

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ LAGRANGE

Propriétés métriques anallagmatiques des cycliques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 62 (1945), p. 385-417

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__385_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES ANALLAGMATIQUES

DES

CYCLIQUES

PAR M. RENÉ LAGRANGE.



Dans un Mémoire antérieur ⁽¹⁾ j'ai proposé une métrique anallagmatique différente de la géométrie non euclidienne classique, construite de manière aussi logique que possible à partir de la distance covariante (ou puissance réduite) du point de la sphère, comme les distances euclidiennes peuvent se déduire de la distance du point au plan. Lorsqu'on applique cette métrique à la figure formée par trois cercles ⁽²⁾, les analogies avec les théorèmes euclidiens du triangle sont remarquables et donnent un certain intérêt à cette construction synthétique. Un tel tricerclé peut être considéré comme orthogonal à un cercle, réel ou imaginaire, servant de base à une géométrie non euclidienne, ou, pour utiliser le langage du Mémoire cité, servant de base à un champ cocyclique de bipoints ⁽³⁾. Les côtés sont alors les équivalents des droites en géométrie euclidienne, et sont représentés par des équations linéaires en coordonnées tétracycliques. Lorsqu'on passe au second degré, on obtient les quartiques bicirculaires ou cycliques planes, dont certaines analogies avec les coniques sont bien connues. Dans le Mémoire cité, la métrique en question a déjà servi à définir la polaire d'un bipoint par rapport à une cyclique, dans un champ cocyclique, et à montrer que c'est un cercle du champ, donc l'équivalent d'une droite euclidienne.

⁽¹⁾ *Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique* [Ann. Éc. Norm., (3), t. LIX, fasc 4, 1942, p. 1-42].

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 34.

⁽³⁾ C'est un champ de bipoints (couples de points) tel que deux bipoints quelconques du champ soient cocycliques; c'est encore un champ de bipoints invariants dans une certaine inversion.

Le présent travail se propose de poursuivre l'analogie avec les coniques, et l'on verra que celle-ci va très loin, ce qui confirme l'intérêt que peut offrir cette métrique.

Lorsqu'on reste dans le plan, les deux définitions des coniques communes aux trois genres sont : 1° celle où la conique est le lieu du centre d'un cercle passant par un foyer et tangent à un cercle (ou droite) directeur; 2° celle où c'est le lieu des points dont le rapport des distances à un foyer et une directrice est constant. Or, une cyclique plane Q peut toujours être considérée comme appartenant à un champ cocyclique dont le cercle de base est un cercle directeur ω de Q . On peut même supposer que ω est réel, car deux au moins des quatre cercles directeurs d'une cyclique sont réels. On peut alors définir Q , soit comme le lieu des bicentres ⁽¹⁾ des bicercles qui passent par un bipoint focal de Q et sont tangents à un bicercle donné, soit comme le lieu des bipoints dont le rapport des distances anallagmatiques à un bipoint focal et à un cercle du champ est constant. Par contre la définition bifocale qui résulte, pour les coniques, du parallélisme des deux directrices, n'a pas d'équivalent ici.

L'examen des relations entre les éléments de ces deux définitions, bifoyers, directrices, bicercles directeurs, excentricité conduit à distinguer trois genres de cycliques; tout d'abord, la distinction en deux classes suivant que les quatre foyers réels sont ou non cocycliques est bien connue; un exemple bien particulier examiné au paragraphe 5 nous fait préférer dire que Q est de première ou de deuxième classe suivant que son tétracycle directeur est lui-même de première ou de deuxième classe, c'est-à-dire qu'il a trois ou deux cercles réels. Nous partageons ensuite la première classe en deux genres, suivant que la valeur absolue de l'excentricité est inférieure à 1 (genre elliptique) ou supérieure à 1 (genre hyperbolique); le genre parabolique comprend toutes les cycliques de deuxième classe. Il est bien remarquable que cette distinction, appuyée sur l'excentricité, correspond à des différences de formes dont la traduction rappelle les trois genres de coniques. C'est ainsi que, dans le champ cocyclique qui a pour base un cercle directeur réel d'une cyclique Q , celle-ci n'admet un bicentre anallagmatique réel que si elle appartient aux deux premiers genres; on appelle *bicentre anallagmatique* un bipoint autour duquel la transposition anallagmatique conserve Q ; c'est le bipoint commun aux deux cercles directeurs réels de Q qui sont distincts du cercle de base. Les cercles du champ qui passent par ce bicentre, ou diamètres de Q , rencontrent tous Q lorsqu'elle est elliptique, de sorte qu'elle est alors constituée par deux ovales séparés par la base du champ, chacun d'eux entourant un point du bicentre; Q n'a aucun point réel à l'infini au sens de la géométrie non euclidienne, c'est-à-dire sur la base du champ. Par contre, une cyclique hyperbolique n'est

⁽¹⁾ Pour la définition, cf. *loc. cit.*, p. 32. Nous y revenons d'ailleurs dans ce travail, pour les besoins du calcul.

coupée que par les diamètres qui sont intérieurs à un certain angle, de sorte qu'elle est formée de deux ovales intérieurs l'un à l'autre, rencontrant tous deux la base du champ, et de manière que le bicentre soit dans la couronne. Par tout point M du plan, il est bien connu qu'il passe deux cycliques homofocales orthogonales; s'il s'agit de cycliques de première classe, l'une est elliptique et l'autre hyperbolique. Si A et B sont les deux foyers réels situés du même côté que M de la base du champ, les tangentes aux deux cycliques bissectent le tricerle AMB comme font les tangentes à une ellipse et une hyperbole, c'est-à-dire extérieurement pour la cyclique elliptique et intérieurement pour l'autre.

L'analogie se poursuit avec les distances du bicentre aux extrémités des diamètres et celles d'un bifoyer aux cercles du champ tangents (ou tangentes de la cyclique). C'est ainsi qu'il existe une relation involutive entre les carrés des distances du bicentre aux extrémités de deux diamètres conjugués (par rapport aux deux diamètres tangents à la cyclique), ce qui est l'extension de l'énoncé d'Apollonius. La distance du bicentre à l'extrémité du diamètre focal ne dépend que du rayon du bicercle directeur et non des foyers eux-mêmes, ce qui est le cas des coniques à centre. Enfin, le produit des distances des deux bifoyers aux tangentes de Q est constant, et ce théorème admet une réciproque.

Telles sont les propriétés les plus importantes que nous démontrons dans ce travail, et qui sont évidemment vraies des cycliques de l'espace, par suite de leur caractère anallagmatique. Il est fait naturellement usage des coordonnées tétracycliques, avec quelques démonstrations géométriques dans le dernier Chapitre. Les premiers paragraphes sont consacrés au rappel des définitions des distances anallagmatiques d'un bipoint à un cercle, et de deux bipoints cocycliques, et à leur expression en coordonnées tétracycliques.

CHAPITRE I.

QUELQUES FORMULES DE MÉTRIQUE ANALLAGMATIQUE PLANE.

1. Étant donné, dans le plan, un couple de points, ou bipoint, (BB') et le cercle α , la distance anallagmatique $[(BB')\alpha]$ est définie par ⁽¹⁾

$$[(BB')\alpha] = \frac{2}{BB'} \sqrt{B\alpha \cdot B'\alpha},$$

où $B\alpha$ représente la distance de B au cercle α , égale à celle de B à la sphère de

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 8, formule (2).

grand cercle α ; cette distance n'est rien autre que la puissance réduite, de sorte que, si r désigne le rayon de α , on a

$$(1) \quad [(BB')\alpha]^2 = \frac{\ell_{\alpha} B \times \ell_{\alpha} B'}{r^2 \cdot \overline{BB'}^2} = \frac{(\overline{BA}^2 - r^2)(\overline{B'A}^2 - r^2)}{r^2 \cdot \overline{BB'}^2},$$

où A est le centre de α . Quand α devient rectiligne, $B\alpha$ devient la distance euclidienne de B à α , donc (1) se réduit à

$$[(BB')\alpha]^2 = 4 \frac{(\text{dist. } B \text{ à } \alpha) \times (\text{dist. } B' \text{ à } \alpha)}{\overline{BB'}^2}.$$

En particulier, si α est une droite parallèle à la droite BB' , à la distance d de celle-ci, il vient

$$(2) \quad [(BB')\alpha] = \frac{2d}{\overline{BB'}}.$$

Rapportons la figure au tétracycle dont un cercle ω_1 est α lui-même; prenons pour cercles ω_3 et ω_4 les diamètres de α respectivement parallèle et perpendiculaire à BB' ; le quatrième cercle ω_2 du tétracycle est le cercle imaginaire pur concentrique à α , et de rayon ir . En coordonnées cartésiennes dont les axes Ox , Oy sont ω_3 et ω_4 , les équations des cercles du tétracycle sont

$$(\omega_1) \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad (\omega_2) \quad x^2 + y^2 + r^2 = 0, \quad (\omega_3) \quad x = 0, \quad (\omega_4) \quad y = 0;$$

de sorte que si les coordonnées cartésiennes de B , B' sont

$$(B) \quad x, y; \quad (B') \quad x, y',$$

leurs coordonnées tétracycliques sont, par exemple,

$$(B) \quad b_1 = \frac{x^2 + y^2 - r^2}{-2r}, \quad b_2 = \frac{x^2 + y^2 + r^2}{-2ir}, \quad b_3 = x, \quad b_4 = y,$$

$$(B') \quad b'_1 = \frac{x^2 + y'^2 - r^2}{-2r}, \quad b'_2 = \frac{x^2 + y'^2 + r^2}{-2ir}, \quad b'_3 = x, \quad b'_4 = y';$$

celles de α sont

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0.$$

L'expression (1) s'écrit alors

$$[(BB')\alpha]^2 = \frac{(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 + y'^2 - r^2)}{r^2(y' - y)^2} = \frac{-2b_1b'_1}{\sum b_i b'_i},$$

ou encore, sous une forme anallagmatiquement invariante,

$$(3) \quad [(BB')\alpha]^2 = -2 \frac{(\sum b_i \alpha_i)(\sum b'_i \alpha_i)}{\sum b_i b'_i}.$$

Ceci représente donc la distance d'un bipoint à un cercle du plan rapporté à un tétracycle quelconque. Un cas particulier important pour nos applications est celui où (BB') et α appartiennent à un champ cocyclique dont la base est le cercle ω_4 du tétracycle; B et B' sont inverses par rapport à ω_4 , ce qui permet de prendre

$$b'_4 = -b_4, \quad b'_j = b_j \quad (j = 1, 2, 3);$$

en outre, $\alpha_4 = 0$, car α est orthogonal à ω_4 ; compte tenu de $\sum_{j=1}^3 b_j^2 = -b_4^2$, (3) se réduit alors à

$$(4) \quad [(BB')\alpha]^2 = \frac{(\sum' b_j \alpha_j)^2}{b_4^2},$$

où le symbole \sum' a la signification $\sum_{j=1}^3$.

Remarque. — Avant de poursuivre, observons que nous aurons l'occasion d'adopter le tétracycle simple suivant, semblable à celui que nous venons d'utiliser, et que nous appellerons tétracycle T_0 . Il s'agit des quatre cercles d'équations

$$(T_0) \quad (\omega_1) \quad x^2 + y^2 - \rho^2 = 0, \quad (\omega_2) \quad x^2 + y^2 + \rho^2 = 0, \quad (\omega_3) \quad x = 0, \quad (\omega_4) \quad y = 0,$$

où ρ^2 peut être positif ou imaginaire pur ⁽¹⁾. Si ρ^2 est positif, T_0 est dit de *première classe*; s'il est imaginaire pur, T_0 est dit de *deuxième classe*. Au point de vue réel, ces deux formes de tétracycle sont anallagmatiquement équivalentes aux deux formes de tétracycles que constituent les quatre cercles directeurs d'une cyclique plane réelle dont les quatre foyers réels sont cocycliques (1^{re} classe) ou non (2^e classe).

