= \frac{C}{C'}, & b &= -\frac{A'}{C'}, & c &= -\frac{A}{C'}. \end{aligned}$$

L'équation (95) s'écrit

$$\begin{aligned} G(\varphi) &= \sin \varphi (a \sin^2 u - \sin^2 \nu) + b \sin \nu [\cos \nu \cos \varphi - (-1)^\lambda \cos u] \\ &\quad + c \sin u [\cos u \cos \varphi - (-1)^\lambda \cos \nu] = 0. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de λ , on calcule φ par substitutions successives et interpolation finale. On obtient chaque fois une ou trois racines comprises entre -90° et 121° . On en déduit une ou trois valeurs de θ .

Pour séparer la plus petite racine, il faut connaître le signe de $D(\omega)$ pour θ infiniment petit. J'ai donc dû calculer la partie principale de D . Sous la forme (75), le calcul est pénible; j'y ai renoncé. Mais, il est assez simple si l'on garde à D sa forme primitive de déterminant. En faisant des combinaisons de colonnes, on trouve

$$D(\omega) = \frac{nn'n''(n'^2 - n''^2)^2(n''^2 - n^2)^2(n^2 - n'^2)^2}{15 \cdot (24)^2} \theta^9.$$

On voit que $D(\omega)$ est extrêmement petit avec θ et cela constituerait une grosse difficulté si l'on voulait calculer directement les petites racines, lesquelles n'existent fort heureusement que pour les hautes fréquences.

Pour $n = n_1$, on a

$$n' = n'' = \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 3}{2}} = 0,529883.$$

L'équation de résonance est, en posant $u = n\theta$, $\nu = n'\theta$,

$$\begin{aligned} (106) \quad & n'^2(n^2 - n'^2)^2 u^2 \sin u + 4n^2 n'^2(n^2 - n'^2)u(\cos u - \cos \nu) \\ & + n^2 \sin \nu [4nn'(n^2 + n'^2)(1 - \cos u \cos \nu) - (n^4 + n'^4 + 6n^2 n'^2) \sin u \sin \nu] = 0. \end{aligned}$$

Pour les grandes valeurs de θ , on peut poser $u = \lambda\pi + \varphi$ et l'on a asymptotiquement

$$\varphi = \frac{\cos u \cos \nu - 1}{u^2} (4,975u + 16,68 \cos u \sin \nu).$$

La comparaison avec le calcul direct montre que cette formule donne une erreur relative $< \frac{1}{1000}$ à partir de $\lambda = 4$. Il n'y a d'ailleurs qu'une seule racine inférieure à celle qui correspond à $\lambda = 4$; elle vaut 437° .

57. 2° Il y a deux racines imaginaires. Autrement dit, y est compris entre $\frac{71-17\sqrt{17}}{8} = 0,1134$ et $\frac{71+17\sqrt{17}}{8} = 17,6366$. Cette fois, n' et n'' sont de la forme $i\alpha - \beta$ et $i\alpha + \beta$, α et β étant des nombres réels et positifs faciles à calculer. L'équation de résonance prend la forme suivante :

$$(107) \quad a_0 \operatorname{ch} 2\alpha\theta \sin n\theta + a_1 \operatorname{sh} 2\alpha\theta \cos n\theta + a_2 \operatorname{sh} \alpha\theta \cos \beta\theta + a_3 \operatorname{ch} \alpha\theta \sin \beta\theta \\ + a_4 \sin n\theta \cos 2\beta\theta + a_5 \cos n\theta \sin 2\beta\theta + a_6 \sin n\theta = 0,$$

les a_i se calculant aisément pour chaque valeur de n .

Cette équation, en apparence plus compliquée que celle du cas précédent, est en réalité beaucoup plus facile à résoudre, grâce à la présence des exponentielles. Lorsque θ est grand, on a la formule asymptotique évidente

$$(108) \quad \operatorname{tg} n\theta = -\frac{a_1}{a_0}.$$

La comparaison avec le calcul direct m'a montré que cette formule est suffisamment approchée à partir de la deuxième racine. Quant à la première racine, je l'ai calculée par une méthode d'approximations successives, partant de (108) comme première approximation; l'expérience m'a d'ailleurs montré que la deuxième approximation est pratiquement suffisante.

J'ai donné à n les valeurs 1,22; 1,24; 1,26; 1,28; 1,3; 1,4; ...; 2,3.

Quand n atteint la valeur limite $n_2 = \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{2}} = 2,3593$, on obtient une équation se déduisant de (106) par le changement de n' en im' ; elle se résout comme (107).

58. 3° Il y a deux racines positives. Autrement dit $y > 17,6366$ ou $n > 2,3583$. L'équation de résonance prend la forme

$$a_0 \sin n\theta (\operatorname{ch} m'\theta \operatorname{ch} m''\theta - 1) + a_1 \operatorname{sh} m'\theta (\operatorname{ch} m''\theta \cos n\theta - 1) \\ + a_2 \operatorname{sh} m''\theta (\operatorname{ch} m'\theta \cos n\theta - 1) + a_3 \sin n\theta \operatorname{sh} m'\theta \operatorname{sh} m''\theta = 0.$$

Elle se résout comme (107) et admet, pour θ grand, la formule asymptotique évidente

$$(109) \quad \operatorname{tg} n\theta = -\frac{a_1 + a_2}{a_0 + a_3}.$$

Cette formule ne convient pas pour n très grand et θ très petit. En effet, on a asymptotiquement $m' = 1$, $m'' = n$, $a_0 = a_2 = 2n^5$, $a_1 = -n^6$, $a_3 = \frac{11}{2}n^4$. Si l'on pose $n\theta = x$, on voit immédiatement que l'équation devient à la limite

$$2 \sin x (\operatorname{ch} x - 1) + 2 \operatorname{sh} x (\cos x - 1) + x(1 - \operatorname{ch} x \cos x) = 0,$$

qui se décompose en

$$(110) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - x \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{th} \frac{x}{2} \right) = 0.$$

On a vu, au n° 55, que la première de ces deux équations est seule physiquement acceptable.

Si θ n'est pas très petit, on a asymptotiquement

$$(111) \quad \operatorname{tg} n\theta = \frac{n(n-2)}{2n-5,5};$$

d'où, approximativement

$$(112) \quad n\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi.$$

Or, les grandes racines des deux équations (110) ont les valeurs limites respectives $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$. Il s'ensuit que, dans la formule (112), on ne doit accepter que les *valeurs paires* de λ .

Les premières racines des équations (110) sont approximativement en degrés : 450, 810, 1170, ... et 604, 975, 1341, etc.

Si l'on range les valeurs de $n\theta$ par ordre de grandeur croissante, on doit *seulement garder les valeurs de rang impair*; ceci pour n très grand. Mais, pour les valeurs finies de n , on peut évidemment garder toutes les racines.

59. Les résultats numériques obtenus par tous ces calculs ont été rassemblés graphiquement de la manière suivante.

Pour $n \leq 1,3$, on a porté en abscisse la quantité

$$(113) \quad z = \frac{\sqrt{y}}{2\pi} \cdot 10^4 = \frac{n(n^2-1)}{2\pi\sqrt{n^2+1}} \cdot 10^4;$$

de sorte que la *fréquence* f est, d'après (64), donnée par la formule

$$(114) \quad f = \frac{z \cdot 10^{-4}}{R^2} \sqrt{\frac{EB}{\rho}}.$$

En ordonnée, on a porté θ , en graduant l'échelle en nombres de spires. On a ainsi obtenu le graphique ci-après (*fig. 2*)⁽¹⁾.

(¹) J'ai aussi construit un autre réseau de courbes obtenu en portant $x = (n-1)\theta$ en ordonnée. L'avantage de cette méthode est que x reste toujours fini. Quand n tend vers ∞ , x tend vers $\lambda\pi$

ou $\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}$. Les courbes correspondant à la seconde série arrivent au point limite avec une tangente parallèle à l'axe des z . Les autres n'ont pas de tangente en ce point, le rayon vecteur oscillant entre deux positions symétriques par rapport à la parallèle à Oz . Ces dernières courbes aboutissent deux par deux au même point, de sorte que, pour z petit, elles sont très voisines, comme on le voit d'ailleurs sur le graphique reproduit en annexe.

L'inconvénient de cette méthode est que, pour trouver facilement les valeurs de z correspondant à une valeur donnée de θ , il faut construire les courbes $\theta = \text{const}$; ce qui embrouille le graphique. C'est pourquoi j'ai renoncé à reproduire celui-ci.

