

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

**Sur les suites de polynomes ou de fonctions entières à zéros réels**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 62 (1945), p. 115-183

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1945\\_3\\_62\\_\\_115\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__115_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR LES SUITES  
DE  
POLYNOMES OU DE FONCTIONS ENTIÈRES  
A ZÉROS RÉELS

PAR M. H. DELANGE.

---

INTRODUCTION. — Étant donnée une suite de polynômes à une variable

$$P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z), \dots,$$

nous avons étudié dans un travail précédent <sup>(1)</sup> la relation entre le comportement de la suite des fonctions  $\log |P_n(z)|$  et la distribution asymptotique des zéros de  $P_n(z)$  pour  $n$  très grand.

A tout polynôme  $P(z)$  nous associons une fonction additive d'ensemble  $\nu(e)$  définie pour les ensembles de points du plan complexe de la façon suivante : la valeur de  $\nu(e)$  est le nombre de zéros de  $P_n(z)$  appartenant à l'ensemble  $e$ , chacun étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. A la suite des polynômes  $P_n(z)$  correspond ainsi une suite de fonctions d'ensemble  $\nu_n(e)$  dont le comportement nous sert à caractériser la distribution asymptotique des zéros de  $P_n(z)$ . Un des résultats obtenus est le suivant :

$\varphi(n)$  étant une fonction positive donnée de l'entier  $n$ , si l'on suppose que l'ensemble  $E$  des points qui sont limites de zéros de  $P_n(z)$  est de mesure superficielle nulle et que le rapport du degré de  $P_n(z)$  à  $\varphi(n)$  reste borné, pour qu'il existe des coefficients  $c_n$  tels que la suite des fonctions  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$  soit convergente en dehors de  $E$ , il faut et il suffit que la suite des fonctions d'ensemble  $\frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(e)$  soit convergente (p. 271).

---

<sup>(1)</sup> *Ann. de l'École Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. LVI, 1939, pp. 173-276.

La condition relative à l'ensemble  $E$  est satisfaite en particulier dans le cas où les polynômes  $P_n(z)$  ont leurs zéros réels. Nous avons indiqué dans une Note postérieure <sup>(1)</sup> que dans cette dernière hypothèse on peut encore, *en ne supposant plus rien sur la croissance du degré de  $P_n(z)$* , obtenir, relativement à la distribution des zéros, des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait la même propriété. Un cas particulier intéressant est celui où les zéros de  $P_n(z)$  sont supposés non seulement réels mais bornés supérieurement, ou inférieurement, par un nombre fixe.

C'est l'étude de ce cas particulier que nous nous proposons de développer ici, avec son application à la détermination de la distribution asymptotique des zéros des polynômes définis par certaines relations de récurrence de Poincaré. Pour le cas général, nous nous bornerons à donner les énoncés sans démonstration.

Nous verrons aussi que, comme nous l'avons indiqué également dans une autre Note <sup>(2)</sup>, la même méthode permet d'étudier les suites de fonctions entières de même genre fini ayant tous leurs zéros sur une même demi-droite issue de l'origine, par exemple tous réels et négatifs.

Nous montrerons encore le profit que l'on peut tirer des résultats ainsi obtenus (du moins dans les cas suffisamment réguliers) pour l'étude d'une fonction entière de genre fini ayant tous ses zéros alignés sur une demi-droite  $Ou$  issue de l'origine [ou approximativement alignés sur cette demi-droite <sup>(3)</sup>] du point de vue de la relation entre la distribution de ces zéros et la croissance du module de la fonction sur la demi-droite opposée à  $Ou$ , ou sur une demi-droite faisant un angle convenable avec celle-ci.

## I. — Préliminaires.

1.1. Au lieu de raisonner sur des fonctions additives d'ensemble, nous utiliserons ici de préférence des fonctions de points associés à celles-ci. Nous aurons donc à considérer des fonctions croissantes <sup>(4)</sup> d'une variable réelle, définies dans tout l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ . Nous regarderons deux telles fonctions comme équivalentes si elles ont les mêmes points de discontinuité et prennent la même valeur en tous leurs points de continuité.

*Nous conviendrons de dire qu'une suite de telles fonctions croissantes  $\psi_n$  converge vaguement vers une autre fonction croissante  $\psi$  si  $\psi_n(t)$  tend vers  $\psi(t)$  pour toutes*

<sup>(1)</sup> *C. R. Acad. Sc.*, 217, 1943, p. 191.

