

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Les espaces variationnels généralisés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 62 (1945), p. 339-384

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__339_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES

ESPACES VARIATIONNELS

GÉNÉRALISÉS

PAR M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

Introduction.

Dans une série de Notes récentes ⁽¹⁾, j'ai indiqué comment il était possible de distinguer, parmi les espaces de Cartan à connexion euclidienne dont l'élément générateur est un élément linéaire, une classe d'espaces généralisant les espaces de Finsler, auxquels j'ai donné le nom d'*espaces variationnels généralisés*. Je me propose de développer ici une théorie systématique de ces espaces.

C'est par l'analyse des équations différentielles auxquelles est soumis le mouvement d'un système dynamique non conservatif que j'ai été amené à la construction de tels espaces. La théorie des mouvements des systèmes dynamiques conservatifs et leur géométrisation sont grandement facilitées par le rôle éminent joué dans cette théorie par le calcul des variations classique auquel est venue s'ajouter grâce à Poincaré, Cartan et de Donder la théorie des invariants intégraux. En introduisant des fonctionnelles plus générales que celles du calcul des variations classique, j'ai été conduit à définir une extension de la technique de ce calcul, particulièrement adaptée à la théorie des mouvements des systèmes dynamiques non conservatifs et, plus généralement, à la théorie d'équations différentielles pour lesquelles certaines conditions de différentielle totale ne sont pas satisfaites. L'étude des relations intégrales d'invariance ⁽²⁾, qui paraîtra prochainement dans un autre Recueil, obéit au même souci. La géométrisation des problèmes relatifs à ce calcul des variations

⁽¹⁾ *C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 328; t. 214, 1942, p. 599; t. 216, 1943, p. 25; t. 217, 1943, p. 415.

⁽²⁾ *C. R. Acad. Sc.*, t. 217, 1943, p. 660.

non holonome conduit naturellement à la construction des espaces variationnels généralisés.

Dans la Section I de ce Mémoire, j'étudie un exemple simple, celui des espaces ponctuels à connexion semi-symétrique, pour montrer comment peut s'effectuer cette construction. La Section II est consacrée à l'axiomatique du calcul des variations non holonome et à la définition des extrémales généralisées. Les Sections III, IV, V constituent la théorie proprement dite des espaces variationnels. A ces espaces on peut attacher deux connexions euclidiennes légèrement différentes, mais dont les géodésiques coïncident naturellement. L'une de ces connexions présente l'avantage de ne pas faire intervenir de dérivées d'ordre supérieur des données fondamentales. On notera aussi que les seuls espaces variationnels généralisés qui puissent être envisagés comme espaces ponctuels sont les espaces à connexion semi-symétrique étudiés à la Section I. Dans la Section VI je forme les deux tenseurs de torsion et les trois tenseurs de courbure qui caractérisent géométriquement l'espace. La Section VII est consacrée à l'étude des rapports de la géométrie des espaces variationnels avec la *Metric geometry of paths* de J. Douglas et la section VIII à quelques-unes des nombreuses applications à la dynamique, classique et relativiste, de la théorie.

Je signalerai enfin que la théorie développée ici est la théorie des espaces variationnels du premier ordre, mais qu'il est possible de développer une théorie analogue pour les espaces d'ordre supérieur, généralisant ainsi la théorie des espaces de Kawaguchi-Cartan.

Les notations employées sont les notations classiques du calcul différentiel absolu. En particulier les signes de sommation sont partout supprimés. Si $f(x^\lambda)$ désigne une fonction des coordonnées x^λ , je pose

$$\frac{\partial f}{\partial x^\lambda} = d_\lambda f.$$

I. — Sur certains espaces ponctuels à connexion semi-symétrique.

1. *La connexion intermédiaire de Weyl.* — Afin de bien distinguer les éléments qui m'ont conduit à la construction des espaces variationnels généralisés, je présenterai d'abord ces éléments sur un exemple particulièrement simple et dont l'importance apparaîtra ultérieurement.

Soit V une variété analytique à n dimensions. Comme dans la théorie des espaces de Weyl, nous nous donnerons sur cette variété une forme différentielle quadratique

$$(1.1) \quad ds_0^2 = \hat{g}_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta, \lambda, \dots = 1, 2, \dots, n),$$

et une forme différentielle linéaire non intégrable

$$(1.2) \quad \omega = K_\alpha(x^\lambda) dx^\alpha.$$

Je désignerai par E l'espace riemannien défini sur la variété V par la métrique (1.1).

Au voisinage de tout point M de V , menons par M un faisceau de courbes rectifiables joignant M à tout point m de ce voisinage. Nous donnerons ce voisinage de la métrique ds^2 , conforme à la métrique ds_0^2 , et définie au point m par la relation

$$(1.3) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e^{\int_M^m K_\alpha dx^\alpha} ds_0^2,$$

l'intégrale étant évaluée le long de la courbe joignant M à m . Quand m tend vers M le long de la courbe considérée, les $g_{\alpha\beta}$ tendent vers les $\hat{g}_{\alpha\beta}$; mais en M les dérivées partielles $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ diffèrent des dérivées partielles correspondantes par l'espace riemannien E . Il est commode et sans inconvénient de désigner ces dérivées partielles par la notation $\partial_\gamma^0 g_{\alpha\beta}$. On a manifestement au point M

$$(1.4) \quad \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma^0 g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} K_\gamma.$$

Nous sommes ainsi conduits à faire correspondre à la métrique ds^2 la connexion ponctuelle affine ayant pour éléments au point M

$$(1.5) \quad \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \gamma_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} [g_{\lambda\rho} K_\mu + g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho],$$

où $\gamma_{\lambda\mu}^\nu$ désigne le symbole de Christoffel de seconde espèce associé aux $g_{\alpha\beta}$. Cette connexion n'est autre que la *connexion de Weyl* attachée à la forme quadratique ds_0^2 et à la forme linéaire ω .

Cependant ce n'est pas cette connexion symétrique qui va nous intéresser, et ceci pour la raison suivante. Supposons un instant la forme linéaire ω intégrable. La métrique ds_0^2 définit alors sur V un espace riemannien ordinaire. Au point m considérons deux vecteurs, l'un \hat{l}^ν unitaire dans ds_0^2 , l'autre l^ν strictement colinéaire à \hat{l}^ν et unitaire dans ds^2 . Quand m vient en M , les deux vecteurs \hat{l}^ν et l^ν viennent en coïncidence, mais leurs dérivées diffèrent. Pour former la dérivée covariante du vecteur l^ν unitaire en M , il nous faut tenir compte de cette différence dans la connexion déduite de la connexion (1.5).

2. *La connexion semi-symétrique.* — Revenons au cas d'une forme ω quelconque et désignons toujours au point m , par \hat{l}^ν et l^ν deux vecteurs strictement colinéaires unitaires l'un dans ds_0^2 , l'autre dans ds^2 . Ces deux vecteurs sont manifestement liés par la relation

$$l^\nu = e^{-\frac{1}{2} \int_M^m K_\alpha dx^\alpha} \hat{l}^\nu.$$

Il en résulte qu'au point M les dérivées $\partial_\mu l^\nu$ s'expriment en fonction des dérivées correspondantes $\partial_\mu^0 l^\nu$ pour l'espace riemannien E , par les formules

$$(2.1) \quad \partial_\mu l^\nu = \partial_\mu^0 l^\nu - \frac{1}{2} K_\mu l^\nu,$$

où l'on a supprimé l'indice zéro au dernier terme du second membre, puisqu'en M il y a coïncidence entre les l^ν et les \tilde{l}^ν .

Considérons alors l'espace ponctuel S formé par le raccordement des voisinages des différents points M de V selon la connexion (1.5), le vecteur unitaire adopté au point M étant l^ν . Si ∇_μ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans S, il vient

$$\nabla_\mu l^\nu = \partial_\mu l^\nu + \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} l^\lambda = \partial_\mu^0 l^\nu - \frac{1}{2} K_\mu l^\nu + \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} l^\lambda.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la connexion ponctuelle affine ayant pour éléments

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} K_\mu g^{\nu\lambda},$$

soit, compte tenu de (1.5),

$$(2.2) \quad \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \gamma_{\lambda\mu}^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\rho} K_\mu).$$

La connexion affine ainsi obtenue est *semi-symétrique au sens de Schouten* ⁽¹⁾, puisqu'il lui correspond le tenseur de torsion ponctuelle

$$\Omega_{\lambda\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}) = \frac{1}{4} (K_\lambda g^{\nu\mu} - K_\mu g^{\nu\lambda}).$$

Si $\hat{\nabla}_\mu$ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans l'espace E, il est clair que l'on a

$$\nabla_\mu l^\nu = \hat{\nabla}_\mu l^\nu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\rho} K_\mu) l^\lambda.$$

Il en résulte que le système différentiel aux géodésiques de l'espace à connexion semi-symétrique S

$$l^\mu \nabla_\mu l^\nu = 0$$

peut se mettre sous la forme

$$(2.3) \quad l^\mu \hat{\nabla}_\mu l^\nu = \frac{1}{2} (g^{\lambda\nu} - l^\lambda l^\nu) K_\lambda.$$

Si la forme ω est intégrable, le système différentiel (2.3) définit, comme il est bien connu, les géodésiques de l'espace riemannien conforme à E, admettant la métrique

$$ds^2 = l^\nu ds_0^2; \quad \omega = dU.$$

L'introduction de l'espace S nous permet ainsi de géométriser, dans le cas le plus général, le système différentiel (2.3). Nous démontrerons ultérieurement

⁽¹⁾ Sur les espaces à connexion semi-symétrique, voir SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Springer, Berlin, 1924, p. 69-75; EISENHART, *Non-riemannian geometry* (Americ. Math. Soc. Colloquium, vol. 8, 1927, p. 36-38); J. M. THOMAS, *Asymmetric displacement of a vector* (Trans. Americ. Math. Soc., vol. 28, 1926, p. 658-870).

que les espaces à connexion semi-symétrique (2.2) sont les seuls espaces variationnels généralisés qui peuvent être envisagés comme espaces ponctuels. On conçoit par là leur importance.

II. — Le calcul des variations non holonome.

3. *Définitions et notations.* — Avant de pouvoir aborder la construction de la géométrie des espaces variationnels, il nous faut tout d'abord réaliser cette extension du calcul classique des variations que j'ai signalée au cours de l'Introduction. Les définitions que nous allons donner sont celles qui sont strictement indispensables à la construction des espaces variationnels qui généralisent les espaces de Finsler. Il apparaîtra que ces définitions sont susceptibles d'une certaine extension. Elles pourraient permettre de construire des géométries englobant par exemple celle des espaces de Cartan-Kawaguchi. Nous ne nous intéresserons pas à de telles géométries dans le présent Mémoire.

Sur une variété analytique V à n dimensions dont le point courant M admet les coordonnées (x^λ) , considérons les courbes C définies par la représentation paramétrique

$$(3.1) \quad x^\lambda = x^\lambda(v) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

où les fonctions $x^\lambda(v)$ sont supposées continûment différentiables jusqu'au second ordre sur un intervalle (a, b) . Étant donné un nombre ε positif, arbitrairement petit, nous désignerons :

- 1° par $(u_0, u_1) \subset (a, b)$ un intervalle d'amplitude inférieure à ε ;
- 2° par $y^\lambda(v, \varepsilon)$ un système de n fonctions continûment différentiables en v sur l'intervalle et nulles pour $v = u_0$ et pour $v = u_1$.

Nous donnerons dans la suite à $x^\lambda(v)$ l'accroissement

$$(3.2) \quad \delta x^\lambda = \varepsilon y^\lambda(v, \varepsilon)$$

et nous poserons

$$(3.3) \quad \eta(\varepsilon) = \max_{\substack{v \in (u_0, u_1) \\ \lambda \in (1, 2, \dots, n)}} |\delta x^\lambda(v)|.$$

Il est clair que quand ε tend vers zéro, il en est de même pour $\eta(\varepsilon)$.

Appliquons aux $y^\lambda(v, \varepsilon)$ la formule des accroissements finis entre les valeurs u_0 et v de la variable v . En désignant par $y'^\lambda(v, \varepsilon)$ la dérivée de y^λ par rapport à v , il vient

$$y^\lambda(v, \varepsilon) = (v - u_0) y'^\lambda(\theta, \varepsilon),$$

avec

$$u_0 < \theta < v.$$

Supposons que quel que soit l'intervalle $(u_0, u_1) \subset (a, b)$ et d'amplitude inférieure à ε , on ait, pour $v \in (u_0, u_1)$,

$$y^\lambda(v, \varepsilon) < K.$$

Il en résulte

$$\eta(\varepsilon) < K\varepsilon^2.$$

Dans la présente Section, comme dans les autres Sections plus spécialement géométriques, nous ferons usage de la convention habituelle de sommation.

4. *Sous-différentielle d'une fonctionnelle.* — Je désignerai par le symbole

$$F_{u_0}^u[x^\lambda(v)]$$

une fonctionnelle attachée à l'arc (u_0, u) de C et satisfaisant à la condition suivante : pour toute valeur $u_0 \in (a, b)$, il existe un intervalle (u_0, u_1) tel que quand u varie dans (u_0, u_1) , $F_{u_0}^u$ définisse une fonction intégrable de u .

Prenant, comme il a été dit, l'intervalle (u_0, u_1) d'amplitude inférieure à ε , j'appelle sous-différentielle $\bar{\delta}F$ de la fonctionnelle F une fonction des $x^\lambda(v)$, de leurs dérivées premières $x'^\lambda(v)$ et des δx^λ qui soit :

1° linéaire par rapport aux δx^λ ;

2° telle que l'on ait

$$(4.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta F - \bar{\delta}F}{\varepsilon} = 0,$$

où ΔF désigne l'accroissement de F correspondant aux accroissements (3.2) des x^λ .

5. *Sous-variation d'une intégrale.* — Considérons par exemple l'intégrale

$$(5.1) \quad J = \int_{u_0}^{u_1} H[F_{u_0}^u, x^\lambda(u), x'^\lambda(u)] du,$$

où H désigne une fonction continue des $(2n+1)$ arguments F, x^λ, x'^λ .

J'appelle sous-variation $\bar{\delta}J$ de l'intégrale J une intégrale de la forme

$$(5.2) \quad \bar{\delta}J = \int_{u_0}^{u_1} L[x^\lambda(u), x'^\lambda(u), \delta x^\lambda(u)] du,$$

où L est une fonction des x^λ , des dérivées x'^λ et des δx^λ qui est :

1° linéaire par rapport aux δx^λ ;

2° telle que l'on ait

$$(5.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta J - \bar{\delta}J}{\varepsilon} = 0,$$

où ΔJ désigne l'accroissement de J correspondant aux accroissements (3.2) des x^λ .

6. *Fonctionnelles de la classe régulière.* — J'appellerai fonctionnelle de la classe régulière attachée à C, une fonctionnelle

$$F_{u_0}^u[x^z(v)],$$

telle que pour toute valeur $u_0 \in (a, b)$, il existe un intervalle (u_0, u_1) pour lequel quel que soit $u \in (u_0, u_1)$ on ait les propriétés suivantes :

a. $F_{u_0}^u$ est une fonctionnelle continue et dérivable de u . Quand u tend vers u_0 , $F_{u_0}^u$ tend vers une constante que l'on peut toujours supposer nulle.

b. $F_{u_0}^u$ est une fonctionnelle dérivable pour les valeurs $v \in (u_0, u)$ et admet, relativement aux x^λ , les dérivées fonctionnelles partielles

$$F'_\lambda[x^z(v); v];$$

quels que soient u_0 et u_1 , on a sur C

$$(6.1) \quad F'_\lambda[x^z(v); v] < A.$$

c. Pour les accroissements (3.2), la différentielle de F peut être mise sous la forme

$$(6.2) \quad \delta F = \int_{u_0}^u F'_\lambda[x^z(v); v] \delta x^\lambda(v) dv + \omega_\lambda[x^z(u), x'^z(u)] \delta x^\lambda(u),$$

avec une partie exceptionnelle relative à la valeur $v = u$. Quels que soient u_0 et u_1 , on a sur C

$$(6.3) \quad |\omega_\lambda[x^z(u), x'^z(u)]| < B.$$

D'après la définition de la différentielle de Fréchet, on a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta F - \delta F}{\eta} = 0.$$

Nous poserons

$$(6.4) \quad \varphi(\varepsilon) = \max_{u \in (u_0, u_1)} \frac{|\Delta F - \delta F|}{\eta},$$

$\varphi(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε .