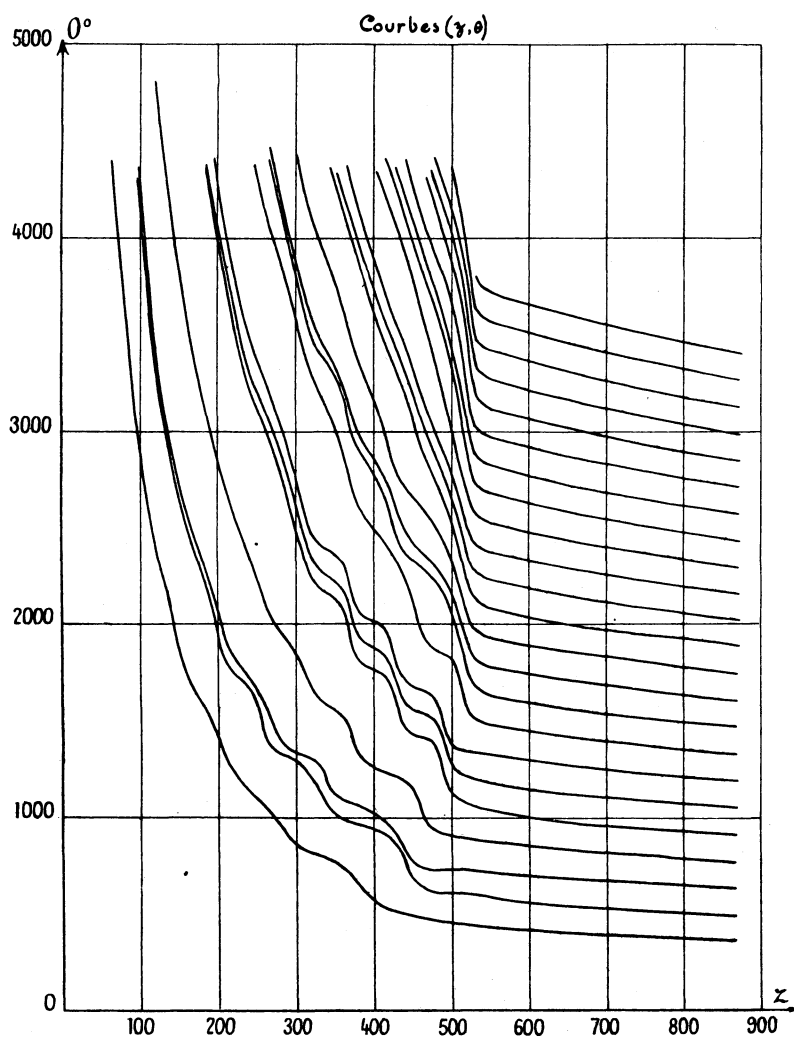


Fig. 2.

Pour $1,3 \leq n \leq 4$, on a, pour la première racine, les valeurs suivantes de $u = n\theta$:

n	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,8
u	474	456	446	440	437	435	433	433	432	432	432	432	432	433
α_n	467	448	438	432	428	426	424	423	423	422	422	422	421	423
n	3	3,5	4											
u	434	436	439											
α_n	424	426	428											

Pour la $k^{\text{ième}}$ racine, on a approximativement $u = 180k + \alpha_n$, avec les valeurs ci-dessus de α_n .

Pour $n > 4$, u varie entre 439 et 450, dans le cas de la première racine.

Pour la $k^{\text{ième}}$ racine, z_n varie entre 428 et 450.

Connaissant θ , on cherche deux valeurs voisines de n telles que les valeurs correspondantes de $\frac{u}{n}$ encadrent θ ; puis on interpole.

Le tableau ci-dessous donne les premières valeurs de z correspondant à un nombre entier de N spires ($N \leq 12$):

$N = 1 \dots$	915, 2146, 5350, 9190, 13 900, 19 500.
$N = 2 \dots$	364, 443, 545, 959, 2106, 3336, 4900, 6550, 8425, 10 580, 12 920, 15 540, 18 300, 22 930.
$N = 3 \dots$	252, 336, 365, 454, 513, 768, 1297, 1957, 3220, 3620, 4640, 5780, 6920, 8200, 9650, 11080, 12 630, 14 200, 16 080, 19 470, 19 900, 21 880.
$N = 4 \dots$	197, 257, 273, 368, 443, 483, 491, 608, 951, 1373, 1870, 2456, 3095, 3790, 4530, 5350, 6225, 7140, 8070, 9140, 10170, 11320, 12 480.
$N = 5 \dots$	152, 208, 222, 304, 380, 417, 427, 503, 515, 532, 755, 1018, 1423, 1838, 2330, 2585, 3010, 3460, 3940, 4450.
$N = 6 \dots$	132, 185, 190, 253, 336, 360, 368, 445, 485, 497, 510, 524, 635, 865, 1152, 1473, 1806, 2186, 2575, 3080, 3460, 3940, 4450.
$N = 7 \dots$	112, 156, 162, 222, 297, 304, 313, 392, 422, 434, 476, 500, 508, 517, 553, 733, 1097, 1242, 1490, 1798, 2152, 2440, 2804.
$N = 8 \dots$	98, 136, 140, 196, 271, 279, 291, 358, 382, 394, 419, 462, 476, 489, 505, 518, 528, 641, 826, 1043, 1257, 1505, 1765.
$N = 9 \dots$	89, 122, 125, 175, 237, 244, 261, 323, 353, 358, 391, 433, 444, 455, 483, 504, 509, 517, 526, 573, 725, 1108.
$N = 10 \dots$	80, 110, 113, 157, 216, 220, 230, 297, 309, 317, 360, 399, 410, 423, 460, 480, 487, 503, 513, 518, 524, 534, 650.
$N = 11 \dots$	77, 103, 105, 143, 198, 202, 212, 272, 289, 293, 331, 372, 380, 393, 435, 450, 458, 473, 492, 503, 510, 517.
$N = 12 \dots$	65, 93, 95, 131, 185, 188, 199, 250, 268, 274, 305, 345, 354, 368, 405, 421, 430, 445, 465, 474, 484, 501.

Pour les fréquences supérieures, on peut prendre approximativement $n = \frac{2k+1}{4N}$, avec $k \geq 8$, pour $N = 1$; $k \geq 16$, pour $N = 2$; $k \geq 24$, pour $N = 3$; $k \geq 25$, pour $N \geq 4$. On a ensuite z par (113).

60. *Comparaison des formules asymptotiques avec le calcul direct.* — D'après le n° 54, on a les deux formules asymptotiques suivantes :

$$(115) \quad 0 = \frac{\lambda\pi}{\varepsilon\sqrt{2}} + \varepsilon \left(4K - \frac{3\lambda\pi}{\sqrt{2}} \right), \quad K = \frac{\cos \nu_0 - (-1)^k \cos \theta_0}{\sin \nu_0}, \quad \theta_0 = \frac{\lambda\pi}{\varepsilon\sqrt{2}}, \quad \nu_0 = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}},$$

$$(116) \quad \varepsilon = \frac{\lambda\pi}{\theta \pm \sin \theta},$$

avec

$$(117) \quad z = \frac{\varepsilon \cdot 10^4}{\pi\sqrt{2}}.$$

Afin de me rendre compte de leur valeur pratique, j'ai comparé les résultats déduits de ces formules avec ceux du calcul direct, pour les valeurs de n utilisées dans ce dernier. La formule (115) donne directement θ_a . D'où l'erreur absolue et l'erreur relative commises sur θ . Celles-ci sont inscrites dans les deux dernières lignes du tableau ci-dessous, l'erreur relative étant évaluée en millièmes.

n	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08	1,09
λ	1	1	1	1	2	1	2	1	2	3	1
θ_a	4099	3032	2407	1960	3911	1664	3346	1453	2835	4334	1237
θ	4096	3030	2385	1952	3974	1638	3348	1450	2910	4405	1222
	3	2	22	8	-63	26	-2	3	-75	-71	15
	1	1	9	4	16	16	-1	2	-26	-26	12
n	1,09	1,09	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12
λ	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2
θ_a	2476	3811	1115	2236	3390	1013	1932	3004	3985	868	1751
θ	2550	3788	1103	2251	3395	986	1972	3041	3933	850	1828
	-74	23	12	-15	-5	27	-40	-37	52	18	-77
	-29	6	11	-7	-2	27	-20	-12	13	21	-42
n	1,12	1,12	1,12	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14
λ	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
θ_a	2742	3584	4558	774	1539	2466	3245	4067	736	1482	2219
θ	2710	3552	4434	800	1601	2413	3202	4004	751	1514	2311
	32	32	124	-26	-62	53	43	63	-15	-32	-92
	12	9	28	-33	-39	22	13	16	-20	-21	-40
n	1,14	1,14	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15				
λ	4	5	1	2	3	4	5				
θ_a	2965	3720	682	1223	2073	2708	3569				
θ	2874	3637	608	1291	2025	2563	3294				
	91	83	74	-68	48	145	275				
	32	23	120	-53	24	56	83				