Les coordonnées tétracycliques correspondantes d'un point de coordonnées cartésiennes x, y sont

$$x_1 = \frac{x^2 + y^2 - \rho^2}{-2\rho}, \quad x_2 = \frac{x^2 + y^2 + \rho^2}{-2i\rho}, \quad x_3 = x, \quad x_4 = y,$$

avec $x_1 - ix_2 = \rho$, et celles d'un cercle de centre x, y et rayon r ,

$$\xi_1 = \frac{x^2 + y^2 - r^2 - \rho^2}{-2r\rho}, \quad \xi_2 = \frac{x^2 + y^2 - r^2 + \rho^2}{-2ir\rho}, \quad \xi_3 = \frac{x}{r}, \quad \xi_4 = \frac{y}{r}.$$

2. Considérons maintenant deux bipoints cocycliques (AA') , (BB') de coordonnées tétracycliques $a_i, a'_i, b_i, b'_i, i = 1, 2, 3, 4$ respectivement.

(1) T_0 coïncide toujours avec son imaginaire conjugué.

La condition de cocyclisme est

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

La distance anallagmatique est alors définie par ⁽¹⁾

$$|(AA')(BB')|^2 = 4 \frac{AB \cdot AB' \cdot A'B \cdot A'B'}{AA'^2 \cdot BB'^2},$$

et est réelle ou imaginaire pure suivant que les deux arcs AA' et BB' du cercle ne sont pas ou sont empiétants. En coordonnées tétracycliques, où ρ_i sont les rayons des quatre cercles ω_i du tétracycle, on sait que ⁽²⁾

$$\overline{AB}^2 = -2 \frac{\sum a_i b_i}{\left(\sum \frac{a_i}{\rho_i}\right) \left(\sum \frac{b_i}{\rho_i}\right)},$$

donc

$$(6) \quad |(AA')(BB')|^2 = 4 \left| \frac{\sqrt{(\sum a_i b_i)(\sum a_i b'_i)(\sum a'_i b_i)(\sum a'_i b'_i)}}{(\sum a_i a'_i)(\sum b_i b'_i)} \right|.$$

En particulier, pour deux bipoints d'un champ cocyclique de base ω_4 , (6) se réduit à

$$(7) \quad |(AA')(BB')|^2 = 4 \left| \frac{(\sum a_i b_i)(\sum a_i b'_i)}{(\sum a_i a'_i)(\sum b_i b'_i)} \right| = \left| \frac{(\sum a_j b_j)^2 - a_4^2 b_4^2}{a_4^2 b_4^2} \right|,$$

si l'on prend $a'_j = a_j$, $b'_j = b_j$ ($j = 1, 2, 3$), $a'_4 = -a_4$, $b'_4 = -b_4$. Plus précisément, avec le tétracycle T_0 , on peut écrire

$$(8) \quad [(AA')(BB')]^2 = \frac{(\sum a_i b_i)(\sum a_i b'_i)}{a_4^2 b_4^2},$$

où les deux membres sont positifs lorsque les deux bipoints sont réels, et négatifs lorsqu'un seul bipoint est réel, l'autre étant d'abscisse réelle et d'ordonnées imaginaires pures.

Remarque. — Le carré du déterminant nul (5) donne

$$[(\sum a_i b_i)(\sum a'_i b'_i) + (\sum a_i b'_i)(\sum a'_i b_i) - (\sum a_i a'_i)(\sum b_i b'_i)]^2 = 4(\sum a_i b_i)(\sum a_i b'_i)(\sum a'_i b_i)(\sum a'_i b'_i),$$

donc (6) s'écrit encore

$$(6') \quad |(AA')(BB')|^2 = 2 \left| \frac{(\sum a_i b_i)(\sum a'_i b'_i) + (\sum a_i b'_i)(\sum a'_i b_i)}{(\sum a_i a'_i)(\sum b_i b'_i)} - 1 \right|.$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 16.

⁽²⁾ On choisit souvent les coordonnées a_i de manière que $\sum \frac{a_i}{\rho_i} = 1$.

CHAPITRE II.

LES DEUX DÉFINITIONS MÉTRIQUES DES CYCLIQUES.

3. La première des deux définitions repose sur le

THÉORÈME. — Dans un champ cocyclique plan, le lieu des bipoints dont le rapport des distances à un bipoint (AA') et à un cercle γ fixes est constant est une cyclique Q de ce champ.

On ne restreint pas les données en supposant que le cercle de base du champ est le quatrième cercle $\omega = \omega_4$ du tétracycle des coordonnées. Les coordonnées de (AA') sont par exemple $(a_j, \pm a_4)$ ($j = 1, 2, 3$), et celles du bipoint courant $(MM')(x_j, \pm x_4)$. Les coordonnées du cercle γ , réel ou imaginaire pur (c'est-à-dire de centre réel et rayon imaginaire pur), sont d'autre part $(\gamma_j, 0)$. En vertu de (4) et (7), l'équation du lieu est de la forme

$$(1) \quad (\sum a_j x_j)^2 - a_4^2 x_4^2 - e^2 a_4^2 (\sum \gamma_j x_j)^2 = 0,$$

où e^2 est une certaine constante. Par exemple, si le champ est lobatchewskien, ω_4 peut être supposé rectiligne, et le tétracycle des coordonnées identifié avec T_0 . D'après (4) et (8), e^2 représente alors effectivement le carré du rapport des distances de l'énoncé, et est positif ou négatif suivant que (AA') et γ sont ou non de même nature (réels ou imaginaires purs). Par analogie avec les coniques, c'est le coefficient e de (1) que nous appelons l'*excentricité* du lieu Q . Ce lieu est bien une quartique bicirculaire de cercle directeur ω . Son équation s'écrit encore

$$(2) \quad 2(\sum a_i x_i)(\sum a'_i x_i) + e^2(\sum a_i a'_i)(\sum \gamma_i x_i)^2 = 0,$$

dont la forme est anallagmatiquement invariante, et représente donc Q dans un système quelconque de coordonnées tétracycliques, où les a'_i sont les coordonnées de A' . (2) montre également que les cercles points A, A' sont bitangents à Q aux points de rencontre avec γ ; A, A' sont deux foyers de Q et γ est la polaire anallagmatique ⁽¹⁾ du bipoint (AA') par rapport à la cyclique. Nous appellerons γ la *directrice* de Q associée au *bifoyer* (AA') .

La cyclique Q ainsi obtenue est la plus générale, car elle dépend essentiellement de 8 paramètres, qui sont les 3 paramètres du cercle directeur ω , les 4 paramètres de (AA') et γ dans le champ cocyclique de base ω , et l'excentricité e . Plus précisément, soit ω un cercle directeur réel d'une cyclique quel-

(1) Pour la définition, cf. *loc. cit.*, p. 29.

conque Q, A et A' deux foyers de Q inverses par rapport à ω , et γ la polaire anallagmatique de ce bifoyer; si (AA') est réel, γ est réel ou imaginaire pur; soit enfin (MM') un bipoint de Q dans le champ de base ω , et e la valeur du rapport $\frac{[(MM')(AA')]}{[(MM')\gamma]}$. La cyclique définie par l'énoncé du théorème actuel et les éléments A, A', γ , e est tangente à Q aux 4 points de rencontre avec γ , ce qui fait, avec M et M', 10 points communs outre les points cycliques; elle coïncide donc avec elle.

Lorsque (AA') est sur γ , chaque cercle B passant par (AA') est un lieu de bipoints (MM') tels que ⁽¹⁾

$$[(MM')\gamma] = [(MM')(AA')] \left| \sin \widehat{\beta, \gamma} \right|,$$

donc Q se décompose en deux cercles passant par (AA') et également inclinés sur γ . Q n'est réel en même temps que (AA') et γ que si $e^2 \geq 1$. On peut prendre γ pour ω_3 , donc $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_3 = 1$ et $a_3 = 0$. (1) s'écrit

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - e^2a_4^2x_3^2 = 0$$

ou

$$(a_2x_1 - a_1x_2)^2 + (e^2 - 1)a_4^2x_3^2 = 0.$$

Par exemple, si T_0 est de première classe, a_2 et x_2 sont imaginaires purs si Q est réel, d'où les deux équations

$$i(a_2x_1 - a_1x_2) \pm \sqrt{e^2 - 1}a_4x_3 = 0.$$

4. Par analogie avec les coniques en géométrie euclidienne, les cycliques peuvent être considérées comme les lieux des bicentres des bicercles passant par un bipoint donné et tangents à un bicercle donné. Les couples de cercles (bicercles) dont il s'agit ici sont anallagmatiquement symétriques par rapport à la base du champ cocyclique, et sont les lieux d'égale distance anallagmatique à un bipoint donné, qu'on appelle le bicentre ⁽²⁾.

Le quatrième cercle ω_4 du tétracycle T étant toujours le cercle ω du champ, supposé réel, désignons par $(a_j, \pm a_4)$ les coordonnées du bipoint (AA'), et par $|k|$ la valeur absolue de la distance anallagmatique donnée; le lieu des bipoints (MM') de coordonnées $(x_j, \pm x_4)$ situés à la distance donnée de (AA') est déterminé par la formule [(7); I] où la lettre x remplace b , donc par une équation de la forme

$$(\sum a_j x_j)^2 - a_4^2 x_4^2 = k^2 a_4^2 x_4^2$$

ou

$$(3) \quad \sum a_j x_j + \varepsilon \sqrt{k^2 + 1} a_4 x_4 = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

⁽¹⁾ Loc. cit., p. 19.

⁽²⁾ Loc. cit., p. 32.

Pour discuter la réalité de ce bicercle, même lorsque (AA') et k cessent d'être réels, on peut supposer, sans restriction d'ordre anallagmatique, que T est le tétracycle T_0 . Les coordonnées tétracycliques de chaque cercle (3) sont proportionnelles aux coefficients des x_i , donc de la forme $sa_j, \varepsilon\sqrt{k^2+1}sa_4$, avec

$$s^2[\sum a_j^2 + (k^2+1)a_4^2] = s^2k^2a_4^2 = 1,$$

donc

$$s = \frac{\varepsilon'}{ka_4},$$

le double signe ε' influant seulement sur le signe donné au rayon. Les coordonnées euclidiennes x, y du centre euclidien et le rayon r sont donnés par

$$s(a_1 - ia_2) = \frac{\rho}{r}, \quad x = rsa_3, \quad y = \varepsilon\sqrt{k^2+1}rsa_4,$$

donc

$$(4) \quad r = \varepsilon'ka_4, \quad x = a_3, \quad y = \varepsilon\sqrt{k^2+1}a_4.$$

(3) est donc réel lorsque (AA') est réel, c'est-à-dire a_3 et a_4 réels, ainsi que k ; il l'est aussi lorsque (AA') est imaginaire, mais d'abscisse réelle, pourvu que ka_4 et $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$ soient réels; a_4 et k sont alors imaginaires, avec $\frac{k^2+1}{k^2} \geq 0$.

c'est-à-dire $\frac{1}{k^2}$ réel et ≥ -1 ; k est imaginaire pur, soit $k = i|k|$ avec $|k| \geq 1$; a_4 est donc imaginaire pur. En résumé, un lieu d'égale distance au bipoint (AA') est réel pourvu que (AA') et le rayon k soient eux-mêmes réels, ou que A, A' soient imaginaires conjugués, k étant imaginaire pur et de module ≥ 1 . Dans le premier cas, on sait que (3) ne coupe pas ω , ce qui se voit d'ailleurs tout de suite en choisissant T_0 de manière que $a_1 = 0, a_2 = i\rho, a_3 = 0, a_4 = \rho$ réel; (3) se réduit à

$$ix_2 + \varepsilon\sqrt{k^2+1}x_4 = 0,$$

et rencontre Ox aux mêmes points que ω_2 , qui sont imaginaires. Dans le deuxième cas, on choisit T_0 de sorte que $a_1 = \rho$ réel, $a_2 = a_3 = 0, a_4 = i\rho$, et (3) devient

$$x_1 + i\varepsilon\sqrt{k^2+1}x_4 \equiv x_1 - \varepsilon\sqrt{|k|^2-1}x_4 = 0,$$

qui coupe Ox aux mêmes points que ω_1 , qui sont réels. Enfin le bicercle devient un cercle double du champ pour $k^2 = -1$.