L'exemple de fonctionnelle de la classe régulière que nous serons constamment amenés à utiliser nous est fourni par l'intégrale

$$(6.5) \quad F = \int_{u_0}^u \omega[x^\lambda(v), x'^\lambda(v)] dv,$$

où ω désigne une fonction continûment différentiable jusqu'au second ordre des variables x^λ et x'^λ . Il est clair que la fonctionnelle (6.5) satisfait aux hypothèses de la classe régulière. En particulier, comme il est bien connu, la fonctionnelle F admet la différentielle

$$(6.6) \quad \delta F = \int_{u_0}^u \left[\frac{\partial \omega}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{dv} \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} \right] \delta x^\lambda(v) dv + \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda}(u) \delta x^\lambda(u).$$

7. *Sous-différentielle d'une fonctionnelle de la classe régulière.* — Pour une fonctionnelle de la classe régulière, la sous-différentielle définie au paragraphe 4 admet une expression particulièrement simple. Elle est égale à la partie exceptionnelle de la différentielle ∂F , soit

$$(7.1) \quad \partial F = a_\lambda[x^\lambda(u), x'^\lambda(u)] \partial x^\lambda(u).$$

Montrons d'abord que l'expression (7.1) qui est linéaire par rapport aux ∂x^λ satisfait effectivement à la définition de la sous-différentielle, c'est-à-dire satisfait à l'égalité (4.1). On a, en effet,

$$\frac{\Delta F - \partial F}{\eta} \leq \frac{|\Delta F - \partial F|}{\eta} + \frac{|\partial F - \partial F|}{\eta};$$

or, d'après (6.4),

$$\frac{|\Delta F - \partial F|}{\eta} < \varphi(\varepsilon)$$

et, en vertu de l'inégalité (6.1) et de l'équation (6.2),

$$\frac{|\partial F - \partial F|}{\eta} = \frac{\left| \int_{u_0}^u F'_\lambda[x^\lambda(v); v] \partial x^\lambda(v) dv \right|}{\eta} < \frac{\varepsilon n A \eta}{\eta} = n A \varepsilon.$$

Il en résulte l'inégalité

$$(7.2) \quad \frac{|\Delta F - \partial F|}{\eta} < \varphi(\varepsilon) + n A \varepsilon$$

et l'expression (7.1) satisfait bien à l'égalité (4.1).

Inversement, il est facile de démontrer que toute fonction $\partial^* F$ satisfaisant aux postulats de la sous-différentielle coïncide nécessairement avec (7.1). Soit, en effet,

$$(7.3) \quad \partial^* F = b_\lambda[x^\lambda(u), x'^\lambda(u)] \partial x^\lambda(u)$$

une telle fonction. On a

$$\frac{|\partial F - \partial^* F|}{\eta} \leq \frac{|\Delta F - \partial F|}{\eta} + \frac{|\Delta F - \partial^* F|}{\eta}.$$

Il résulte alors des postulats sur la sous-différentielle que

$$\lim_{\varepsilon > 0} \frac{\partial F - \partial^* F}{\eta} = \lim_{\varepsilon > 0} \{ a_\lambda[x^\lambda(u), x'^\lambda(u)] - b_\lambda[x^\lambda(u), x'^\lambda(u)] \} Z^\lambda(u) = 0,$$

où l'on a posé

$$Z^\lambda(u) = \frac{\partial x^\lambda(u)}{\eta}.$$

En passant à la limite et en tenant compte de l'arbitraire avec lequel peuvent être choisis les $Z^k(u_0)$, on aboutit aux égalités

$$b_k[x^z(u_0), x'^z(u_0)] = a_k[x^z(u_0), x'^z(u_0)].$$

Ces égalités ayant lieu quel que soit $u_0 \in (a, b)$ et quelle que soit la courbe C considérée, il en résulte l'identité complète des expressions (7.1) et (7.3).

Ainsi, pour l'intégrale (6.5) étudiée antérieurement, la sous-différentielle admet l'expression

$$(7.4) \quad \delta F = \frac{\partial \omega}{\partial x'^k} \delta x^k.$$

8. *Sous-variation d'une intégrale portant sur une fonctionnelle de la classe régulière.* — Considérons l'intégrale

$$(8.1) \quad J = \int_{u_0}^{u_1} H[F_{u_0}^u, x^z(u), x'^z(u)] du,$$

où la fonction H est supposée trois fois continûment différentiable pour des $(2n+1)$ arguments et où la fonctionnelle $F_{u_0}^u$ est l'intégrale définie par l'équation (6.5). Nous nous proposons de rechercher la forme explicite de la sous-variation δJ de l'intégrale J .

Nous indiquerons d'abord quelques majorations. On a en premier lieu, en vertu de (7.2),

$$(8.2) \quad \|\delta F\| = \max_{u \in (u_0, u_1)} |\delta F| < \eta \max_{u \in (u_0, u_1)} \sum_{\lambda=1}^{k=n} a_\lambda(u) < \alpha \eta,$$

$$(8.3) \quad \|\Delta F\| = \max_{u \in (u_0, u_1)} |\Delta F| \leq \max_{u \in (u_0, u_1)} |\Delta F - \delta F| + \|\delta F\| < [\varphi(\varepsilon) + n A \varepsilon] \eta + \alpha \eta < \beta \eta,$$

α et β désignant des constantes convenablement choisies, $\Phi(u)$ étant une fonction continûment différentiable de u , cherchons à majorer l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} \Phi(u) \delta x'^k(u) du.$$

En intégrant par parties et en tenant compte de la nullité de $\delta x^k(u)$ pour $u = u_0$ et pour $u = u_1$, il vient

$$(8.4) \quad \left| \int_{u_0}^{u_1} \Phi(u) \delta x'^k(u) du \right| = \left| \int_{u_0}^{u_1} \Phi(u) \delta x^k(u) du \right| < \gamma \varepsilon \eta,$$

γ désignant encore une constante.

Posons

$$\Delta H = H(F + \Delta F, x^k + \delta x^k, x'^k + \delta x'^k) - H(F, x^k, x'^k)$$

et appliquons les majorations précédentes à la majoration de l'intégrale de

$$\Delta H - \left[\frac{\partial H(F)}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial H(F)}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda + \frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} \delta x'^\lambda \right] = Q(\delta x'^\lambda) + \delta x'^\lambda L(\delta x^\lambda, \Delta F) + Q(\delta x^\lambda, \Delta F) + R,$$

où Q et Q désignent des formes quadratiques, L une forme linéaire par rapport aux variables indiquées et où R représente une fonction du troisième ordre au moins par rapport à ces variables. Nous n'avons fait figurer au premier membre que l'argument F de H . A l'aide des majorations (8.2), (8.3), (8.4), il vient

$$\left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(F)}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial H(F)}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda + \frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} \delta x'^\lambda \right] du \right| < (\gamma_1 \varepsilon + \gamma_2 \eta) \varepsilon \eta,$$

γ_1 et γ_2 désignant des constantes. Bornons $\frac{\partial H}{\partial F}$ et remplaçons ΔF par δF au premier membre en tenant compte de l'inégalité (7.2). On obtient ainsi

$$\left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(F)}{\partial F} \delta F + \frac{\partial H(F)}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda + \frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} \delta x'^\lambda \right] du \right| < \gamma_3 [\varphi(\varepsilon) + h\varepsilon + h'\eta] \varepsilon \eta,$$

γ_3 , h , h' représentant de nouvelles constantes. Conformément à la méthode classique du calcul des variations, intégrons, par parties, le dernier terme sous le signe \int . Par suite de la nullité de $\delta x^\lambda(u)$ pour $u = u_0$ et pour $u = u_1$, il vient

$$(8.5) \quad \left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(F)}{\partial F} \alpha_\lambda + \frac{\partial H(F)}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{du} \frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} \right] \delta x^\lambda du \right| < \gamma_3 [\varphi(\varepsilon) + h\varepsilon + h'\eta] \varepsilon \eta.$$

Au premier membre de l'inégalité (8.5), la fonction H intervient pour la valeur F de son premier argument. Or, quand u tend vers u_0 , $F_{u_0}^u$ tend vers zéro. Nous allons donc chercher à obtenir une inégalité de forme analogue où la fonction H intervienne pour l'argument $F = 0$. Posons

$$\psi(\varepsilon) = \max_{u \in (u_0, u_1)} |F_{u_0}^u|.$$

On obtient immédiatement les inégalités

$$(8.6) \quad \left| \frac{\partial H(F)}{\partial F} - \frac{\partial H(0)}{\partial F} \right| < K_1 \psi(\varepsilon),$$

$$(8.7) \quad \left| \frac{\partial H(F)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial H(0)}{\partial x^\lambda} \right| < K_2 \psi(\varepsilon),$$

où K_1 et K_2 représentent des constantes. D'autre part il vient

$$\frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial H(0)}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial^2 H(\theta F)}{\partial x'^\lambda \partial F} F \quad (0 < \theta < 1),$$

soit, en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à u ,

$$\frac{d}{du} \frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} = \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F} \frac{dF}{du} + F \frac{d}{du} \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F}.$$

Il en résulte l'inégalité

$$(8.8) \quad \left| \frac{d}{du} \frac{\partial H(F)}{\partial x'^\lambda} - \left[\frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F} \frac{dF}{du} \right] \right| < K_3 \psi(\varepsilon).$$

En utilisant les inégalités (8.6), (8.7), (8.8), on déduit de (8.5) l'inégalité

$$(8.9) \quad \left| \Delta J - \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(o)}{\partial F} \alpha_\lambda + \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F} \frac{dF}{du} \right] \delta x^\lambda du \right| < \chi(\varepsilon) \varepsilon \eta,$$

avec

$$\chi(\varepsilon) = \gamma_3 [\varphi(\varepsilon) + h\varepsilon + h'\eta + K \psi(\varepsilon)],$$

K_3 et K représentant de nouvelles constantes. On a donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\varepsilon) = 0.$$

Par suite, si nous posons

$$\bar{\delta} J = \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(o)}{\partial F} \alpha_\lambda + \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F} \frac{dF}{du} \right] \delta x^\lambda du,$$

soit en introduisant la fonction ω ,

$$(8.10) \quad \bar{\delta} J = \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(o)}{\partial F} \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F} \omega \right] \delta x^\lambda du;$$

il en résulte de l'inégalité (8.9) que l'intégrale $\bar{\delta} J$ satisfait à l'équation

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta J - \bar{\delta} J}{\varepsilon \eta} = 0.$$

L'expression (8.10) vérifie donc les postulats de la sous-variation d'une intégrale. Un raisonnement, identique à celui du paragraphe 7, montrerait que toute intégrale, qui vérifie les postulats du paragraphe 5 pour la sous-variation, coïncide nécessairement avec l'intégrale (8.10).

9. *Extrémales généralisées.* — Étant donnée une intégrale J telle que (6.5), nous appellerons *problème de calcul des variations non holonome*, défini par J , la recherche des courbes C le long desquelles la sous-variation

$$(9.1) \quad \bar{\delta} J = \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{\partial H(o)}{\partial F} \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} - \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^\lambda \partial F} \omega \right] \delta x^\lambda du$$

est identiquement nulle, quels que soient les accroissements δx^k définis par (3.2). Les courbes C correspondantes seront dites les *extrémales généralisées* de l'intégrale J . Un raisonnement classique du calcul des variations montre que ces extrémales sont les solutions du système différentiel

$$\frac{\partial H(o)}{\partial F} \frac{\partial \omega}{\partial x'^k} + \frac{\partial H(o)}{\partial x^k} - \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^k} - \frac{\partial^2 H(o)}{\partial x'^k \partial F} \omega = 0.$$

Étant donnée une fonction $\varphi(F, x^k, x'^k)$, nous conviendrons, afin d'alléger les notations, de désigner par φ' la dérivée partielle de φ par rapport à F . Avec cette notation, le système différentiel aux extrémales généralisées peut s'écrire

$$(9.2) \quad \frac{d}{du} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^k} - \frac{\partial H(o)}{\partial x^k} = H'(o) \frac{\partial \omega}{\partial x'^k} - \omega \frac{\partial H'(o)}{\partial x'^k}.$$

Ce système ne fait intervenir que les trois fonctions des variables x^k et x'^k

$$H(o, x^k, x'^k); \quad H'(o, x^k, x'^k); \quad \omega(x^k, x'^k).$$

On notera que le système différentiel (9.2), comme la sous-variation (9.1), demeurent invariants quand on change simultanément H' en $-H'$ et ω en $-\omega$, et aussi quand on change H' en ω et ω en $-H'$.

10. *Exemple de problème de calcul des variations non holonome.* — L'exemple le plus simple de problème de calcul des variations de ce type est fourni par le principe de Hamilton pour les systèmes dynamiques *non conservatifs*, soumis à des forces ne dépendant que de la position du système. Si nous désignons par x^i ($i=1, 2, \dots, n$) les paramètres indépendants relatifs au système dynamique considéré, par $2T$ sa force vive et par $Q_i dx^i$ le travail virtuel élémentaire des forces données appliquées au système, les équations de Lagrange qui déterminent le mouvement s'écrivent

$$(10.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Si l'on pose

$$u = t; \quad H(o) = T(x^i, x'^i); \quad H'(o) = 1; \quad \omega = Q_i x'^i;$$

les équations (9.2) correspondant aux fonctions ainsi choisies coïncident avec les équations de Lagrange (10.1). Il en résulte que les équations de Lagrange définissent les extrémales généralisées associées à l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(T + \int_{t_0}^t Q_i \frac{dx^i}{d\tau} d\tau \right) dt,$$

où S représente l'action du système dynamique pour l'intervalle de temps (t_0, t_1) .

III. — La première connexion euclidienne d'un espace variationnel.

11. *Les données fondamentales qui définissent un espace variationnel.* — Soit $\varphi(F, x^\lambda, x'^\lambda)$ une fonction des $(2n+1)$ arguments explicités. Comme dans les paragraphes précédents, nous utiliserons systématiquement les notations qui suivent :

$$\varphi(0) = \varphi(0, x^\lambda, x'^\lambda); \quad \varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial F}; \quad \partial_\lambda \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda}.$$

De plus nous poserons

$$\partial_\lambda \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^\lambda}.$$

Ces conventions étant introduites, donnons-nous deux fonctions $\omega(x^\lambda, x'^\lambda)$ et $H(F, x^\lambda, x'^\lambda)$, toutes deux *homogènes et du premier degré* par rapport aux x'^λ et considérons les deux intégrales

$$(11.1) \quad F = \int_{u_0}^{u_1} \omega[x^\lambda(v), x'^\lambda(v)] dv$$

et

$$(11.2) \quad J = \int_u^{u_1} H[F_{u_0}, x^\lambda(u), x'^\lambda(u)] du,$$

évaluées le long d'une courbe C. L'hypothèse d'homogénéité assure un caractère intrinsèque aux intégrales F et J : elles ne dépendent pas du paramètre u choisi le long de la courbe C, si bien que l'on peut poser

$$F = \int_{M_0}^{M_1} \omega(x^\lambda, dx^\lambda); \quad J = \int_{M_0}^{M_1} H[F_{M_0}, x^\lambda(M), dx^\lambda],$$

M appartenant à l'intervalle $M_0 M_1$ de C.

J'appelle *espace variationnel généralisé* un espace fondé sur un problème de calcul des variations non holonome relatif à une intégrale telle que (11.2). La théorie de ces espaces qui généralisent les espaces de Finsler peut être elle aussi intégrée dans la théorie générale des espaces de Cartan qui admettent pour élément générateur un élément linéaire et qui sont doués d'une connexion euclidienne. Dans la présente section nous définirons et étudierons une première connexion euclidienne qui peut être attachée d'une manière intrinsèque à la variété V et à l'intégrale J.