Pour la formule (116), on part de θ déduit du calcul direct. On en déduit ε_a , en prenant le signe devant $\sin \theta$ de telle manière que l'on obtienne, pour chaque valeur de λ , le plus petit ε pour le plus petit θ et le plus grand ε pour le plus grand θ . On connaît d'autre part la valeur exacte de ε . D'où les erreurs absolues et relatives. Dans le tableau ci-dessous, on donne les valeurs de $10^4 \varepsilon_a$ et $10^4 \varepsilon$ dans les quatrième et cinquième lignes, puis la différence de ces deux nombres et enfin l'erreur relative en millièmes.

n	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08
λ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
θ	4312	4363	3362	3420	2760	2824	2363	2451	2024	2114	4049
	417	416	529	527	640	650	755	751	873	870	877
	416	416	525	525	635	635	749	749	863	863	863
	1	0	4	2	5	15	6	2	10	7	14
	2	0	8	4	8	24	8	3	12	8	16

n	1,08	1,09	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11
λ	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
θ	4122	1728	1808	3515	3616	1607	1679	3136	3233	1338	1439
	878	1010	999	1010	1000	1112	1106	1130	1117	1291	1252
	863	980	980	980	980	1100	1100	1100	1100	1219	1219
	15	30	19	30	20	12	6	30	17	72	33
	17	31	19	31	20	11	5	27	15	58	27
n	1,11	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,13
λ	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3	1
θ	2787	2890	4246	4321	1285	1327	2462	2570	3776	3855	1134
	1267	1254	1258	1253	1377	1414	1435	1428	1430	1422	1527
	1219	1219	1219	1219	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1466
	48	35	39	34	35	72	93	86	88	80	61
	39	29	32	28	26	54	69	64	66	60	42
n	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14
λ	1	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3
θ	1265	2181	2277	3409	3498	989	1089	2070	2171	3164	3223
	1430	1637	1620	1582	1568	1720	1668	1696	1667	1680	1687
	1466	1466	1466	1466	1466	1591	1591	1591	1591	1591	1591
	-36	171	154	116	102	129	77	105	76	89	96
	-24	118	106	80	70	81	49	66	48	56	60

On voit que l'erreur relative sur θ ou ε , et par conséquent sur la fréquence, ne dépasse par 5 % tant que $n \leq 1,14$ pour la première formule ou $n \leq 1,10$ pour la seconde. L'approximation de la formule (116) est moins bonne que celle de la formule (115); cela tient à ce que φ est de l'ordre de ε^2 dans le premier cas, de l'ordre de ε dans le second cas. De toute manière, il semble qu'on puisse appliquer pratiquement les deux formules pour $n \leq 1,10$, soit pour $z \leq 247$. On peut amettre, mais sans garantie, qu'il en est de même pour toutes les liaisons, en vibrations planes et en vibrations latérales.

61. *Exemples concrets.* — Considérons un *spiral* de N spires, encastré à ses deux extrémités (liaison AA).

En première approximation, nous avons (n° 54) les deux solutions

$$2N\varepsilon\sqrt{2k} = \lambda, \quad N\varepsilon\sqrt{2(k+1)} = \lambda \quad (\lambda \text{ entier}).$$

Les formules (114) et (117) nous donnent d'autre part, dans le cas des vibrations latérales,

$$f = \frac{\varepsilon}{\pi R^2} \sqrt{\frac{EA}{2\rho}}.$$

On a donc

$$f = \frac{\lambda}{4N\pi R^2} \sqrt{\frac{EA}{\rho k}}, \quad f' = 2f \sqrt{\frac{k}{k+1}}.$$

Pour les vibrations planes, il suffit de remplacer A par B et k par un .

Si l'on appelle d la densité du métal et K le rayon de giration de la section droite par rapport à Ox (vibrations latérales) ou à Oy (vibrations planes),

on a (n° 47), pour $\lambda = 1$

$$(118) \quad f = \frac{K \cdot 10^5}{4N\pi R^2} \sqrt{\frac{0,981E}{kd}} = 7880 \frac{K}{NR^2} \sqrt{\frac{E}{kd}},$$

les unités étant le kilog-poids et le millimètre.

Supposons le fil en *acier*, de densité 7,8; la formule devient

$$(119) \quad f = 2820 \frac{K\sqrt{E}}{NR^2\sqrt{k}}.$$

Supposons maintenant que la section du fil soit *rectangulaire* et appelons h et e la hauteur et l'épaisseur. Pour les *vibrations planes*, on a $K^2 = \frac{e^2}{12}$. Si l'on prend $E = 25000$, on obtient

$$(120) \quad f = \frac{133\,200\,e}{NR^2}.$$

Pour les *vibrations latérales*, $K^2 = \frac{h^2}{12}$ et $k = \frac{EA}{GI} = \frac{E}{G} \cdot \frac{4(h^2 + e^2)}{3me^2}$, m désignant une fonction de $\frac{h}{e}$, calculée par Barré de Saint-Venant et à variation lente ⁽¹⁾. La formule (119) devient

$$(121) \quad f = \frac{705\,eh\sqrt{Gm}}{NR^2\sqrt{h^2 + e^2}}.$$

Prenons $G = 10000$; il vient

$$(122) \quad f = \frac{70\,500\,eh\sqrt{m}}{NR^2\sqrt{h^2 + e^2}}.$$

Si le rapport $\frac{e}{h}$ est *très petit*, on a approximativement $m = \frac{16}{3}$; d'où

$$(123) \quad f = \frac{163\,000\,h}{NR^2}.$$

62. Nous allons appliquer ces formules à quatre spiraux expérimentés par M. Granier ⁽²⁾.

I. Spiral cylindrique: $N = 10$; $R = 4,1$; $h = 0,178$; $e = 0,098$.

La formule (120) donne $f = 78$. Puis, $f' = 110$.

Dans la formule (122), il faut faire $m = 4,56$; ce qui donne $f = 77$. Puis, $k = 3,5$ et $f' = 136$.

II. Spiral plat: $N = 18$; $R = \frac{6,4 + 1,9}{4} = 2,075$; $h = 0,187$; $e = 0,028$.

On trouve $f = 48$, $f' = 68$, pour les vibrations planes; $m = 4,92$; $f = 56$; $k = 34,6$; $f' = 110$, pour les vibrations latérales.

⁽¹⁾ Cf. BOUASSE, *Résistance des matériaux*, pp. 283 et 284.

⁽²⁾ *Annales françaises de Chronométrie*, 1932, p. 237.

III. Spiral plat; $N = 18$; $R = \frac{8,6 + 2,4}{4} = 2,75$; $h = 0,254$; $e = 0,033$.

On trouve $f = 32$, $f' = 45$, pour les vibrations planes; $m = 4,98$; $f = 38$; $k = 44,7$; $f' = 69$, pour les vibrations latérales.

IV. Spiral plat; $N = 18$; $R = \frac{10,8 + 2,7}{4} = 3,375$; $h = 0,288$; $e = 0,051$.

On trouve $f = 33$, $f' = 47$, pour les vibrations planes; $m = 4,87$; $f = 38$; $k = 25$; $f' = 52$, pour les vibrations latérales.

63. En *seconde approximation*, dans le cas des vibrations latérales et de la plus petite fréquence, l'équation déterminant ε est (n° 54)

$$\varepsilon h' \theta (1 + r_1 \varepsilon^2) = \pi + \frac{2kh'}{h} K \varepsilon^2,$$

avec

$$r_1 = 2k + 1, \quad h' = \sqrt{2k}, \quad h = \frac{k+1}{2}, \quad K = \frac{\cos \varphi_0 + \cos \theta_0}{\sin \varphi_0}, \quad \varphi_0 = \pi \frac{h}{h'}.$$

On en déduit la correction $\Delta\varepsilon$ par la formule

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{h' \theta} \left(\frac{2kh'}{h} K - r_1 \pi \right) = \frac{\pi}{\theta^2} \left(\frac{h'}{h} K - \frac{2k+1}{2k} \pi \right).$$

Si l'on admet que N n'est pas exactement un nombre entier, $\cos \theta_0$ peut varier entre -1 et $+1$; donc, les valeurs extrêmes de K sont $-\tan \frac{\varphi_0}{2}$ et $\cot \frac{\varphi_0}{2}$. En tenant compte des données numériques, on trouve les valeurs extrêmes suivantes pour $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta f}{f}$

$$\begin{aligned} & -0,0046 \text{ à } -0,0017; \quad -0,00128 \text{ à } -0,00031; \\ & -0,00128 \text{ à } -0,00030; \quad -0,00128 \text{ à } -0,00032. \end{aligned}$$

La correction est très petite.

