J. DELSARTE

# Essai sur l'application de la théorie des fonctions presque périodiques à l'arithmétique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 62 (1945), p. 185-204
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__185_0>

# ESSAI SUR L'APPLICATION

DE LA

# THÉORIE DES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES

# A L'ARITHMÉTIQUE

PAR M. J. DELSARTE.

L'examen de la plupart des développements formels ou asymptotiques que l'on rencontre en théorie des nombres met en évidence le rôle important joué par des séries procédant suivant les sinus et cosinus d'arcs qui sont des parties aliquotes de la circonférence. De telles séries se rencontrent aussi lorsque l'on considère le développement de Fourier d'une fonction presque périodique définie sur le groupe additif des entiers, les « exposants de Fourier » de cette fonction étant des nombres rationnels. Il est donc naturel d'examiner dans quels cas une fonction de la théorie des nombres (nous entendons par là une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur l'ensemble des entiers rationnels, ou sur l'ensemble des entiers rationnels positifs) admet un tel développement, et possède par suite certaines propriétés de presque-périodicité. C'est à l'étude de cette question qu'est consacré ce travail.

1. UNE GÉNÉRALISATION DE L'INDICATEUR D'EULER. — Soit $n$ un entier positif; parmi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il y a $\varphi(n)$ racines primitives; soit $m$ un entier positif ou nul; la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces $\varphi(n)$ racines primitives sera appelée l'*indicateur d'ordre m* de l'entier $n$, et sera notée $\Phi(n\,|\,m)$. Il est clair que l'on a

$$\Phi(n\,|\,0)=\varphi(n), \qquad |\Phi(n\,|\,m)|\leqq\varphi(n), \qquad \Phi(n\,|\,m)=\Phi(n\,|\,m'), \quad \text{si } m\equiv m' \pmod{n}.$$

*Propriété fondamentale.* — On a

$$(1) \qquad \sum_{d/n}\Phi(d\,|\,m)=0 \text{ ou } n,$$

*suivant que n ne divise pas, ou divise m.*

En effet, si $d/n$, les racines primitives $d^{\text{ièmes}}$ de l'unité, sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ admettant l'exposant $d$, et l'ensemble de toutes les racines primitives $d^{\text{ièmes}}$ quand $d$ décrit l'ensemble des diviseurs de $n$, fournit, sans omission ni répétition, l'ensemble de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité (ce n'est là qu'un des aspects de la décomposition, bien connue depuis Gauss, de l'ensemble des classes de restes, modulo $n$, en familles de classes dont tous les éléments ont le même p. g. c. d. avec $n$). On peut dire aussi que la somme

$$\sum_{d/n} \Phi(d \mid m)$$

n'est autre que la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; cette somme vaut donc $n$ ou o, suivant que $n$ divise, ou ne divise pas $m$.

Ce résultat permet d'expliciter l'indicateur généralisé $\Phi(n \mid m)$. Posons

$$\sigma_m(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \mid m, \\ 0, & \text{si } n \nmid m. \end{cases}$$

On a

$$\sum_{d/n} \Phi(d \mid m) = \sigma_m(n),$$

puis, par la formule d'inversion de Mertens-Möbius,

$$\Phi(n \mid m) = \sum_{d/n} \mu(d)\, \sigma_m\left(\frac{n}{d}\right),$$

qui peut s'écrire aussi, en posant $d\delta = n$,

$$\Phi(n \mid m) = \sum_{\delta/(m;\, n)} \delta\, \mu\left(\frac{n}{\delta}\right); \tag{2}$$

la sommation étant cette fois étendue aux $\delta$ divisant le p. g. c. d. de $m$ et $n$. On peut d'ailleurs effectuer complètement la sommation précédente, en introduisant le quotient $\nu$ de $n$ par le p. g. c. d. de $m$ et $n$, ainsi que le plus grand diviseur commun $\Delta$ de $m$ et de $n$, qui soit premier avec $\nu$. On trouve ainsi par un raisonnement facile

$$\frac{1}{n}\Phi(n \mid m) = \frac{\mu(\nu)}{\nu}\,\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}. \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) conduisent aisément aux conséquences suivantes, que nous nous bornons à énoncer :

*a*. $\Phi(n \mid m)$ est toujours un entier rationnel.

*b*. On a

$$|\Phi(n \mid m)| \leq (m;\, n).$$

*c*. Si $(m;\, n) = 1$, on a

$$\Phi(n \mid m) = \mu(n).$$

*d*. Si les entiers $n$ et $n'$ sont premiers entre eux, on a

$$\Phi(n \mid m)\,\Phi(n' \mid m) = \Phi(nn' \mid m).$$

*e*. $p$ premier, $0 < m < p$, entraînent

$$\Phi(p \mid m) = -1.$$

*f*. $p$ premier, $0 < m < p^\alpha$, $m$ premier avec $p$ ou multiple de $p^\beta$, avec $\beta < \alpha - 1$ entraînent

$$\Phi(p^\alpha \mid m) = 0.$$

*g*. $p$ premier $0 < m < p^\alpha$, $m$ multiple de $p^{\alpha-1}$ entraînent

$$\Phi(p^\alpha \mid m) = -p^{\alpha-1}.$$

Les énoncés (*d*), (*e*), (*f*), (*g*) permettent le calcul pratique de l'indicateur généralisé dans tous les cas.

2. Développements formels des fonctions de la théorie des nombres. — *a*. *Moyenne d'une fonction*. — Soit $f(n)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie sur l'ensemble des entiers rationnels. Si la limite

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) \right]$$

existe et est finie, nous la nommerons, avec Dirichlet, la *moyenne* de la fonction $f$; cette moyenne se note parfois $\mathrm{M}(f)$.

*b*. *Produit scalaire de deux fonctions*. — Soient $f(n)$ et $g(n)$ deux fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur l'ensemble des entiers rationnels; leur produit scalaire, quand il existe, est défini par

$$[f.g] = \mathrm{M}(f\bar{g}) = \lim_{n \to \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k)\,\bar{g}(k) \right].$$

Cette expression a toutes les propriétés formelles d'un produit.