12. *L'espace de Finsler associé à $\Pi(0, x^\lambda, dx^\lambda)$.* — Je désignerai par E l'espace de Finsler défini sur la variété V par la métrique

$$(12.1) \quad ds_0^2 = H^2(0, x^\lambda, dx^\lambda).$$

Cet espace admet le tenseur métrique fondamental

$$\dot{g}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} \frac{1}{2} [H^2(o)],$$

dont les composants sont homogènes et de degré zéro par rapport aux x'^λ . En vertu de l'homogénéité de H , elles satisfont effectivement à la relation

$$ds_0^2 = \dot{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Étant donné un champ de vecteurs X^ν , c'est-à-dire une famille continûment différentiable de vecteurs X^ν attachés à chaque élément linéaire (x^λ, x'^λ) , la différentielle absolue $\hat{\nabla} X^\nu$ du vecteur X^ν dans l'espace de Finsler peut être représentée par la formule

$$(12.2) \quad \hat{\nabla} X^\nu = dX^\nu + \dot{C}_\lambda{}^\nu{}_\mu X^\lambda dx'^\mu + \dot{\Gamma}_\lambda{}^\nu{}_\mu X^\lambda dx^\mu;$$

quant aux géodésiques de l'espace de Finsler, elles sont définies par le système différentiel

$$(12.3) \quad \frac{d^2 x^\nu}{ds_0^2} + {}_2\dot{G}^\nu \left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{ds_0} \right) = 0,$$

où les \dot{G}^λ sont les fonctions homogènes et du second degré par rapport aux x'^α qui sont telles que

$$(12.4) \quad {}_2\dot{G}^\nu = \dot{\Gamma}_\lambda{}^\nu{}_\mu x'^\lambda x'^\mu.$$

D'après les résultats classiques de Cartan ⁽¹⁾, la connexion de l'espace de Finsler peut être définie explicitement par les formules suivantes :

$$(12.5) \quad \dot{C}_{\lambda\rho\mu} = \frac{1}{2} \partial_{\mu'} \dot{g}_{\lambda\rho}; \quad \dot{C}_\lambda{}^\nu{}_\mu = \dot{g}^{\nu\rho} \partial_{\mu'} \dot{g}_{\lambda\rho};$$

$$(12.6) \quad \dot{\Gamma}_{\lambda\rho\mu} = \gamma_{\lambda\rho\mu} + \dot{C}_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} \dot{G}^\alpha - \dot{C}_{\rho\mu\alpha} \partial_{\lambda'} \dot{G}^\alpha; \quad \dot{\Gamma}_\lambda{}^\nu{}_\mu = \dot{g}^{\nu\rho} \dot{\Gamma}_{\lambda\rho\mu};$$

$$(12.7) \quad {}_2\dot{G}_\lambda = \partial_{\lambda'} \left[\frac{1}{2} H^2(o) \right] x'^\mu - \partial_\lambda \left[\frac{1}{2} H^2(o) \right],$$

où les $\dot{g}_{\lambda\mu}$ désignent les mineurs réduits du déterminant $\|\dot{g}_{\lambda\mu}\|$ et où $\gamma_{\lambda\rho\mu}$ représentent les symboles de Christoffel de première espèce relatifs aux $\dot{g}_{\lambda\mu}$.

A noter que d'après la définition du tenseur fondamental, les $\dot{C}_{\lambda\mu}$ sont complètement symétriques par rapport à leurs trois indices.

13. Définition de la connexion intermédiaire. — Au voisinage de tout point M de V , menons par M un faisceau de courbes rectifiables joignant M à tout

⁽¹⁾ Cf. É. CARTAN, *Les espaces de Finsler* (Actual. scient. et ind., t. 79, Paris, 1934; formules (5), p. 11; (11), p. 16; (20), p. 16.

point m de ce voisinage. Nous donnerons ce voisinage de la métrique ds^2 définie au point m par la relation

$$(13.1) \quad ds^2 = H^2(F, x^\lambda, dx^\lambda)$$

avec

$$F = \int_M^m \omega(x^\lambda, dx^\lambda),$$

l'intégrale étant évaluée le long de la courbe joignant M à m . Nous poserons

$$(13.2) \quad g_{\alpha\beta}(F, x^\lambda, x'^\lambda) = \partial_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} H^2(F) \right]; \quad K_\gamma = \partial_\gamma \omega,$$

de telle sorte qu'en vertu de l'homogénéité de H , l'on a

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Quand m tend vers M le long de la courbe considérée, les $g_{\alpha\beta}$ tendent vers les $\hat{g}_{\alpha\beta}$. Au point M les dérivées partielles $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma \hat{g}_{\alpha\beta}$ s'expriment à partir des dérivées partielles correspondantes $\partial_\gamma^0 g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma^0 \hat{g}_{\alpha\beta}$ pour l'espace finslérien E , à l'aide des relations

$$(13.3) \quad \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \partial_\gamma^0 g_{\alpha\beta},$$

$$(13.4) \quad \partial_\gamma \hat{g}_{\alpha\beta} = \partial_\gamma^0 \hat{g}_{\alpha\beta} + g'_{\alpha\beta} K_\gamma.$$

Nous sommes ainsi conduits à faire correspondre à la métrique ds^2 une connexion admettant les éléments $\bar{C}_{\lambda\mu}^\nu$, \bar{G}_λ , $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$ que nous allons successivement déterminer.

En vertu de (12.5) et (13.3), il vient tout d'abord au point M ,

$$(13.5) \quad \bar{C}_{\lambda\rho\mu} = \hat{C}_{\lambda\rho\mu} = \frac{1}{2} \partial_\mu^0 g_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} \partial_\mu^0 \hat{g}_{\lambda\rho}$$

et par suite

$$\bar{C}_{\lambda}{}^\nu{}_\mu = \hat{C}_{\lambda}{}^\nu{}_\mu.$$

De même des formules (12.7) et (13.14) on déduit au point M

$${}_2\bar{G}_\lambda = {}_2\hat{G}_\lambda + \partial_{\lambda'} [H(o) H'(o)] K_\mu x'^\mu + H(o) H'(o) (\partial_{\lambda'} K_\mu x'^\mu - K^\lambda{}_\lambda).$$

Or, d'après les conditions d'homogénéité et la définition des $g_{\alpha\beta}$, on a les identités évidentes

$$H(o) H'(o) = \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta; \quad \partial_{\lambda'} K_\mu x'^\mu = \partial_{\lambda'\mu} \omega x'^\mu = 0$$

et

$$\partial_{\lambda'} g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta = 0.$$

Il en résulte pour les éléments \bar{G}_λ l'expression

$$(13.6) \quad {}_2\bar{G}_\lambda = {}_2\hat{G}_\lambda + g'_{\lambda\alpha} x'^\alpha K_\mu x'^\mu - \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta K_\lambda.$$

Enfin la formule (12.6) entraîne pour la métrique ds^2

$$\Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} = g^{\nu\rho} \left[\frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\mu\rho} + \partial_{\mu} g_{\lambda\rho} - \partial_{\rho} g_{\lambda\mu}) + \bar{C}_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho} \bar{G}^{\alpha} - \bar{C}_{\rho\mu\alpha} \partial_{\lambda} \bar{G}^{\alpha} \right],$$

soit, en transformant le premier terme du second membre à l'aide des relations (13.4),

$$(13.7) \quad \bar{\Gamma}_{\lambda}^{\nu\mu} = \gamma_{\lambda}^{\nu\mu} + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g'_{\lambda\rho} K_{\mu} + g'_{\mu\rho} K_{\lambda} - g'_{\lambda\mu} K_{\rho}) + g^{\nu\rho} (\bar{C}_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho} \bar{G}^{\alpha} - \bar{C}_{\rho\mu\alpha} \partial_{\lambda} \bar{G}^{\alpha}),$$

les $\gamma_{\lambda}^{\nu\mu}$ désignant les symboles de Christoffel de seconde espèce associés aux coefficients $\bar{g}_{\lambda\mu}$ de la métrique ds_0^2 .

14. *La première connexion des espaces variationnels.* — Comme dans le cas de l'espace à connexion semi-symétrique (2.2), considérons au point m^2 deux vecteurs \hat{l}^{ν} et l^{ν} , strictement colinéaires, unitaires l'un dans ds_0^2 , l'autre dans ds^2 . Ces deux vecteurs sont manifestement liés par la relation

$$l^{\nu} = \frac{H(o)}{H(F)} \hat{l}^{\nu}.$$

Quand m tend vers M le long de la courbe considérée, le vecteur \hat{l}^{ν} et le vecteur l^{ν} viennent se confondre et au point M les dérivées $\partial_{\mu} \hat{l}^{\nu}$, $\partial_{\mu} l^{\nu}$ s'expriment en fonction des dérivées correspondantes $\partial_{\mu}^0 \hat{l}^{\nu}$, $\partial_{\mu}^0 l^{\nu}$ pour l'espace finslérien E , par les formules

$$(14.1) \quad \partial_{\mu} l^{\nu} = \partial_{\mu}^0 l^{\nu}$$

et

$$\partial_{\mu} l^{\nu} = \partial_{\mu}^0 l^{\nu} - \frac{H(o) H'(o)}{H^2(o)} K_{\mu} l^{\nu},$$

soit

$$(14.2) \quad \partial_{\mu} l^{\nu} = \partial_{\mu}^0 l^{\nu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}} K_{\mu} l^{\nu},$$

où les notations sont identiques à celles du paragraphe 2.

Considérons alors l'espace d'éléments linéaires formé par le raccordement des voisinages des différents points M de V selon la connexion $\bar{C}_{\lambda\mu}^{\nu}$, \bar{G}_{λ} , $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu}$, le vecteur unitaire adopté au point M étant l^{ν} . Si ∇ désigne l'opérateur de différentiation absolue correspondant, il vient

$$\nabla l^{\nu} = dl^{\nu} + \bar{C}_{\lambda}^{\nu\mu} l^{\lambda} dx'^{\mu} + \bar{\Gamma}_{\lambda}^{\nu\mu} l^{\lambda} dx^{\mu},$$

où, d'après (14.2),

$$\nabla l^{\nu} = \hat{d}l^{\nu} + \bar{C}_{\lambda}^{\nu\mu} l^{\lambda} dx'^{\mu} + \left(\bar{\Gamma}_{\lambda}^{\nu\mu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}} K_{\mu} g^{\nu}_{\lambda} \right) l^{\lambda} dx^{\mu}.$$

Nous sommes ainsi conduits à introduire la connexion ayant pour éléments

$$C_{\lambda}^{\nu\mu} = \bar{C}_{\lambda}^{\nu\mu}; \quad \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} = \bar{\Gamma}_{\lambda}^{\nu\mu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}} K_{\mu} g^{\nu\lambda}.$$

Les éléments de cette connexion s'expriment ainsi explicitement à partir des données fondamentales de l'espace au moyen des formules

$$(14.3) \quad C_{\lambda}^{\nu\mu} = g^{\nu\rho} C_{\lambda\rho\mu}; \quad C_{\lambda\rho\mu} = \frac{1}{2} \partial_{\mu'} g_{\lambda\rho};$$

$$(14.4) \quad \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} = \gamma_{\lambda}^{\nu\mu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}} K_{\mu} g^{\nu\lambda} + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g'_{\lambda\rho} K_{\mu} + g'_{\rho\mu} K_{\lambda} - g'_{\lambda\mu} K_{\rho}) \\ + g^{\nu\rho} (C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} \bar{G}^{\alpha} - C_{\rho\mu\alpha} \partial_{\lambda'} \bar{G}^{\alpha}).$$

On en déduit

$$(14.5) \quad {}_2G^{\nu} = \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} x'^{\lambda} x'^{\mu} = {}_2\bar{G}^{\nu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}} \omega x'^{\nu}.$$

Si l'on transforme cette formule à l'aide des relations (13.6), il vient

$$(14.6) \quad {}_2G_{\lambda} = {}_2\bar{G}_{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}}{g_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta}} \omega g_{\lambda\rho} x'^{\rho} + \omega g'_{\lambda\alpha} x'^{\alpha} - \frac{1}{2} g'_{\alpha\beta} x'^{\alpha} x'^{\beta} K_{\lambda},$$

formule qui, jointe à (12.7), fournit explicitement les éléments G_{λ} à partir des données fondamentales.

15. *Substitution des éléments G^z aux éléments \bar{G}^z .* — Les formules (14.4), qui donnent l'expression des coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ de la connexion adoptée, font intervenir les éléments \bar{G}^z relatifs à la connexion intermédiaire. Les formules restent encore valables si l'on substitue purement et simplement aux \bar{G}^z les éléments G^z définis par (14.5) et (14.6).

En effet, si l'on forme à partir des relations (14.5) les quantités $C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} G^{\alpha}$, il vient

$$C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} G^{\alpha} = C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} \bar{G}^{\alpha} - \frac{1}{2} \partial_{\rho'} \left(\frac{g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}} \omega \right) x'^{\alpha} (C_{\lambda\mu\alpha} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}} \omega g^{\alpha\rho} C_{\lambda\mu\alpha});$$

or, d'après les conditions d'homogénéité,

$$(15.1) \quad x'^{\alpha} C_{\lambda\mu\alpha} = \frac{1}{2} x'^{\alpha} \partial_{\alpha'} g_{\lambda\mu} = 0.$$

On en déduit

$$(15.2) \quad C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} G^{\alpha} = C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} \bar{G}^{\alpha} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}} \omega C_{\lambda\mu\rho},$$

le deuxième terme du second membre étant symétrique par rapport aux indices λ et ρ . Il vient ainsi

$$(15.3) \quad C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} G^{\alpha} - C_{\rho\mu\alpha} \partial_{\lambda'} G^{\alpha} = C_{\lambda\mu\alpha} \partial_{\rho'} \bar{G}^{\alpha} - C_{\rho\mu\alpha} \partial_{\lambda'} \bar{G}^{\alpha},$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

16. *Les géodésiques de l'espace variationnel et les extrémales généralisées.* — Étant donnée une courbe C, prenons momentanément pour vecteur l' le vecteur unitaire tangent à la courbe

$$(16.1) \quad l'^\nu = \frac{dx^\nu}{ds_0}.$$

Sa direction coïncidera avec celle de l'élément d'appui x'^ν .