<sup>(2)</sup> *C. R. Acad. Sc.*, 217, 1943, p. 225.

<sup>(3)</sup> Plus précisément l'hypothèse à faire est la suivante : les zéros étant rangés par ordre de module croissant en la suite  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , le rayon vecteur  $Oz_n$  a pour limite  $Ou$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. La fonction entière en question est alors dite « orientée ».

<sup>(4)</sup> Nous disons partout « fonction croissante » pour « fonction non décroissante ».

les valeurs de  $t$  pour lesquelles  $\psi$  est continue. La suite  $\psi_n$  converge alors aussi vaguement vers toute fonction équivalente à  $\psi$  et toute fonction vers laquelle elle converge vaguement est équivalente à  $\psi$ .

La convergence vague se confond avec la convergence ordinaire si la fonction limite est continue quel que soit  $t$ . Si une famille de fonctions croissantes  $\psi(t)$  est telle que, quel que soit l'intervalle fini  $[a, b]$ , ces fonctions soient bornées dans leur ensemble sur cet intervalle, on sait que de toute suite de fonctions prises dans cette famille on peut extraire une suite vaguement convergente <sup>(1)</sup>.

Cette propriété appartient en particulier à toute famille de fonctions croissantes nulles pour  $t$  inférieur à un nombre fixe  $a$  et satisfaisant pour  $t \geq a$  à une même inégalité de la forme

$$\psi(t) \leq \Psi(t),$$

où  $\Psi$  est une fonction donnée.

Il en est de même pour une famille de fonctions croissantes nulles pour  $t$  supérieur à un nombre fixe  $a$  et satisfaisant pour  $t \leq a$  à une même inégalité de la forme

$$\psi(t) \geq \Psi(t).$$

1.2. On connaît la définition de l'intégrale de Stieltjes  $\int_a^b f(t) d\psi(t)$  où  $\psi$  est une fonction croissante définie dans l'intervalle fermé  $[a, b]$  et  $f$  une fonction réelle ou complexe continue dans cet intervalle. On connaît également l'extension de cette définition au cas d'un intervalle infini, ou au cas où la fonction  $f$  devient infinie à l'une des extrémités de l'intervalle.

$\psi$  étant supposée définie dans  $[a, b]$  et  $f$  continue dans cet intervalle, l'intégrale  $\int_{a+0}^b f(t) d\psi(t)$  peut être définie comme limite pour  $h$  tendant vers zéro par valeurs positives de  $\int_{a+h}^b f(t) d\psi(t)$ . Elle est égale à

$$\int_a^b f(t) d\psi_1(t),$$

$\psi_1(t)$  étant égal à  $\psi(t)$  pour  $a < t \leq b$  et à  $\psi(a+0)$  pour  $t = a$ .

De même,  $f$  et  $\psi$  étant supposées définies dans un intervalle  $[a', b]$ , avec  $a' < a$ , et  $f$  étant supposée continue dans cet intervalle, l'intégrale  $\int_{a-0}^b f(t) d\psi(t)$  peut être définie comme limite pour  $h$  tendant vers zéro par valeurs positives de  $\int_{a-h}^b f(t) d\psi(t)$ . Elle est égale à

$$\int_a^b f(t) d\psi_2(t),$$

$\psi_2(t)$  étant égale à  $\psi(t)$  pour  $a < t \leq b$  et à  $\psi(a-0)$  pour  $t = a$ .

(1) On peut même en extraire une suite convergente au sens ordinaire.

## Les intégrales

$$\int_{a-0}^{+\infty} f(t) d\psi(t) \quad \text{et} \quad \int_{a+0}^{+\infty} f(t) d\psi(t)$$

seront définies comme limites pour  $L$  tendant vers  $+\infty$  de

$$\int_{a-0}^L f(t) d\psi(t) \quad \text{et} \quad \int_{a+0}^L f(t) d\psi(t).$$

On définirait de même les intégrales dans lesquelles la borne supérieure d'intégration serait  $b-0$  ou  $b+0$ .