64. Les expériences de M. Granier n'ont porté que sur les vibrations latérales. Elles lui ont donné les résultats suivants, pour la plus basse fréquence

$$42,5 \quad 49 \quad 34 \quad 43.$$

Les différences avec les résultats ci-dessus sont : $34,5$; 7 ; 4 ; -5 . Pour le spiral cylindrique, la différence ne peut être imputée à l'imprécision des mesures ou des calculs; l'expérience serait à reprendre, ou bien la théorie ne s'applique que très grossièrement.

Pour le spiral plat, on a les erreurs relatives : $0,13$; $0,11$; $-0,12$. Or, en différentiant logarithmiquement (121), on a approximativement, en négligeant e^2 devant h^2 ,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta e}{e} + \frac{1}{2} \frac{\Delta G}{G} - \frac{\Delta N}{N} - \frac{2 \Delta R}{R}.$$

Je pense que l'erreur commise sur e peut bien atteindre 0,002. D'après les tables, G peut varier entre 9000 et 11000; admettons $\Delta G = 1000$. L'erreur ΔR peut vraisemblablement atteindre 0,02. Enfin, il est possible que le nombre des spires ne soit pas entier; admettons $\Delta N = \frac{1}{2}$.

En se plaçant dans les conditions les plus défavorables, on obtient les valeurs suivantes de $\frac{\Delta f}{f}$: 0,175; 0,151; 0,125. Elles sont bien de l'ordre de grandeur des erreurs constatées ci-dessus. On peut donc considérer *les vérifications expérimentales comme à peu près satisfaisantes dans le cas du spiral plat, mais tout à fait insuffisantes dans le cas du spiral cylindrique.*

65. Considérons maintenant le cas d'un *ressort de soupape*. Il est en *fil rond*; soit r le rayon de ce fil. On a

$$I = 2A, \quad k = \frac{E}{2G} = 1,25; \quad K = \frac{r}{2}.$$

Portant dans (119), il vient

$$(124) \quad f = \frac{1260r\sqrt{E}}{NR^2}.$$

Supposons par exemple $R = 12$, $r = 2$, $N = 10$, $E = 25000$; on trouve $f = 277$. La vitesse correspondante du moteur est de $276 \times 120 = 32000$ tours par minute. Elle est très supérieure aux vitesses réalisées dans la pratique. Mais, il convient d'observer que le mouvement de la soupape est loin d'être sinusoïdal. Si on le développe en série de Fourier, *on peut avoir la résonance sur un harmonique*. Par exemple, si le moteur tourne à 6400 tours, on a la résonance sur le cinquième harmonique. Si l'amplitude de cet harmonique n'est pas très petite, il pourrait y avoir rupture du ressort (1).

CHAPITRE VII.

EXEMPLES DE VIBRATIONS DE FILS PARFAITS.

66. *Fil pesant et courroie de transmission.* — Si le champ de forces extérieur se réduit à la pesanteur, la position d'équilibre est une *chaînette*, susceptible de dégénérer en une droite verticale. Ceci s'applique à un *fil au repos*, ou bien à une courroie de transmission reliant deux poulies et animée de la vitesse linéaire V_0 . Dans le deuxième cas, les mouvements plans sont seuls possibles, si l'on a affaire à une véritable courroie plate. Mais, il arrive quelquefois que la courroie est remplacée par un fil; dans ce cas, les mouvements latéraux sont également possibles.

(1) On pourrait pousser plus loin cette étude et calculer la fatigue du ressort au cisaillement, pour un mouvement donné de la soupape. Il suffirait de calculer le couple de torsion N au moyen de la formule du n° 42.

Si l'on applique (33) en un point du fil situé sur une des poulies, la force X_0 , qui est la réaction de la poulie sur le fil, est dirigée en sens inverse du rayon de courbure; donc a le signe contraire à q_0 . Il s'ensuit que l'on a nécessairement

$$(125) \quad T \geq \rho V_0^2;$$

sinon, la courroie quitte la poulie.

67. *Le fil vertical.* — On a, dans ce cas

$$(126) \quad T = T_0 + \rho g s,$$

en orientant le fil vers le haut. Convenons de prendre pour origine des s l'extrémité inférieure du fil, ou le point de contact avec la poulie inférieure. Posons

$$(127) \quad T_0 - \rho V_0^2 = \rho g a.$$

D'après (125), on a $a \geq 0$.

Les équations (40) et (41) étant identiques, les mouvements latéraux ne diffèrent pas des mouvements plans. Bornons-nous donc à étudier ceux-ci. L'équation (40) devient

$$(128) \quad g(a+s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + g \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = 0.$$

68. Considérons d'abord le cas du *fil suspendu par son extrémité supérieure O*; de sorte que $V_0 = 0$. Posons

$$(129) \quad u = U \sin \omega t, \quad a + s = \frac{g}{4\omega^2} x^2;$$

nous obtenons l'équation de Bessel

$$xU'' + U' + xU = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(130) \quad U = AJ_0(x) + BN_0(x),$$

J_0 et N_0 désignant les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre 0⁽¹⁾. Supposons l'extrémité inférieure libre, de sorte que $a = 0$. Comme U doit rester fini pour $x = 0$, on a nécessairement $B = 0$, donc

$$(131) \quad U = AJ_0(x).$$

La constante A est l'amplitude du mouvement sinusoïdal imposé à l'extrémité inférieure du fil.

Si l'on appelle l la longueur du fil, U doit s'annuler pour $x = 2\omega \sqrt{\frac{l}{g}}$. Dès lors, appelons x_n la $n^{\text{ième}}$ racine positive de $J_0(x)$; la $n^{\text{ième}}$ pulsation de résonance est donnée par la formule

$$(132) \quad \omega_n = \frac{1}{2} x_n \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

(1) Cf. GOUDET, *Les fonctions de Bessel et leurs applications en Physique*, pp. 9 et 16.

La *forme du fil* pour une valeur donnée de t est donnée par (131). La tangente à l'extrémité inférieure est toujours verticale. Il y a n points immobiles ou *nœuds*, dont les abscisses curvilignes sont $\frac{g}{4\omega^2} x_p^2$, $p \leq n$.

L'intégrale générale de (128) peut s'écrire

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) J_0(x_n z), \quad z = \sqrt{\frac{s}{l}}.$$

Si l'on se donne les *conditions initiales* $u = f(z)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = g(z)$, on a

$$f(z) = \sum a_n J_0(x_n z), \quad g(z) = \sum b_n \omega_n J_0(x_n z);$$

d'où ⁽¹⁾

$$a J_1^2(x_n) = 2 \int_0^1 f(z) J_0(x_n z) z dz, \quad b_n \omega_n J_1^2(x_n) = 2 \int_0^1 g(z) J_0(x_n z) z dz.$$

Par exemple; si le fil est abandonné sans vitesse à partir d'une position rectiligne définie par $u = k \frac{l-s}{l}$, on a

$$g(z) = 0, \quad f(z) = k(1 - z^2).$$

On en déduit $b_n = 0$ et ⁽²⁾

$$a_n = \frac{8k}{x_n^3 J_1(x_n)}.$$

69. Supposons maintenant l'extrémité inférieure fixe sur la verticale Oz , le fil étant tendu, de sorte que $a > 0$. L'équation de résonance s'écrit

$$(135) \quad J_0(x_0) N_0(x_1) - J_0(x_1) N_0(x_0) = 0.$$

Si l'on remarque que le rapport $k = \frac{x_1}{x_0} = \sqrt{1 + \frac{l}{a}}$ est connu, on sait que cette équation admet une infinité de racines en x_0 ⁽³⁾.