Pour que la courbe C soit une géodésique de l'espace variationnel considéré, il faut et il suffit que la différentielle absolue du vecteur l' soit identiquement nulle le long de la courbe, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\nabla l'^\nu}{ds_0} \equiv \frac{dl'^\nu}{ds_0} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} l'^\lambda \frac{dx'^\mu}{ds_0} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} l'^\lambda \frac{dx'^\mu}{ds_0} = 0.$$

Il résulte alors de l'équation (15.1) que le système différentiel aux géodésiques de l'espace peut s'écrire

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds_0^2} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} \frac{dx^\lambda}{ds_0} \frac{dx^\mu}{ds_0} = 0,$$

soit

$$(16.2) \quad \frac{d^2 x^\nu}{ds_0^2} + 2G^\nu\left(x^z, \frac{dx^z}{ds_0}\right) = 0.$$

Nous nous proposons de montrer que ces géodésiques coïncident avec les extrémales généralisées de l'intégrale J. En effet, en vertu de l'équation (14.6), on a, pour le vecteur l' défini par (16.1),

$$2G_\lambda(x^z, l^z) = 2\hat{G}_\lambda(x^z, l^z) - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l'^\sigma l'^\tau \omega_{\lambda} + \omega g'_{\lambda\sigma} l'^\sigma - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l'^\sigma l'^\tau K_\lambda.$$

Le système différentiel (16.2) aux géodésiques peut ainsi être mis sous la forme

$$(16.3) \quad g_{\lambda\rho} \frac{d^2 x^\rho}{ds_0^2} + 2\hat{G}_\lambda\left(x^z, \frac{dx^z}{ds_0}\right) = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l'^\sigma l'^\tau K_\lambda - \omega \left(g'_{\lambda\sigma} l'^\sigma - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l'^\sigma l'^\tau l'_\lambda \right).$$

Or, d'après un résultat classique de la théorie des espaces de Finsler, on a manifestement dans l'espace E

$$(16.4) \quad g_{\lambda\rho} \frac{d^2 x^\rho}{ds_0^2} + 2\hat{G}_\lambda\left(x^z, \frac{dx^z}{ds_0}\right) = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} \quad \left(\text{avec } x'^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds_0} \right).$$

D'autre part, quels que soient les x'^λ de l'identité

$$H(o) H'(o) = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau,$$

on déduit par dérivation

$$H(o) \partial_{x'} H'(o) + H'(o) \partial_{x'} H(o) = g'_{\lambda\sigma} x'^\sigma,$$

soit

$$H(o) \partial_{x'} H'(o) = g'_{\lambda\sigma} x'^\sigma - \frac{1}{2H^2(o)} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau g_{\lambda\rho} x'^\rho.$$

En appliquant les identités précédentes aux quantités l' définies par (16.1), il vient

$$(16.5) \quad H'(o) = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau,$$

$$(16.6) \quad \partial_{l_i} H'(o) = g'_{l_i\sigma} l^\sigma - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} l^\sigma l^\tau l_i.$$

Substituons (16.4), (16.5), (16.6) dans (16.3). Le système différentiel aux géodésiques est transformé en le système différentiel

$$(16.7) \quad \frac{d}{ds_0} \frac{\partial H(o)}{\partial x'^\lambda} - \frac{\partial H(o)}{\partial x^\lambda} = H'(o) \frac{\partial \omega}{\partial x'^\lambda} - \omega \frac{\partial H'(o)}{\partial x'^\lambda} \quad \left(\text{avec } x'^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds_0} \right),$$

qui coïncide avec le système (9.2) aux extrémales généralisées, le paramètre choisi étant $u = s_0$. Dans les hypothèses d'homogénéité faites, il est à noter d'ailleurs que le paramètre u peut être choisi arbitrairement dans le système (9.2). Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Les géodésiques de l'espace variationnel généralisé attaché à une intégrale (11.2) coïncident avec les extrémales généralisées de cette intégrale.*

Ainsi, à l'aide de la connexion $C_{\lambda\mu}^\nu$, $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, les extrémales généralisées de l'intégrale donnée se développent sur l'espace euclidien selon les droites.

17. *Le parallélisme relativement à la connexion de l'espace et à la connexion intermédiaire.* — Le parallélisme d'une famille de vecteurs $X^\nu(v)$, le long d'une courbe C , relativement à la connexion d'éléments linéaires $C_{\lambda\mu}^\nu$, $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$, est défini par le système différentiel (1)

$$(17.1) \quad \begin{aligned} & X^\rho \left(\frac{dX^\nu}{dv} + C_{\lambda\mu}^\nu X^\lambda \frac{dx'^\mu}{dv} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu X^\lambda \frac{dx^\mu}{dv} \right) \\ & - X^\nu \left(\frac{dX^\rho}{dv} + C_{\lambda\mu}^\rho X^\lambda \frac{dx'^\mu}{dv} + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho X^\lambda \frac{dx^\mu}{dv} \right) = 0. \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que le parallélisme est le même pour toute courbe relativement à la connexion $C_{\lambda\mu}^\nu$, $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ de l'espace variationnel et à la connexion intermédiaire $\bar{C}_{\lambda\mu}^\nu$, $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$. On a, en effet, entre ces deux connexions les relations

$$(17.2) \quad C_{\lambda\mu}^\nu = \bar{C}_{\lambda\mu}^\nu; \quad \Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} K_{\mu}^{\nu\alpha} g'^{\alpha\lambda}.$$

En retranchant les équations de parallélisme correspondant à la connexion intermédiaire des équations (17.1), il vient

$$(17.3) \quad (g'^{\nu\alpha} a_{\lambda}^{\rho\mu} - g'^{\rho\alpha} a_{\lambda}^{\nu\mu}) X^\alpha X^\lambda \frac{dx^\mu}{dv} = 0,$$

avec

$$a_{\lambda}^{\nu\mu} = \bar{\Gamma}_{\lambda}^{\nu\mu} - \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu},$$

(1) Cf. E. EISENHART, *Non-riemannian geometry* (loc. cit., p. 12-14 et p. 30-31).

équations qui sont identiquement vérifiées, quel que soit le vecteur X^ν et quelle que soit la courbe pour

$$\alpha_{\lambda}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} K_\mu g^\nu{}_\lambda,$$

ce qui démontre la propriété. En particulier les géodésiques relatives à la connexion intermédiaire, c'est-à-dire les lignes dont les tangentes sont parallèles à elles-mêmes par rapport à ces lignes, *coïncident avec les géodésiques de l'espace variationnel*, donc avec les extrémales généralisées de l'intégrale fondamentale.

18. Les espaces variationnels ponctuels. — Nous nous proposons de rechercher tous les espaces variationnels qui peuvent être envisagés comme espaces ponctuels. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit :

- a. que les coefficients $C_{\lambda\mu\alpha}$ soient nuls, ce qui entraîne que les coefficients $g_{\lambda\mu}(o)$ de la métrique soient indépendants des x'^α ;
- b. que les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ soient indépendants des x'^ρ .

D'après la condition a, les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ se réduisent nécessairement à la forme

$$(18.1) \quad \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} = \gamma_{\lambda}^{\nu\mu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} K_\mu g^\nu{}_\lambda + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\rho\mu} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho).$$

Si les éléments (18.1) sont indépendants des x'^ρ , il en est nécessairement de même des quantités

$$\Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} - \Gamma_{\mu}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} (K_\lambda g^\nu{}_\mu - K_\mu g^\nu{}_\lambda).$$

Posons

$$(18.2) \quad Q_\mu = \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} K_\mu.$$

Les quantités $Q_\lambda g^\nu{}_\mu - Q_\mu g^\nu{}_\lambda$ seront indépendantes des x'^ρ , si, quel que soit l'indice ρ , on a

$$(18.3) \quad \partial_{\rho'} Q_\lambda g^\nu{}_\mu - \partial_{\rho'} Q_\mu g^\nu{}_\lambda = 0.$$

Choisissons arbitrairement les valeurs des deux indices ρ et λ et donnons dans (18.3) à l'indice μ une valeur différente de λ , à l'indice ν la valeur μ . Il vient ainsi

$$\partial_{\rho'} Q_\lambda - \partial_{\rho'} Q_\mu g^{\mu\lambda} = 0 \quad (\text{sans sommation en } \mu),$$

soit

$$\partial_{\rho'} Q_\lambda = 0,$$

et les quantités Q_λ définies par (18.2) doivent être indépendantes des x'^ρ .

Ainsi, pour que les coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ soient indépendants des x'^ρ , il faut et il suffit qu'il en soit de même pour les Q_μ et pour les coefficients

$$\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \gamma_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{2} g^{\nu\rho} (g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\rho\mu} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho)$$

de la connexion intermédiaire.

Examinons séparément ces deux conditions. Si les $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu$ sont indépendants des x'^ρ , il en sera de même des $\bar{\Gamma}_{\lambda\nu\mu}$ et par suite des quantités

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} = \bar{\partial}_\nu g_{\lambda\mu} + g'_{\lambda\mu}(\mathbf{o}) K_\nu.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction ψ des variables x^σ et x'^ρ et des fonctions $h_{\lambda\mu}$ et J_ν ne dépendant que des variables x^σ telles que l'on ait

$$g'_{\lambda\mu}(\mathbf{o}) = \psi h_{\lambda\mu}(x^\sigma), \quad K_\nu = \frac{1}{\psi} J_\nu(x^\sigma).$$

On en déduit, d'après (18.2),

$$Q_\mu = \frac{1}{2} \frac{h_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} J_\mu.$$

Par suite, pour que les Q_μ soient indépendants des x'^ρ , il faut et il suffit qu'il existe une fonction φ ne dépendant que des variables x^σ telle que

$$h_{\alpha\beta}(x^\sigma) = \varphi(x^\sigma) g_{\alpha\beta}(\mathbf{o}).$$

Lorsqu'il en est ainsi, les coefficients (18.1) sont donnés par les formules

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \gamma_{\lambda\mu}^\nu - \frac{1}{2} \varphi J_\mu g^{\nu\lambda} + \frac{1}{2} \varphi g^{\nu\rho} (g_{\lambda\rho} J_\mu + g_{\rho\mu} J_\lambda - g_{\lambda\mu} J_\rho),$$

soit

$$(18.4) \quad \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu = \gamma_{\lambda\mu}^\nu + \frac{1}{2} \varphi g^{\nu\rho} (g_{\mu\rho} J_\lambda - g_{\lambda\mu} J_\rho).$$

La connexion ainsi obtenue n'est autre que la connexion semi-symétrique (2.2), associée au vecteur covariant φJ_λ . Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — *Les seuls espaces variationnels généralisés qui puissent être considérés comme espaces ponctuels sont les espaces admettant la connexion semi-symétrique (2.2).*

IV. — Différentielle absolue et dérivées covariantes.

19. *Différentielle absolue du vecteur unitaire t' .* — Il est clair que les quantités dx^ν constituent les composants contravariants d'un vecteur. Il n'en est évidemment pas de même pour les quantités dx'^ν , et il est par suite peu indiqué de les utiliser pour la construction de tenseurs se déduisant par dérivation d'un

tenseur donné. Nous leur substituerons à cet effet les n composants Π^ν de la différentielle absolue du vecteur unitaire l^ν . On a

$$\Pi^\nu = \nabla l^\nu = \hat{d}l^\nu + C_{\lambda}^{\nu\mu} l^\lambda dx^\mu + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} l^\lambda dx^\mu.$$

Or, d'après les conditions d'homogénéité,

$$(19.1) \quad C_{\lambda}^{\nu\mu} x'^\lambda = 0; \quad C_{\lambda}^{\nu\mu} l^\lambda = C_{\lambda}^{\nu\mu} \frac{x'^\lambda}{H(o)} = 0.$$

Par suite

$$\Pi^\nu = \hat{d}l^\nu + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} l^\lambda dx^\mu,$$

soit, en explicitant les composants l^ν du vecteur unitaire,

$$(19.2) \quad \Pi^\nu = d \left[\frac{x'^\nu}{H(o)} \right] + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} \frac{x'^\lambda}{H(o)} dx^\mu = \frac{dx'^\nu}{H(o)} - x'^\nu \frac{dH(o)}{H^2(o)} + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} \frac{x'^\lambda}{H(o)} dx^\mu.$$

Inversement des formules (19.2) on peut tirer une expression des dx'^ν à partir des Π^ν et des dx^μ . Il vient ainsi

$$(19.3) \quad dx'^\nu = H(o) \Pi^\nu + x'^\nu \frac{dH(o)}{H(o)} - \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} x'^\lambda dx^\mu,$$

formules que nous utiliserons fréquemment dans la suite.

20. *Les formes de Pfaff fondamentales.* — Étant donné un champ de vecteurs X^ν , la différentielle absolue ∇X^ν du vecteur X^ν dans l'espace variationnel généralisé peut s'écrire

$$\nabla X^\nu = dX^\nu + (C_{\lambda}^{\nu\mu} dx'^\mu + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} dx^\mu) X^\lambda.$$

Nous sommes ainsi conduits avec E. Cartan ⁽¹⁾ à introduire les formes de Pfaff

$$(20.1) \quad \omega^\nu_\lambda = C_{\lambda}^{\nu\mu} dx'^\mu + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} dx^\mu$$

et à poser

$$(20.2) \quad \nabla X^\nu = dX^\nu + \omega^\nu_\lambda X^\lambda.$$

Les formes ω^ν_λ s'expriment aisément à partir des Π^μ et des dx^μ . Des formules (19.3) et (20.1), on déduit

$$\omega^\nu_\lambda = C_{\lambda}^{\nu\mu} \left[H(o) \Pi^\mu + x'^\mu \frac{dH(o)}{H(o)} - \Gamma_{\alpha}^{\mu\rho} x'^\alpha dx^\rho \right] + \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} dx^\mu,$$

soit, en vertu des formules (19.1),

$$\omega^\nu_\lambda = H(o) C_{\lambda}^{\nu\mu} \Pi^\mu + (\Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} - C_{\lambda}^{\nu\rho} \Gamma_{\alpha}^{\rho\mu} x'^\alpha) dx^\mu.$$

(1) Cf. E. CARTAN, *Les espaces de Finsler* (Actual. scient. et ind., t. 79, p. 14).

Nous poserons dans la suite

$$(20.3) \quad A_{\lambda}^{\nu\mu} = H(o) C_{\lambda}^{\nu\mu},$$

$$(20.4) \quad \Gamma_{\lambda}^{\star\nu\mu} = \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} - C_{\lambda}^{\nu\rho} \Gamma_{\alpha}^{\rho\mu} x'^{\alpha}$$

et les formules ω_{λ}^{ν} pourront s'écrire

$$(20.5) \quad \omega_{\lambda}^{\nu} = A_{\lambda}^{\nu\mu} \Pi^{\mu} + \Gamma_{\lambda}^{\star\nu\mu} dx^{\mu}.$$

A noter que, d'après les formules (19.1), on a les identités importantes

$$(20.6) \quad \Gamma_{\lambda}^{\star\nu\mu} x'^{\lambda} = \Gamma_{\lambda}^{\nu\mu} x'^{\lambda}.$$

21. *Différentielle absolue et dérivées covariantes d'un tenseur.* — Considérons un champ de tenseurs, par exemple covariants à deux indices, et soient $T_{\alpha\beta}(x^{\rho}, x'^{\rho})$ les fonctions, homogènes et de degré zéro par rapport aux variables x'^{ρ} , qui constituent les composantes de ces tenseurs. La différentielle absolue correspondante s'exprime à l'aide des formes de Pfaff fondamentales par la formule

$$(21.1) \quad \nabla T_{\alpha\beta} = dT_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha}^{\lambda} T_{\lambda\beta} - \omega_{\beta}^{\lambda} T_{\alpha\lambda}.$$

Or,

$$dT_{\alpha\beta} = \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} dx'^{\rho} + \partial_{\rho} T_{\alpha\beta} dx^{\rho},$$

soit, en remplaçant dx'^{ρ} par son expression tirée de (19.3) et en tenant compte des identités (19.1) et (20.6)

$$(21.2) \quad dT_{\alpha\beta} = \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} [H(o) \Pi^{\rho} - \Gamma_{\lambda}^{\star\rho\mu} x'^{\lambda} dx^{\mu}] + \partial_{\rho} T_{\alpha\beta} dx^{\rho}.$$

En substituant (21.2) dans (21.1) et en introduisant les expressions (20.5) des formes de Pfaff fondamentales, il vient

$$\begin{aligned} \nabla T_{\alpha\beta} = & [\partial_{\rho} T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\lambda}^{\star\rho\sigma} x'^{\lambda} \partial_{\sigma'} T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha}^{\star\lambda\rho} T_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta}^{\star\lambda\rho} T_{\alpha\lambda}] dx^{\rho} \\ & + [H(o) \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} - A_{\alpha}^{\lambda\rho} T_{\lambda\beta} - A_{\beta}^{\lambda\rho} T_{\alpha\lambda}] \Pi^{\rho}. \end{aligned}$$

De cette expression de la différentielle absolue, il résulte que les systèmes de quantité

$$(21.3) \quad \nabla_{\rho} T_{\alpha\beta} = \partial_{\rho} T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\lambda}^{\star\rho\sigma} x'^{\lambda} \partial_{\sigma'} T_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha}^{\star\lambda\rho} T_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta}^{\star\lambda\rho} T_{\alpha\lambda},$$

$$(21.4) \quad \nabla_{\Pi^{\rho}} T_{\alpha\beta} = H(o) \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta} - A_{\alpha}^{\lambda\rho} T_{\lambda\beta} - A_{\beta}^{\lambda\rho} T_{\alpha\lambda}$$

définissent respectivement deux tenseurs déduits du tenseur $T_{\alpha\beta}$ par dérivation.

Nous démontrerons ultérieurement que les $A_{\lambda\mu}^{\nu}$ constituent les composantes d'un tenseur. Il en résulte, d'après (21.4), que le système des quantités

$$(21.5) \quad \nabla_{\rho'} T_{\alpha\beta} = H(o) \partial_{\rho'} T_{\alpha\beta}$$

définit lui aussi un tenseur. On a en particulier

$$\nabla_{\rho'} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) = H(o) C_{\alpha\beta\rho} = A_{\alpha\beta\rho},$$

Les deux tenseurs (21.3) et (21.5) constituent les deux systèmes de dérivées covariantes du tenseur donné $T_{\alpha\beta}$.