*c*. *Système orthogonal des racines de l'unité*. — Soient $\alpha$ et $\beta$ deux racines de l'unité, de degrés quelconques; supposons-les distinctes; alors $\alpha\bar{\beta} \neq 1$. Posons

$$f_\alpha(n) = \alpha^n; \qquad f_\beta(n) = \beta^n.$$

Il est clair que le produit scalaire $[f_\alpha . f_\beta]$ est nul, car la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha\bar{\beta})^k$$

est une fonction bornée de $n$. Au contraire, si $\alpha = \beta$, on a visiblement

$$[f_\alpha . f_\alpha] = 1.$$

Les fonctions $f_\alpha(n)$ constituent donc un système orthogonal normé relativement au produit scalaire défini plus haut.

Revenons maintenant à l'indicateur généralisé $\Phi(n|m)$; on a, par définition,

$$\Phi(n|m)=\sum_\alpha f_\alpha(m),$$

où la sommation est étendue aux racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On en déduit immédiatement que le produit scalaire

$$[\Phi(n|m)\,\Phi(n'|m)],$$

*calculé par rapport à la variable m*, est nul pour $n\neq n'$, et a pour valeur $\varphi(n)$, si $n=n'$.

*d. Expression formelle des coefficients de Fourier d'une fonction $f(n)$.* — Soit $f(n)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur l'ensemble des entiers rationnels positifs; nous la supposerons en outre partout finie, et nous désignerons par $F(n)$ son image de Möbius; on sait que l'on a

$$f(n)=\sum_{d/n} F(d); \qquad F(n)=\sum_{d/n}\mu(d)f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Calculons formellement le produit scalaire $[f.f_\alpha]$, où l'on a posé comme plus haut $f_\alpha(n)=\alpha^n$, en désignant par $\alpha$ une racine de l'unité de degré $k$. On a

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)\bar{f}_\alpha(m)=\sum_{m=1}^{n}\sum_{d/m}F(d)\bar{\alpha}^m$$
$$=\sum_{d=1}^{n}F(d)\left[\bar{\alpha}^d+\bar{\alpha}^{2d}+\ldots+\bar{\alpha}^{d\left[\frac{n}{d}\right]}\right].$$

Si $d$ est multiple de $k$, le crochet vaut $\left[\frac{n}{d}\right]$; sinon, on voit sans peine qu'il reste borné quel que soit $n$. Donc, *moyennant des hypothèses convenables sur la fonction* $F(n)$, la somme

$$\sum_{m=1}^{n} f(m)\bar{f}_\alpha(m)$$

a pour partie principale, pour $n$ grand,

$$n\sum_{h=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]}\frac{F(kh)}{kh};$$

de telle sorte qu'on est conduit à prendre

$$[ff_\alpha]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}f(m)\bar{f}_\alpha(m)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F(kh)}{kh},$$

pourvu que la limite existe et que la série obtenue converge. Si l'on observe alors que ce résultat ne dépend que du degré $k$ de la racine $\alpha$, et reste par suite le même pour toutes les racines primitives $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité, on est conduit à associer à la fonction $f(n)$ la série formelle

$$\sum_{\alpha}[ff_\alpha]f_\alpha(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}(k)\Phi(k\mid n), \tag{4}$$

avec

$$\mathrm{A}(k)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(kh)}{kh}, \tag{5}$$

puisque

$$\Phi(k\mid n)=\sum_{\alpha}f_\alpha(n),$$

$\alpha$ décrivant l'ensemble des racines primitives $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

*e. Sommation formelle de la série précédente.* — Laissant toujours de côté les questions de convergence, on peut écrire

$$\sum_{k=1}\mathrm{A}(k)\,\Phi(k\mid n)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(kh)}{kh}\Phi(k\mid n),$$

puis, en échangeant les deux sommations, et sommant pour $hk=d$,

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mathrm{F}(d)}{d}\left\{\sum_{k/d}\Phi(k\mid n)\right\};$$

mais, d'après la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé, l'accolade vaut o ou $d$, suivant que $d$ ne divise pas, ou divise $n$; il reste donc en définitive

$$\sum_{d/n}\mathrm{F}(d)=f(n).$$

On peut dire qu'il y a *convergence formelle* de la série (4) vers $f(n)$.

*f. Première généralisation du calcul précédent.* — Désignons maintenant par $\lambda$ un exposant entier au moins égal à l'unité. Posons, lorsque cette expression a un sens,

$$\mathrm{A}_\lambda(k)=\sum_{k/d^\lambda}\frac{\mathrm{F}(d)}{d^\lambda}. \tag{6}$$

La sommation est donc étendue aux entiers $d$ dont la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ est multiple de $k$. On a, en revenant aux notations précédentes,

$$\mathrm{A}(k)=\mathrm{A}_1(k).$$

Considérons maintenant la série formelle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{A}_\lambda(k)\,\Phi(k\mid n^\lambda). \tag{7}$$

Il vient, toujours en laissant de côté la question de la légitimité de ces transformations de calcul,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_\lambda(k)\,\Phi(k \mid n^\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{\mathrm{F}(d)}{d^\lambda}\,\Phi(k \mid n^\lambda);$$

ou encore

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mathrm{F}(d)}{d^\lambda} \left\{ \sum_{k/d^\lambda} \Phi(k \mid n^\lambda) \right\};$$

mais, d'après la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé, l'accolade vaut o ou $d^\lambda$, suivant que $d^\lambda$ ne divise pas, ou divise $n^\lambda$, c'est-à-dire, suivant que $d$ ne divise pas, ou divise $n$; la somme se réduit donc en définitive à

$$\sum_{d/n} \mathrm{F}(d) = f(n).$$

Plus généralement, on peut encore considérer la série formelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_\lambda(k)\,\Phi(k \mid n), \tag{8}$$

et, par le même calcul, lui donner pour valeur l'expression

$$\sum_{d^\lambda/n} \mathrm{F}(d),$$

où la sommation est cette fois étendue aux diviseurs $d$ dont la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ divise $n$. Désignons alors par la notation

$$[n]_\lambda,$$

le plus grand des entiers dont la puissance $\lambda^{\text{ième}}$ divise $n$. Dire que $d^\lambda$ divise $n$ équivaut à dire que $d$ divise $[n]_\lambda$; il en résulte que la série (8) *converge formellement* vers la fonction

$$\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda).$$

3. Légitimation des calculs précédents. Propriétés de presque-périodicité. — $1^{\text{er}}$ *cas. — La série des images de Möbius est absolument convergente.*