Supposons que la tension $T_0 = \rho g a$ soit très grande vis-à-vis du poids $p = \rho g l$ du fil. Le rapport $\varepsilon = \frac{l}{a} = \frac{p}{T_0}$ est très petit et l'on a approximativement $k = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. On sait que, dans ce cas, les racines de (133) sont très grandes ⁽⁴⁾. On peut alors utiliser les formules asymptotiques ⁽⁵⁾

$$(134) \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_p(x) = P_p(x) \cos \varphi_p - Q_p(x) \sin \varphi_p, \\ \sqrt{\frac{\pi x}{2}} N_p(x) = P_p(x) \sin \varphi_p + Q_p(x) \cos \varphi_p, \end{cases}$$

⁽¹⁾ Cf. GOUDET, p. 42; JAHNKE, p. 166.

⁽²⁾ Dans Jahnke und Emde, p. 122, on trouvera les valeurs de x_n et $J_1(x_n)$, pour $n \leq 40$.

⁽³⁾ On en trouvera quelques-unes dans JAHNKE, p. 162 à 164.

⁽⁴⁾ Loc. cit., p. 163.

⁽⁵⁾ Loc. cit., p. 99; voir aussi GOUDET, p. 38.

où l'on a posé $\varphi_p = x - \frac{2p+1}{4}\pi$ et où $P_p(x)$ et $Q_p(x)$ désignent des séries asymptotiques en $\frac{1}{x}$, respectivement paire et impaire et dont les premiers termes sont respectivement 1 et $\frac{4p^2-1}{8x}$. Ajoutons que les coefficients de ces séries sont pairs en p .

En faisant $p = 0$ et portant dans (133), on obtient immédiatement

$$(135) \quad \operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \frac{P_1 Q_0 - Q_1 P_0}{P_0 P_1 + Q_0 Q_1},$$

où les indices 0 et 1 indiquent que l'on doit remplacer x par x_0 ou x_1 dans P et Q .

En première approximation, on a

$$(136) \quad x_1 - x_0 = n\pi.$$

En deuxième approximation, remplaçons P et Q par 1 et $-\frac{1}{8x}$; il vient

$$\operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \frac{8(x_0 - x_1)}{64x_0x_1 + 1}.$$

Comme x_0x_1 est très grand et k très voisin de 1, on peut remplacer le dénominateur par $64x_0^2$; puis x_0 par $\frac{n\pi}{k-1} = \frac{2n\pi}{\varepsilon}$, d'après (136). On obtient ainsi

$$x_1 - x_0 = n\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{32n^2\pi^2} \right).$$

D'autre part, en se reportant à (129) et (127), on peut écrire

$$x_1 - x_0 = \frac{2\omega}{g} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} (\sqrt{1+\varepsilon} - 1) = \frac{2\omega}{g} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon} + 1} = \frac{2\omega l}{\sqrt{1+\varepsilon} + 1} \sqrt{\frac{\rho}{T_0}}.$$

On en déduit

$$(137) \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \varepsilon^2 \frac{2n^2\pi^2 + 1}{32n^2\pi^2} \right).$$

En négligeant ε , on retrouve la formule des *cordes vibrantes*.

70. *La courroie verticale.* — La présence du quatrième terme de l'équation (128) s'oppose à l'existence des mouvements stationnaires simples de la forme (129). Mais, on peut chercher des *mouvements stationnaires complexes* en posant $u = Ue^{imt}$. Gardant la variable x définie par (129) et posant $\frac{\omega V_0}{g} = m$, on obtient l'équation différentielle

$$(138) \quad U'' + \frac{1-2im}{x} U' + U = 0,$$

dont l'intégrale générale est ⁽¹⁾

$$U = x^{im} [AJ_{im}(x) + BJ_{-im}(x)],$$

(1) On pourrait aussi l'écrire sous la forme équivalente (133), les indices 0 étant remplacés par im .

A et B désignant cette fois deux constantes imaginaires l'équation de résonance est

$$(139) \quad J_{im}(x_0)J_{-im}(x_1) - J_{im}(x_1)J_{-im}(x_0) = 0.$$

Les deux termes de la différence ci-dessus étant imaginaires conjugués, le premier membre devient réel après suppression du facteur i . L'inconnue ω y figure dans x_0 , x_1 et m . Cette équation est compliquée et je ne pense pas qu'il existe des tables donnant ses premières racines, comme pour (133).

Mais, dans la pratique, la tension de la courroie est très grande vis-à-vis de son poids, surtout pour le brin menant. On en conclut, comme au n° 69, que le rapport $k = \frac{x_1}{x_0}$ est très voisin de un. Donc, x_0 est infiniment grand ⁽¹⁾. On peut dès lors appliquer (134), en remplaçant p par im . Les fonctions $P_p(x)$ et $Q_p(x)$ prennent la même valeur pour $p = im$ et $p = -im$; appelons-les simplement P et Q . Posons d'autre part

$$0 = x - \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = e^{m\pi}, \quad X = (P + iQ)e^{i\theta}, \quad Y = (P - iQ)e^{-i\theta}.$$

On a

$$\sqrt{2\lambda\pi}xJ_{im}(x) = \lambda X + Y, \quad \sqrt{2\lambda\pi}xJ_{-im}(x) = X + \lambda Y.$$

Dès lors, l'équation (139) s'écrit

$$(\lambda X_0 + Y_0)(X_1 + \lambda Y_1) - (\lambda X_1 + Y_1)(X_0 + \lambda Y_0) = 0 \quad \text{ou} \quad X_0 Y_1 - Y_0 X_1 = 0.$$

Ceci revient à égaler à $n\pi$ l'argument de $X_0 Y_1 = (P_0 + iQ_0)(P_1 - iQ_1)e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$; ce qui donne immédiatement

$$\theta_1 - \theta_0 = x_1 - x_0 = n\pi + \arctg \frac{Q_0}{P_0} - \arctg \frac{Q_1}{P_1} = n\pi + \arctg \frac{P_1 Q_0 - Q_1 P_0}{P_0 P_1 + Q_0 Q_1}.$$

On retombe sur la formule (135).

Si l'on remplace P par 1 et Q par $-\frac{4m^2+1}{8x}$, on trouve, en raisonnant comme au n° 69,

$$(140) \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho} - V_0^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \varepsilon^2 \frac{2n^2\pi^2 + 4m^2 + 1}{32n^2\pi^2} \right).$$

Dans la parenthèse, on remplace $m = \frac{\omega V_0}{g}$ par sa première approximation, soit $\frac{n\pi V_0}{\varepsilon \sqrt{a_g}}$.

Pour $V_0 = 0$, on retrouve (137).

(1) On peut le démontrer comme il suit. Prenons pour intégrales fondamentales de l'équation (138) les fonctions $y = J_{im}(x)$ et $y\varphi$, avec $\varphi' = \frac{x^{2im-1}}{y^2} = \frac{1}{xH(x)}$, H désignant une fonction entière. L'équation de résonance s'écrit $F(z) = 0$, avec $F(z) = \int_{x_0}^{x_0+z} \frac{dx}{xH(x)}$. La fonction sous le signe \int étant méromorphe, il en est de même de $F(z)$. Ses zéros sont isolés; donc, z ne saurait être infiniment petit; ce qui aurait lieu si x_0 était fini.

Si V_0 n'est pas très petit devant \sqrt{ag} , m est très grand devant l'unité. La fréquence F_n est alors donnée par les formules

$$(141) \quad F_n = \frac{n}{2l} \sqrt{ag} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{V_0^2}{8ag} \right), \quad ag = \frac{T_0}{\rho} - V_0^2.$$

Remarque. — La fonction U peut s'écrire $Re^{i\varphi}$, R et φ désignant des fonctions réelles et déterminées de x , compte tenu des conditions aux limites. On a donc $u = Re^{i(\varphi + \omega t)}$. On en conclut que $R \cos(\varphi + \omega t)$ et $R \sin(\varphi + \omega t)$ sont deux solutions réelles de (128). La première par exemple définit un mouvement sinusoïdal pour chaque point de la courroie. La fréquence est la même pour tous les points; mais la phase est variable. Lorsque $V_0 = 0$, les positions successives occupées par la courroie se déduisent l'une de l'autre par une simple affinité. Si $V_0 \neq 0$, ces courbes ont des formes totalement différentes. Toutefois, les nœuds sont fixes, car il sont toujours donnés par $R = 0$.

71. Traitons un exemple numérique.

Supposons la courroie en cuir et soumise à la tension de sécurité de 40^{ks} par centimètre carré. Si S est la surface de la section, on a $T_0 = 40S$. Le poids d'un centimètre de courroie est approximativement $S \times 10^{-3} \text{ kg}$ ⁽¹⁾. Donc, $\frac{T_0}{\rho g} = 40000^{\text{cm}}$. D'où

$$(142) \quad ag = 4000 - V_0^2,$$

en prenant le mètre pour unité de longueur et prenant $g = 10$.