V. — La connexion de Varga.

22. *Les espaces à torsion finslérienne nulle.* — Dans cette section, nous nous proposons d'adapter à la théorie des espaces variationnels généralisés une méthode donnée par Varga ⁽¹⁾ pour la construction de la connexion euclidienne attachée à un espace de Finsler. La connexion que nous obtiendrons ainsi et qui diffère légèrement de la connexion construite à la section III sera dite, pour abréger, *connexion de Varga*.

Considérons les espaces variationnels admettant une métrique telle que les $g_{\alpha\beta}$ soient indépendants des x'^ρ , c'est-à-dire telle que

$$ds_0^2 = H^2(0, x^\rho, x'^\rho)$$

soit une forme quadratique par rapport aux x'^ρ . Pour de tels espaces, les composantes $C_{\lambda\mu}^\gamma$ et par suite les composantes $A_{\lambda\mu}^\gamma$ sont identiquement nulles. Or, nous démontrerons ultérieurement que le tenseur $A_{\lambda\mu}^\gamma$ n'est autre que le tenseur de torsion finslérienne de l'espace. Les espaces variationnels considérés sont donc *les espaces à torsion finslérienne nulle*; ils admettent en vertu de (14.3) et (14.4), la connexion d'éléments

$$(22.1) \quad C_{\lambda\mu}^\gamma = 0; \quad \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma = \gamma_{\lambda\mu}^\gamma - \frac{1}{2} \frac{g'_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta}{g_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta} K_\mu g^\gamma{}_\lambda + \frac{1}{2} g^{\gamma\rho} (g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\mu\rho} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho).$$

C'est à partir de cette connexion des espaces à torsion finslérienne nulle, supposée obtenue d'une manière autonome, que nous allons chercher à construire la connexion de l'espace variationnel le plus général.

23. *Définition de la connexion de Varga.* — Sur la variété V, donnons-nous une suite S continûment différentiable à un paramètre d'éléments linéaires

$$(S) \quad x^h = x^h(t); \quad x'^h = x'^h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

L'intégrale J étant donnée, à chaque élément linéaire de la suite C correspond une extrémale généralisée C de l'intégrale J. La famille à un paramètre d'extrémales généralisées ainsi obtenue sera supposée plongée dans une famille d'extrémales qui recouvre une fois un domaine D n -dimensionnel de V. A chaque point M de D correspond ainsi une direction bien déterminée tangente à l'extrémale passant par ce point. Si nous normons à l'aide de ds_0^2 le

(1) Cf. VARGA, *Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen* (Mon. Math. und. Phys., t. 50, 1941, p. 165-175).

vecteur définissant cette direction, nous obtenons un champ de vecteurs défini dans D

$$r^k = r^k(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Dans les fonctions $g_{\alpha\beta}(F, x^i, x'^i)$, substituons aux x'^i les composantes r^i . Nous obtenons ainsi les fonctions

$$g^{\star}_{\alpha\beta}(F, x^i) \equiv g_{\alpha\beta}(F, x^i, r^i).$$

La métrique $g^{\star}_{\alpha\beta}(F, x^i) dx^\alpha dx^\beta$ et l'intégrale F donnée par (11.1) définissent un espace à torsion finslérienne nulle admettant la connexion d'éléments

$$(23.1) \quad \Gamma^{\star}_{\lambda\mu} = \gamma_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \frac{g^{\star\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g^{\star\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} K_\mu g^{\star\gamma}_\lambda + \frac{1}{2} g^{\star\gamma\rho} (g^{\star\lambda\rho} K_\mu + g^{\star\mu\rho} K_\lambda - g^{\star\lambda\mu} K_\rho) \\ + \frac{1}{2} g^{\star\gamma\rho} \left(\frac{\partial g^{\star\lambda\rho}}{\partial r^\alpha} \partial_\mu r^\alpha + \frac{\partial g^{\star\mu\rho}}{\partial r^\alpha} \partial_\lambda r^\alpha - \frac{\partial g^{\star\lambda\mu}}{\partial r^\alpha} \partial_\rho r^\alpha \right),$$

où les dérivées $\frac{\partial g^{\star\lambda\rho}}{\partial r^\alpha}$ sont les dérivées $\partial_x g^{\star\lambda\rho}$ évaluées pour les composantes r^α .

Toute géodésique de la connexion (23.1) qui admet comme élément linéaire l'un des éléments linéaires de S est osculatrice à l'extrémale C admettant le même élément linéaire ⁽¹⁾. C'est pourquoi nous dirons que l'espace à torsion finslérienne nulle (23.1) est osculateur le long de S à l'espace variationnel considéré.

De l'ensemble des espaces à torsion finslérienne nulle osculateurs à l'espace variationnel le long de S, on peut extraire ⁽²⁾ un sous-ensemble d'espaces tels que, le long de S, soit satisfaite la condition de parallélisme

$$(23.2) \quad \partial_\mu r^\nu + \Gamma^{\star}_{\lambda\mu} r^\lambda = 0,$$

dont la signification géométrique est évidente. Tout espace (23.1) osculateur le long de S et tel que la relation (23.2) soit satisfaite sera dit *surosculateur* à l'espace variationnel le long de S.

Supposons attaché à chaque élément linéaire de S un vecteur $\vec{X}(t)$. Par définition la différentielle absolue du vecteur \vec{X} , dans la connexion de Varga attachée à l'espace variationnel, sera égale à la différentielle absolue du vecteur \vec{X} dans tout espace à torsion finslérienne nulle surosculateur le long de S.

24. Calcul de la connexion de Varga. — Proposons-nous de calculer explicitement les éléments de la connexion de Varga ainsi définie. A cet effet cherchons à évaluer les quantités $r^\lambda \Gamma^{\star}_{\lambda\rho\mu}$ qui s'introduisent naturellement dans

⁽¹⁾ La démonstration donnée par Nazim pour les espaces de Finsler (*Ueber Finslersche Räume Diss. München*, 1936) est encore valable ici.

⁽²⁾ Cf. VARGA, *Monatsh. Math. und Phys.*, t. 50, 1941, p. 171 et 173.

la condition de parallélisme. Compte tenu des identités (19.1) et de la relation classique

$$r^\lambda \gamma_{\lambda\rho\mu} = \frac{\partial \hat{G}_\rho(x^\alpha, r^\beta)}{\partial r^\mu},$$

on déduit de la formule (23.1), la formule

$$(24.1) \quad r^\lambda \Gamma_{(\nu)}^*{}_{\lambda\rho\mu} = \frac{\partial \hat{G}_\rho}{\partial r^\mu} - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau K_u r_\rho + \frac{1}{2} (g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\mu\rho} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho) r^\lambda \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{u\rho}}{\partial r^\alpha} r^\lambda \partial_\lambda r^\alpha.$$

Or, d'après la condition de parallélisme (23.2), on a

$$(24.2) \quad r^\lambda \partial_\lambda r^\alpha = - \Gamma_{(\nu)}^*{}_{\lambda\alpha u} r^\lambda r^\mu.$$

Cherchons à évaluer cette quantité en multipliant par r^μ les deux membres de (24.1). Il vient

$$r^\lambda r^\mu \Gamma_{(\nu)}^*{}_{\lambda\rho\mu} = 2 \hat{G}_\rho - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau \omega r_\rho + \omega g'_{\rho\lambda} r^\lambda - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau K_\rho,$$

soit, en vertu de (14.6),

$$(24.3) \quad r^\lambda r^\mu \Gamma_{(\nu)}^*{}_{\lambda\rho\mu} = 2 G_\rho(x^\alpha, r^\beta);$$

formule qui nous assure de l'existence des espaces surosculateurs ⁽¹⁾. De (24.1), (24.2), (24.3) on déduit

$$(24.4) \quad r^\lambda \Gamma_{(\nu)}^*{}_{\lambda\rho\mu} = \frac{\partial \hat{G}_\rho}{\partial r^\mu} - \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial r^\mu} G^\alpha - \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau K_u r_\rho + \frac{1}{2} (g'_{\lambda\rho} K_\mu + g'_{\mu\rho} K_\lambda - g'_{\lambda\mu} K_\rho) r^\lambda.$$

Afin d'évaluer $\frac{\partial \hat{G}_\rho}{\partial r^\mu}$ en fonction de $\frac{\partial G_\rho}{\partial r^\mu}$, dérivons par rapport à x'^μ les deux membres de l'équation (14.6). Il vient ainsi

$$(24.5) \quad \partial_\mu G_\rho = \partial_\mu \hat{G}_\rho - \frac{1}{4} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} (\omega g_{\rho\mu} + K_\mu g_{\rho\alpha} x'^\alpha) \\ - \frac{1}{2} \frac{\omega g_{\alpha\alpha} x'^\alpha}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} \left(g'_{\mu\sigma} x'^\sigma - \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} g_{\mu\sigma} x'^\sigma \right) \\ + \frac{1}{2} (g'_{\rho\mu} K_\lambda + g'_{\rho\lambda} K_\mu - g'_{\lambda\mu} K_\rho) x'^\lambda - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau \partial_\mu K_\rho.$$

On en déduit en substituant aux x'^α les r^α

$$(24.6) \quad \frac{\partial \hat{G}_\rho}{\partial r^\mu} = \frac{\partial G_\rho}{\partial r^\mu} - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau (\omega g_{\rho\mu} + K_\mu r_\rho) - \frac{1}{2} \omega r_\rho (g'_{u\sigma} r^\sigma - g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau r_u) \\ + \frac{1}{2} (g'_{\rho\mu} K_\lambda + g'_{\rho\lambda} K_\mu - g'_{\lambda\mu} K_\rho) r^\lambda - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} r^\sigma r^\tau \frac{\partial K_\rho}{\partial r^\mu}.$$

(1) Cf. VARGA, *Monatsh. Math. und Phys.*, t. 50, 1941, p. 175.

Si l'on tire $\frac{\partial G_\rho}{\partial r^\mu}$ de la formule (24.6) et reporte dans la formule (24.4), on obtient, après simplification,

$$(24.7) \quad r^\lambda \Gamma_{(\lambda)}^{\star \lambda \rho \mu} = g_{\rho \nu} \frac{\partial G^\nu}{\partial r^\mu} + \frac{1}{4} g'_{\sigma \tau} r^\sigma r^\tau (\omega g_{\rho \mu} - K_{\mu} r_\rho) \\ + \frac{1}{2} \omega r_\rho (g'_{\mu \sigma} r^\sigma - g'_{\sigma \tau} r^\sigma r^\tau r_\mu) + \frac{1}{4} g'_{\sigma \tau} r^\sigma r^\tau \frac{\partial K}{\partial r^\mu},$$

et par suite, en vertu de (23.2),

$$(24.8) \quad \partial_\mu r^\nu = - \frac{\partial G^\nu}{\partial r^\mu} - \frac{1}{4} g'_{\sigma \tau} r^\sigma r^\tau (\omega g^\nu_\mu - K_\mu r^\nu) \\ + \frac{1}{2} \omega r^\nu (g'_{\sigma \tau} r^\sigma r^\tau r_\mu - g'_{\mu \sigma} r^\sigma) - \frac{1}{4} g'_{\sigma \tau} r^\sigma r^\tau g^\nu_\rho \frac{\partial K_\rho}{\partial r^\mu}.$$

Substituons cette expression de $\partial_\mu r^\nu$ dans la formule (23.1) donnant les éléments $\Gamma_{(\lambda)}^{\nu}$ de la connexion et posons

$$C_{\alpha \mu \lambda} = \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\lambda \mu}; \quad K_{\rho \mu} = \partial_\rho K_\mu = \partial_\mu K_\rho; \quad K^\nu_\mu = g^{\nu \rho} K_{\rho \mu}.$$

En tenant compte de l'homogénéité des différents termes, il vient

$$(24.9) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\star \lambda \nu \mu} = \Gamma_{(\lambda)}^{\nu \mu} + \frac{1}{2} g^{\nu \rho} \frac{\partial g_{\lambda \rho}}{\partial r^\alpha} \partial_\mu r^\alpha,$$

avec

$$(24.10) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\nu \mu} = \gamma_{\lambda}^{\nu \mu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\sigma \tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma \tau} x'^\sigma x'^\tau} K_\mu g_{\lambda}^{\nu} \\ + \frac{1}{2} g^{\nu \rho} (g'_{\lambda \rho} K_\mu + g'_{\mu \rho} K_\lambda - g'_{\lambda \mu} K_\rho) + g^{\nu \rho} (C_{\alpha \mu \lambda} \partial_\rho G^\alpha - C_{\alpha \mu \rho} \partial_\lambda G^\alpha) \\ + \frac{1}{4} g'_{\sigma \tau} x'^\sigma x'^\tau g^{\nu \rho} (C_{\alpha \mu \lambda} K^\alpha_\rho - C_{\alpha \mu \rho} K^\alpha_\lambda).$$

Cela étant posé, évaluons dans la connexion de Varga la différentielle absolue du vecteur $X^\nu(t)$. On a

$$\frac{\nabla^{(V)} X^\nu}{dt} = \frac{dX^\nu}{dt} + \Gamma_{(\lambda)}^{\star \lambda \nu \mu} X^\lambda \frac{dx^\mu}{dt},$$

soit, d'après la formule (24.9) et les théorèmes sur les dérivées des fonctions composées,

$$(24.11) \quad \frac{\nabla^{(V)} X^\nu}{dt} = \frac{dX^\nu}{dt} + C_{\lambda}^{\nu \alpha} X^\lambda \frac{dx'^\alpha}{dt} + \Gamma_{(\lambda)}^{\nu \mu} X^\lambda \frac{dx^\mu}{dt}.$$

Il en résulte que la connexion de Varga admet pour éléments les $C_{\lambda \mu}^\nu$ et les $\Gamma_{(\lambda)}^{\nu \mu}$ définis par les formules (24.10)

En vertu de (23.2) et de l'homogénéité des $C_{\lambda \mu}^\nu$, les relations (24.9) peuvent se mettre sous la forme

$$(24.12) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\star \lambda \nu \mu} = \Gamma_{(\lambda)}^{\nu \mu} - C_{\lambda}^{\nu \rho} \Gamma_{(\lambda)}^{\star \rho \mu} x'^\alpha.$$

Multiplions les deux membres de (24. 12) par x'^λ . Il vient, d'après les identités (19. 1),

$$(24. 13) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\star \nu}{}_{\mu} x'^\lambda = \Gamma_{(\lambda)}^{\nu}{}_{\mu} x'^\lambda.$$

Il en résulte que l'on a

$$(24. 14) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\star \nu}{}_{\mu} = \Gamma_{(\lambda)}^{\nu}{}_{\mu} - C_{\lambda}^{\nu}{}_{\rho} \Gamma_{(\lambda)}^{\rho}{}_{\mu} x'^\lambda,$$

formules qui sont à rapprocher de (20. 4)

25. *Comparaison de la connexion de Varga avec la première connexion.* — Il est facile de comparer la connexion définie par les formules (24. 10) avec celle définie par les formules (14. 4). On a manifestement

$$(25. 1) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\nu}{}_{\mu} = \Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau g'^{\rho\lambda} (C_{\alpha\mu\lambda} K^{\alpha}{}_{\rho} - C_{\alpha\mu\rho} K^{\alpha}{}_{\lambda}).$$

Or, d'après la définition des quantités $K_{\lambda\beta}$, on a les relations

$$x'^\lambda K^{\alpha}{}_{\lambda} = g^{\alpha\beta} x'^\lambda K_{\lambda\alpha} = 0.$$

En multipliant les deux membres de (25. 1) par x'^λ , il vient, par suite,

$$(25. 2) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\nu}{}_{\mu} x'^\lambda = \Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} x'^\lambda.$$

Il en résulte qu'entre les éléments $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ et $\Gamma_{(\lambda)}^{\star \nu}{}_{\mu}$ définis respectivement par les formules (20. 4) et (24. 14), il existe les mêmes relations qu'entre les éléments $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ et $\Gamma_{(\lambda)}^{\nu}{}_{\mu}$.

$$(25. 3) \quad \Gamma_{(\lambda)}^{\star \nu}{}_{\mu} = \Gamma_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} + \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau g'^{\rho\lambda} (C_{\alpha\mu\lambda} K^{\alpha}{}_{\rho} - C_{\alpha\mu\rho} K^{\alpha}{}_{\lambda}).$$

Des formules (25. 2), il résulte que les géodésiques des deux connexions coïncident. Les géodésiques de la connexion de Varga coïncident donc bien, elles aussi, avec les extrémales généralisées de l'intégrale J.