Soit donc la fonction $f(n)$; désignons toujours par $\mathrm{F}(n)$ son image de Möbius, et supposons l'absolue convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(n).$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Les séries*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_\lambda(k)\,\Phi(k \mid n)$$

*sont absolument convergentes pour tout entier* $\lambda \geqq 1$; *elles convergent uniformé-*

*ment par rapport à n; leur somme $\mathcal{F}_\lambda(n)$ est telle que l'on ait*

$$\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda)$$

*et en particulier*

$$\mathcal{F}_\lambda(n^\lambda) = f(n).$$

Il suffit, pour établir ces différents points, d'utiliser la majoration

$$|\Phi(k \mid n)| \leq \varphi(k).$$

Considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\, \Phi(k \mid n)$$

ou, mieux, la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{F(d)}{d^\lambda} \Phi(k \mid n).$$

Elle est majorée, en module, quel que soit $n$, par la série à termes positifs

$$\sum_{k-1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{|F(d)|}{d^\lambda} \varphi(k).$$

Or, cette dernière est convergente; commençant en effet la sommation par l'indice $d$, elle s'écrit

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|F(d)|}{d^\lambda} \left\{ \sum_{k/d^\lambda} \varphi(k) \right\} = \sum_{d=1}^{\infty} |F(d)|.$$

Ce qui établit notre assertion. La série proposée converge donc absolument et uniformément vers une fonction $\mathcal{F}_\lambda(n)$, et, le calcul formel donné plus haut en $(2; f)$ devenant valable par suite de l'absolue convergence, on a

$$\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda).$$

Il est bien clair par ailleurs que la formule (6) donnant les coefficients $A_\lambda(k)$ a un sens.

*Propriété de presque-périodicité.* — Si l'on remplace dans les séries $\mathcal{F}_\lambda(n)$ les $\Phi(k \mid n)$ par leurs expressions comme somme d'exponentielles, le raisonnement précédent montre que la série d'exponentielles obtenue est aussi absolument et uniformément convergente, puisque la majoration faite revient à remplacer les exponentielles par l'unité. D'où l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Sous les mêmes hypothèses, les séries*

$$\mathcal{F}_\lambda(n) = \sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\, \Phi(k \mid n)$$

*ont pour sommes des fonctions presque périodiques de Bohr sur le groupe additif* **Z** *des entiers rationnels. Par suite, la fonction $f(n)$*

$$f(n) = \mathcal{F}_1(n) = \mathcal{F}_2(n^2) = \mathcal{F}_3(n^3) = \ldots = \mathcal{F}_\lambda(n^\lambda)$$

*est elle-même presque périodique de Bohr sur* Z, *en même temps qu'elle est la restriction à l'ensemble des entiers positifs, puissances* $\lambda^{\text{ièmes}}$ *exactes, d'une autre fonction presque périodique de Bohr* $\mathcal{F}_\lambda(n)$.

2[e] *Cas.* — *Il existe une constante* $A > 0$, *et un exposant* $\sigma > 0$, *tels que*

$$\sum_{k=1}^{n} |F(k)| \leq A n^\sigma.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Les séries*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\Phi(k \mid n),$$

*sont absolument convergentes et ont pour sommes* $\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda)$ *pourvu que* $\lambda > \sigma$.

En premier lieu, l'hypothèse faite implique la convergence des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(k)|}{k^s}$$

pour $\mathcal{R}(s) > \sigma$; la convergence des séries donnant les coefficients $A_\lambda(k)$ s'ensuit immédiatement, dès que $\lambda > \sigma$. Considérons alors la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{F(d)}{d^\lambda} \Phi(k \mid n)$$

et utilisons cette fois la majoration $|\Phi(k|n)| \leq n$ qui résulte de (1; $b$); la série des valeurs absolues est alors majorée par la suivante :

$$n \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/d^\lambda} \frac{|F(d)|}{d^\lambda} = n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(d)|}{d^\lambda} T(d^\lambda),$$

où l'on désigne par $T(d^\lambda)$ le nombre des diviseurs de $d^\lambda$. Or, on sait qu'à tout $\varepsilon$ positif, aussi petit qu'on le veut, correspond un $B_\varepsilon$ tel que

$$T(m) \leq B_\varepsilon m^\varepsilon.$$

On trouve donc ainsi la nouvelle majoration

$$n B_\varepsilon \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|F(d)|}{d^{\lambda(1-\varepsilon)}}.$$

Mais $\lambda > \sigma$ entraîne la possibilité de prendre $\varepsilon$ assez petit pour que

$$\lambda(1-\varepsilon) > \sigma.$$

De là résulte la convergence de la dernière série majorante, puis l'absolue convergence de la série double donnant $\mathcal{F}_\lambda(n)$; on en déduit comme plus haut la validité de la formule

$$\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda).$$

*Remarque.* — Il y a lieu de noter que le théorème III ne donne aucun renseignement sur la convergence, ou la divergence de la série d'exponentielles obtenue en remplaçant les $\Phi(k \mid n)$ par leurs expressions comme somme d'exponentielles. *A fortiori*, ne peut-on tirer de ce théorème aucun renseignement sur l'éventuelle presque-périodicité des fonctions $\mathcal{F}_\lambda(n)$. Tout ce qu'on peut dire, c'est que l'on a obtenu un développement de ces fonctions sous forme d'une série d'exponentielles, cette série convergeant absolument *par groupes*. Pour aller plus loin, il est nécessaire d'améliorer les hypothèses.

3^e^ *Cas. Application du théorème de Fischer-Riesz-Bésicovitch.* — Le seul moyen dont on dispose pour déceler l'éventuelle presque-périodicité de la somme d'une série d'exponentielles est d'appliquer à ce développement le théorème de Fischer-Riesz-Bésicovitch, en examinant la convergence ou la divergence de la série des carrés des modules des coefficients des exponentielles. Dans cet ordre d'idées, on peut énoncer, relativement aux développements précédents, et en conservant les mêmes notations, le théorème suivant :

Théorème IV. — *Si* $\lambda > 2\sigma$ *la fonction* $\mathcal{F}_\lambda(n)$ *est presque périodique, au sens de Bésicovitch, sur* Z.