La formule (141) peut s'écrire, pour $n = 1$:

$$F_1 = \frac{X}{2l} + Y \quad \text{avec } X = \sqrt{ag} \left(1 - \frac{V_0^2}{8ag} \right), \quad Y = \frac{5}{\sqrt{4000 - V_0^2}}.$$

Pour le brin mené, $T - \rho V_0^2$ est multiplié par le facteur bien connu $e^{-f\alpha}$. Prenons par exemple $f = 0,3$ et $\alpha = \pi$; le facteur vaut à peu près $0,39$. Dès lors, ag doit être multiplié par $0,39$ et Y divisé par $\sqrt{0,39}$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs numériques de X et de X' (brin mené), pour des vitesses V_0 échelonnées de 0 à 30^{m} par seconde. Quant à Y ou Y' , ils varient respectivement entre $0,079$ et $0,09$ ou entre $0,127$ et $0,144$; ils sont pratiquement négligeables.

V_0	0	2	4	6	8	10	12	14	16
X	63,3	63,2	63,1	62,9	62,6	62,3	61,8	61,3	60,6
X'	39,5	39,5	39,4	39,2	39	38,7	38,3	37,8	37,4
V_0	18	20	22	24	26	28	30		
X	60	59,2	58,3	57,3	56,2	55	53,7		
X'	36,8	36,1	35,4	34,6	33,7	32,6	31,5		

⁽¹⁾ Données empruntées à l'*Agenda Dunod (Construction mécanique)*.

Pour les vitesses usuelles comprises entre 0 et 24, X varie seulement de 10 % environ et X' de 13 %. *Ce n'est donc que pour les très grandes vitesses que l'influence de V_0 sur la fréquence des vibrations se fait sentir d'une manière appréciable.*

72. *La chaînette.* — Pour simplifier l'écriture, supposons que l'équation de la chaînette soit $y = \text{ch } x$; il sera facile, par la suite, de rétablir l'homogénéité. On a

$$s = \text{sh } x, \quad R = \text{ch}^2 x, \quad T = \rho V_0^2 + \rho g \text{ch } x, \quad T' = \frac{dT}{ds} = \rho g \text{th } x.$$

L'équation (37) devient

$$(143) \quad g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \text{ch } x - 2V_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = 0.$$

L'élimination de θ et u entre (36), (38) et (39) donne, en posant $\frac{V_0^2}{g} = k^2$,

$$(144) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \text{th } x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(5 + \frac{3k^2}{\text{ch}^2 x} \right) \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} \text{th } x \left(2 - \frac{3k^2}{\text{ch}^2 x} \right) + w \frac{k^2}{\text{ch}^3 x} \left(2 - \frac{3}{\text{ch}^2 x} \right) \\ & + \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{1}{\text{ch } x} - 4V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \text{th}^2 x - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \text{ch } x \right. \\ & \left. - 2V_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial t} - 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \text{sh } x - 6V_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \text{th } x \right] = 0. \end{aligned}$$

73. Dans le cas de la *chaînette suspendue par ses deux extrémités*, on a $V_0 = 0$. Les vibrations latérales stationnaires sont données par $v = V \sin \omega t$, avec

$$(145) \quad V'' + mV \text{ch } x = 0, \quad m = \frac{\omega^2}{g}.$$

Il s'agit de trouver une solution de cette équation s'annulant pour les abscisses x_0 et x_1 , des points d'attache. Si $F(x, m)$ et $G(x, m)$ désignent deux solutions fondamentales de l'équation, l'équation de résonance s'écrit

$$(146) \quad F(x_0, m)G(x_1, m) - F(x_1, m)G(x_0, m) = 0.$$

Les propriétés de cette équation résultent d'une étude plus générale due à Émile Picard ⁽¹⁾. Les racines sont toutes réelles, positives et en nombre infini. Donc, il y a une infinité de pulsations de résonance $\omega_1, \omega_2, \dots$

On peut toujours supposer que $x_1 > x_0$ et $x_1 \geq -x_0$. On a alors ⁽²⁾

$$\frac{n\pi\sqrt{g}}{(x_1 - x_0)\sqrt{\text{ch } x_1}} < \omega_n < \frac{n\pi\sqrt{g}}{x_1 - x_0}.$$

⁽¹⁾ ÉMILE PICARD, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, chap. II; Gauthier-Villars.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 22.

Si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \lambda \quad \text{et} \quad x = \lambda z,$$

l'équation (145) s'écrit

$$(147) \quad \frac{d^2 V}{dz^2} + V \operatorname{ch}(\lambda z) = 0.$$

Son intégrale générale est holomorphe par rapport à λ au voisinage de $\lambda = 0$ et peut donc être développée suivant les puissances de λ . Le premier terme de ce développement est $A \cos z + B \sin z$. On en conclut que, pour n très grand, on a asymptotiquement

$$(148) \quad \omega_n = \frac{n\pi\sqrt{g}}{x_1 - x_0}.$$

La solution $V_n(x)$ correspondant à ω_n s'annule $n - 1$ fois ⁽¹⁾ entre x_0 et x_1 ; donc, il y a $n - 1$ nœuds entre les extrémités du fil.

74. Les vibrations planes stationnaires sont déterminées par l'équation différentielle

$$(149) \quad W'''' + 4W''' \operatorname{th} x + W''(5 + m) + W'(2 \operatorname{th} x + 3m \operatorname{sh} x) - W \frac{m}{\operatorname{ch} x} = 0.$$

Les conditions aux limites sont $W = W' = 0$ pour $x = x_0$ et x_1 . On pourrait facilement écrire l'équation de résonance, en introduisant quatre solutions fondamentales; mais, il resterait à démontrer l'existence des racines.

Dans le cas de la courroie, $V_0 \neq 0$, on peut chercher des solutions stationnaires, planes ou latérales, analogues à celles du n° 70; mais, elles paraissent difficiles à obtenir rigoureusement.

75. Le fil télégraphique. — C'est un fil très tendu et quasi-horizontal. Ceci revient à supposer, dans ce qui précède, que x_0 et x_1 sont très voisins de zéro. Dans ces conditions, l'équation (143) des vibrations latérales se réduit, en première approximation, à l'équation des cordes vibrantes.

Cherchons la deuxième approximation pour les vibrations stationnaires. Reprenons l'équation (147), en y supposant λ très petit et z fini. On a

$$V'' + V = -V \frac{\lambda^2}{2} z^2.$$

Cherchons la solution telle que $V = A$ et $V' = B$ pour $z = 0$. En première approximation, cette solution est $A \cos z + B \sin z$. Substituons-la à V au second membre; nous obtenons

$$V'' + V = -\frac{\lambda^2}{2} z^2 (A \cos z + B \sin z).$$

(1) Loc. cit., p. 20.

L'intégration est élémentaire et conduit à

$$V = A \left[\cos z + \frac{\lambda^2}{4} \left(-\frac{z^2}{2} \cos z + \frac{3z - 2z^3}{6} \sin z \right) \right] \\ + B \left[\sin z + \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{2z^3 - 3z}{6} \cos z + \frac{1 - z^2}{2} \sin z \right) \right].$$

En annulant V_0 et V_1 , puis éliminant A et B , on obtient, au quatrième ordre près en λ :

$$z_1 - z_0 = n\pi \left[1 + \lambda^2 \frac{3 - 2(z_0^2 + z_0 z_1 + z_1^2)}{24} \right].$$

D'où, en rétablissant l'homogénéité par l'introduction du rayon de courbure R au sommet de la chaînette

$$(150) \quad \omega_n = \frac{n\pi\sqrt{gR}}{x_1 - x_0} \left[1 + \frac{3(x_1 - x_0)^2 - 2n^2\pi^2(x_0^2 + x_0x_1 + x_1^2)}{24n^2\pi^2R^2} \right].$$

Supposons que les deux extrémités du fil soient sur une même horizontale et appelons a la flèche. La formule (150) s'écrit

$$(151) \quad \omega_n = \frac{n\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{2a}} \left(1 - \frac{n^2\pi^2 - 6}{3n^2\pi^2} \frac{a^2}{x_0^2} \right).$$

76. Occupons-nous maintenant des vibrations planes. L'équation (149) s'écrit approximativement, en prenant toujours z pour variable indépendante

$$W''' + W'' = 0.$$

L'intégration est immédiate, ainsi que la formation de l'équation de résonance, qui s'écrit, en posant $2\alpha = z_1 - z_0$

$$\sin \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 0;$$

d'où

$$(152) \quad \omega_n = \frac{2n\pi\sqrt{gR}}{x_1 - x_0}, \quad \omega'_n = \frac{2\alpha_n\sqrt{gR}}{x_1 - x_0},$$

en appelant α_n l'une quelconque des racines positives de l'équation $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$.