D'une manière générale, la théorie des espaces variationnels peut être construite en utilisant indifféremment l'une ou l'autre connexion. En particulier on pourra introduire les composantes $\Pi_{(\lambda)}^{\rho}$ de la différentielle absolue du vecteur unitaire dans la connexion de Varga, ainsi que les formes de Pfaff fondamentales $\omega_{(\lambda)}^{\nu}$ relatives à cette connexion

$$\omega_{(\lambda)}^{\nu} = C_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} dx'^\mu + \Gamma_{(\lambda)}^{\nu}{}_{\mu} dx^\mu,$$

soit en vertu des formules (24. 14),

$$\omega_{(\lambda)}^{\nu} = A_{\lambda}^{\nu}{}_{\mu} \Pi_{(\lambda)}^{\mu} + \Gamma_{(\lambda)}^{\star \nu}{}_{\mu} dx^\mu.$$

C'est au moyen de ces formes que l'on construira les dérivées covariantes d'un tenseur relativement à la connexion de Varga.

Il est facile de donner explicitement la valeur commune des quantités (24.13) et (25.2) qui interviennent dans l'expression de l'une des dérivées covariantes d'un tenseur. On a, en effet, d'après (24.7),

$$(25.4) \quad \Gamma_{(\nu)}^{\star \lambda \nu} x'^{\lambda} = \frac{\partial G^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{1}{4} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}} (\omega g^{\nu\mu} - K_{\mu} x'^{\nu}) \\ + \frac{1}{2} \frac{\omega \lambda'^{\nu}}{g_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}} \left(g'_{\mu\alpha} x'^{\alpha} - \frac{g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}}{g_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau}} g_{\mu\alpha} x'^{\alpha} \right) + \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} K^{\nu}_{\mu}.$$

Nous terminerons cette comparaison des deux connexions par le théorème suivant :

THÉOREME. — *La connexion de Varga (24.10) ne fait intervenir que les dérivées du premier ordre de la fonction ω par rapport aux variables x'^{ρ} .*

Des formules (14.4), (15.3) et (24.5), il résulte manifestement que les éléments $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ de la première connexion font intervenir les dérivées du second ordre de la fonction ω . Dans $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ ces dérivées figurent dans les termes

$$D_{\lambda}^{\nu\mu} = -\frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^{\nu\rho} (C_{\alpha\mu\lambda} \partial_{\rho} K^{\alpha} - C_{\alpha\mu\rho} \partial_{\lambda} K^{\alpha}).$$

Dans les éléments de la connexion de Varga les termes qui pourraient contenir de telles dérivées sont de la forme

$$E_{\lambda}^{\nu\mu} = D_{\lambda}^{\nu\mu} + \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^{\nu\rho} (C_{\alpha\mu\lambda} K^{\alpha}_{\rho} - C_{\alpha\mu\rho} K^{\alpha}_{\lambda}).$$

Or il est clair que l'on a

$$K^{\alpha}_{\rho} = \partial_{\rho} K^{\alpha} + {}_2 C_{\rho}^{\alpha\beta} K^{\beta}.$$

Il en résulte

$$E_{\lambda}^{\nu\mu} = \frac{1}{2} g'_{\sigma\tau} x'^{\sigma} x'^{\tau} g^{\nu\rho} (C_{\alpha\mu\lambda} C_{\rho}^{\alpha\beta} - C_{\alpha\mu\rho} C_{\lambda}^{\alpha\beta}) K^{\beta},$$

ce qui démontre le théorème.

VI. — Les tenseurs de courbure et de torsion.

26. *Définition des formes extérieures de courbure et de torsion.* — D'une manière analogue à ce qui se passe en géométrie finslérienne, l'introduction des tenseurs de courbure et de torsion s'effectue par l'étude des cycles d'éléments linéaires tracés dans l'espace variationnel envisagé. Considérons un cycle infinitésimal d'éléments linéaires, partant de l'élément e_1 et y revenant, et adjoignons à chaque élément linéaire du cycle le corps C des vecteurs issus du centre de l'élément. Nous pouvons développer le cycle ainsi complété sur l'espace euclidien à n dimensions. A l'élément e_1 correspondra initialement dans le développement un élément E_1 et un corps de vecteurs C_1 ; après avoir parcouru le cycle, le développement s'achèvera par un élément E_2 et un corps de

vecteurs C_2 . Nous appellerons *déplacement associé au cycle* le déplacement qui amène (E_2, C_2) sur (E_1, C_1) . Si nous décomposons ce déplacement en une translation amenant le centre de E_2 sur le centre de E_1 et une rotation autour du centre de E_1 , la translation traduira la *torsion* de l'espace et la rotation sa *courbure*.

Le développement pourra s'effectuer selon l'une ou l'autre des deux connexions introduites et les résultats obtenus pour les tenseurs de courbure et de torsion différeront légèrement. Nous n'explicitons les calculs que dans le cas où la connexion utilisée est la connexion (14.4).

A l'aide des formules de Frenet généralisées qui introduisent les dx^x et les formes de Pfaff fondamentales, on voit immédiatement que la torsion peut être caractérisée par les formes quadratiques extérieures

$$(26.1) \quad \Omega^\beta = dx^x \wedge \omega^\beta_x - D(dx^x) = dx^x \wedge \omega^\beta_x$$

et la courbure par les formes quadratiques extérieures

$$(26.2) \quad \Omega^\beta_x = \omega^\rho_x \wedge \omega^\beta_\rho - D(\omega^\beta_x),$$

où \wedge et D indiquent respectivement les opérations de multiplication et de différentiation extérieure.

27. *Les tenseurs de torsion.* — Cherchons à expliciter les formes Ω^β . D'après l'expression (20.5) des formes de Pfaff fondamentales, il vient

$$(27.1) \quad \Omega^\beta = A_{x^\beta \mu} dx^x \wedge \Pi^\mu + \Gamma_{x^\beta \mu}^* dx^x \wedge dx^\mu.$$

Or, en vertu des formules (20.4), (25.2) et (25.4) les $\Gamma_{x^\beta \mu}^*$ peuvent se mettre sous la forme

$$\Gamma_{x^\beta \mu}^* = \Sigma_{x^\beta \mu} - \frac{1}{2} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} K_\mu g^\beta_\sigma - \frac{1}{4} g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau C_{\alpha^\beta \rho} K^\rho_\mu,$$

où les $\Sigma_{x^\beta \mu}$ sont symétriques par rapport aux indices α et μ . Par suite de l'antisymétrie de $dx^\sigma \wedge dx^\mu$, ces coefficients s'éliminent de (27.1) et l'on a

$$(27.2) \quad \Omega^\beta = A_{x^\beta \mu} dx^x \wedge \Pi^\mu + B_{x^\beta \mu} dx^x \wedge dx^\mu,$$

avec

$$(27.3) \quad B_{x^\beta \mu} = -\frac{1}{4} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} (2K_\mu g^\beta_\sigma + A_{x^\beta \rho} \nabla_{\rho'} K_\mu).$$

Les coefficients des formes quadratiques extérieures Ω^β sont ainsi définis à l'aide des deux tenseurs $A_{x^\beta \mu}$ et $B_{x^\beta \mu}$ auxquels nous donnerons le nom de *tenseurs de torsion*; $A_{x^\beta \mu}$ sera le tenseur de *torsion finslérienne* de l'espace et $B_{x^\beta \mu}$ le second tenseur de torsion. Pour un espace de Finsler, ce second tenseur est identiquement nul. On voit qu'il s'exprime d'une manière simple à l'aide du tenseur de torsion finslérienne, du vecteur K_μ et de ses dérivées covariantes.

28. *Définition des tenseurs de courbure.* — Les formes quadratiques extérieures Ω_{α}^{β} peuvent être mises, d'une infinité de manières, sous la forme ⁽¹⁾

$$(28.1) \quad \Omega_{\alpha}^{\beta} = S_{\alpha\lambda\mu}^{\beta} \Pi^{\lambda} \wedge \Pi^{\mu} + P_{\alpha\lambda\mu}^{\beta} dx^{\lambda} \wedge \Pi^{\mu} + R_{\alpha\lambda\mu}^{\beta} dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu},$$

les formes Π^{μ} n'étant pas linéairement indépendantes, mais satisfaisant à la relation

$$l_{\mu} \Pi^{\mu} = 0.$$

La forme (28.1) sera unique pour les Ω_{α}^{β} , si l'on astreint les $S_{\alpha\lambda\mu}^{\beta}$ et $P_{\alpha\lambda\mu}^{\beta}$ à satisfaire aux identités

$$(28.2) \quad l^{\mu} P_{\alpha\lambda\mu}^{\beta} = 0,$$

$$(28.3) \quad l^{\mu} S_{\alpha\lambda\mu}^{\beta} = 0.$$

Dans ces conditions les $S_{\alpha\lambda\mu}^{\beta}$, $P_{\alpha\lambda\mu}^{\beta}$, $R_{\alpha\lambda\mu}^{\beta}$ sont respectivement les composantes de trois tenseurs qui seront dits *les tenseurs de courbure* de l'espace variationnel généralisé. Il est clair que ces trois tenseurs de courbure peuvent être obtenus séparément en utilisant, pour définir les rotations correspondantes, trois types de cycles infinitésimaux distincts.

29. *Calcul des tenseurs de courbure.* — Nous nous proposons d'expliciter ces trois tenseurs de courbure en fonction des composantes de la connexion. A cet effet, il sera commode de raisonner sur les formes quadratiques extérieures covariantes

$$(29.1) \quad \Omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\rho}^{\alpha} \Omega_{\alpha}^{\rho} = \omega_{\alpha\rho}^{\beta} \Omega_{\alpha}^{\rho} - D(\omega_{\alpha\beta}),$$

qui admettent pour coefficients les composantes covariantes $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$, $P_{\alpha\beta\lambda\mu}$, $R_{\alpha\beta\lambda\mu}$ des trois tenseurs.

En utilisant les expressions (20.1) et (20.5) des formes de Pfaff fondamentales, il vient

$$(29.2) \quad \Omega_{\alpha\beta} = (A_{\beta\rho}^{\alpha} \Pi^{\rho} + \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha} dx^{\rho}) \wedge (A_{\alpha\rho}^{\beta} \Pi^{\rho} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} dx^{\rho}) - D(\omega_{\alpha\beta}).$$

Or, d'après la définition de la différentiation extérieure,

$$D(\omega_{\alpha\beta}) = D(C_{\alpha\beta\lambda} dx^{\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta\lambda} dx^{\lambda}) = dC_{\alpha\beta\lambda} \wedge dx^{\lambda} + d\Gamma_{\alpha\beta\lambda} \wedge dx^{\lambda}.$$

Soit en développant les produits extérieurs et en notant que, par raison de symétrie, les termes en $dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu}$ s'éliminent

$$(29.3) \quad D(\omega_{\alpha\beta}) = \partial_{\mu} C_{\alpha\beta\lambda} dx^{\mu} \wedge dx^{\lambda} + \partial_{\mu} \Gamma_{\alpha\beta\lambda} dx^{\mu} \wedge dx^{\lambda} + d_{\mu} \Gamma_{\alpha\beta\lambda} dx^{\mu} \wedge dx^{\lambda}.$$

En remplaçant dans (29.2) les $D(\omega_{\alpha\beta})$ par leurs valeurs tirées de (29.3) et en exprimant les dx^{λ} au moyen des Π^{λ} et des dx^{μ} , on obtient la décomposition

(1) Cf. E. CARTAN, *Les espaces de Finsler (Actual. scient. et ind., t. 79, p. 33).*

cherchée des $\Omega_{\alpha\beta}$ en somme de trois termes relatifs aux trois tenseurs de courbure. Les $D(\omega_{\alpha\beta})$ ne contenant aucun terme en $\Pi^\lambda \wedge \Pi^\mu$, on obtient, pour les $S_{\alpha\beta\lambda\mu}$, les expressions

$$(29.4) \quad S_{\alpha\beta\lambda\mu} = A_{\beta\rho\lambda} A_{\alpha\rho\mu} - A_{\beta\rho\mu} A_{\alpha\rho\lambda},$$

qui satisfont manifestement aux identités (28.3).

De même, pour les $P_{\alpha\beta\lambda\mu}$, il vient les expressions

$$(29.5) \quad P_{\alpha\beta\lambda\mu} = \Gamma^{\star}_{\beta\rho\lambda} A_{\alpha\rho\mu} - \Gamma^{\star}_{\alpha\rho\lambda} A_{\beta\rho\mu} - H(o) \partial_\lambda C_{\alpha\beta\mu} + H(o) \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\lambda},$$

qui, en vertu des relations évidentes

$$x'^\mu \partial_\lambda C_{\alpha\beta\mu} = 0,$$

satisfont aux identités (28.2).

Quant au troisième tenseur de courbure, il est fourni par les équations

$$(29.6) \quad R_{\alpha\beta\lambda\mu} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta\lambda} - \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta\mu} - (\partial_{\rho'} \Gamma_{\alpha\beta\lambda} \Gamma^{\star}_{\sigma\rho'\mu} x'^\sigma - \partial_{\rho'} \Gamma_{\alpha\beta\mu} \Gamma^{\star}_{\sigma\rho'\lambda} x'^\sigma) \\ - \partial_\mu C_{\alpha\beta\rho} \Gamma^{\star}_{\sigma\rho\lambda} x'^\sigma + \partial_\lambda C_{\alpha\beta\rho} \Gamma^{\star}_{\sigma\rho\mu} x'^\sigma + \Gamma^{\star}_{\beta\rho\lambda} \Gamma^{\star}_{\alpha\rho\mu} - \Gamma^{\star}_{\beta\rho\mu} \Gamma^{\star}_{\alpha\rho\lambda}.$$

Aux quantités $\Gamma^{\star}_{\sigma\mu} x'^\sigma$ qui y figurent, on peut substituer les quantités

$$\partial_\mu G^\rho + \frac{1}{4} \frac{g'_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau}{g_{\sigma\tau} x'^\sigma x'^\tau} [o] g^{\rho\mu} + H(o) g^{\rho\nu} \nabla_\nu K_\mu],$$

qui se déduisent des seconds membres des équations (25.4) en y négligeant les termes en x'^ρ , qui ne peuvent donner naissance, dans (29.6), qu'à des termes identiquement nuls.

VII. — Les espaces variationnels généralisés et la metric geometry of paths de Douglas.

30. *Les systèmes de paths.* — Dans un Mémoire bien connu ⁽¹⁾, J. Douglas a défini et étudié une géométrie générale des systèmes de paths. L'une des géométries particulières qui découlent de cette géométrie générale est la « géométrie métrique » des systèmes de paths, dont Douglas a étudié les rapports avec la géométrie des espaces de Finsler. Par l'introduction des espaces variationnels généralisés, cette étude est susceptible de certaines précisions intéressantes.

On appelle système de paths sur V_n un système de courbes qui peut être défini par les équations de la forme

$$(30.1) \quad x^\lambda = f^\lambda(t, a) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

où t est un paramètre variant le long de chaque courbe et où a représente un ensemble de $(2n - 2)$ paramètres essentiels variant d'une courbe à l'autre.

(1) J. DOUGLAS, *The general geometry of paths* (*Ann. of Math.*, t. 29, 1928, p. 142-168).

Le système de courbes (30.1) est tel qu'il existe une courbe et une seule du système passant par un point donné et tangent à une direction arbitrairement donnée ou encore passant par deux points donnés suffisamment voisins l'un de l'autre. Les fonctions f^i seront supposées analytiques par rapport à leurs divers arguments, de telle sorte que les courbes introduites soient analytiquement distribuées.