Puisque $\lambda > 2\sigma$, la fonction $\mathcal{F}_\lambda(n) = f([n]_\lambda)$ est définie, d'après le théorème III, comme somme de la série absolument convergente

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\Phi(k \mid n).$$

Regardons cette série comme une série formelle d'exponentielles. La somme des carrés des modules des coefficients s'écrit formellement

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_\lambda(k)\bar{A}_\lambda(k)\,\varphi(k)$$

ou, en remplaçant les $A_\lambda(k)$ par leurs expressions, sous forme de série triple

$$\sum_{d;\delta;k} \frac{F(d)\bar{F}(\delta)}{(d\delta)^\lambda}\varphi(k),$$

avec $k/d^\lambda$; $k/\delta^\lambda$ et $k$ variant de 1 à l'infini. Mais $k/d^\lambda$, $k/\delta^\lambda$ entraîne $k/\Delta^\lambda$, avec $\Delta = (d;\delta)$. Sommant par rapport à $k$, la série considérée devient

$$\sum_{d;\delta;1}^{\infty} \Delta^\lambda \frac{F(d)\bar{F}(\delta)}{(d\delta)^\lambda},$$

que l'inégalité $\Delta < \sqrt{d\delta}$ permet de majorer par la nouvelle série

$$\sum_{d;\delta;1}^{\infty} \frac{|F(d)|\,|F(\delta)|}{(d\delta)^{\lambda/2}},$$

manifestement convergente, moyennant l'hypothèse $\lambda > 2\sigma$. Notre assertion résulte ensuite du théorème de Bésicovitch. On peut, par suite, affirmer que

$$\mathrm{M}[\mathcal{F}_\lambda(n)\overline{\mathcal{F}}_\lambda(n)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_\lambda(k)\overline{\mathrm{A}}_\lambda(k)\varphi(k),$$

d'après une propriété connue; c'est ce qu'il serait possible de vérifier directement.

On notera qu'à un développement d'exponentielles presque périodiques convergeant en moyenne au sens de Bésicovitch, correspond en fait *une classe* de fonctions presque périodiques de Bésicovitch, définies sur Z, sauf peut-être sur un ensemble fini; dans le cas qui nous intéresse, parmi toutes ces fonctions figure la fonction $\mathcal{F}_\lambda(n)$, qui est, elle, parfaitement définie par le développement absolument convergent (8).

4. Exemples. — *a*. Soit $\alpha$ un nombre réel ou complexe quelconque; désignons par $\mathrm{S}_\alpha(n)$ la somme des puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de $n$; l'image de Möbius de cette fonction est évidemment $n^\alpha$, et l'on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{F}(k)| = \sum_{k=1}^{n} k^u \leq n^\sigma,$$

en posant $u = \mathcal{R}(\alpha)$ et $\sigma = 1 + u = 1 + \mathcal{R}(\alpha)$ pour $u \neq -1$. Dans le cas où $u = -1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathrm{F}(k)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \operatorname{Log} n$$

et, prenant $\varepsilon$ positif arbitrairement petit, il vient $\operatorname{Log} n \leq \mathrm{A}_\varepsilon n^\varepsilon$, de sorte que l'on doit choisir dans chaque cas, $\sigma$ égal à $1 + \mathcal{R}(\alpha)$ pour $\mathcal{R}(\alpha) \neq -1$ et à $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, pour $\mathcal{R}(\alpha) = -1$.

Calculons par ailleurs les coefficients $\mathrm{A}_\lambda(k)$; on a

$$\mathrm{A}_\lambda(k) = \sum_{k/d^\lambda} \frac{1}{d^{\lambda-\alpha}}.$$

Désignons par la notation $m_\lambda$ la plus petite puissance $\lambda^{\text{ième}}$ exacte qui soit divisible par $m$; alors $k/d^\lambda$ entraîne

$$d^\lambda = k_\lambda h^\lambda,$$

où $h$ est un entier rationnel; il vient alors

$$\mathrm{A}_\lambda(k) = (k_\lambda)^{\frac{\alpha}{\lambda}-1} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\lambda-\alpha}} = \frac{\zeta(\lambda-\alpha)}{k_\lambda^{1-\frac{\alpha}{\lambda}}},$$

pourvu que

$$\mathcal{R}(\lambda - \alpha) > 1.$$

Appliquons maintenant nos résultats généraux :

1° Il y a absolue convergence des séries

$$S_\alpha([n]_\lambda) = \zeta(\lambda - \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(k \mid n)}{k_\lambda^{1-\frac{\alpha}{\lambda}}},$$

pour

$$\lambda > 1 + \mathcal{R}(\alpha), \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha) \neq -1,$$

et pour

$$\lambda > 0, \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha) = -1.$$

2° $S_\alpha([n]_\lambda)$ est presque périodique sur Z, au sens de Bésicovitch, pour

$$\lambda > 2[1 + \mathcal{R}(\alpha)], \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha) \neq -1,$$
$$\lambda > 0, \qquad \text{si } \mathcal{R}(\alpha) = -1.$$

3° Enfin $S_\alpha([n]_\lambda)$ est presque périodique sur Z, au sens de Bohr pour

$$\lambda \geqq 1, \qquad \mathcal{R}(\alpha) < -1.$$

On notera en particulier que

$$S_{-1}(n), \quad T([n]_2), \quad S_1([n]_3), \quad S_2([n]_4), \quad \ldots,$$

sont représentables par des séries d'exponentielles absolument convergentes *par groupes*, tandis que

$$S_{-1}(n), \quad T([n]_3), \quad S_1([n]_5), \quad S_2([n]_7), \quad \ldots$$

sont presque périodiques au sens de Bésicovitch; de plus

$$S_{-2}(n), \qquad S_{-3}(n), \qquad \ldots$$

sont presque périodiques au sens de Bohr.