On retrouve les harmoniques pairs des cordes vibrantes. Les harmoniques impairs, sauf le premier, sont remplacés par la seconde formule, ce qui ne change pas beaucoup leur fréquence, car $2\alpha_n$ est voisin de $(2n+1)\pi$.

On pourrait passer à la deuxième approximation, par la même méthode qu'au n° 75. Mais, les calculs seraient pénibles et je ne les ai pas entrepris.

77. La courroie horizontale. — Cherchons une vibration latérale stationnaire complexe de la forme $v = Ve^{i\omega t}$. Gardant la variable z du n° 73, nous avons l'équation différentielle

$$V'' - 2ikV' + V = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$V = A e^{i(k+l)z} + B e^{i(k-l)z}$$

en posant

$$h = \sqrt{1 + k^2} = \sqrt{\frac{T}{\rho g}}.$$

L'équation de résonance s'en déduit immédiatement. En supprimant le facteur $e^{ik(z_0+z_1)}$, on obtient

$$\sinh h(z_1 - z_0) = 0;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant g par $\frac{T}{\rho} - V_0^2$,

$$(153) \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho} \left(1 - \frac{\rho V_0^2}{T}\right)}.$$

Cette formule, qui est homogène, se réduit à celle des cordes vibrantes pour $V_0 = 0$. Elle montre que la vitesse de la courroie diminue la fréquence ⁽¹⁾.

On pourrait, comme au n° 75, améliorer l'approximation.

78. Passons aux vibrations planes et posons $w = We^{i\omega t}$. En gardant toujours les notations du n° 73, l'équation (144) nous donne l'équation différentielle

$$W'''' - 2ikW''' + W'' = 0,$$

dont l'intégrale générale se déduit immédiatement de celle du n° 77

$$W = A e^{i(k+h)z} + B e^{i(k-h)z} + Cz + D.$$

En annulant W et W' pour z_0 et z_1 , puis éliminant les constantes au moyen d'un déterminant que l'on développe facilement, on obtient, après suppression du facteur $e^{ik(z_0+z_1)}$ et en posant $\varphi = h(z_1 - z_0)$ et $q = \frac{k}{h} = V_0 \sqrt{\frac{\rho}{T}}$,

$$(154) \quad 2(\cos q\varphi - \cos \varphi) - (1 - q^2)\varphi \sin \varphi = 0.$$

Pour $V_0 = 0$, $q = 0$, on retrouve l'équation du n° 76.

Si $V_0 \neq 0$, on voit facilement qu'il existe une infinité de racines, séparées par les arcs $\frac{\pi}{2} + n\pi$, dès que n est assez grand. Les grandes racines sont d'ailleurs asymptotiques à $n\pi$.

Supposons V_0 assez petit devant $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ pour que q^2 soit petit devant l'unité ⁽²⁾,

(1) En outre, elle introduit une variation de phase (remarque du n° 70).

(2) Avec l'exemple du n° 71, $\frac{T}{\rho}$ vaut 4000. Donc, $q^2 = \frac{V_0^2}{4000}$, pour le brin menant. Pour le brin mené, $\frac{T}{\rho} = 4000 e^{-fz} + V^2(1 - e^{-fz})$; donc, en prenant $e^{-fz} = 0,4$; $q^2 = \frac{V_0^2}{1600 + 0,6 V_0^2}$. Pour $V_0 = 24$, on a

$$q^2 = 0,144 \quad \text{et} \quad q'^2 = 0,296.$$

C'est déjà un peu fort. Mais, il faut remarquer que l'erreur relative commise en appliquant les formules (155) est de l'ordre de q^4 , soit de 0,021 dans le premier cas et de 0,088 dans le second cas. Bien entendu, pour des vitesses supérieures, les formules deviendraient suspectes.

L'équation s'écrit approximativement

$$2(1 - \cos \varphi) - \varphi \sin \varphi = q^2 \varphi (\varphi - \sin \varphi).$$

Les racines approchées sont $2n\pi(1 - q^2)$ et $2\alpha_n(1 + q^2)$, avec la notation du n° 76. On en déduit les formules homogènes

$$(155) \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \left(1 - \frac{\rho V_0^2}{T}\right), \quad \omega'_n = \frac{2\alpha_n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \left(1 + \frac{\rho V_0^2}{T}\right).$$

L'effet de la vitesse V_0 est de diminuer les fréquences de rang impair et d'augmenter celles de rang pair.

79. *Le fil oblique.* — Cette fois, x varie dans un intervalle très petit $(x_0 - a, x_0 + a)$, x_0 ayant une valeur finie quelconque. La pente du fil est $\text{sh } x_0 = \tan \varphi$; d'où $\text{ch } x_0 = \sec \varphi$, $\text{th } x_0 = \sin \varphi$.

Les vibrations latérales stationnaires sont déterminées, en première approximation, par l'équation différentielle

$$V'' + \frac{\omega^2}{g \cos \varphi} V = 0;$$

laquelle se déduit de celle du fil horizontal en remplaçant ω par $\frac{\omega}{\sqrt{\cos \varphi}}$.

On en déduit que les fréquences se déduisent de celles du fil horizontal en multipliant par $\sqrt{\cos \varphi}$.

Pour les vibrations planes, posons $x - x_0 = \frac{z}{\omega} \sqrt{g \cos \varphi}$. Nous retombons sur la première approximation du n° 76. On en tire la même conclusion que ci-dessus.

80. *La courroie oblique.* — Avec la variable z ci-dessus et en changeant k en $k\sqrt{\cos \varphi}$, on retombe, pour les vibrations latérales ou planes, sur les équations des n°s 77 et 78. Dès lors, il suffit, dans les formules (153) et (155), de multiplier le second membre par $\sqrt{\cos \varphi}$ et d'y remplacer V_0 par $V_0 \sqrt{\cos \varphi}$.

81. *Le fil tournant.* — Considérons un fil attaché par ses deux extrémités, lesquelles tournent avec une vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe fixe Δ . Supposons cette vitesse assez grande et le fil assez éloigné de Δ pour que la pesanteur soit négligeable devant la force centrifuge. Nous nous proposons d'étudier les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre relatif.

Quand le fil est en mouvement par rapport au trièdre tournant, il faut ajouter la force de Coriolis à la force centrifuge. Dès lors, les quantités appelées ΔX , ΔY , ΔZ au n° 22 sont les composantes de l'accroissement de la force centrifuge augmenté de la force de Coriolis.

Nous étudierons seulement trois cas, pour lesquels la courbe d'équilibre est simple.

82. Supposons d'abord que cette courbe soit un *cercle de rayon R et d'axe Δ*. La tension a la valeur constante $T = \rho R^2 \Omega^2$.

Prenons Ox_0 suivant le prolongement du rayon, Oz_0 suivant le vecteur vitesse d'entraînement et Oy_0 parallèle à Δ . On a

$$\Delta X = \rho \left(\Omega^2 u - 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad \Delta Y = 0, \quad \Delta Z = \rho \left(\Omega^2 w + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

L'équation (37) des *vibrations latérales se réduit à celle des cordes vibrantes*.