31. *Les géométries des systèmes de paths.* — Les équations (30.1) définissent le système de paths dans un certain système de coordonnées et avec un certain choix du paramètre représentatif. Indépendamment des changements sans intérêt portant sur les a , on peut transformer les équations (30.1) :

a. en effectuant une transformation de coordonnées dans la variété V_n

$$(31.1) \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^u);$$

b. en effectuant une transformation du paramètre représentatif sur tous les paths

$$(31.2) \quad t = \varphi(\tau, a).$$

Soit G un groupe de transformations (31.1) de coordonnées et Γ un groupe de transformations (31.2) du paramètre. Selon Douglas on appelle géométrie (G, Γ) du système de paths la théorie invariante des équations (30.1) pour les transformations du groupe G combinées avec celles de Γ .

Prenons par exemple pour groupe G le groupe descriptif, c'est-à-dire le groupe de toutes les transformations analytiques et pour Γ le groupe des transformations

$$(31.3) \quad t = \tau + \beta.$$

La géométrie ainsi obtenue sera dite la *géométrie descriptivo-métrique des systèmes de paths* ou plus simplement la *géométrie métrique des systèmes de paths*. C'est elle que nous allons étudier ici.

32. *Le résultat fondamental de Douglas pour la géométrie métrique.* — Supposons que l'espace V_n qui contient le système de paths considéré soit pourvu d'une méthode riemannienne ou finslerienne et que le paramètre t introduit soit la longueur de l'arc de path évalué dans cette métrique et compté à partir d'une origine arbitraire. Il est clair que ce paramètre sera susceptible des transformations (31.3). Inversement, Douglas a pu montrer qu'à toute géométrie métrique d'un système de paths défini sur V_n , on peut associer un espace de Finsler bien déterminé, porté par V_n , relativement auquel le paramètre t peut être interprété comme une longueur d'arc.

A cet effet Douglas établit ⁽¹⁾ que tout système de paths pour lequel le paramètre est déterminé à une transformation (31.3) près, peut être défini d'une manière et d'une seule comme solution d'un système différentiel de la forme

$$(32.1) \quad H^2(x^\alpha, l^\alpha) = 1, \quad \text{avec } l^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt},$$

$$(32.2) \quad \frac{d^2 x^\rho}{dt^2} = Q^\rho(x^\alpha, l^\alpha),$$

où H^2 et les Q^ρ sont des fonctions homogènes et du second degré par rapport aux l^α , déterminées d'une manière unique.

Cela étant posé, considérons l'espace de Finsler porté par V_n et admettant la métrique

$$(32.3) \quad ds_0^2 = H^2(x^\alpha, dx^\alpha).$$

D'après (32.1), on a

$$dt^2 = H^2(x^\alpha, dx^\alpha),$$

de telle sorte que

$$s_0 = \pm t + \beta.$$

Ainsi, dans cette métrique, le paramètre t est bien l'arc de paths évalué dans l'un ou l'autre sens à partir d'une origine arbitraire.

33. *Représentation des paths dans l'espace de Finsler.* — Il est clair que les systèmes de géodésiques de l'espace de Finsler (32.3) ou de tout espace variationnel associé à (32.3) fournissent des exemples de géométries métriques de systèmes de paths. Il est donc naturel de représenter le système de paths donné à l'aide des éléments géométriques de l'espace de Finsler (32.3)

En introduisant les composants $g_{\nu\rho}$ de cette métrique finslérienne, le système différentiel (32.1), (32.2) qui définit les paths peut être mis sous la forme

$$(33.1) \quad g_{\nu\rho} \frac{d^2 x^\rho}{ds_0^2} + 2\hat{G}_\nu(x^\alpha, l^\alpha) = C_\nu(x^\alpha, l^\alpha),$$

où le paramètre s_0 satisfait à

$$ds_0^2 = H^2(x^\alpha, dx^\alpha).$$

Le vecteur C_ν est homogène et du second degré par rapport aux l^α et s'exprime à partir des Q^ρ par les relations

$$(33.2) \quad C_\nu = 2\hat{G}_\nu + g_{\nu\rho} Q^\rho.$$

Il est facile de vérifier directement que le vecteur C_ν est orthogonal à l^ν , c'est-à-dire que l'on a

$$(33.3) \quad l^\nu C_\nu = 0.$$

⁽¹⁾ *Annals of Math.*, t. 29, 1928, p. 150-151.

Il vient en effet, d'après (12.7),

$$2P\dot{G}_\nu = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\nu}P,$$

et par suite, d'après (33.2),

$$P\dot{C}_\nu = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\nu}P + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial P^\nu}Q^\nu.$$

Or, si l'on dérive l'équation (32.1) et si l'on tient compte du système (32.2), il vient

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial x^\nu}P + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}H^2\right)}{\partial P^\nu}Q^\nu = 0,$$

ce qui démontre (33.3). Dans l'espace de Finsler (32.3), l'équation (33.1) joue le rôle de première équation de Frenet relative à une courbe; le vecteur C_ν définit la normale principale des courbes considérées et a pour longueur la courbure de ces courbes. Pour $C_\nu = 0$, les paths coïncident avec les géodésiques de l'espace.

34. *Les paths et les géodésiques des espaces variationnels.* — Cherchons à quelle condition le système de paths donné peut être considéré comme le système des géodésiques d'un espace variationnel attaché à l'espace de Finsler (32.3).

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après les équations (9.2) et (16.4), qu'on puisse trouver deux fonctions $H'(x^\alpha, x'^\alpha)$ et $\omega(x^\alpha, x'^\alpha)$, homogènes et du premier degré par rapport aux x'^α , telles que l'on ait

$$(34.1) \quad C_\nu(x^\alpha, x'^\alpha) = H[H'\partial_\nu\omega - \omega\partial_\nu H'].$$

Il est clair que, s'il en est ainsi, la forme différentielle

$$(34.2) \quad C_\nu dx^\nu$$

admet le facteur intégrant, homogène et de degré -3 , par rapport aux x'^α ,

$$\mu = \frac{1}{H H'^2}.$$

Inversement, si la forme différentielle (34.2) admet un facteur intégrant μ , celui-ci satisfait au système aux dérivées partielles

$$\mu(\partial_{\lambda'}C_\nu - \partial_{\nu'}C_\lambda) + C_\nu\partial_{\lambda'}\mu - C_\lambda\partial_{\nu'}\mu = 0.$$

Par multiplication par x'^λ et sommation, il vient, compte tenu de (33.3),

$$(34.3) \quad \mu(2C_\nu - x'^\lambda\partial_{\nu'}C_\lambda) + C_\nu x'^\lambda\partial_{\lambda'}\mu = 0.$$

Or, toujours d'après (33.3),

$$x'^k \partial_{x'} C_k = \partial_{x'} (x'^k C_k) - C_k \frac{\partial x'^k}{\partial x'^\gamma} = -C_\gamma.$$

Il en résulte que (34.3) peut s'écrire

$$x'^k \partial_k \mu = -3\mu,$$

et le facteur intégrant μ est nécessairement homogène et de degré -3 . Il en résulte immédiatement que les C_γ peuvent être mis sous la forme (34.1). Ainsi pour que le système de paths considéré soit le système des géodésiques d'un espace variationnel généralisé attaché à (32.3), il faut et il suffit que la forme différentielle $C_\gamma dx'^\gamma$ admette un facteur intégrant. Nous énoncerons :

THÉOREME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une géométrie métrique de système de paths coïncide avec celle du système des géodésiques d'un espace variationnel généralisé est que les vecteurs de courbure C_γ des paths admettent pour trajectoires, dans l'espace x' , une congruence de normales.*

Analytiquement cette condition se traduit par les relations

$$(34.4) \quad C_\alpha (\partial_\beta C_\gamma - \partial_\gamma C_\beta) dx'^\alpha \wedge dx'^\beta \wedge dx'^\gamma = 0,$$

qui résultent du théorème de Frobenius.

VIII. — Applications à la dynamique.

35. Forme invariante des équations de la dynamique classique. — Les équations de Lagrange permettent de donner aux lois de la dynamique classique une forme indépendante du repérage adopté pour l'espace de configuration du système dynamique étudié. Mais le temps y garde encore une situation privilégiée. Dans ses *Leçons sur les invariants intégraux* ⁽¹⁾, E. Cartan a donné explicitement pour la première fois, aux lois de la dynamique, une forme indépendante de tout repérage particulier adopté pour l'espace-temps de configuration. De ses résultats, on déduit deux énoncés équivalents dont l'un fait intervenir l'invariant intégral complet de Cartan, l'autre un espace de Finsler introduit par le principe de Hamilton. Cependant la méthode de Cartan ne s'applique qu'à des systèmes dynamiques conservatifs, c'est-à-dire pour lesquels les forces données dérivent d'une fonction de forces. Dans ce cas elle permet d'effectuer les changements de variables les plus généraux portant à la fois sur les paramètres de position du système et sur le temps.

Par l'introduction des espaces variationnels généralisés et des relations intégrales d'invariance ⁽²⁾, j'ai pu étendre dans une large mesure les résultats de

⁽¹⁾ E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann. 1922.

⁽²⁾ Cf. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1943, p. 660, et un Mémoire en préparation.

Cartan à des systèmes dynamiques non conservatifs. A cet effet je commencerai par rappeler les résultats de Cartan.

36. *Les résultats de Cartan.* — Considérons un système dynamique conservatif à liaisons holonomes, parfaites. Nous désignerons par x^i (i et tout indice latin $= 1, 2, \dots, n$) ses paramètres de position, par $\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}$ ses paramètres de vitesse, par T son énergie cinétique, par U sa fonction de forces et par \mathcal{H} son hamiltonien. Le lagrangien du système

$$L = T + U$$

sera supposé exprimé à partir des variables x^i , \dot{x}^i et t .

Les équations différentielles entre les paramètres de position, de vitesse et le temps qui définissent le mouvement du système peuvent alors être caractérisées :

a. soit par l'existence de l'invariant intégral relatif de Cartan

$$(36.1) \quad \int \omega = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} dx^i - \mathcal{H} dt;$$

ou de l'invariant intégral absolu correspondant

$$(36.2) \quad \iint D\omega = \iint d \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \wedge dx^i - d\mathcal{H} \wedge dt;$$

b. soit par l'existence du principe variationnel de Hamilton qui s'exprime à l'aide de l'intégrale d'action

$$(36.3) \quad W = \int L dt.$$

Nous allons donner à ces deux énoncés une forme indépendante de tout repérage particulier de l'espace-temps de configuration (x^i, t) . A cet effet nous introduirons dans les dérivations au lieu de t un paramètre auxiliaire arbitraire u et nous poserons

$$x^{n+1} = t; \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \quad (\alpha \text{ et tout indice grec } = 1, 2, \dots, n+1).$$

Évaluons dans le système des variables \dot{x}^α les coefficients de l'invariant intégral de Cartan. On a d'abord

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \dot{x}^{n+1} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L \left(x^i, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}, t \right).$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la fonction

$$(36.4) \quad \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \dot{x}^{n+1} L \left(x^i, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}, t \right),$$

fonction qui est manifestement homogène et du premier degré par rapport aux \dot{x}^α . Il vient ainsi

$$(36.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x'^i} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}^i}, \\ -\mathcal{H} = L - x'^i \frac{\partial L}{\partial x'^i} = L - \frac{1}{\dot{x}^{n+1}} \left(\mathcal{E} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}^{n+1}} \dot{x}^{n+1} \right) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}^{n+1}}. \end{array} \right.$$

Il en résulte que la forme ω de Cartan peut s'écrire

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha.$$

D'autre part l'intégrale d'action (36.3) peut, par l'introduction du paramètre u , être mise sous la forme

$$W = \int \mathcal{E} du.$$

On en déduit que les équations différentielles définissant le mouvement du système peuvent être caractérisées :

a. soit par l'existence de l'invariant intégral relatif

$$\int \omega = \int \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha,$$

ou de l'invariant intégral absolu correspondant

$$\iint D\omega = \iint d \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{x}^\alpha} \wedge dx^\alpha;$$

b. soit par l'existence du principe de Hamilton exprimé à l'aide de l'intégrale

$$W = \int \mathcal{E} du.$$

En vertu de l'homogénéité de \mathcal{E} , cette intégrale définit sur l'espace-temps de configuration une métrique finslérienne intrinsèquement attachée au système dynamique. L'espace de Finsler à $(n+1)$ dimensions ainsi défini est tel que ses géodésiques assurent, en vertu du principe de Hamilton, la représentation des trajectoires du système.

37. *La relation intégrale d'invariance de la dynamique.* — Considérons un système dynamique S non conservatif à liaisons holonomes, parfaites. Sous leur forme lagrangienne les équations de la dynamique du système S peuvent s'écrire

$$(37.1) \quad \frac{dx^i}{dt} = x'^i; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

où L désigne un lagrangien pouvant éventuellement se réduire à la demi-force vive T du système S et où les Q_i sont des fonctions déterminées des x^i , des x'^i et du temps t . \mathcal{H} représentera l'hamiltonien associé au lagrangien L .

Les mouvements du système S étant régis par des équations différentielles du premier ordre entre les paramètres de position, de vitesse et le temps, j'ai démontré ⁽¹⁾ que ces équations peuvent être caractérisées par la condition suivante : *étant donnée une suite fermée d'états* (i, x^i, t) *du système, si l'on déplace arbitrairement ces états le long de leurs trajectoires respectives, l'intégrale*

$$\iint d \frac{\partial L}{\partial x^i} \wedge dx^i - d\mathfrak{E} \wedge dt + Q_i dx^i \wedge dt,$$

étendue à la surface ainsi balayée est toujours nulle. Autrement dit le système différentiel de la dynamique peut être caractérisé dans ce cas général par la relation intégrale d'invariance

$$(37.2) \quad \iint_{\mathfrak{C}} d \frac{\partial L}{\partial x^i} \wedge dx^i - d\mathfrak{E} \wedge dt + Q_i dx^i \wedge dt = 0,$$

où \mathfrak{C} désigne une portion d'un tube de trajectoires.

A quelle condition cet énoncé peut-il être mis sous une forme indépendante du mode de repérage de l'espace-temps de configuration? Lorsqu'il en est ainsi, la forme quadratique extérieure

$$Q_i dx^i \wedge dt$$

doit donner naissance à une forme quadratique extérieure complète à $(n+1)$ variables

$$S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

où les $S_{\alpha\beta}$ forment un tenseur covariant symétrique. Nous sommes par suite amenés à étudier les systèmes matériels pour lesquels les Q_i admettent la forme

$$(37.3) \quad Q_i = R_i(x^i, t) + S_{ij}(x^i, t) x'^j \quad (\text{avec } S_{ij} = -S_{ji}),$$

ce qui est en plein accord avec les considérations classiques relatives aux forces centrifuges.

38. *Les équations de Lagrange dans l'espace-temps de configuration.* — Considérons donc un système matériel S tel que les Q_i satisfassent aux hypothèses du paragraphe précédent, et cherchons à mettre les équations différentielles de son mouvement sous une forme indépendante du repérage de l'espace-temps de configuration. A cet effet nous utiliserons, comme au paragraphe 36, un paramètre auxiliaire arbitraire u et avec des notations identiques, nous poserons :

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}; \quad \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \dot{x}^{n+1} L\left(x^i, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}} t\right).$$

⁽¹⁾ Cf. LICHNEROWICZ, C. R. Acad. Sc., t. 217, 1943, p. 660-661.

Nous introduirons d'autre part le tenseur antisymétrique $S_{\alpha\beta}$ défini par

$$(38.1) \quad \begin{cases} S_{\alpha\beta} = S_{ij} & \text{pour } \alpha = i, \quad \beta = j, \\ S_{\alpha\beta} = R_i & \text{pour } \alpha = i, \quad \beta = n+1. \end{cases}$$

Si nous posons

$$(38.2) \quad \Xi_\alpha = S_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta,$$

il est clair que l'on a

$$(38.3) \quad \Xi_i = R_i \dot{x}^{n+1} + S_{ij} \dot{x}^j = Q_i \dot{x}^{n+1}.$$

Avec les notations ainsi définies, le mouvement du système matériel S peut être défini par les $(n+1)$ équations de Lagrange généralisées

$$(38.4) \quad \frac{d}{du} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \Xi_\alpha.$$

En effet pour $\alpha = i$, les équations (38.4) peuvent s'écrire, d'après (36.5),

$$\frac{dt}{du} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \dot{x}^{n+1} \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i \dot{x}^{n+1},$$

soit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

équations qui coïncident avec les équations (37.1).