5. Ceci établi, considérons un deuxième bipoint (BB') réel, de coordonnées $(b_j, \pm b_4)$ et formons le lieu des bipoints $(MM')(\xi_j, \pm \xi_4)$ tels que le bicercle (μ, μ') de bicentre (MM') , qui passe par (BB') , soit tangent au bicercle (α, α') d'équation (3). Si m est le rayon anallagmatique de (μ, μ') ,

réel en même temps que (MM'), car ce bicercle est essentiellement réel, les coordonnées tétracycliques des cercles α et μ sont respectivement

$$(\alpha) \quad \frac{a_j}{ka_4}, \quad \frac{\varepsilon \sqrt{k^2+1}}{k}; \quad (\mu) \quad \frac{\xi_j}{m\xi_4}, \quad \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}.$$

La condition de tangence entre eux est

$$\frac{1}{mk} \left(\frac{1}{a_4 \xi_4} \Sigma' a_j \xi_j + \varepsilon \sqrt{k^2+1} \sqrt{m^2+1} \right) = \pm 1,$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \Sigma' a_j \xi_j + \varepsilon \sqrt{k^2+1} \sqrt{m^2+1} a_4 \xi_4 = \pm k m a_4 \xi_4.$$

En outre, l'équation

$$(6) \quad \Sigma' b_j \xi_j + \sqrt{m^2+1} b_4 \xi_4 = 0$$

exprime que μ passe par le point B.

Si (AA') et k sont réels, on peut supposer $a_4 > 0$, $b_4 > 0$, $k > 0$, $m > 0$, et μ ne peut être tangent qu'au cercle α correspondant à $\varepsilon = 1$: l'élimination de m entre (5) et (6) donne une seule quartique réelle. Si (AA') est imaginaire, $(\alpha\alpha')$ restant réel, k est imaginaire pur, tandis qu'on peut encore supposer $b_4 > 0$, $m > 0$; μ peut alors être tangent à α ou à α' , et, l'ambiguïté subsistant pour ε , on obtient deux quartiques réelles. Après substitution de x_i à ξ_i pour les coordonnées courantes, l'équation du lieu Q est alors

$$(7) \quad (b_4 \Sigma' a_j x_j - \varepsilon \sqrt{k^2+1} a_4 \Sigma' b_j x_j)^2 - k^2 a_4^2 [(\Sigma' b_j x_j)^2 - b_4^2 x_4^2] = 0,$$

ou, sous forme développée,

$$(8) \quad b_4^2 (\Sigma' a_j x_j)^2 + a_4^2 (\Sigma' b_j x_j)^2 - 2\varepsilon \sqrt{k^2+1} a_4 b_4 (\Sigma' a_j x_j) (\Sigma' b_j x_j) + k^2 a_4^2 b_4^2 x_4^2 = 0.$$

L'équation (7) met en évidence que les cercles points $\Sigma' b_j x_j \pm b_4 x_4 = 0$ sont tangents à la quartique, donc (BB') est un bifoyer, et la symétrie de (8) en les deux bipoints (AA'), (BB') montre que (AA') est un autre bifoyer.

Si (AA') et (BB') sont réels, $\varepsilon = 1$, et l'on a une seule cyclique réelle Q, ayant quatre foyers réels cocycliques, donc de première classe; trois de ses cercles directeurs sont réels. Si (AA') est imaginaire, ω étant Ox , les points de Poncelet correspondants sont réels et sur Ox , et foyers de Q; donc les deux cycliques obtenues sont de deuxième classe, c'est-à-dire que deux de leurs cercles directeurs sont imaginaires. Les quatre foyers réels ne sont pas cocycliques, en général, mais il y a exception si AA' et BB' sont sur la même perpendiculaire à Ox , avec $|AA'| = |BB'|$ (par contre la distinction des deux classes de cycliques par la réalité des cercles directeurs n'appelle aucune réserve).

En effet, T_0 étant de première classe, soient $x = 0, y = \pm i\rho$ les coordonnées cartésiennes de (AA') , et $x = 0, y = \pm \rho$ celles de (BB') ; l'équation cartésienne de Q est

$$\varepsilon \sqrt{|k|^2 - 1} (x^2 + y^2)^2 + 2\rho^2 (x^2 + y^2) - 2|k|^2 \rho^2 y^2 - \varepsilon \rho^4 \sqrt{|k|^2 - 1} = 0,$$

car $k = i|k|$ avec $|k| > 1$. Les affixes ζ des foyers réels sont les racines de $\zeta^4 = \rho^4$, donc $\zeta = \pm \rho, \zeta = \pm i\rho$. Les 16 foyers se répartissent sur Ox ($y = 0, x = \pm \rho$ et $x = \pm i\rho$), sur Oy ($x = 0, y = \pm \rho$ et $y = \pm i\rho$), sur la première bissectrice ($x = y = \pm \rho \frac{1-i}{2}, x = y = \pm \rho \frac{1+i}{2}$), et enfin sur la deuxième bissectrice ($x = -y = \pm \rho \frac{1-i}{2}, x = -y = \pm \rho \frac{1+i}{2}$). Ils se répartissent donc par quatre sur plus de quatre cercles ou droites, mais les seuls cercles directeurs sont $x = 0, y = 0, x^2 + y^2 = \rho^2 \frac{1 \pm i}{2}$, qui forment bien un tétracycle de deuxième classe.

Lorsqu'on obtient deux cycliques de deuxième classe, on les distingue en spécifiant le cercle α auquel doit être tangent le cercle μ , ce qui détermine la valeur de ε .

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME. — *Le lieu des bicentres (MM') des bicercles (μ, μ') passant par un bipoint réel donné (BB') , et tangents à un bicercle réel donné (α, α') d'un champ lobatchewskien (μ étant tangent à α et μ' à α'), est une cyclique Q ayant pour bifoyers (BB') et le bicentre (AA') du bicercle directeur (α, α') . Q est de première ou de deuxième classe selon que (AA') est réel ou non.*

Lorsque (AA') est réel, Q peut être également définie en permutant les deux bifoyers et en remplaçant (α, α') par le bicercle (β, β') de bicentre (BB') et de même rayon anallagmatique k que (α, α') . (α, α') et (β, β') seront appelés les *bicercles directeurs* de Q . Lorsque Q est de deuxième classe, le bicercle directeur de bicentre (BB') n'est pas réel, puisque k est imaginaire pur, tandis que (BB') est réel.

6. Relations entre les bifoyers, les directrices et les bicercles directeurs. — Identifions les équations obtenues à l'aide des deux définitions. En supposant que (AA') est un bifoyer réel, écrivons (7) sous la forme symétrique équivalente

$$(9) \quad (a_i \Sigma' b_j x_j - \sqrt{k^2 + 1} b_i \Sigma' a_j x_j)^2 - k^2 b_i^2 [(\Sigma' a_j x_j)^2 - a_i^2 x_i^2] = 0,$$

où $\sqrt{k^2 + 1}$ est essentiellement positif lorsque $k^2 > 0$, et a la signification $\varepsilon i \sqrt{|k|^2 - 1}$ pour $k^2 < -1$, avec une valeur choisie de ε . L'identification avec (1) donne alors

$$a_i^2 b_i^2 k^2 e^2 (\Sigma' \gamma_j x_j)^2 \equiv (a_i \Sigma' b_j x_j - \sqrt{k^2 + 1} b_i \Sigma' a_j x_j)^2,$$

donc

$$a_k b_k k e \gamma_j = \pm (a_k b_j - \sqrt{k^2 + 1} b_k a_j) \quad (j = 1, 2, 3).$$

Si (AA'), (BB') et k sont donnés, e s'obtient en écrivant que $\Sigma' \gamma_j^2 = 1$, ce qui donne

$$(10) \quad e^2 = -\frac{1}{k^2} \left(k^2 + 2 + 2\sqrt{k^2 + 1} \frac{\Sigma' a_j b_j}{a_k b_k} \right);$$

en faisant abstraction du signe \pm , qui est inutile pour définir γ , et se retrouve d'ailleurs dans l'indétermination de k , on a ensuite

$$(11) \quad \gamma_j = \frac{a_k b_j - \sqrt{k^2 + 1} b_k a_j}{a_k b_k k e}.$$

Avec le tétracycle T_0 , on vérifie aisément que e^2 est bien réel, et l'on peut discuter la réalité de e , donc celle de γ , en fonction de k , lorsque les deux bifoyers sont donnés; on voit ainsi que le centre de γ est toujours réel; l'abscisse ξ de ce centre et le rayon r de γ sont donnés en effet par

$$\gamma_1 - i\gamma_2 = \frac{\rho}{r}, \quad \gamma_3 = \frac{\xi}{r},$$

donc

$$(12) \quad \frac{1}{r} = \frac{a_k - \sqrt{k^2 + 1} b_k}{a_k b_k k e}, \quad \xi = \frac{a_k b_3 - \sqrt{k^2 + 1} b_k a_3}{a_k - \sqrt{k^2 + 1} b_k}.$$

La forme symétrique de (10) montre, comme il se doit par raison de symétrie anallagmatique, que l'excentricité est la même avec le bifoyer (BB') et la directrice correspondante δ , de coordonnées

$$(13) \quad \delta_j = \frac{b_k a_j - \sqrt{k^2 + 1} a_k b_j}{a_k b_k k e}, \quad \delta_k = 0,$$

où $\sqrt{k^2 + 1}$ a la même détermination que dans (11).

On voit également que, si (AA') et (BB') sont réels, γ et δ sont simultanément réels ou imaginaires purs; mais, si (AA') est réel et (BB') imaginaire, les deux directrices sont aussi de natures différentes. Le premier résultat est évident d'après (12), puisque la réalité de γ équivaut à celle de e . Pour démontrer la deuxième partie, on peut supposer que T_0 est choisi de manière que

$$(14) \quad \begin{cases} a_1 = 0, & a_2 = i\rho, & a_3 = 0, & a_4 = \rho, \\ b_1 \text{ réel}, & b_2 = ib'_2, & b_3 \text{ réel}, & b_4 = ib'_4, \end{cases}$$

où ρ, b'_2, b'_4 sont réels; on suppose en outre que $k = i|k|$ avec $\sqrt{k^2 + 1} = i\nu$, ou $\nu = \varepsilon \sqrt{|k|^2 - 1}$ est réel. Les éléments euclidiens de γ s'écrivent alors

$$\xi = \frac{\rho b_3}{\rho + \nu b'_4} \text{ réel}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\rho + \nu b'_4}{-\rho b'_4 |k| e},$$

tandis que ceux de δ sont

$$\xi' = \frac{b_4 a_3 - \sqrt{k^2 + 1} a_4 b_3}{b_4 - \sqrt{k^2 + 1} a_4} = \frac{-\gamma \rho b_3}{b_4 - \gamma \rho} \text{ réel, } \frac{1}{r'} = \frac{b_4 - \sqrt{k^2 + 1} a_4}{a_4 b_4 k e} = \frac{i(b_4 - \gamma \rho)}{-\rho b_4 |k| e}.$$

Discutons maintenant la réalité de e ; lorsque les deux bifoyers sont réels, donc lorsque k est réel, elle équivaut à la condition

$$(k^2 + 1) + 2 \sqrt{k^2 + 1} \frac{\sum' a_j b_j}{a_4 b_4} + 1 < 0,$$

inéquation du second degré en $\sqrt{k^2 + 1}$; avec le tétracycle T_0 tel que $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = i\rho$, $a_4 = \rho$, elle se réduit à

$$(k^2 + 1) + 2 \frac{ib_2}{b_4} \sqrt{k^2 + 1} + 1 < 0,$$

où b_2 est imaginaire pur, et b_4 réel; le discriminant réduit vaut

$$\frac{-b_2^2 - b_4^2}{b_4^2} = \frac{b_1^2 + b_3^2}{b_4^2} > 0,$$

donc e est réel pourvu que

$$(15) \quad \frac{-ib_2}{b_4} - \frac{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}}{|b_4|} < \sqrt{k^2 + 1} < \frac{-ib_2}{b_4} + \frac{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}}{|b_4|},$$

n'oublions pas que A et B étant du même côté de Ox , b_4 et $-ib_2$ sont tous les deux du signe de ρ , et les membres extrêmes de (15) sont bien positifs.