En éliminant θ et u entre (36), (38) et (39), on obtient, en prenant pour variable l'angle polaire $\varphi = \frac{s}{R}$

$$\Omega^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + 3 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial t^2} - 4\Omega \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Cherchons une *solution stationnaire complexe* de la forme $w = We^{i\omega t}$. Nous avons l'équation différentielle

$$W''' + W''(3 + k^2) - 4ikW' - k^2W = 0, \quad \text{en posant } k = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Cherchons une solution en $e^{ir\varphi}$. L'équation caractéristique admet la racine $r = k$. Les trois autres sont données par l'équation

$$r^3 + kr^2 - 3r + k = 0;$$

elles sont toutes trois réelles pour $k < \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = 0,8965$. Appelons-les, dans tous les cas, r_1, r_2, r_3 . L'intégrale générale est

$$W = C e^{ik\varphi} + \sum_{n=1}^3 C_n e^{ir_n\varphi}.$$

Prenons pour origine le milieu de l'arc et soit 2φ l'angle au centre. En écrivant les conditions aux limites $W = W' = 0$ pour les deux extrémités et éliminant les constantes, on obtient l'équation de résonance

$$\Sigma (kr_1 + r_2r_3) \sin(k - r_1)\varphi \sin(r_2 - r_3)\varphi = 0$$

ou encore

$$\Sigma (k - r_1)(r_2 - r_3) \cos 2(k + r_1)\varphi = 0.$$

Pour k *infinitement petit*, on trouve les solutions asymptotiques suivantes :

$$z = n\pi - \frac{k^2}{27} \left(\frac{17}{n\pi} + \frac{47n\pi}{3} \right)$$

et

$$z = z_n + \frac{k^2}{81z_n} (51 + 55 \cos^2 z_n - 4z_n^2) \quad \text{avec } \operatorname{tg} z_n = z_n.$$

Pour $k = 1$, on a

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1 + \sqrt{2}, \quad r_3 = -1 + \sqrt{2};$$

L'équation de résonance est vérifiée identiquement; donc, *quel que soit l'arc de cercle, la fréquence de la rotation est une fréquence propre des vibrations planes*.

Si k est *très grand*, on a asymptotiquement $r_1 = -k$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Les pulsations propres sont données par

$$\omega_n = \Omega \frac{n\pi}{2\varphi},$$

le rapport $\frac{n\pi}{2\varphi}$ devant être très grand.

Pour une valeur donnée de φ , les fréquences des vibrations sont toutes proportionnelles à la fréquence de la rotation.

83. Supposons maintenant que la position d'équilibre soit un segment AB d'une droite coupant orthogonalement Δ en un point P extérieur à AB. On a $T = \frac{\rho}{2}\Omega^2(s_1^2 - s^2)$, en prenant l'origine des s sur Δ . Prenons Ox_0 suivant la vitesse d'entraînement. Les ΔX , ΔY , ΔZ ont la même valeur qu'au n° 82.

Les vibrations parallèles à Δ sont données par (41), soit

$$(s_1^2 - s^2) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2s \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{2}{\Omega^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Les vibrations stationnaires de pulsation ω sont déterminées par l'équation différentielle

$$(s_1^2 - s^2) V'' - 2s V' + 2k^2 V = 0, \quad k = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Pour les vibrations perpendiculaires à Δ , on a la même équation, d'après (40) et en tenant compte de $w = 0$.

Posons $\frac{s}{s_1} = 1 - 2x$; l'équation devient

$$x(1-x)V'' + (1-2x)V' + 2k^2 V = 0,$$

soit l'équation de Gauss, dans le cas où $\gamma = 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -2k^2$. Si l'extrémité B est libre, s_1 est son abscisse. Pour $s = s_1$, on a $x = 0$. Donc, l'intégrale holomorphe est seule à conserver et l'on a

$$V = F(\alpha, \beta, 1, x).$$

Si l'on appelle l la longueur du fil, l'équation de résonance s'écrit

$$F(\alpha, \beta, 1, \frac{l}{2s_1}) = 0.$$

Dans cette équation l'inconnue est k . Elle a une *infinité de racines*. Si le fil est tendu entre ses deux extrémités, s_1 est supérieur à l'abscisse de B. Dans ce cas, il faut prendre, pour V , l'intégrale générale de l'équation de Gauss, soit $V = AF(x, k) + BG(x, k)$. L'équation de résonance est

$$F(x_0, k)G(x_1, k) - F(x_1, k)G(x_0, k) = 0;$$

x_0 et x_1 correspondant à A et B. Cette équation en k admet aussi une *infinité de racines* ⁽¹⁾.

Les fréquences propres sont toujours proportionnelles à la fréquence de la rotation.

84. Supposons enfin le fil *rectiligne et parallèle à Δ*. On a $T = \text{const.}$ et

$$\Delta X = \rho \Omega^2 u + 2\rho \Omega \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \Delta Y = \rho \Omega^2 v - 2\rho \Omega \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \Delta Z = 0.$$

Les équations (40) et (41) deviennent

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \Omega^2 u + 2\rho \Omega \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad T \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \Omega^2 v - 2\rho \Omega \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cherchons une solution de la forme $u = U \cos \omega t$, $v = V \sin \omega t$. On a

$$TU'' + \rho(\omega^2 + \Omega^2)U + 2\rho\Omega\omega V = 0, \quad TV'' + \rho(\omega^2 + \Omega^2)V + 2\rho\Omega\omega U = 0.$$

Ce système s'intègre immédiatement par addition et soustraction; l'intégrale générale est

$$\begin{aligned} U &= A \cos \alpha s + B \sin \alpha s + A' \cos \beta s + B' \sin \beta s, \\ V &= A \cos \alpha s + B \sin \alpha s - A' \cos \beta s - B' \sin \beta s, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = (\Omega + \omega) \sqrt{\frac{\rho}{T}}, \quad \beta = (\omega - \Omega) \sqrt{\frac{\rho}{T}}.$$

Les conditions aux limites sont $U = V = 0$ pour $s = 0$ et l . On en déduit

$$\sin \alpha l \sin \beta l = 0.$$

D'où

$$\omega = \Omega + \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

n étant un entier positif ou négatif.

Pour $\Omega = 0$, on retrouve la formule des cordes vibrantes.

85. *Fil sur une surface à courbure totale constante* ⁽²⁾. — Les vibrations stationnaires sont déterminées par l'équation différentielle, déduite de (52)

$$(156) \quad V'' + \left(\Gamma + \frac{\rho \omega^2}{T} \right) V = 0.$$

Posons $\Gamma + \frac{\rho \omega^2}{T} = m^2$. On a $V = A \cos ms + B \sin ms$.

⁽¹⁾ On peut le démontrer comme il suit. Posons $V = \frac{y}{\sqrt{x(1-x)}}$. L'équation différentielle devient, en posant $2k^2 = \lambda$

$$y'' + \frac{1 + 4\lambda x(1-x)}{4x^2(1-x)^2} y = 0.$$

En reprenant les raisonnements d'Émile Picard (*loc. cit.*), on démontre facilement qu'il existe une infinité de valeurs de λ pour lesquelles il existe une solution s'annulant pour les valeurs x_0 et x_1 , comprises entre 0 et 1.

⁽²⁾ Il suffit que la courbure totale soit constante le long de la position d'équilibre.

Si les deux extrémités sont fixes, l'équation de résonance est $\sin ml = 0$, d'où

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho} \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} - \Gamma \right)}.$$

Si $\Gamma > 0$, il faut que n soit supérieur à $\frac{l}{\pi} \sqrt{\Gamma}$. C'est ainsi que pour une sphère de rayon R , le minimum de n est $\frac{\alpha}{\pi}$, en appelant α l'angle au centre du fil au repos. Si $\alpha = \pi$, on peut prendre $n = 1$; d'où $\omega_n = 0$. Ceci correspond au fait que le fil peut tourner très lentement autour du diamètre passant par ses extrémités.

86. Voici un autre exemple.

Supposons que le fil soit tendu sur une sphère de rayon R entre l'extrémité fixe A et le point A_1 . Entre A_1 et l'autre extrémité A_2 , le fil est libre, A_2 étant fixe. Soient $0, s_1, s_2$ les abscisses curvilignes de A, A_1, A_2 .

On a toujours l'équation (156), mais avec $\Gamma = \frac{1}{R^2}$ pour $s < s_1$ et $\Gamma = 0$ pour $s > s_1$. On a

$$V = A \sin ms, \quad \text{pour } s \leq s_1; \quad V = A' \sin m's + B' \cos m's, \quad \text{pour } s \geq s_1;$$

avec

$$m^2 = \frac{1}{R^2} + m'^2, \quad m'^2 = \frac{\rho \omega^2}{T}.$$

Pour $s = s_1$, v et λ et, par conséquent, V et V' doivent avoir la même valeur. En outre $V = 0$ pour $s = s_2$. On en déduit l'équation de résonance

$$\frac{\operatorname{tg} ms_1}{m} + \frac{\operatorname{tg} m'(s_2 - s_1)}{m'} = 0.$$

Chacun des termes du premier membre est une fonction croissante de m ou de m' et passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand ms_1 ou $m'(s_2 - s_1)$ traverse les valeurs $\frac{\pi}{2} + n\pi$. On en conclut que l'équation admet une infinité de racines.

On pourrait, plus généralement, supposer que le fil est tendu sur deux sphères tangentes en A_1 . On aurait une équation de résonance analogue à la précédente, mais avec

$$m^2 = m'^2 + \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}.$$