*b*. Prenons maintenant $f(n) = \frac{\varphi(n)}{n}$ avec la notation habituelle pour l'indicateur d'Euler. On sait que l'image de Möbius de cette fonction est

$$F(n) = \frac{\mu(n)}{n},$$

$\mu(n)$ désignant la fonction de Möbius; par suite $|F(n)| \leqq \frac{1}{n}$ et l'on peut prendre $\sigma = \varepsilon > 0$ arbitrairement petit; d'où :

*La fonction*

$$\frac{\varphi([n]_\lambda)}{[n]_\lambda}$$

*est presque périodique par rapport à n au sens de Bésicovitch, dès que* $\lambda \geqq 1$, *et elle est représentable par une série d'exponentielles absolument convergente par groupes.*

Le calcul des coefficients $A_\lambda(k)$ se fait par des procédés classiques; on trouve

$$A_\lambda(k) = \frac{1}{\zeta(\lambda+1)} \frac{\mu(\sqrt[\lambda]{k_\lambda})}{k_\lambda^{1+\frac{1}{\lambda}}} \frac{1}{\prod\limits_{p/k_\lambda}\left(1-\frac{1}{p^{\lambda+1}}\right)};$$

la notation $k_\lambda$ a été définie plus haut; dans le produit qui se trouve en dénominateur, les *nombres premiers* $p$ sont les facteurs premiers de $k_\lambda$. On notera en particulier le développement suivant :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{\prod\limits_{p/k}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}\frac{\Phi(k\mid n)}{k^2}.$$

*c*. Prenons encore $f(n)=n$, d'où $F(n)=\varphi(n)$; on sait que $\varphi(n)<n$, donc

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\leq n^2,$$

et il faut prendre ici $\sigma=2$. Par suite :

*La fonction* $[n]_\lambda$ *est presque périodique au sens de Bésicovitch dès que* $\lambda\geq 5$ *et elle est représentable par une série d'exponentielles convergeant absolument, par groupes, dès que* $\lambda\geq 3$.

Le calcul des coefficients $A_\lambda(k)$ est ici un peu délicat; on trouve

$$[n]_\lambda = \frac{\zeta(\lambda-1)}{\zeta(\lambda)}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\prod_{p/k_\lambda}\frac{p-1}{p^{(\lambda-1)(u-1)}(p^\lambda-1)}\right\}\Phi(k\mid n),$$

les nombres premiers $p$ étant les facteurs premiers de $k_\lambda$, suivant la formule

$$k_\lambda = \Pi p^{\lambda u}.$$

*d*. Prenons enfin $f(n)=\mu(n)$ (fonction de Möbius). Soit $\nu(n)$ l'image de Möbius de cette fonction; on sait que

$$\frac{1}{\zeta^2(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)}{n^s}; \qquad \left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\nu(n)|}{n^s};$$

Les valeurs de $\nu(n)$ sont données par les formules suivantes :

$$\nu(1)=1; \qquad \nu(n)=0, \quad \text{si } m^3/n \quad (m\neq 1)$$

et

$$\nu(n)=(-2)^r, \quad \text{si } n=p_1p_2\ldots p_r(q_1q_2\ldots q_s)^2;$$

les $p_i$ et les $q_j$ étant des facteurs premiers distincts.

Ajoutons encore que l'application d'une méthode classique depuis Dirichlet permet de donner la forme asymptotique

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(k)| = \frac{\pi^4}{36} n \operatorname{Log} n + O(n).$$

Il faut donc prendre ici $\sigma = 1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon$ strictement positif et arbitrairement petit. On en conclut, par application des théorèmes précédents, que :

*$\mu([n]_2)$ est développable en série d'exponentielles absolument convergente par groupes, tandis que $\mu([n]_3)$ est presque périodique au sens de Bésicovitch.*

On peut ici encore donner une expression finie des coefficients $A_\lambda(k)$; la voici, elle est assez compliquée :

$$A_\lambda(k) = \frac{1}{\zeta^2(\lambda)} \frac{\nu(\sqrt[\lambda]{k_\lambda})}{k_\lambda} \prod_{p/k_\lambda} \left\{ \frac{1 + \dfrac{\mu(p^u)}{2p^\lambda}}{\left(1 - \dfrac{1}{p^\lambda}\right)^2} \right\}.$$

Les $p$ sont toujours les facteurs premiers de $k_\lambda$, suivant la formule

$$k_\lambda = \prod_p p^{\lambda u}.$$

5. Dernière généralisation de la théorie précédente. — Un examen attentif de la transformation de calcul, d'ailleurs très simple, qui conduit aux développements généraux trouvés plus haut, permet d'étendre notablement le champ d'application de la méthode; nous verrons qu'on peut donner à ce procédé la plus grande extension possible et obtenir ainsi les développements en séries d'exponentielles de *n'importe quelle fonction de la théorie des nombres,* pourvu qu'elle soit toujours finie.

Donnons d'abord une définition :

*Isomorphisme de* Z, *relativement à la divisibilité.* — Nous appellerons ainsi une application de l'ensemble $Z_+$ des entiers rationnels strictement positifs, *dans* $Z_+$, soit $n \to I(n)$, telle que la relation $n/m$ soit *équivalente* à la relation $I(n)/I(m)$.

Il est aisé de construire de tels isomorphismes; par exemple, si

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$$

est la décomposition canonique de l'entier $n$, on prendra

$$I(n) = p_1^{f(p_1;\alpha_1)} p_2^{f(p_2;\alpha_2)} \ldots p_r^{f(p_r;\alpha_r)},$$

la fonction $f(p; \alpha)$ prenant ses valeurs dans $Z_+$ et étant monotone croissante par rapport à $\alpha$, quel que soit $p$.

Plus généralement, on peut construire un isomorphisme par récurrence sur $n$ : connaissant $I(1)$, $I(2)$, ..., $I(n)$; on choisira $I(n+1)$ par la condition que cet entier soit : 1° un multiple commun des $I(d)$ pour $d/n+1$; 2° qu'il ne soit divisible par aucun $I(e)$, pour $e \leqq n$; $e \not| n+1$. Il est clair que cette construction par récurrence laisse encore beaucoup d'arbitraire dans la détermination de l'isomorphisme $I(n)$; on notera en particulier qu'il est toujours possible de déterminer un isomorphisme $I(n)$ majorant une fonction donnée $f(n)$, pourvu que celle-ci soit toujours finie; de même, si $F(n)$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes toujours finies, et si $\alpha$ est un exposant positif quelconque, il est possible de déterminer un isomorphisme $I(n)$ rendant absolument convergente la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{[I(k)]^{\alpha}}.$$

Ce dernier point nous sera utile.