Si (BB') est imaginaire, les hypothèses représentées par (14) donnent

$$e^2 = \frac{-1}{|k|^2} \left(\gamma^2 + 2 \frac{b_2'}{b_4'} \gamma - 1 \right),$$

qui est positif pourvu que

$$\frac{-b_2'}{b_4'} - \frac{\sqrt{b_2'^2 + b_4'^2}}{|b_4'|} < \gamma < \frac{-b_2'}{b_4'} + \frac{\sqrt{b_2'^2 + b_4'^2}}{|b_4'|}$$

ou

$$(16) \quad \frac{-b_2}{b_4} - \frac{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}}{|b_4|} < \gamma < \frac{-b_2}{b_4} + \frac{\sqrt{b_1^2 + b_3^2}}{|b_4|},$$

de forme analogue à (15).

7. Inversement, supposons que soient donnés (AA') , γ et e . Supposons, par exemple, que (AA') soit réel, γ étant réel ou imaginaire pur en même temps que e . k est déterminé par l'équation (10), dans laquelle $\frac{\sum' a_j b_j}{b_4}$ est calculé à l'aide de (11); cette équation donne en effet

$$ke \sum' a_j \gamma_j = \frac{1}{b_4} \sum' a_j b_j + \sqrt{k^2 + 1} a_4,$$

d'où résulte pour l'équation (10) la nouvelle forme

$$(17) \quad a_k k (e^2 - 1) + 2e \sqrt{k^2 + 1} \Sigma' a_j \gamma_j = 0,$$

qui fournit l'expression cherchée

$$(18) \quad k^2 = \frac{4e^2 (\Sigma' a_j \gamma_j)^2}{(e^2 - 1)^2 a_k^2 - 4e^2 (\Sigma' a_j \gamma_j)^2}.$$

Il vient ensuite, à l'aide de (11) et (17),

$$(19) \quad b_j = b_k \left(k e \gamma_j + \sqrt{k^2 + 1} \frac{a_j}{a_k} \right) = k b_k \left(e \gamma_j + \frac{1 - e^2}{2e} \frac{a_j}{\Sigma' a_j \gamma_j} \right);$$

b_k s'en déduit en écrivant que $b_1 - i b_2 = \rho$, compte tenu de $\gamma_1 - i \gamma_2 = \frac{\rho}{r}$, où r est le rayon de γ , ce qui donne

$$(20) \quad \frac{1}{b_k} = k \left[\frac{e}{r} + \frac{1 - e^2}{2e \Sigma' a_j \gamma_j} \right].$$

On sait que $e \Sigma' a_j \gamma_j \neq 0$ pour une vraie cyclique. Il résulte de ces formules que (BB') est réel en même temps que k ; c'est immédiat si γ est réel: si γ est imaginaire pur, supposons toujours $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = i\rho$, $a_4 = \rho$; e , r , γ_1 , γ_3 étant imaginaires purs et γ_2 réel, $\Sigma' a_j \gamma_j = i\rho\gamma_2$ est imaginaire pur, et la vérification n'est pas moins aisée.

k est réel pourvu que le dénominateur au second membre de (18)

$$(e^2 - 1)^2 a_k^2 - 4e^2 (\Sigma' a_j \gamma_j)^2 > 0,$$

car $e^2 (\Sigma' a_j \gamma_j)^2$ est toujours positif. Si γ est réel, $\Sigma' a_j \gamma_j$ est réel, et l'inégalité se décompose suivant le signe de $e^2 - 1$. Si $e^2 > 1$, il vient

$$|a_k| e^2 - 2 |\Sigma' a_j \gamma_j| \cdot |e| - |a_k| > 0,$$

d'où

$$(21) \quad |e| > \frac{|\Sigma' a_j \gamma_j| + \sqrt{(\Sigma' a_j \gamma_j)^2 + a_k^2}}{|a_k|},$$

tandis que, si $e^2 < 1$, on a

$$|a_k| e^2 + 2 |\Sigma' a_j \gamma_j| \cdot |e| - |a_k| < 0,$$

c'est-à-dire

$$(22) \quad |e| < \frac{-|\Sigma' a_j \gamma_j| + \sqrt{(\Sigma' a_j \gamma_j)^2 + a_k^2}}{|a_k|}.$$

Par conséquent, lorsque (AA') et γ sont réels, la cyclique Q est de première classe si l'excentricité $|e|$ est extérieure à l'intervalle

$$(23) \quad \left(\frac{-|\Sigma' a_j \gamma_j| + \sqrt{(\Sigma' a_j \gamma_j)^2 + a_k^2}}{|a_k|}, \frac{|\Sigma' a_j \gamma_j| + \sqrt{(\Sigma' a_j \gamma_j)^2 + a_k^2}}{|a_k|} \right),$$

et de deuxième classe si $|e|$ est dans cet intervalle.

Si γ est imaginaire pur, il en est de même pour $\Sigma' a_j \gamma_j$; en posant $e = i|e|$, la condition de réalité de k est la même que plus haut et s'écrit

$$(e^2 + 1)^2 a_3^2 - 4|e|^2 |\Sigma' a_j \gamma_j|^2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$|a_3| |e|^2 - 2 |\Sigma' a_j \gamma_j| |e| + |a_3| > 0.$$

Le discriminant réduit de ce trinôme en $|e|$ est

$$|\Sigma' a_j \gamma_j|^2 - a_3^2 = \Sigma' a_j^2 \Sigma' \gamma_j^2 - (\Sigma' a_j \gamma_j)^2 = \sum_{j,k=1}^3 (a_j \gamma_k - a_k \gamma_j)^2,$$

et se réduit, avec le tétracycle particulier T_0 généralement considéré, à $-\rho^2(\gamma_1^2 + \gamma_3^2)$, où γ_1 et γ_3 sont imaginaires purs; il est donc positif, et k est réel pourvu que $|e|$ soit hors de l'intervalle

$$(24) \quad \left(\frac{|\Sigma' a_j \gamma_j| - \sqrt{-(\Sigma' a_j \gamma_j)^2 - a_3^2}}{|a_3|}, \frac{|\Sigma' a_j \gamma_j| + \sqrt{-(\Sigma' a_j \gamma_j)^2 - a_3^2}}{|a_3|} \right).$$

Par conséquent, lorsque (AA') est réel et γ imaginaire pur, Q est de première ou de deuxième classe suivant que $|e|$ est extérieur ou intérieur à l'intervalle (24).

On vérifie sur (17) que k^2 ne peut être compris entre -1 et 0 , car

$$\frac{1}{k^2} + 1 = \frac{(e^2 - 1)^2 a_3^2}{4e^2 (\Sigma' a_j \gamma_j)^2}$$

est toujours positif.

Il est commode de distinguer trois genres de cycliques à l'aide de la discussion que nous venons de faire : le genre hyperbolique comprenant les cycliques de première classe pour lesquelles $|e| > 1$, le genre elliptique comprenant celles de première classe pour lesquelles $|e| < 1$, et le genre parabolique formé par les cycliques de deuxième classe.

Supposons par exemple $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = i\rho$, $a_4 = \rho$ réel. γ étant réel, la variation de e de 0 à ∞ donne le tableau

e	0	$-\frac{ \gamma_2 + \sqrt{1 + \gamma_2 ^2}}{1}$	1	$\frac{ \gamma_2 + \sqrt{1 + \gamma_2 ^2}}{1}$	∞
genre	elliptique		parabolique		hyperbolique

tandis que si γ est imaginaire pur, ainsi que e , on a le tableau

$ e $	0	$\frac{ \gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 - 1}}{1}$	1	$\frac{ \gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 - 1}}{1}$	∞
genre	elliptique		parabolique		hyperbolique

Lorsque e varie, (AA') et γ étant fixes, le bifoyer (BB') se déplace sur le cercle orthogonal à γ qui passe par (AA') . Ce cercle est un cercle directeur fixe de la

cyclique Q. Avec les coordonnées particulières de (AA'), on a effectivement $b_1 = keb_4\gamma_1$, $b_3 = keb_4\gamma_3$, donc $\gamma_3b_1 - \gamma_1b_3 = 0$. La variation de (BB'), sur ce cercle

$$(25) \quad \gamma_3x_1 - \gamma_1x_3 = 0,$$

est déterminée par celle de l'abscisse b_3 de (BB') en fonction de e , dont (19) et (20) fournissent la valeur

$$b_3 = \frac{\gamma_3e^2}{\frac{e^2}{r} + \frac{1-e^2}{2i\rho\gamma_2}};$$

c'est une fonction homographique de e^2 . Q change de genre lorsque la droite BB' passe par l'un des points où Ox rencontre le cercle (25). Ce cercle est toujours réel, et γ est réel ou imaginaire suivant que son centre est extérieur ou intérieur à (25). Pour $|e| = 0$, $b_3 = 0$ et (BB') coïncide avec (AA'), et Q se réduit aux deux cercles points A, A'; puis (BB') se déplace dans un sens constant, déterminé par le signe de $\frac{\gamma_3}{2i\rho\gamma_2}$, qui est essentiellement réel.

CHAPITRE III.

ÉQUATION RÉDUITE. CYCLIQUES HOMOFOCALES.