Pour $\alpha = n+1$, il vient, toujours d'après (36.5),

$$\frac{d}{du} (-\mathcal{E}) - \dot{x}^{n+1} \frac{\partial L}{\partial t} = -R_i \dot{x}^i,$$

soit, en divisant par \dot{x}^{n+1} et en tenant compte de (37.5),

$$(38.5) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_i \dot{x}^i.$$

Cette équation est une conséquence des équations (37.1), puisqu'elle n'est autre que la traduction du théorème bien connu de Painlevé.

39. Forme invariante de la relation intégrale. — Pour un système matériel satisfaisant aux hypothèses des paragraphes 37 et 38, on peut mettre la relation intégrale d'invariance de la dynamique sous une forme indépendante du mode de repérage de l'espace-temps de configuration. A cet effet on peut soit établir directement une telle relation à partir des équations de Lagrange généralisées (38.4), soit transformer la relation intégrale d'invariance (37.2) établie antérieurement. Nous utiliserons cette seconde méthode.

Dans les hypothèses faites, la forme quadratique extérieure $Q_i dx^i \wedge dt$ peut s'écrire

$$Q_i dx^i \wedge dt = R_i dx^i \wedge dt + S_{ij} \dot{x}^j dx^i \wedge dt.$$

Or la surface \mathfrak{T} étant engendrée par des trajectoires, on peut considérer que l'on a adopté, afin d'évaluer la valeur de la forme quadratique pour un élément superficiel de \mathfrak{T} , un bivecteur dont l'un des vecteurs $x'^j = \frac{dx^j}{dt}$ est tangent aux trajectoires. Il vient ainsi sur \mathfrak{T}

$$Q_i dx^i \wedge dt = R_i dx^i \wedge dt + S_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

soit

$$(39.1) \quad Q_i dx^i \wedge dt = S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Il en résulte que les équations différentielles du mouvement de S peuvent être caractérisées par l'existence de la relation intégrale d'invariance

$$(39.2) \quad \iint_{\mathfrak{T}} \left[d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \wedge dx^\alpha + S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \right] = 0,$$

où \mathfrak{T} désigne une portion de tube engendré par des trajectoires.

40. *Les équations de Lagrange (38.4) et les géodésiques des espaces variationnels.* — Cherchons à quelle condition les équations de Lagrange (38.4) peuvent définir les géodésiques d'un espace variationnel généralisé attaché à la fonction

$$H(0, x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\alpha).$$

A cet effet, il nous faut trouver à quelle condition il existe des fonctions ω et H' telles que l'on ait

$$(40.1) \quad H' \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\alpha} - \omega \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}^\alpha} = S_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta.$$

En dérivant les deux membres de (40.1) par rapport à x^β , et en tenant compte de l'antisymétrie de $S_{\alpha\beta}$, il vient

$$(40.2) \quad S_{\alpha\beta}(x^\lambda) = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}^\beta} - \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\beta},$$

avec

$$(40.3) \quad H' \frac{\partial^2 \omega}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta} = \omega \frac{\partial^2 H'}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^\beta}.$$

Si l'on adopte pour ω et H' des fonctions linéaires par rapport aux \dot{x}^α ,

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda_\alpha \dot{x}^\alpha, \\ H' &= \mu_\alpha \dot{x}^\alpha, \end{aligned}$$

l'identité (40.3) se trouve vérifiée et l'on a

$$(40.4) \quad S_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \mu_\beta - \mu_\alpha \lambda_\beta,$$

ce qui entraîne que le tenseur antisymétrique $S_{\alpha\beta}$ se réduit à un bivecteur.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que les équations (34.4) relatives au problème général correspondant de la « géométrie of paths » se réduisent dans ce cas aux conditions bien connues pour que les $S_{\alpha\beta}$ définissent un bivecteur.

Supposons donc que le tenseur $S_{\alpha\beta}$ définisse un bivecteur. Dans ces conditions, on peut attacher au système dynamique envisagé une classe d'espaces variationnels généralisés dont l'espace ponctuel associé est l'espace-temps de configuration. La réduction de la classe s'effectuera par la considération simultanée du complexe linéaire spécial défini par $S_{\alpha\beta}$ et de l'hyperquadrique définie par la forme quadratique

$$\dot{x}^{n+1} L(x^z, \dot{x}^z).$$

41. *La variété riemannienne d'Eisenhart.* — Pour géométriser les mouvements des systèmes dynamiques conservatifs les plus généraux, on connaît une méthode autre que la méthode de Cartan qui introduit un espace de Finsler à $(n+1)$ dimensions. Cette seconde méthode développée par Eisenhart ⁽¹⁾, fait intervenir un espace de Riemann à $(n+2)$ dimensions.

Considérons donc un système dynamique *conservatif* quelconque, à liaisons holonomes parfaites et à n degrés de liberté. Soient x^i (i et tout indice latin $= 1, 2, \dots, n$) les paramètres indépendants déterminant la position du système, \dot{x}^i leurs dérivées par rapport au temps t et

$$(41.1) \quad 2T = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + 2g_{i,n+1} \dot{x}^i + g_{n+1,n+1}$$

la force vive du système. Si U désigne la fonction de forces d'où dérivent les forces données appliquées au système,

$$L = T + U$$

sera le lagrangien de ce système. Nous poserons comme précédemment

$$x^{n+1} = t$$

et introduirons un paramètre supplémentaire

$$x^{n+2} = u,$$

qui se trouvera lié d'une manière simple à l'action hamiltonienne ⁽²⁾.

Si v désigne une variable auxiliaire arbitraire, nous poserons

$$\dot{x}^z = \frac{dx^z}{dv} \quad (z \text{ et tout indice grec } = 1, 2, \dots, n+2).$$

Avec ces notations, la fonction

$$\Lambda(x^z, \dot{x}^z) = 2(\dot{x}^{n+1})^2 L\left(x^z, \frac{\dot{x}^i}{\dot{x}^{n+1}}\right)$$

⁽¹⁾ EISENHART, *Dynamical trajectories and geodesics* (*Annals of Math.*, t. 30, 1929, p. 591-606).

⁽²⁾ Cf. EISENHART, *op. cit.*, p. 594.

représente une forme quadratique par rapport aux \dot{x}^x

$$(41.2) \quad \Lambda(x^x, \dot{x}^x) = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + 2g_{i, n+1} \dot{x}^i \dot{x}^{n+1} + (g_{n+1, n+1} + 2U)(\dot{x}^{n+1})^2.$$

Considérons une variété à $(n+2)$ dimensions qui soit le produit topologique par une droite de l'espace-temps de configuration, et soit E_{n+2} l'espace de Riemann porté par cette variété et admettant pour élément linéaire

$$(41.3) \quad ds^2 = \Lambda(x^x, dx^x) + 2B dt du,$$

où B désigne une constante arbitraire non nulle. Il existe une correspondance biunivoque entre les trajectoires du système dynamique et les géodésiques de l'espace E_{n+2} telle que, dans les deux cas, les x^i soient les mêmes fonctions de la variable t . La variable u est dans le cas général une fonction linéaire de t et de l'action hamiltonienne

42. *L'espace variationnel généralisé attaché à l'espace d'Eisenhart.* — Considérons maintenant un système dynamique S non conservatif et supposons que, sous leur forme lagrangienne, les équations de la dynamique du système S puissent s'écrire

$$(42.1) \quad \frac{dx^i}{dt} = x'^i; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

où L désigne un lagrangien identique à celui du paragraphe précédent et où les Q_i dépendent seulement des x^i et du temps t ; \mathcal{H} représentera encore l'hamiltonien associé au lagrangien L .

Considérons l'espace variationnel généralisé défini par les trois fonctions fondamentales ⁽¹⁾

$$(42.2) \quad \begin{cases} H^2 = \Lambda(x^x, \dot{x}^x) + 2Bt^2, \\ HH' = \dot{t}^2, \\ \omega = Q_i \dot{x}^i, \end{cases}$$

où les notations sont identiques à celles du paragraphe précédent. Le système différentiel aux géodésiques d'un espace variationnel

$$(42.3) \quad \frac{d}{dv} \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial H}{\partial x^\lambda} = H' \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\lambda} - \omega \frac{\partial H'}{\partial \dot{x}^\lambda}$$

peut être transformé en multipliant les deux membres de (42.3) par H et en intégrant certains termes par parties. On montre ainsi aisément que le système différentiel (43.2) est équivalent au système

$$(42.4) \quad \frac{d}{dv} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} H^2 \right)}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} H^2 \right)}{\partial x^\lambda} = HH' \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^\lambda} - \omega \frac{\partial (HH')}{\partial \dot{x}^\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \dot{x}^\lambda} \left(\frac{dH}{dv} + \omega H' \right).$$

(1) Afin d'alléger les notations, nous avons supprimé l'argument zéro figurant dans les fonctions H et H'

Or les conditions d'homogénéité étant remplies, on peut adopter dans (42.3) ou (42.4) une variable indépendante arbitraire. Nous choisirons $v = t$.

Dans ces conditions l'équation (42.4) correspondant à $\lambda = n + 2$ s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left(B \frac{dx^{n+1}}{dt} \right) = \frac{\partial H}{\partial u'} \left(\frac{dH}{dt} + \omega H' \right);$$

soit, comme le premier membre est identiquement nul et le facteur $\frac{\partial H}{\partial u'}$ différent de zéro,

$$(42.5) \quad \frac{dH}{dt} + \omega H' = 0.$$

Compte tenu de (42.2), l'équation (42.5) est équivalente à l'équation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} H^2 \right) + \omega = 0,$$

soit explicitement

$$(42.6) \quad \frac{d}{dt} (B u' + L) + \omega = 0.$$

On déduit enfin de l'équation (42.5) que, lorsque la variable indépendante choisie est t , le système différentiel (42.4) se réduit au système

$$(42.7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \left(\frac{1}{2} H^2 \right)}{\partial \dot{x}^{\lambda}} - \frac{\partial \left(\frac{1}{2} H^2 \right)}{\partial x^{\lambda}} = H H' \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}^{\lambda}} - \omega \frac{\partial (H H')}{\partial \dot{x}^{\lambda}}.$$

En faisant $\lambda = n + 1$ dans ce système, il vient avec des notations classiques,

$$(42.8) \quad \frac{d}{dt} [B u' + T_1 + 2 T_0 + 2 U] - \frac{\partial L}{\partial t} = - 2 \omega.$$

De même pour $\lambda = i$ on obtient à partir du système différentiel (42.7), les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = Q_i,$$

identiques à (42.1). On peut remplacer l'une ou l'autre des équations (42.6) et (42.8) par l'équation déduite de celles-ci par soustraction

$$\frac{d}{dt} (T_2 - T_0 - U) + \frac{\partial L}{\partial t} = \omega,$$

soit

$$(42.9) \quad \frac{d\mathcal{C}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \omega.$$

L'équation ainsi obtenue qui traduit le théorème de Painlevé est une conséquence des équations (42.1). L'équation subsistante parmi les équations (42.6) et (42.8) servira à définir dynamiquement la variable u .

Il en résulte immédiatement qu'il existe entre les trajectoires du système dynamique non conservatif considéré et les géodésiques de l'espace variationnel défini par (42.2), une correspondance biunivoque telle que, dans les deux cas, les x^i soient les mêmes fonctions de la variable t . Il apparaît ainsi que l'introduction des espaces variationnels généralisés est de quelque utilité pour l'étude des systèmes dynamiques non conservatifs.

43. *Dynamique relativiste et espaces variationnels.* — Nous terminerons cette étude de quelques-unes des applications des espaces variationnels par une application à la dynamique de la Relativité générale.

Considérons, en dynamique relativiste, un domaine d'espace-temps qui soit balayé par une distribution matérielle et soit $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'impulsion-énergie associé à cette distribution. Quelle que soit la manière dont cette distribution est schématisée, le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sera de la forme

$$(43.1) \quad T_{\alpha\beta} = \rho(x^h) u_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta}(x^h, u^h),$$

où ρ désigne un scalaire positif ne dépendant que des coordonnées x^α de l'espace-temps, où $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ est le vecteur-vitesse unitaire et $\theta_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique. Si $\hat{\nabla}_\alpha$ désigne l'opérateur de dérivation covariante dans la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

les conditions de conservation relatives au tenseur d'impulsion-énergie

$$\hat{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

donnent naissance d'une part à l'équation de continuité de la distribution matérielle, d'autre part au système différentiel définissant les *lignes de courant*, partout tangentes au vecteur-vitesse unitaire. Si nous posons

$$(43.2) \quad \hat{\nabla}_\alpha \theta^{\alpha\beta} = \rho K_\beta,$$

où, dans la dérivation qui figure au premier membre, u^h est considéré comme fonction des x^α , le vecteur K_β ainsi défini est homogène et de degré zéro par rapport aux x'^α et le système différentiel aux lignes de courant peut être mis sous la forme ⁽¹⁾

$$(43.3) \quad u^\mu \hat{\nabla}_\mu u^h = (g^{h\nu} - u^h u^\nu) K_\nu.$$

De ce système différentiel, Eisenhart ⁽²⁾ a donné une interprétation géométrique simple dans le cas où la distribution matérielle considérée correspond à

⁽¹⁾ Cf. par exemple LICHNEROWICZ, *Ann. Éc. Norm. sup.*, fasc. IV, 1943, p. 257-258.

⁽²⁾ Cf. EISENHART, *Trans. of the Americ. Math. Soc.*, 1924, p. 206.

un fluide parfait admettant une équation d'état. Si p désigne la pression du fluide, on a, dans ce cas,

$$K_\beta = \frac{\partial_\beta p}{\rho} \quad [\text{avec } \rho = \varphi(p)].$$

Posons ici

$$F = \int_{M_0}^M \frac{\partial_\beta p}{\rho} dx^\beta = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varphi(p)}.$$

Les lignes de courant sont alors géodésiques de l'espace de Riemann conforme à l'espace-temps admettant la métrique

$$(43.4) \quad \overline{ds}^2 = e^{2F} ds^2.$$

Il est aisé, à l'aide des espaces variationnels, d'interpréter géométriquement les équations (43.3) dans le cas le plus général. Considérons en effet l'espace variationnel généralisé qui admet les données fondamentales

$$(43.5) \quad H^2(F, x^\alpha, x'^\alpha) = e^{2F} g_{\alpha\beta}(x^\lambda) x'^\alpha x'^\beta,$$

$$(43.6) \quad F = \int_{M_0}^M K_\beta dx^\beta.$$

Cet espace, qui est manifestement sans torsion finslérienne, engendre la connexion euclidienne d'éléments

$$(43.7) \quad \Gamma_\lambda^\nu{}_\mu = \gamma_\lambda^\nu{}_\mu + g^{\nu\rho}(g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho).$$

Par suite, en désignant par l' le vecteur unitaire tangent à une géodésique, le système différentiel aux géodésiques peut s'écrire

$$l^\mu \nabla_\mu l^\nu \equiv l^\mu \hat{\nabla}_\mu l^\nu + g^{\nu\rho}(g_{\mu\rho} K_\lambda - g_{\lambda\mu} K_\rho) l^\lambda l^\mu = 0,$$

soit

$$(43.8) \quad l^\mu \hat{\nabla}_\mu l^\nu = (g^{\lambda\nu} - l^\lambda l^\nu) K_\lambda,$$

équations qui coïncident aux notations près avec les équations (43.3). Il en résulte qu'en dynamique relativiste, les lignes de courant de toute distribution matérielle peuvent être considérées comme *géodésiques d'un espace variationnel généralisé* défini, à partir de la métrique d'univers, par les formules (43.5) et (43.6).

Il en est en particulier ainsi dans le cas où le tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ comporte un tenseur d'impulsion-énergie d'origine électromagnétique.