Généralisons maintenant les calculs formels qui nous ont servi de point de départ. Soit $f(n)$ une fonction de la théorie des nombres qui soit toujours finie; soit $F(n)$ son image de Möbius; soit enfin $I(n)$ un isomorphisme. Posons

$$A_I(k) = \sum_{k/I(d)} \frac{F(d)}{I(d)}. \tag{9}$$

La sommation est donc étendue aux indices $d$ tels que $I(d)$ soit multiple de $k$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_I(k)\Phi(k \mid n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k/I(d)} \frac{F(d)}{I(d)} \Phi(k \mid n),$$

ou, en permutant les sommations,

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{F(d)}{I(d)} \left\{ \sum_{k/I(d)} \Phi(k \mid n) \right\}$$

et la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé permet d'écrire cette dernière somme double sous forme finie

$$\sum_{I(d)/n} F(d) = \mathcal{F}_I(n). \tag{10}$$

Cette définition *finie* de $\mathcal{F}_I(n)$ ne peut être condensée davantage [comme c'était le cas pour les isomorphismes $I(n) = n^{\lambda}$], à moins de faire des hypothèses plus précises sur l'isomorphisme $I(n)$; mais on doit remarquer que, pour tout isomorphisme $I(n)$, on a

$$\mathcal{F}_I[I(n)] = f(n). \tag{11}$$

La légitimation du calcul formel qui vient d'être indiqué se fait exactement comme dans le cas des isomorphismes $I(n) = n^{\lambda}$, et elle conduit encore à deux théorèmes analogues aux théorèmes III et IV du paragraphe 3; nous nous bornerons à énoncer ces deux théorèmes, les démonstrations se transposant de façon immédiate :

*a. Le développement*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{I}}(n)=\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{A}_{\mathrm{I}}(k)\,\Phi(k \mid n) \tag{12}$$

*converge absolument, et a pour somme*

$$\sum_{\mathrm{I}(d)/n} \mathrm{F}(d),$$

*pourvu que l'isomorphisme* $\mathrm{I}(n)$ *soit tel qu'il existe un exposant* $\alpha$ *strictement positif et strictement inférieur à l'unité, rendant absolument convergente la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{F}(k)}{[\mathrm{I}(k)]^{\alpha}}.$$

*b. La même série* (12) *définit une fonction* $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}(n)$ *presque périodique, au sens de Bésicovitch, sur* Z, *pourvu que l'isomorphisme* $\mathrm{I}(n)$ *rende absolument convergente la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{F}(k)}{\sqrt{\mathrm{I}(k)}}.$$

De ce dernier énoncé résulte le théorème suivant, assez inattendu :

THÉORÈME V. — *Si la fonction de la théorie des nombres* $f(n)$ *est partout finie, il est possible de trouver un isomorphisme* $\mathrm{I}(n)$ *tel que l'on ait*

$$f(n)=\mathcal{F}[\mathrm{I}(n)],$$

$\mathcal{F}(n)$ *étant une fonction presque périodique sur* Z, *au sens de Bésicovitch, d'ailleurs représentable par un développement en exponentielles convergeant absolument, par groupes.*

6. CAS DE L'ARITHMÉTIQUE SUR UN CORPS ALGÉBRIQUE. — Les considérations précédentes peuvent s'étendre au cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur le groupe additif des entiers d'un corps algébrique K.

Le premier point est de définir d'abord l'indicateur généralisé. Soit donc un corps algébrique K; nous noterons au moyen de minuscules grecques les entiers du corps, et par des minuscules gothiques les idéaux dans le corps. Enfin $Z_K$ désignera le groupe additif des entiers du corps. Si $\mathfrak{g}$ est un sous-groupe de $Z_K$, le plus grand des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$ est évidemment le p. g. c. d. des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$. Considérons enp articulier le groupe des classes d'entiers du corps, modulo un idéal $\mathfrak{a}$, soit $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$. On sait que c'est un groupe abélien fini d'ordre $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$. Un sous-groupe quelconque $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$

peut être regardé comme un sous-groupe du groupe $Z_K$ contenant évidemment l'idéal $\mathfrak{a}$; le plus grand des idéaux contenus dans $\mathfrak{g}$ est donc un idéal non vide, diviseur de $\mathfrak{a}$; si $\mathfrak{b}$ est cet idéal, nous dirons que le sous-groupe $\mathfrak{g}$ *définit l'idéal* $\mathfrak{b}$.

Soit maintenant $\chi$ un caractère de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$; nous dirons que c'est un caractère *attaché* à l'idéal $\mathfrak{a}$. On notera souvent les valeurs d'un tel caractère $\chi(\mathfrak{a}|A)$, A étant une classe appartenant à $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$, ou encore $\chi(\mathfrak{a}|\alpha)$, $\alpha$ étant un entier quelconque de K; $\chi(\mathfrak{a}|\alpha)$ est donc la valeur prise par le caractère considéré sur la classe de $\alpha$, modulo $\mathfrak{a}$.

L'équation $\chi(\mathfrak{a}|\alpha)=1$, où $\mathfrak{a}$ est fixe, détermine comme on sait un sous-groupe $\mathfrak{g}$ de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$, qui définit, ainsi qu'il a été dit, un certain idéal $\mathfrak{b}$ divisant $\mathfrak{a}$; nous dirons que $\mathfrak{b}$ est l'idéal défini par le caractère $\chi$.

*Donc, tout élément* $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *définit un idéal bien déterminé* $\mathfrak{b}$ *divisant* $\mathfrak{a}$ *et qui est le* p. g. c. d. *de tous les idéaux sur lesquels* $\chi$ *prend la valeur* 1.

*Définition. — Nous dirons qu'un caractère* $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *est* PRIMITIF, *lorsque l'idéal* $\mathfrak{b}$ *défini par* $\chi$ *se réduit à* $\mathfrak{a}$.

Nous désignerons provisoirement par $\psi(\mathfrak{a})$ le nombre des caractères primitifs attachés à l'idéal $\mathfrak{a}$.