8. Les cercles directeurs d'une cyclique Q sont des axes de symétrie anallagmatique, et deux d'entre eux sont toujours réels. Il est naturel de rapporter Q au tétracycle orthogonal formé par ces cercles, qui est de la même classe que Q. On peut ainsi supposer que ω_3 et ω_4 sont réels, et même que ω_4 est rectiligne, et pris pour axe Ox, sans que ce soit une restriction anallagmatique. ω_1 est réel et ω_2 imaginaire pur pour un tétracycle de première classe, tandis qu'ils sont imaginaires conjugués l'un de l'autre pour un tétracycle de deuxième classe. L'équation de Q est paire par rapport aux 4 variables homogènes x_i ,

donc de la forme $\sum_{i=1}^4 a_i x_i^2 = 0$, ou, compte tenu de $\sum_i x_i^2 = 0$, de la forme réduite

$$(1) \quad \sum q_j x_j^2 = 0.$$

Les q_j sont réels si Q est réel et de première classe; q_3 est réel et q_1, q_2 imaginaires conjugués si Q est réel et de deuxième classe, et cela à un facteur près, bien entendu. On peut également supposer que ω_3 contient un bifoyer réel (AA') et un deuxième bifoyer (BB'), réel ou non suivant que Q est de première ou de deuxième classe, dans le champ cocyclique de base ω_4 .

k désignant le rayon du bicycle directeur de bicentre (BB') , l'équation de Q est encore donnée par [(9); II] où l'on fait $a_3 = b_3 = 0$ et où l'on tient compte des relations $\frac{b_1}{-a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_4}{a_4}$ qui expriment que (AA') et (BB') sont symétriques par rapport à ω_1 ; il vient ainsi

$$(a_1x_1 - a_2x_2)^2 + (a_1x_1 + a_2x_2)^2 + 2\sqrt{k^2+1}(a_1^2x_1^2 - a_2^2x_2^2) + k^2a_4^2x_4^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad 2(1 + \sqrt{k^2+1})a_1^2x_1^2 + 2(1 - \sqrt{k^2+1})a_2^2x_2^2 + k^2a_4^2x_4^2 = 0,$$

ou encore, avec x_1, x_2, x_3 seuls, compte tenu de $a_4^2 = -a_1^2 - a_2^2$,

$$(3) \quad [(\sqrt{k^2+1}+1)^2a_1^2 + k^2a_2^2]x_1^2 + [(\sqrt{k^2+1}-1)^2a_2^2 + k^2a_1^2]x_2^2 - k^2a_4^2x_3^2 = 0.$$

C'est de la forme (1) avec les coefficients

$$(4) \quad \begin{cases} q_1 = (\sqrt{k^2+1}+1)[(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2], \\ q_2 = (\sqrt{k^2+1}-1)[(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2], \\ q_3 = -k^2a_4^2 = (\sqrt{k^2+1}+1)(\sqrt{k^2+1}-1)(a_1^2 + a_2^2). \end{cases}$$

En particulier, on a

$$(5) \quad \begin{cases} q_1 - q_3 = 2(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2, \\ q_2 - q_3 = -2(\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2, \\ q_1 - q_2 = 2[(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2]. \end{cases}$$

On déduit de ces relations

$$(6) \quad \sqrt{k^2+1}+1 = \frac{2q_1}{q_1-q_2}, \quad \sqrt{k^2+1}-1 = \frac{2q_2}{q_1-q_2},$$

donc

$$(7) \quad k^2 = \frac{4q_1q_2}{(q_1-q_2)^2},$$

puis

$$(8) \quad \begin{cases} a_1^2 = \frac{(q_1-q_3)(q_1-q_2)}{4q_1}, & a_2^2 = \frac{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}{4q_2}, \\ a_3 = 0, & a_4^2 = \frac{-q_3(q_1-q_2)^2}{4q_1q_2}. \end{cases}$$

Ces formules font connaître k , (A, A') et (B, B') en fonction des coefficients q_j , pourvu que le facteur arbitraire dont dépendent ceux-ci dans l'équation générale (1) soit convenablement choisi si l'on veut que $a_1 - ia_2 = \rho$. En tout cas, ces formules représentent les coordonnées tétracycliques homogènes.

L'excentricité e correspondant à ces deux bifoyers est donnée par [(10); II], qui s'écrit ici

$$\begin{aligned} k^2 a_4^2 e^2 &= -(k^2 + 2) a_4^2 + 2 \sqrt{k^2 + 1} (a_1^2 - a_2^2) \\ &= (\sqrt{k^2 + 1} + 1)^2 a_1^2 + (\sqrt{k^2 + 1} - 1)^2 a_2^2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$q_3 e^2 = q_3 - q_1 - q_2,$$

donc

$$(9) \quad e^2 = 1 - \frac{q_1 + q_2}{q_3},$$

pour les deux bifoyers situés sur ω_3 , dans le champ de base ω_4 . La directrice γ associée à (AA') est $\Sigma' \gamma_j x_j = 0$, où, par exemple, d'après [(11); II],

$$\gamma_j = \frac{\frac{a_k}{b_k} b_j - \sqrt{k^2 + 1} a_j}{k e a_4} = \frac{\frac{a_k}{b_k} b_j - \sqrt{k^2 + 1} a_j}{\sqrt{q_1 + q_2 - q_3}},$$

donc

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{-(\sqrt{k^2 + 1} + 1) a_1}{\sqrt{q_1 + q_2 - q_3}} = \frac{-2 q_1 a_1}{(q_1 - q_2) \sqrt{q_1 + q_2 - q_3}}, \\ \gamma_2 = \frac{-(\sqrt{k^2 + 1} - 1) a_2}{\sqrt{q_1 + q_2 - q_3}} = \frac{-2 q_2 a_2}{(q_1 - q_2) \sqrt{q_1 + q_2 - q_3}}, \\ \gamma_3 = \gamma_4 = 0. \end{cases}$$

On en déduit encore, grâce à (8),

$$(11) \quad \gamma_1^2 = \frac{(q_1 - q_3) q_1}{(q_1 - q_2) (q_1 + q_2 - q_3)}, \quad \gamma_2^2 = \frac{(q_2 - q_3) q_2}{(q_2 - q_1) (q_1 + q_2 - q_3)}, \quad \gamma_3 = \gamma_4 = 0,$$

qui donnent les deux directrices associées aux deux bifoyers (AA'), (BB'), en fonction des coefficients généraux de (1).

Toutes ces formules permettent de déterminer tous les bifoyers, directrices, excentricités et bicercles directeurs de la cyclique (1), en choisissant de toutes les manières possibles trois des quatre cercles de symétrie $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. En permutant q_1 et q_3 dans (1), on obtient de même les bifoyers situés sur ω_1 et les éléments correspondants, dans le champ de base ω_4 ; en permutant q_2 et q_3 dans (1), on obtient de même les bifoyers situés sur ω_2 , dans le champ de base ω_4 , et les éléments correspondants. Les foyers situés sur ω_4 s'obtiendront en exprimant l'équation de Q en fonction de x_4 et deux autres coordonnées. Ainsi, les coordonnées tétracycliques homogènes des deux bifoyers (AA'), (BB') situés sur ω_3 sont, d'après (8),

$$x_1 = \sqrt{q_2(q_3 - q_1)}, \quad x_2 = \pm \sqrt{q_1(q_2 - q_3)}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \pm \sqrt{q_3(q_1 - q_2)};$$

celles des deux bifoyers situés sur ω_1 sont

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{q_3(q_1 - q_2)}, \quad x_3 = \pm \sqrt{q_2(q_3 - q_1)}, \quad x_4 = \pm \sqrt{q_1(q_2 - q_3)},$$

et les deux bifoyers situés sur ω_2 sont déterminés par

$$x_1 = \sqrt{q_3(q_1 - q_2)}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \pm \sqrt{q_1(q_2 - q_3)}, \quad x_4 = \pm \sqrt{q_2(q_3 - q_1)}.$$

Les trois couples ont les mêmes coordonnées, à l'ordre près.

9. *Cycliques homofocales.* — Les cycliques dont les bifoyers (AA') et (BB') sont fixés sont coaxiales et représentées par l'équation (2), où k joue le rôle de paramètre. En posant $\sqrt{k^2 + 1} = \nu$, elle s'écrit encore

$$(12) \quad 2(\nu + 1)a_1^2 x_1^2 - 2(\nu - 1)a_2^2 x_2^2 + (\nu^2 - 1)a_4^2 x_4^2 = 0,$$

ou

$$(13) \quad f(\nu) \equiv \frac{2}{\nu - 1} a_1^2 x_1^2 - \frac{2}{\nu + 1} a_2^2 x_2^2 + a_4^2 x_4^2 = 0,$$

sous une forme analogue à l'équation des coniques homofocales. Il est bien connu que par chaque point du plan passent deux de ces cycliques, et qu'elles sont orthogonales. La démonstration géométrique ou analytique en est aisée. Nous allons cependant en faire ici la vérification analytique afin d'établir un résultat supplémentaire intéressant. Une démonstration géométrique sera donnée au dernier chapitre.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de cycliques de première classe, (AA') et (BB') étant réels, et ν réel ≥ 1 . Dans l'intervalle de variation de ν ,

$$f'(\nu) = \frac{-2a_1^2 x_1^2}{(\nu - 1)^2} + \frac{2a_2^2 x_2^2}{(\nu + 1)^2}$$

s'annule pour une valeur ν_1 telle que l'on ait

$$\frac{\nu_1 - 1}{|a_1 x_1|} = \frac{\nu_1 + 1}{|a_2 x_2|} = \frac{2}{|a_2 x_2| - |a_1 x_1|};$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sont les coordonnées du point où doivent passer les cycliques considérées; a_2 et x_2 sont imaginaires purs, avec

$$-a_2^2 = a_1^2 + a_4^2 > a_1^2, \quad -x_2^2 = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 > x_1^2,$$

donc $|a_2 x_2|^2 > |a_1 x_1|^2$, de sorte que ν_1 est bien > 1 . Lorsque ν croît de 1 à l'infini, $f(\nu)$ décroît de l'infini à $f(\nu_1)$, puis recroît de $f(\nu_1)$ à $a_4^2 x_4^2 > 0$. D'autre part, une valeur prise par ν est

$$1 + \frac{2a_1^2}{a_4^2} = \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4^2} = -1 - \frac{2a_2^2}{a_4^2},$$

pour laquelle

$$f\left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4^2}\right) = a_4^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -a_4^2 x_3^2 < 0,$$

donc le minimum $f(\nu_1)$ est négatif, et l'équation $f(\nu) = 0$ a deux racines.

Avec les seules coordonnées x_1, x_2, x_3 , l'équation (13) s'écrit

$$(14) \quad \left(\frac{2a_1^2}{\nu-1} - a_4^2 \right) x_1^2 - \left(\frac{2a_2^2}{\nu+1} + a_4^2 \right) x_2^2 - a_4^2 x_3^2 = 0;$$

donc, si ν' et ν'' sont les deux racines de (13), la condition d'orthogonalité des deux cycliques correspondantes au point considéré est

$$\left(\frac{2a_1^2}{\nu'-1} - a_4^2 \right) \left(\frac{2a_1^2}{\nu''-1} - a_4^2 \right) x_1^2 + \left(\frac{2a_2^2}{\nu'+1} + a_4^2 \right) \left(\frac{2a_2^2}{\nu''+1} + a_4^2 \right) x_2^2 + a_4^2 x_3^2 = 0;$$

en revenant aux variables x_1, x_2, x_3 , il vient

$$\begin{aligned} \frac{4a_1^2 x_1^2}{(\nu'-1)(\nu''-1)} + \frac{4a_2^2 x_2^2}{(\nu'+1)(\nu''+1)} - a_4^2 \left(\frac{2a_1^2 x_1^2}{\nu'-1} - \frac{2a_2^2 x_2^2}{\nu'+1} \right) \\ - a_4^2 \left(\frac{2a_1^2 x_1^2}{\nu''-1} - \frac{2a_2^2 x_2^2}{\nu''+1} \right) - a_4^2 x_3^2 = 0; \end{aligned}$$

compte tenu de $f(\nu') = f(\nu'') = 0$, d'où résulte en particulier

$$\frac{a_1^2 x_1^2}{(\nu'-1)(\nu''-1)} = \frac{a_2^2 x_2^2}{(\nu'+1)(\nu''+1)},$$

cette condition s'écrit enfin

$$4a_1^2 x_1^2 - a_4^2 x_3^2 (\nu'-1)(\nu''-1) = 0,$$

et la vérification est immédiate.

L'excentricité e est déterminée par la formule (9) appliquée à l'équation (14),

$$e^2 - 1 = \frac{\left(\frac{2a_1^2}{\nu-1} - a_4^2 \right) - \left(\frac{2a_2^2}{\nu+1} + a_4^2 \right)}{a_4^2} = \frac{a_1^2 - a_2^2 - \nu a_4^2}{a_4^2} \left(\frac{1}{\nu-1} + \frac{1}{\nu+1} \right),$$

du signe de $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4^2} - \nu$; le premier terme de cette différence est entre ν' et ν'' , comme on l'a vu plus haut, donc les carrés des excentricités des deux cycliques sont de part et d'autre de 1.