$f$  et  $\psi$  étant définies dans l'intervalle fermé  $[a, b]$  et  $f$  ayant une dérivée continue dans cet intervalle, on sait que l'on a la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = f(b)\psi(b) - f(a)\psi(a) - \int_a^b \psi(t)f'(t) dt.$$

Rappelons enfin que, si  $f(t)$  est réelle et mesurable B, l'intégrale  $\int_a^b f(t) d\psi(t)$  peut être définie de façon analogue à l'intégrale de Lebesgue ordinaire  $\int_a^b f(t) dt$  en faisant jouer le rôle que joue la mesure dans celle-ci à la fonction additive d'ensemble associée à la fonction croissante égale à  $\psi(t)$  pour  $a < t < b$ , à  $\psi(a)$  pour  $t \leq a$ , et à  $\psi(b)$  pour  $t \geq b$ .

L'intégrale ainsi définie possède les mêmes propriétés que l'intégrale de Lebesgue ordinaire, et si  $f$  est continue elle coïncide avec celle définie de la façon mentionnée précédemment.

1.3. Si une suite de fonctions croissantes  $\psi_n$  converge vaguement vers une fonction  $\psi$  continue pour  $t=a$  et pour  $t=b$ , on sait que,  $f$  étant une fonction réelle ou complexe continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$ , l'intégrale  $\int_a^b f(t) d\psi_n(t)$  tend pour  $n$  infini vers  $\int_a^b f(t) d\psi(t)$ .

Si la fonction  $f$  dépend de paramètres et est uniformément continue par rapport à  $t$  lorsque ces paramètres décrivent un certain champ, la convergence de l'intégrale précédente vers sa limite est uniforme dans ce champ.

1.4. Nous ferons aussi usage du lemme suivant :

*Soit une suite de fonctions croissantes  $\psi_n$  qui convergent vaguement vers une fonction limite  $\psi$ , continue pour  $t=a$ , et soit  $f(t)$  une fonction réelle continue pour  $t \geq a$  et positive pour  $t$  assez grand.*

*Supposons que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) d\psi_n(t)$  soit convergente quel que soit  $n$  et inférieure à un nombre fixe  $M$ . Alors :*

1° L'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) d\psi(t)$  est convergente et au plus égale à M. (Il en résulte que, si  $g$  est une fonction réelle ou complexe continue pour  $t \geq a$  et satisfaisant pour  $t$  infini à  $g(t) = O[f(t)]$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} g(t) d\psi(t)$  est absolument convergente.)

Dans le cas particulier où  $\int_a^{+\infty} f(t) d\psi_n(t)$  a une limite finie  $\lambda$ , on a

$$\int_a^{+\infty} f(t) d\psi(t) \leq \lambda.$$

2° Si l'on a pour  $t$  infini  $g(t) = o[f(t)]$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} g(t) d\psi_n(t)$  tend pour  $n$  infini vers  $\int_a^{+\infty} g(t) d\psi(t)$ .

On aurait un énoncé analogue en considérant des intégrales prises de  $-\infty$  à  $a$ .

Appelons  $b$  un nombre assez grand pour que  $f(t) > 0$  pour  $t \geq b$  et tel que  $\psi$  soit continue pour  $t = b$ .

a. Pour  $l \geq b$ , l'intégrale  $\int_a^l f(t) d\psi(t)$  est une fonction croissante de  $l$ .

Quel que soit  $l \geq b$ , on peut prendre un nombre  $l' > l$  et tel que  $\psi$  soit continue pour  $t = l'$ . On a alors

$$\int_a^l f(t) d\psi(t) \leq \int_a^{l'} f(t) d\psi(t).$$

Mais le second membre est la limite pour  $n$  infini de  $\int_a^{l'} f(t) d\psi_n(t)$  qui est  $\leq M$ . Donc

$$\int_a^l f(t) d\psi(t) \leq M.$$

L'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) d\psi(t)$  est donc convergente et  $\leq M$ .

Si de plus  $\int_a^{+\infty} f(t) d\psi_n(t)$  a une limite  $\lambda$ , quel que soit  $\varepsilon$  positif, on a, à partir d'une certaine valeur de  $n$ ,

$$\int_a^{+\infty} f(t) d\psi_n(t) \leq \lambda + \varepsilon,$$

d'où l'on conclut que

$$\int_a^{+\infty} f(t) d\psi(t) \leq \lambda + \varepsilon.$$

Pour  $n$  infini, l'intégrale  $\int_a^b f(t) d\psi_n(t)$  tend vers  $\int_a^b f(t) d\psi(t)$ ; par suite elle reste, quel que soit  $n$ , inférieure en module à un nombre fixe  $M'$ .