*Classification des caractères attachés à l'idéal* $\mathfrak{a}$. — Soit $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ un caractère attaché à l'idéal $\mathfrak{a}$; soit $\mathfrak{b}$ l'idéal défini par $\chi$. Sur cet idéal $\chi$ se réduit à l'unité; il en résulte immédiatement que $\chi$ reste constant sur les classes modulo $\mathfrak{b}$; donc $\chi$ est aussi un caractère attaché à l'idéal $\mathfrak{b}$; mais comme $\chi$ définit $\mathfrak{b}$ exactement, on voit que $\chi$ est un *caractère primitif* attaché à $\mathfrak{b}$. Inversement, tout caractère primitif attaché à $\mathfrak{b}$ reste constant sur les classes modulo $\mathfrak{a}$; c'est donc un élément de $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ définissant l'idéal $\mathfrak{b}$.

En résumé, *le groupe des caractères* $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *est tel qu'on puisse y établir une partition, l'indice des parties décrivant l'ensemble des diviseurs de* $\mathfrak{a}$, *et la partie correspondant à l'indice* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *étant constituée par l'ensemble des caractères primitifs attachés à l'idéal* $\mathfrak{b}$. *Autrement dit, tout élément* $\chi \in \widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$ *est un caractère primitif attaché à un diviseur* $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ *et cela d'une façon et d'une seule, tandis que tous les caractères primitifs attachés à* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *sont des éléments de* $\widetilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})$.

Il résulte immédiatement de ce dénombrement que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}),$$

d'où, comme on sait, par utilisation de la formule d'inversion de Möbius $\psi(\mathfrak{a})=\varphi(\mathfrak{a})$ en désignant par $\varphi(\mathfrak{a})$ l'indicateur de l'idéal $\mathfrak{a}$ [1].

---

[1] Le raisonnement qui vient d'être donné correspond, dans le cas du corps des rationnels, au célèbre raisonnement de Gauss sur la classification des classes de restes modulo $n$, suivant les valeurs du p. g. c. d. des nombres de ces classes avec $n$ (GAUSS, *Disqu.*, Section III; Art. 53 et suiv.).

*Indicateur généralisé.* — Nous noterons maintenant

$$\varpi_i(\mathfrak{a} \mid \alpha) \qquad [i = 1, 2, \ldots, \varphi(\mathfrak{a})],$$

les valeurs des différents caractères primitifs attachés à l'idéal $\mathfrak{a}$, prises en $\alpha$.

*Définition. — L'indicateur généralisé d'ordre* $\alpha$ ($\alpha$ étant un entier du corps) *est, par définition, égal à*

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \sum_{i=1}^{\varphi(\mathfrak{a})} \varpi_i(\mathfrak{a} \mid \alpha).$$

Il est clair que l'on a

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid 0) = \varphi(\mathfrak{a}); \qquad |\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha)| \leqq \varphi(\mathfrak{a});$$
$$\alpha \equiv \beta; \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{a}) \to \Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \Phi(\mathfrak{a} \mid \beta).$$

*Propriété fondamentale. — On a*

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{d} \mid \alpha) = 0 \text{ ou } \mathrm{N}(\mathfrak{a}), \tag{13}$$

*suivant que l'idéal* $\mathfrak{a}$ *ne divise pas, ou divise l'idéal principal* $(\alpha)$.

Cette somme s'écrit en effet

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \sum_{i=1}^{\varphi(\mathfrak{d})} \varpi_i(\mathfrak{d} \mid \alpha)$$

et, d'après la classification donnée plus haut des caractères de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$, l'ensemble de tous les caractères primitifs attachés aux différents idéaux $\mathfrak{d}$ divisant $\mathfrak{a}$, reproduit exactement, sans omission ni répétition, l'ensemble *de tous* les caractères de $\mathcal{G}(\mathfrak{a})$. La somme précédente s'écrit donc aussi

$$\sum_{\chi \in \tilde{\mathcal{G}}(\mathfrak{a})} \chi(\alpha)$$

et, d'après une propriété classique, elle vaut 0 ou $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$ suivant que $\alpha$ n'appartient pas, ou appartient à l'idéal $\mathfrak{a}$. C'est la propriété annoncée. On déduit facilement de là l'expression de l'indicateur généralisé : Introduisons la fonction caractéristique $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})$ égale à 1 si $\alpha \in \mathfrak{a}$ et à 0 si $\alpha \notin \mathfrak{a}$; on a

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{d} \mid \alpha) = \varepsilon_\alpha(\mathfrak{a}) \mathrm{N}(\mathfrak{a}),$$

puis par inversion de Mertens-Möbius

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) \varepsilon_\alpha(\mathfrak{d}) \mathrm{N}(\mathfrak{d}), \tag{14}$$

ou encore

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \sum_{\mathfrak{d}/(\mathfrak{a};\,\alpha)} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) N(\mathfrak{d}), \tag{15}$$

en introduisant le p. g. c. d. de $\alpha$ et de $\mathfrak{a}$.

Les expression (14) et (15) prouvent que la valeur de l'indicateur généralisée est toujours un entier rationnel.

Les fonctions $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})$ et $N(\mathfrak{a})$ possédant la propriété de multiplicativité restreinte

$$\varepsilon_\alpha(\mathfrak{a})\varepsilon_\alpha(\mathfrak{b}) = \varepsilon_\alpha(\mathfrak{a}\mathfrak{b}), \qquad N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}), \qquad \text{si } (\mathfrak{a};\,\mathfrak{b}) = 1,$$

on déduit de la formule (14) et d'une proposition connue, que l'indicateur généralisé a la même propriété

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha)\,\Phi(\mathfrak{b} \mid \alpha) = \Phi(\mathfrak{a}\mathfrak{b} \mid \alpha), \qquad \text{si } (\mathfrak{a};\,\mathfrak{b}) = 1.$$

On peut, à partir de la formule (15), donner une expression plus condensée de l'indicateur généralisé ; posons

$$(\mathfrak{a};\,\alpha) = \mathfrak{b}, \qquad \text{puis} \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c},$$

on a

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} = \mathfrak{c}\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}$$

et, si les deux idéaux $\mathfrak{c}$ et $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}$ sont premiers entre eux,

$$\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) = \mu(\mathfrak{c})\,\mu\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\right);$$

sinon l'idéal $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}$ est divisible par des idéaux carrés, et $\mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) = 0$. Il vient donc

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \mu(\mathfrak{c}) \sum_{\mathfrak{d}} N(\mathfrak{d})\,\mu\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\right),$$

la sommation étant cette fois étendue aux idéaux $\mathfrak{d}/\mathfrak{b}$ tels que l'idéal $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}$ soit premier avec l'idéal $\mathfrak{c}$. Posons encore $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}'$ on peut écrire