Pour des cycliques de deuxième classe, le paramètre ν de l'équation (12) est de la forme $\nu = i\mu$, où μ est réel, ce qui donne l'équation

$$g(\mu) \equiv a_4^2 x_4^2 (\mu^2 + 1) - 2i(a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2) \mu - 2(a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2) = 0,$$

où $a_4 x_4$ est réel, et $a_1 x_1, a_2 x_2$ sont imaginaires conjugués. Le fait que

$$g\left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{ia_4^2}\right) = \frac{4a_1^2 a_2^2}{a_4^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) = \frac{-4a_1^2 a_2^2 x_4^2}{a_4^2}$$

est négatif montre qu'il passe également deux cycliques réelles par chaque point du plan, leur orthogonalité résultant du calcul fait avec ν .

Pour les cycliques de première classe, on a, de plus,

$$e^2 + 1 = 2 + \frac{2\nu}{\nu^2 - 1} \frac{a_1^2 - a_2^2 - \nu a_4^2}{a_4^2} = \frac{2}{\nu^2 - 1} \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4^2} \nu - 1 \right) > 0,$$

puisque ν et $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_4^2}$ sont tous deux supérieurs à 1. Les carrés e'^2 et e''^2 des excentricités des deux cycliques vérifient donc les inégalités $-1 < e'^2 < 1 < e''^2$, c'est-à-dire $|e'| < 1 < e''$. On peut donc énoncer un théorème dont la similitude avec celui concernant les coniques homofocales à centre est bien remarquable.

THÉORÈME. — *Les deux quartiques homofocales de première classe qui passent par un point du plan sont l'une de genre elliptique et l'autre de genre hyperbolique.*

CHAPITRE IV.

POLÉS ET POLAIRES. DIAMÈTRES. TANGENTES.

10. Soit (PP') un bipoint du champ cocyclique de base réelle ω , qu'on peut supposer rectiligne, et de coordonnées $(\xi_j, \pm \xi_4)$ par rapport à un tétracycle T dont le cercle ω_4 est ω . Soit d'autre part une cyclique Q du champ, dont l'équation en x_1, x_2, x_3 est

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j,k=1}^3 q_{jk} x_j x_k = 0.$$

La définition de la polaire de (PP') par rapport à Q est calquée sur la théorie des coniques, et cette polaire est un cercle du champ ⁽¹⁾. Soit (MM') un bipoint variable de coordonnées $(x_j, \pm x_4)$. Le cercle PP'MM' a l'équation

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où les X_i sont les coordonnées du bipoint courant, ce qui donne la représentation paramétrique

$$(2) \quad X_j = \mu \xi_j + \nu x_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

D'ailleurs l'identité $\sum \frac{X_i}{\rho_i} = 1$ entre les coordonnées d'un point et les rayons des cercles du tétracycle, où $\rho_4 = \infty$, donne ici

$$\sum' \frac{X_j}{\rho_j} = \sum' \frac{\xi_j}{\rho_j} = \sum' \frac{x_j}{\rho_j} = 1,$$

(1) *Loc. cit.*, p. 29.

donc $\mu + \nu = 1$, ce qui fournit les équations paramétriques définitives

$$(2') \quad X_j = \mu \xi_j + (1 - \mu)x_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Ce cercle rencontre Q aux bipoints déterminés par

$$f(\xi_1 + \lambda x_1, \xi_2 + \lambda x_2, \xi_3 + \lambda x_3) = 0,$$

où $\lambda = \frac{1}{\mu} - 1$, c'est-à-dire

$$(3) \quad f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \lambda \Sigma' x_j f'_{\xi_j} + \lambda^2 f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Par définition, ces deux bipoints de rencontre sont conjugués harmoniques par rapport à (PP'), (MM') si les cercles d'un faisceau, passant par ces quatre bipoints, forment dans le même ordre une division harmonique ⁽¹⁾. Considérons par exemple les cercles du faisceau défini par ω_1 et ω_2 ; leur équation est de la forme $X_1 - \sigma X_2 = 0$, et le paramètre σ de celui qui passe par le bipoint (2') est

$$\sigma = \frac{\mu \xi_1 + (1 - \mu)x_1}{\mu \xi_2 + (1 - \mu)x_2} = \frac{\xi_1 + \lambda x_1}{\xi_2 + \lambda x_2};$$

la conjugaison harmonique des valeurs de σ relatives aux quatre cercles équivaut donc à celle des valeurs de λ , c'est-à-dire $(0, \infty, \lambda', \lambda'') = -1$, où λ', λ'' sont les racines de (3), ou enfin $\lambda' + \lambda'' = 0$. La condition de conjugaison de deux bipoints (PP'), (MM') par rapport Q s'exprime donc par

$$(4) \quad \Sigma' x_j f'_{\xi_j} = 0,$$

sans distinction analytique avec la théorie des coniques. Le même raisonnement peut être fait avec les expressions (2), de sorte que (4) est indépendant de la forme de ω_1 (il suffit de faire $\lambda = \frac{\nu}{\mu}$).

La polaire de (PP') par rapport à Q est le cercle du champ d'équation (4), où les x_j sont variables. En particulier, la polaire du bifoyer (AA') de la cyclique [(1); III] est

$$q_1 a_1 x_1 + q_2 a_2 x_2 = 0,$$

ou, d'après [(10); III],

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0.$$

C'est donc la directrice γ , comme il était d'ailleurs à prévoir puisqu'elle passe par les bipoints de contact de Q avec les cercles tangents issus de (AA'). Comme pour les coniques, *la polaire d'un bifoyer est la directrice associée*.

Observons également que la polaire du bipoint (CC') situé à l'intersection des deux axes anallagmatiques ω_1, ω_3 , dont les coordonnées sont donc telles

(¹) *Loc. cit.*, p. 27.

que $\xi_1 = \xi_3 = 0$, est l'axe de symétrie ω_2 . (CC') s'appellera un *bicentre anallagmatique* de Q.

Il est clair qu'on déduit de (4) l'équation tangentielle de Q et la théorie des cercles du champ conjugués par rapport à Q avec les mêmes résultats analytiques que pour les coniques. En particulier, avec la forme réduite [(1); III], la condition pour que le cercle $\Sigma' \lambda_j x_j = 0$ soit tangent est

$$(5) \quad \sum \frac{\lambda_j^2}{q_j} = 0,$$

et la condition de conjugaison de deux cercles du champ, de coordonnées (λ_j) , (μ_j) est

$$(6) \quad \sum \frac{\lambda_j \mu_j}{q_j} = 0.$$

11. Nous avons appelé bicentre allagmatique d'une cyclique Q l'intersection de deux cercles directeurs, car une transposition, ou symétrie anallagmatique, autour d'un tel bipoint, conserve Q. Réciproquement, tout bicentre anallagmatique est l'intersection de deux cercles directeurs, de même que tout centre de symétrie d'une conique est l'intersection de deux axes de symétries. Considérons en effet la cyclique générale (1), admettant pour bicentre l'intersection des deux cercles ω_1, ω_3 du tétracycle de référence. La transposition autour de ce bipoint est le produit des inversions par rapport aux deux cercles orthogonaux ω_1, ω_3 , et se traduit par les transformations

$$X_1 = -x_1, \quad X_2 = x_2, \quad X_3 = -x_3, \quad X_4 = x_4,$$

en coordonnées homogènes; l'invariance de l'équation (1) s'exprime donc par la parité de la forme quadratique $f(x_1, x_2, x_3)$ en x_2 , et l'équation de la cyclique Q est de la forme

$$q_{11}x_1^2 + q_{22}x_2^2 + q_{33}x_3^2 + 2q_{13}x_1x_3 = 0.$$

Le changement des cercles de coordonnées ω_1, ω_3 du tétracycle produit une transformation orthogonale des seules coordonnées x_1, x_3 , ce qui permet d'annuler le coefficient q_{13} , et de mettre l'équation de Q sous la forme réduite [(1); III]; les nouveaux cercles de coordonnées ainsi obtenus sont des cercles directeurs de Q, ce qui démontre notre proposition.

Dans un champ cocyclique lobatchewskien, une cyclique Q de première classe a toujours un bicentre anallagmatique réel, et un seul qui est l'intersection des deux cercles directeurs réels de Q, autres que le cercle de base du champ. Pour une cyclique de deuxième classe, seule l'intersection des deux cercles directeurs imaginaires conjugués pourrait être réelle, mais ce n'est pas le cas, comme il est évident sur le tétracycle T_0 de deuxième classe; ce résultat justifie le qualificatif de parabolique pour le genre de ces cycliques.

12. *Diamètres conjugués.* — Pour demeurer dans le domaine réel, considérons une cyclique Q de première classe, rapportée à ses axes. Son bicentre anallagmatique (CC') est le bipoint d'intersection des cercles ω_1, ω_3 , et a les coordonnées $(0, \rho_2, 0, \pm i\rho_2)$, où ρ_2 est le rayon imaginaire pur du cercle ω_2 . Nous appelons *diamètres* de Q les cercles du champ qui passent par (CC'). L'équation d'un diamètre est de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3 = 0$ avec, par exemple, $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = 1$, ce qui permet de l'écrire

$$(7) \quad x_1 \sin \theta + x_3 \cos \theta = 0;$$

θ représente d'ailleurs l'angle de ce diamètre avec ω_3 . D'après (6), la condition pour que deux diamètres correspondant à θ, θ' soient conjugués est

$$(8) \quad \frac{\sin \theta \sin \theta'}{q_1} + \frac{\cos \theta \cos \theta'}{q_3} = 0.$$

D'autre part, les bipoints (MM'), où (7) rencontre Q, sont donnés par

$$(9) \quad x_1 = \frac{\cos \theta}{u}, \quad x_3 = -\frac{\sin \theta}{u}, \quad \frac{x_2}{\rho_2} = 1 - \left(\frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_3}{\rho_3} \right) = 1 - \frac{1}{u} \left(\frac{\cos \theta}{\rho_1} - \frac{\sin \theta}{\rho_3} \right),$$

où les ρ_i sont les rayons des cercles ω_i ($\rho_4 = \infty$), et où u vérifie l'équation

$$\sum q_j x_j^2 = \frac{1}{u^2} (q_1 \cos^2 \theta + q_3 \sin^2 \theta) + \frac{q_2 \rho_2^2}{u^2} \left(u + \frac{\sin \theta}{\rho_3} - \frac{\cos \theta}{\rho_1} \right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad \left(u + \frac{\sin \theta}{\rho_3} - \frac{\cos \theta}{\rho_1} \right)^2 + \frac{q_1 \cos^2 \theta + q_3 \sin^2 \theta}{q_2 \rho_2^2} = 0.$$

La distance $r = [(CC')(MM')]$ est donnée par [(8); I], donc telle que

$$(11) \quad r^2 = \frac{x_2^2 + x_4^2}{-x_4^2} = -\frac{x_1^2 + x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{q_2}{q_1 \cos^2 \theta + q_3 \sin^2 \theta - q_2}.$$

r^2 est une fonction homographique de $\tan^2 \theta$, tandis que la condition de conjugaison (8) est involutive entre $\tan^2 \theta$ et $\tan^2 \theta'$. On peut donc énoncer le

THÉOREME. — *Les carrés des distances anallagmatiques du bicentre d'une cyclique de première classe aux extrémités de deux diamètres conjugués sont liés involutivement.*

C'est l'équivalent du premier théorème d'Appolonius pour les coniques à centre. Si r, r' désignent ces deux distances, l'élimination de θ et θ' entre (8) et les deux expressions (11) de r^2 et r'^2 donne immédiatement, après division par $q_2(q_1 - q_3)$ qui ne peut être nul pour une vraie cyclique, la relation involutive annoncée

$$(12) \quad [2q_1q_3 - q_2(q_1 + q_3)]r^2r'^2 + [q_1q_3 - q_2(q_1 + q_3)](r^2 + r'^2) - q_2(q_1 + q_3) = 0.$$

13. La discussion de la forme de Q par celle de la réalité des extrémités du diamètre courant justifie encore la classification que nous avons adoptée pour les cycliques de première classe. Nous allons voir en effet que *les cycliques de première classe qui sont coupées par tous leurs diamètres sont les cycliques elliptiques*.