L'intégrale

$$\int_b^{+\infty} f(t) d\psi_n(t) = \int_a^{+\infty} f(t) d\psi_n(t) - \int_a^b f(t) d\psi_n(t),$$

qui est d'ailleurs positive, reste donc inférieure à  $M + M'$ .

A étant un nombre réel supposé supérieur à  $b$ , écrivons

$$\int_a^{+\infty} g(t) d\psi_n(t) - \int_a^{+\infty} g(t) d\psi(t) = U + V + W,$$

avec

$$\begin{aligned} U &= \int_a^A g(t) d\psi_n(t) - \int_a^A g(t) d\psi(t), \\ V &= \int_A^{+\infty} g(t) d\psi_n(t), \\ W &= - \int_A^{+\infty} g(t) d\psi(t). \end{aligned}$$

Si  $\eta$  est la borne supérieure de  $\left| \frac{g(t)}{f(t)} \right|$  pour  $t \geq A$ , on voit de suite que l'on a

$$|V| \leq (M + M')\eta.$$

Étant donné  $\varepsilon$  positif quelconque, on peut choisir  $A$  de manière que  $\psi$  soit continue pour  $t = A$  et assez grand pour que l'on ait

$$|W| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \eta \leq \frac{\varepsilon}{3(M + M')}, \quad \text{d'où } |V| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

A étant ainsi fixé,  $U$  tend vers zéro pour  $n$  infini, et par suite on peut trouver  $n_0$  tel que  $n \geq n_0$  entraîne  $|U| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Alors  $n \geq n_0$  entraîne  $|U + V + W| \leq \varepsilon$ .

**1.4.1.** Notons que, si  $g(t)$  dépend d'un certain nombre de paramètres, l'intégrale  $\int_a^{+\infty} g(t) d\psi_n(t)$  converge uniformément vers  $\int_a^{+\infty} g(t) d\psi(t)$  lorsque ces paramètres décrivent un certain champ, pourvu que l'on suppose :

- 1° que le rapport  $\frac{g(t)}{f(t)}$  tend vers zéro uniformément lorsque  $t$  tend vers l'infini;
- 2° que dans tout intervalle fini la continuité de  $g(t)$  par rapport à  $t$  est uniforme par rapport aux paramètres.

On voit en effet que, dans le raisonnement précédent, on peut choisir  $A$ , puis trouver  $n_0$ , de façon à satisfaire aux conditions indiquées indépendamment des paramètres.

1.4.2. On établirait exactement de la même façon l'énoncé suivant tout à fait analogue au précédent :

*Soit une suite de fonctions croissantes  $\psi_n$  qui convergent vaguement vers une fonction limite  $\psi$  continue pour  $t=b$  et soit  $f$  une fonction réelle continue pour  $a < t \leq b$  et tendant vers  $+\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $a$  par valeurs supérieures.*

*Supposons que l'intégrale  $\int_a^b f(t) d\psi_n(t)$  soit convergente quel que soit  $n$  et inférieure à un nombre fixe  $M$ . Alors :*

1° *L'intégrale  $\int_a^b f(t) d\psi(t)$  est convergente et  $\leq M$ .*

*Dans le cas particulier où  $\int_a^b f(t) d\psi_n(t)$  a une limite finie  $\lambda$ , on a*

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) \leq \lambda.$$

2° *Si  $g$  est une fonction réelle ou complexe continue pour  $a < t \leq b$  et satisfaisant pour  $t$  voisin de  $a$  à  $g(t) = o[f(t)]$ , l'intégrale  $\int_a^b g(t) d\psi_n(t)$  tend pour  $n$  infini vers  $\int_a^b g(t) d\psi(t)$ .*

*Si  $g(t)$  dépend d'un certain nombre de paramètres, la convergence de cette intégrale vers sa limite est uniforme lorsque ces paramètres décrivent un certain champ, pourvu que :*

1° *Le rapport  $\frac{g(t)}{f(t)}$  tende vers zéro uniformément lorsque  $t$  tend vers  $a$ ;*

2° *Dans tout intervalle tel que  $[a+h, b]$ , où  $h > 0$ , la continuité de  $g(t)$  par rapport à  $t$  soit uniforme par rapport aux paramètres.*

## II. — Suites de polynômes à zéros réels et bornés supérieurement.

2. 1. Soit  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$ , ...,  $P_n(z)$ , ... une suite de polynômes ayant tous leurs zéros réels et au plus égaux à un nombre fixe  $a$ .