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \mu(\mathfrak{c})\,N(\mathfrak{b}) \sum_{\mathfrak{d}'} \frac{\mu(\mathfrak{d}')}{N(\mathfrak{d}')},$$

avec

$$\mathfrak{d}'/\mathfrak{b}; \quad (\mathfrak{d}';\,\mathfrak{c}) = (1).$$

Mais les idéaux $\mathfrak{d}'$ divisant $\mathfrak{b}$ et premiers avec $\mathfrak{c}$ sont tous les diviseurs du plus grand d'entre eux $\mathfrak{n}$, on peut donc écrire

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha) = \mu(\mathfrak{c})\,N(\mathfrak{b})\frac{\varphi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha)}{N(\mathfrak{a})} = \frac{\mu(\mathfrak{c})}{N(\mathfrak{c})}\,\frac{\varphi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})}. \tag{16}$$

La première de ces deux expressions montre que la valeur absolue de l'indicateur généralisé est au plus égale à la norme de l'idéal plus grand commun diviseur des idéaux $\mathfrak{a}$ et $(\alpha)$; cette valeur absolue est donc aussi au plus égale à la norme de l'idéal principal $(\alpha)$.

*Prolongement de l'indicateur généralisé.* — $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux sur le corps K, on posera

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{d}/(\mathfrak{a};\,\mathfrak{b})} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) \mathrm{N}(\mathfrak{d}). \tag{17}$$

Les valeurs de cette nouvelle fonction sont encore des entier rationnels; il est clair qu'on obtient bien ainsi un prolongement de l'indicateur généralisé $\Phi(\mathfrak{a} \mid \alpha)$ à l'ensemble des idéaux non principaux $\mathfrak{b}$. Il y a encore multiplicativité restreinte de la fonction prolongée par rapport à la variable $\mathfrak{a}$; de plus la formule de définition peut s'écrire

$$\Phi(\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \mu\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\right) \varepsilon_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{d})\, \mathrm{N}(\mathfrak{d}),$$

en introduisant une fonction caractéristique $\varepsilon_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a})$ égale à 1 si $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ et à zéro dans le cas contraire; par suite, la formule d'inversion donne à nouveau

$$\sum_{\mathfrak{d}/\mathfrak{a}} \Phi(\mathfrak{d} \mid \mathfrak{b}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathfrak{a} \nmid \mathfrak{b}; \\ \mathrm{N}(\mathfrak{a}), & \text{si } \mathfrak{a}/\mathfrak{b}; \end{cases}$$

ce qui généralise la propriété fondamentale de l'indicateur généralisé.

*Application au développement des fonctions numériques définie sur l'ensemble des idéaux du corps.* — Nous sommes maintenant en possession de tout ce qui est nécessaire pour transposer les calculs formels et les démonstrations de convergence qui ont été indiqués plus haut dans le cas des entiers rationnels. Bornons nous ici au cas le plus simple. Soit $f(\mathfrak{a})$ une fonction numérique partout finie, définie sur l'ensemble des idéaux du corps; soit $\mathrm{F}(\mathfrak{a})$ son image de Möbius. On posera

$$\mathrm{A}(\mathfrak{k}) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\mathrm{F}(\mathfrak{k}\mathfrak{a})}{\mathrm{N}(\mathfrak{k}\mathfrak{a})},$$

la sommation étant étendue à tous les idéaux du corps, et l'on vérifiera formellement que la série

$$\sum_{\mathfrak{k}} \mathrm{A}(\mathfrak{k})\, \Phi(\mathfrak{k} \mid \mathfrak{a}) \tag{18}$$

a pour somme $f(\mathfrak{a})$. La légitimation est immédiate si l'on suppose absolument convergente la série des images de Möbius

$$\sum_{\mathfrak{k}} \mathrm{F}(\mathfrak{k});$$

$\mathfrak{k}$ décrivant l'ensemble des idéaux du corps. Comme dans le cas des entiers rationnels, la démonstration utilise la majoration

$$|\Phi(\mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{a})| \leqq \varphi(\mathfrak{a}),$$

qui a été établie plus haut lorsque l'idéal $\mathfrak{a}$ est principal, et qui se vérifie directement dans le cas général, au moyen de la formule de définition (17).

Il faut encore noter ici que la démonstration prouve l'uniforme convergence de la série (18) relativement à l'idéal $\mathfrak{a}$; si de plus $\mathfrak{a} = (\alpha)$ est principal, on se trouve en possession d'un développement de $f(\alpha)$ en une série d'exponentielles — les caractères $\varpi_i$ — qui sont des racines de l'unité, ce développement est absolument et uniformément convergent, puisque la majoration utilisée revient à remplacer les exponentielles par l'unité, il en résulte, — sous l'hypothèse faite — la *presque-périodicité* de $f(\alpha)$, au sens de Bohr, sur le groupe additif $Z_K$ des entiers du corps.

Indiquons, à titre d'exemple, la formule suivante :

$$S_s(\mathfrak{a}) = \zeta_K(s+1) \sum_{\mathfrak{k}} \frac{\Phi(\mathfrak{k}\,|\,\mathfrak{a})}{[N(\mathfrak{k})]^{s+1}},$$

relative à la somme des puissances $-s$ des normes des diviseurs de l'idéal $\mathfrak{a}$. Il y a absolue convergence de cette série si $\mathcal{R}(s) > 1$ et la restriction $S_s(\alpha)$ de cette fonction est alors presque-périodique sur $Z_K$.

Nous laisserons au lecteur le soin d'étendre au cas de l'arithmétique sur le corps K, les calculs et les raisonnements des paragraphes 2, 3 et 4. La transposition est sensiblement immédiate.

Bornons-nous, pour terminer, à poser quelques questions :

Quelle est la propriété remplaçant la presque-périodicité pour une fonction telle que $S_s(\mathfrak{a})$ par exemple, lorsque $\mathcal{R}(s) > 1$, quand l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas principal ?

Existe-t-il une définition de l'indicateur généralisé $\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b})$ généralisant celle de $\Phi(\mathfrak{a}\,|\,\alpha)$ par le moyen d'une somme de caractères ?