Pour que le bipoint (MM') défini par (9) soit réel, il faut et il suffit que x_1, x_3, x_4 soient réels, c'est-à-dire que u soit réel et que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{u^2} + x_2^2$ soit négatif ou nul. φ_2^2 étant négatif, la première condition s'écrit, d'après (10),

$$\frac{q_1}{q_2} \cos^2 \theta + \frac{q_3}{q_2} \sin^2 \theta \geq 0;$$

la deuxième condition est

$$1 + u^2 x_2^2 = 1 - \frac{q_1 \cos^2 \theta + q_3 \sin^2 \theta}{q_2} \leq 0,$$

ce qui donne la seule inégalité

$$(13) \quad \frac{q_1}{q_2} \cos^2 \theta + \frac{q_3}{q_2} \sin^2 \theta \geq 1.$$

Lorsque θ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, le premier membre varie monotonement de $\frac{q_1}{q_2}$ à $\frac{q_3}{q_2}$, où $\frac{q_1}{q_2} = \frac{\sqrt{k^2+1}+1}{\sqrt{k^2+1}-1} > 1$ en vertu de [(4); III]. Les diamètres voisins du diamètre focal ω_3 (ou axe focal de Q) coupent toujours Q , et l'on voit que tous les diamètres sont effectivement sécants pourvu que $\frac{q_3}{q_2}$ soit lui-même ≥ 1 . En posant comme plus haut $\nu = \sqrt{k^2+1}$, cette condition s'écrit, grâce à [(4); III] et [(5); III],

$$\frac{q_3 - q_2}{q_2} = \frac{2a_2^2}{(\nu+1)a_1^2 + (\nu-1)a_2^2} \geq 0,$$

ou

$$(\nu+1)a_1^2 + (\nu-1)a_2^2 = 2a_1^2 - (\nu-1)a_4^2 < 0,$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad \nu > 1 + \frac{2a_1^2}{a_4^2}.$$

Pour le paramètre k , ceci donne l'inégalité

$$k^2 > \frac{-4a_1^2 a_2^2}{a_4^4}.$$

D'autre part, le carré de l'excentricité est

$$e^2 = 1 - \frac{q_1 + q_2}{q_3} = 1 + \frac{2\nu[(\nu+1)a_1^2 + (\nu-1)a_2^2]}{(\nu^2-1)a_4^2} = 2 \frac{a_1^2}{a_4^2} \left(\frac{1}{\nu-1} + \frac{1}{\nu+1} \right) - \frac{\nu-1}{\nu+1}.$$

Dans l'intervalle de variation $(1, \infty)$ de ν , e^2 est donc une fonction décroissante, variant de l'infini à -1 , prenant la valeur 1 pour $\nu = 1 + \frac{2a_1^2}{a_4^2}$; l'inégalité (14) équivaut donc à la condition $-1 < e^2 < 1$, ce qui démontre notre proposition.

Pour une cyclique hyperbolique, (MM') cesse d'être réel lorsque (13) fait place à l'inégalité contraire, c'est-à-dire

$$\tan^2 \theta > \tan^2 \theta_1 = \frac{q_1 - q_2}{q_2 - q_3},$$

c'est-à-dire

$$\tan^2 \theta > \tan^2 \theta_1 = \frac{2a_1^2 - (\nu - 1)a_4^2}{(\nu - 1)(a_1^2 + a_4^2)}.$$

Les diamètres conjugués doubles sont définis par

$$\tan^2 \theta = \tan^2 \theta_2 = -\frac{q_1}{q_3} = \frac{2a_1^2 - (\nu - 1)a_4^2}{(\nu - 1)a_1^2},$$

de sorte que $\theta_1 < \theta_2$, pour les valeurs aiguës et positives de θ . θ_1 désignant l'homologue de θ_1 , on peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

θ	0	\nearrow	(r)	\nearrow	θ_1	\nearrow	(i)	\nearrow	θ_2	\nearrow	(i)	\nearrow	θ_1'	\nearrow	(i)	\nearrow	$\frac{\pi}{2}$
θ'	$\frac{\pi}{2}$	\searrow	(i)	\searrow	θ_1'	\searrow	(i)	\searrow	θ_2	\searrow	(i)	\searrow	θ_1	\searrow	(r)	\searrow	0

où l'on a indiqué par les lettres (r) et (i) la nature réelle ou imaginaire de l'intersection de Q par le diamètre correspondant. Comme pour une hyperbole, on voit que deux diamètres conjugués ne coupent jamais tous deux la cyclique; par contre, il existe un secteur diamétral $(\theta_1 < \theta < \theta_1')$, dans lequel les diamètres sont deux à deux conjugués, et qui ne contient aucun point de Q ; la cyclique est tout entière dans le secteur $-\theta_1 < \theta < \theta_1$. Les diamètres $\theta = \pm \theta_1$ sont tels que $r^2 = \infty$, ou $x_1 = 0$; ce sont donc les diamètres qui passent par les points où ω_4 rencontre Q , qu'on peut appeler les *asymptotes* de Q . Ils sont d'ailleurs tangents à Q ; en effet, la discussion qui précède montre que la cyclique est constituée par deux ovals intérieurs l'un à l'autre, et ne peut donc rencontrer qu'à angle droit son axe de symétrie ω_4 . La vérification par le calcul est d'ailleurs aisée. Par contre, les cycliques elliptiques sont formées de deux ovals situés de part et d'autre de ω_4 , et entourent chacun l'un des points du bicentre (CC') .

Les diamètres doubles $\theta = \pm \theta_2$ ne sont réels que pour une cyclique hyperbolique, mais ils ne la rencontrent pas.

14. Reconsidérons l'expression (11). Pour deux diamètres orthogonaux, d'arguments θ et $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$, les distances r, r' correspondantes vérifient l'égalité

$$(15) \quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{q_1 + q_3 - 2q_2}{q_2} = \text{const.},$$

c'est l'équivalent du théorème d'Euler relatif aux coniques à centre. En particulier, cette somme vaut $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$, où r_1 est la distance de (CC') aux extrémités du diamètre focal ω_3 , et r_2 la distance aux extrémités du diamètre non focal ω_1 ; on a donc

$$(16) \quad \begin{cases} r_1^2 = \frac{q_2}{q_1 - q_2} = \frac{\sqrt{k^2 + 1} - 1}{2}, \\ r_2^2 = \frac{q_2}{q_3 - q_2} = \frac{(\sqrt{k^2 + 1} + 1)a_1^2 + (\sqrt{k^2 + 1} - 1)a_2^2}{2a_2^2}. \end{cases}$$

On constate que, comme pour les coniques, la distance du bicentre aux extrémités de l'axe focal ne dépend que du rayon k des bicercles directeurs et non des foyers eux-mêmes.

Il existe une relation simple entre r_1^2 , r_2^2 et le carré de la distance focale

$$[(CC')(AA')] = [(CC')(BB')] = f.$$

En effet, le troisième membre de (11), où $x_i = a_i$, donne

$$f^2 = -\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2},$$

donc

$$1 + f^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2};$$

par suite,

$$r_2^2 + 1 = \frac{\sqrt{k^2 + 1} + 1}{2} \cdot \frac{1}{f^2 + 1} = \frac{r_1^2 + 1}{f^2 + 1}$$

ou

$$(17) \quad f^2 + 1 = \frac{r_1^2 + 1}{r_2^2 + 1}.$$

A l'aide de ces trois distances, les coefficients de l'équation réduite sont égaux à

$$\frac{q_1}{4a_2^2} = (r_1^2 + 1)r_2^2, \quad \frac{q_2}{4a_2^2} = r_1^2 r_2^2, \quad \frac{q_3}{4a_2^2} = (r_2^2 + 1)r_1^2,$$

ou, après division par $r_1^2 r_2^2 (r_1^2 + 1)$, à

$$\frac{1}{r_1^2}, \quad \frac{1}{r_1^2 + 1}, \quad \frac{r_2^2 + 1}{r_2^2 (r_1^2 + 1)} = \frac{1}{r_1^2 - f^2}.$$

On peut ainsi donner à l'équation réduite de Q la forme remarquable

$$(18) \quad \frac{x_1^2}{r_1^2} + \frac{x_3^2}{r_1^2 - f^2} + \frac{x_2^2}{r_1^2 + 1} = 0;$$

$\left| \frac{x_1}{x_3} \right|$ et $\left| \frac{x_3}{x_1} \right|$ sont les distances du bipoint courant aux axes non focal et focal, et les dénominateurs correspondants sont les mêmes que dans l'équation d'une

conique à centre. En fonction des coefficients de l'équation

$$\frac{x_1^2}{A} + \frac{x_2^2}{B} + \frac{x_3^2}{C} = 0,$$

on a toujours

$$r_1^2 = \frac{A}{B-A}, \quad f^2 = \frac{A-C}{B-A}, \quad r_1^2 - f^2 = \frac{C}{B-A}, \quad r_2^2 = \frac{C}{B-C}.$$

Pour une cyclique de première classe, (16) montre que r_1^2 est positif, tandis que $r_1^2 - f^2$ est du signe de $\frac{q_1 \pm q_1}{q_3}$, donc de $1 - e^2$. Par suite les trois coefficients de l'équation réduite d'une cyclique de première classe sont, ou non, de même signe, suivant qu'elle est elliptique ou hyperbolique; il équivaut de dire, comme pour les coniques à centre, que r_1^2 est supérieur ou non à f^2 .

15. Les relations métriques entre les foyers et les tangentes d'une conique ont leur équivalent pour les cycliques, et l'on a le

THÉOREME. — *Le produit des distances des deux bifoyers (AA'), (BB') au cercle du champ tangent à la cyclique Q est constant.*

Nous en donnerons une démonstration géométrique plus loin; en voici une démonstration analytique. Q étant rapportée à ses axes, sous la forme [(1); III], avec les expressions [(4); III] des coefficients, les tangentes à Q sont les cercles λ du champ $(\lambda_j, 0)$ vérifiant l'équation tangentielle (5). Compte tenu de $\Sigma' \lambda_j^2 = 1$, la relation entre λ_1 et λ_2 est

$$\lambda_1^2 \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_3} \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_3} \right) + \frac{1}{q_3} = 0,$$

ou

$$q_2(q_1 - q_3)\lambda_1^2 + q_1(q_2 - q_3)\lambda_2^2 = q_1q_2,$$

ou enfin, grâce à [(4); III] et [(5); III],

$$(19) \quad a_1^2 \lambda_1^2 - a_2^2 \lambda_2^2 = \frac{(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2}{2}.$$

D'autre part [(4); I] donne

$$[(AA')\lambda]^2 = \frac{(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^2}{a_4^2},$$

$$[(BB')\lambda]^2 = \frac{(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2)^2}{b_4^2} = \frac{(a_2\lambda_2 - a_1\lambda_1)^2}{a_4^2}.$$

On peut écrire

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \frac{\lambda_2^2 a_2^2 - \lambda_1^2 a_1^2}{a_4^2},$$

où le second membre est réel en même temps que λ et (BB') , mais en outre positif ou négatif suivant que les deux bifoyers sont, ou non, du même côté du cercle; cette expression est imaginaire pure lorsque λ est réel et (BB') imaginaire. Enfin, (19) entraîne notre proposition, avec l'expression du produit

$$(20) \quad [(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \frac{(\sqrt{k^2+1}+1)a_1^2 + (\sqrt{k^2+1}-1)a_2^2}{-2a_4^2}.$$