Nous désignerons par  $\alpha_1^{(n)}$ ,  $\alpha_2^{(n)}$ , ...,  $\alpha_p^{(n)}$ , ..., ou plus simplement par  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_p$ , ..., les zéros de  $P_n(z)$  supposés écrits chacun autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité et rangés par exemple par ordre de grandeur décroissante.

D'autre part, à chaque polynôme  $P_n(z)$  nous ferons correspondre une fonction croissante  $\nu_n(t)$  définie de la façon suivante :

—  $\nu_n(t)$  sera le nombre de zéros de  $P_n(z)$  au moins égaux à  $t$  [ainsi  $\nu_n(t)$  sera nulle pour  $t > a$ ].



$\varphi(n)$  sera une fonction positive quelconque de l'entier  $n$ . On posera

$$\frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(t) = \mu_n(t).$$

Si  $f(t)$  est une fonction réelle ou complexe continue pour  $t \leq a'$ , avec  $a' > a$ , on aura

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum f(\alpha_p) = \int_{-\infty}^{a'} f(t) d\mu_n(t) = \int_{-\infty}^{a+0} f(t) d\mu_n(t).$$

Le résultat fondamental que nous nous proposons d'établir est le suivant :

*Si, les coefficients  $c_n$  étant convenablement choisis, on sait que l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$  converge vers une fonction limite  $U(z)$  soit dans un domaine, si petit soit-il, soit simplement sur un segment de l'axe réel situé à droite du point  $a$ , on peut affirmer que :*

1° *La suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ;*

2° *A étant un nombre réel quelconque supérieur à  $a$ , l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p}$  tend pour  $n$  infini vers une limite finie  $h$ .*

*La connaissance de  $U(z)$  détermine la fonction  $\mu$  et la constante  $h$  (1).*

Nous établirons d'abord quelques résultats préliminaires.

2.2. THÉORÈME I. — *Si : 1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  est vaguement convergente avec une fonction limite  $\mu$ ;*

2° *A étant un nombre réel supérieur à  $a$ , l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p}$  tend pour  $n$  infini vers une limite finie  $h$ ;*

*Alors, dans le plan coupé suivant le segment  $[-\infty, a]$  de l'axe réel, la détermination réelle pour  $z$  réel supérieur à  $a$  de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \frac{P_n(z)}{P_n(A)}$  converge vers*

$$\int_{-\infty}^{a+0} \log \frac{z-t}{A-t} d\mu(t) + \left[ h - \int_{-\infty}^{a+0} \frac{d\mu(t)}{A-t} \right] \cdot (z-A),$$

*où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .*

*La convergence est uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive du segment  $[-\infty, a]$ .*

---

(1) Compte tenu du fait que nous regardons comme équivalentes deux fonctions croissantes qui ont les mêmes points de discontinuité et sont égales en tous les autres points.

En prenant les parties réelles, on voit que la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(A)} \right|$  converge vers

$$\int_{-\infty}^{a+0} \log \left| \frac{z-t}{A-t} \right| d\mu(t) + \left[ h - \int_{-\infty}^{a+0} \frac{d\mu(t)}{A-t} \right] \cdot \Re(z-A).$$

a.  $a'$  étant un nombre réel quelconque compris entre  $a$  et  $A$ , on a

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A-\alpha_p} = \int_{-\infty}^{a'} \frac{d\mu_n(t)}{A-t}.$$

De ce que cette expression tend vers  $h$  pour  $n$  infini, il résulte par la première partie du lemme du paragraphe 1.4 que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{a'} \frac{d\mu(t)}{A-t}$  est convergente et  $\leq h$ . Cette intégrale est d'ailleurs la même que  $\int_{-\infty}^{a+0} \frac{d\mu(t)}{A-t}$ , puisque  $\mu(t)$  est nulle pour  $t > a$ .

b. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(n)} \log \frac{P_n(z)}{P_n(A)} &= \frac{1}{\varphi(n)} \sum \log \frac{z-\alpha_p}{A-\alpha_p} \\ &= \frac{1}{\varphi(n)} \sum \left\{ \log \frac{z-\alpha_p}{A-\alpha_p} - \frac{z-A}{A-\alpha_p} \right\} + (z-A) \cdot \frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A-\alpha_p}, \end{aligned}$$

chacun des logarithmes étant pris avec la détermination réelle pour  $z$  réel  $> a$ .