A l'aide de (16) et (17), le second membre s'écrit encore

$$\frac{a_2^2 r_2^2}{a_1^2 + a_2^2} = (f^2 + 1)r_2^2 = r_1^2 - f^2,$$

d'où la formule, remarquable par sa similitude avec celle des coniques,

$$(21) \quad [(AA')\lambda][(BB')\lambda] = r_1^2 - f^2.$$

Réciproquement, l'enveloppe des cercles du champ, dont le produit des distances à deux bipoints (AA') , (BB') est constant, est une cyclique de bifoyers (AA') , (BB') . Soit $\Sigma' \lambda_j x_j = 0$ le cercle variable λ tel que

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \text{const.} = p.$$

Cette condition se traduit, entre les coefficients, par la relation

$$a_1^2 \lambda_1^2 - a_2^2 \lambda_2^2 + p a_4^2 = 0,$$

ou, sous forme homogène, puisque $\Sigma' \lambda_j^2 = 1$,

$$(p a_4^2 + a_1^2) \lambda_1^2 + (p a_4^2 - a_2^2) \lambda_2^2 + p a_4^2 \lambda_3^2 = 0.$$

Le bipoint caractéristique est défini par

$$\frac{x_1}{(p a_4^2 + a_1^2) \lambda_1} = \frac{x_2}{(p a_4^2 - a_2^2) \lambda_2} = \frac{x_3}{p a_4^2 \lambda_3},$$

d'où résulte immédiatement l'équation de l'enveloppe

$$\frac{x_1^2}{p a_4^2 + a_1^2} + \frac{x_2^2}{p a_4^2 - a_2^2} + \frac{x_3^2}{p a_4^2} = 0.$$

CHAPITRE V.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

16. Afin de permettre de mieux suivre quelques démonstrations et précisions complémentaires, il me paraît utile de signaler ici quelques faits géométriques essentiels ressortissant à la géométrie classique non euclidienne, et qui ne prétendent pas à la nouveauté. Considérons tout d'abord l'intersection d'une cyclique Q avec un cercle λ du champ. Celle-ci est définie par un bifoyer

réel (AA') et le bicercle directeur réel $(\beta\beta')$ ayant pour bicentre l'autre bifoyer (BB') , qui est réel ou non. On précise au besoin le cercle β qui correspond au point A pour que la définition de Q soit complète. Les bipoints d'intersection (MM') de Q et λ sont les bicentres de bicercles $(\mu\mu')$ passant par (AA') et tangents à $(\beta\beta')$. Cela revient à chercher les cercles μ qui passent par A ainsi que par le symétrique (inverse) A_1 de A par rapport à λ , et qui sont tangents à β . C'est une construction élémentaire, qui donne deux cercles μ , donc deux bipoints (MM') , réels ou imaginaires. Ce bipoint est réel pourvu que le cercle μ correspondant ne coupe pas la base ω , réelle, du champ. Le cercle λ est tangent pourvu que A_1 soit sur β , d'où la construction de Q par points et tangentes : A_1 étant le point courant de β , soit μ le cercle passant par A et tangent à β en A_1 ; son bicentre (MM') est sur Q, et le cercle λ du champ, médiateur de (AA_1) , $(A'A_1)$ est la tangente à Q en (MM') . Le cercle $(MM'A_1A')$ est orthogonal à $(\mu\mu')$ en (A_1A') , donc à $(\beta\beta')$; il passe donc en (BB') ; il est d'autre part symétrique de $(MM'AA')$ par rapport à λ . Donc, *la tangente à la cyclique Q au bipoint (MM') bissecte l'angle formé par les deux cercles qui joignent ce bipoint aux deux bifoyers.*

Lorsque Q est de première classe, on peut distinguer les deux cercles bissecteurs du triangle circulaire AMB; le bissecteur intérieur coupant l'arc de cercle AB situé d'un même côté de ω , et le bissecteur extérieur ne le traversant pas. L'un est tangent à la cyclique elliptique de bifoyers (AA') , (BB') , qui passe par (MM') ; l'autre à la cyclique hyperbolique. Nous allons voir que, comme pour les coniques, *la tangente à une cyclique Q de première classe bissecte extérieurement ou intérieurement le triangle circulaire AMB suivant que Q est elliptique ou hyperbolique.* Q étant rapportée à ses axes et représentée par l'équation [(1); III], le cercle $\lambda(\lambda_j, 0)$ coupe le cercle $(AA'BB')$, qui est l'axe ω_3 , au bipoint (TT') de coordonnées $(x_1, x_2, 0, \pm x_4)$ défini par

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0,$$

donc par

$$(1) \quad \frac{\lambda_1}{x_2} = \frac{\lambda_2}{-x_1} = iu,$$

où u est essentiellement réel. D'autre part, l'élimination de λ_3 entre [(5); IV] et $\Sigma' \lambda_j^2 = 1$ donne

$$\frac{q_1 - q_3}{q_1} \lambda_1^2 + \frac{q_2 - q_3}{q_2} \lambda_2^2 = 1;$$

(TT') est défini par

$$\frac{q_1 - q_3}{q_1} x_2^2 + \frac{q_2 - q_3}{q_2} x_1^2 = -\frac{1}{u^2} < 0.$$

Grâce à [(4); III] et [(5); III], il résulte de là que $a_2^2 x_1^2 - a_1^2 x_2^2$ est du signe de $(\sqrt{k^2 + 1} + 1) a_1^2 + (\sqrt{k^2 + 1}) a_2^2$, donc du signe de $q_1 + q_2$. Mais q_3 est négatif,

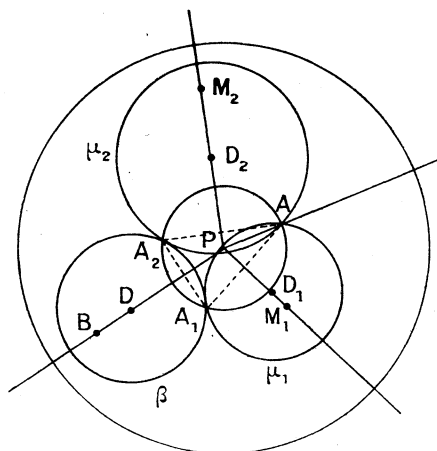
donc, compte tenu de [(9); III], ceci équivaut enfin à

$$(2) \quad a_2^2 x_1^2 - a_1^2 x_2^2 ds de^2 = 1.$$

Pour le point C du bicentre (CC'), qui est situé sur le côté AB du triangle AMB, $x_1 = 0$ et le premier membre de (2) est > 0 ; il ne s'annule que lorsque le point T traverse A ou B, donc le bissecteur intérieur correspond à une cyclique pour laquelle $e^2 > 1$, et l'autre à la cyclique pour laquelle $e^2 < 1$. On sait (§ 9) que les cycliques de première classe correspondantes sont les cycliques hyperboliques et elliptiques, ce qui démontre notre proposition.

17. La même démonstration que pour les coniques, faisant intervenir les bipoints conjugués, montre que si un cercle du champ rencontre Q en (MM'), (NN') et la directrice γ , associée au bifoyer (AA'), au bipoint (JJ'), le cercle (AA'JJ') bissecte les deux cercles qui joignent (AA') à (MM') et (NN'). De même, un raisonnement simple fondé sur l'involution permet de démontrer que si (M₁M'₁) et (M₂M'₂) sont les bipoints de contact des deux tangentes à Q menées par un bipoint (PP'), ces deux tangentes sont vues d'un bifoyer sous le même angle et sont également inclinées sur les cercles qui joignent (PP') aux deux bifoyers. En supposant que Q est de première classe, voici une démonstration plus élémentaire de ce double théorème, fondée sur l'inversion. Dans la figure transformée par une inversion de pôle P', (PP'AA'), (PP'BB'), (PP'M₁M'₁) et (PP'M₂M'₂) sont quatre rayons de la base ω du champ, centrée en P, et tous

Fig. 1.



ces bipoints sont formés par deux points inverses par rapport à ω . Sur la figure ci-dessus, sont seuls représentés les points intérieurs à ω ; par exemple, (M_iM'_i) ($i = 1, 2$) est le bicentre d'un bicercle ($\mu_i \mu'_i$) dont seul μ_i est tracé, lequel passe par A et touche le cercle directeur β , de bicentre (BB'), au point A_i symétrique

de A par rapport à la droite $PM_iM'_i$. Le cercle $(BB'M_iM'_i)$, qui joint les bicentres de (BB') et $(\mu_i\mu'_i)$, passe par $(A_iA'_i)$. D'autre part, PM_1 et PM_2 sont deux médiatrices des côtés du triangle AA_1A_2 , donc $PA_1=PA_2$, de sorte que PB, médiatrice de A_1A_2 , est axe de symétrie de $(BB'M_1M'_1)$ et $(BB'M_2M'_2)$. C'est la première partie de la proposition. Enfin, entre les angles orientés, on a

$$\widehat{APB} = \frac{1}{2}(\widehat{APA_1} + \widehat{APA_2}) = \widehat{APM_1} + \widehat{APM_2} \pmod{\pi},$$

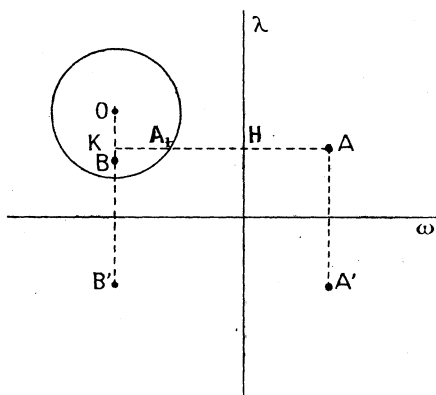
donc

$$\widehat{APM_1} + \widehat{BPM_2} = \text{mult. } \pi,$$

ce qui démontre la deuxième partie.

18. Terminons par une démonstration géométrique de la constance du produit des distances de (AA') et (BB') à la tangente de Q. λ désigne toujours un cercle tangent à Q, et A_1 la symétrique de A par rapport à λ , situé sur le cercle directeur β . Les distances $[(AA')\lambda]$ et $[(BB')\lambda]$ se conservent dans une inversion ayant pour pôle l'un des points où λ rencontre la base ω du champ. On obtient la figure 2, où ω et λ sont deux droites orthogonales.

Fig. 2.



La formule $[(2); 1]$ nous donne ici

$$[(AA')\lambda] = 2 \frac{AH}{AA'} = \frac{AA_1}{AA'},$$

$$[(BB')\lambda] = 2 \frac{KH}{BB'},$$

donc

$$[(AA')\lambda][(BB')\lambda] = \frac{AA_1(KA + KA_1)}{AA'.BB'} = \frac{\overline{KA}^2 - \overline{KA_1}^2}{AA'.BB'}.$$

Si O désigne le centre de β , ce produit p vaut encore

$$p = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OA_1}^2}{AA'.BB'} = \frac{x_\beta A}{AA'.BB'}.$$

D'autre part, la distance anallagmatique du point A au cercle β vaut ⁽¹⁾

$$(A\beta) = \frac{x_{\beta} A}{\text{diam. } \beta} = \frac{x_{\beta} A}{k \cdot BB'}$$

d'après [(4); II], donc

$$p = k \frac{A\beta}{AA'} = \frac{k}{2} \frac{A\beta}{A\omega}.$$

Ce dernier rapport est un invariant anallagmatique ⁽²⁾, donc cette expression vaut pour la figure initiale, ce qui démontre que p ne dépend pas de λ . On voit en même temps que ce produit constant est égal à

$$p = \frac{k}{2} \frac{A\beta}{A\omega} = \frac{k}{2} \frac{B\alpha}{B\omega},$$

où α est le cercle directeur de bicentre (AA'). On vérifie aisément la coïncidence de cette valeur avec [(20); IV].

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 2.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 3.