Supposons  $z$  variable dans un domaine  $D$  borné et situé à distance positive du segment  $]-\infty, a]$ , et supposons que l'on a pris  $a'$  à l'extérieur de  $D$ .

On peut écrire

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log \frac{P_n(z)}{P_n(A)} = \int_{-\infty}^{a'} \left\{ \log \frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t} \right\} d\mu_n(t) + (z-A) \cdot \frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A-\alpha_p},$$

le logarithme étant pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Il est manifeste que le second terme tend pour  $n$  infini vers  $h(z-A)$ , la convergence étant uniforme dans  $D$ .

Le premier est de la forme  $\int_{-\infty}^{a'} g(t) d\mu_n(t)$ .

Définissons dans le cercle  $|u| < 1$  une fonction  $\varphi(u)$  par

$$\varphi(u) = \log(1+u) - u,$$

où l'on prendra la détermination du logarithme nulle pour  $u = 0$ . On voit de suite que, si l'on appelle  $R$  la borne supérieure de  $|z-A|$  lorsque  $z$  parcourt  $D$ , on pourra écrire pour  $t < A-R$ , de sorte que  $\left| \frac{z-A}{A-t} \right| < 1$ ,

$$g(t) = \varphi \left( \frac{z-A}{A-t} \right).$$

Or, si l'on suppose par exemple  $|u| \leq \frac{1}{2}$ , le rapport  $\frac{\varphi(u)}{u^2}$ , qui est une fonction continue dans ce cercle, reste en module au plus égal à un certain nombre positif M. Donc pour  $t \leq A - 2R$  on aura

$$|g(t)| \leq M \left( \frac{z-A}{A-t} \right)^2 \leq \frac{MR^2}{(A-t)^2}.$$

Donc le produit  $(A-t)g(t)$  tend uniformément vers zéro pour  $t$  infini lorsque  $z$  parcourt D.

D'autre part, l'expression  $g(t) = \log \frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t}$  est une fonction continue des deux variables  $z$  et  $t$  lorsque la variable réelle  $t$  parcourt l'intervalle  $]-\infty, a']$ ,  $z$  parcourant le domaine D et sa frontière. Donc, dans tout intervalle fini tel que  $[L, a']$ , elle est uniformément continue par rapport à  $t$  lorsque  $z$  parcourt D.

Il résulte de là, en vertu du lemme des paragraphes 1.4 et 1.4.1, que, pour  $n$  infini, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{a'} \left\{ \log \frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t} \right\} d\mu_n(t)$  converge uniformément dans D vers

$$\int_{-\infty}^{a'} \left\{ \log \frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t} \right\} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{a'+0} \left\{ \log \frac{z-t}{A-t} - \frac{z-A}{A-t} \right\} d\mu(t),$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^{a'+0} \log \frac{z-t}{A-t} d\mu(t) - (z-A) \int_{-\infty}^{a'+0} \frac{d\mu(t)}{A-t}$$

puisque chacune des deux intégrales est convergente.

On a donc bien le résultat annoncé.

2.3.  $a$  et  $A$  étant deux nombres réels fixés, avec  $A > a$ , étant données une fonction croissante quelconque  $\mu$ , nulle pour  $t > a$  et telle que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{a'+0} \frac{d\mu(t)}{A-t}$  soit convergente, et une constante réelle quelconque  $h$ , nous poserons

$$\Psi_{\mu,h}(z) = \int_{-\infty}^{a'+0} \log \frac{z-t}{A-t} d\mu(t) + \left[ h - \int_{-\infty}^{a'+0} \frac{d\mu(t)}{A-t} \right] \cdot (z-A),$$

où le logarithme sera supposé pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Nous désignerons par  $U_{\mu,h}(z)$  et  $V_{\mu,h}(z)$  la partie réelle et le coefficient de  $i$  dans  $\Psi_{\mu,h}(z)$ .

Ceci définit les fonctions  $\Psi_{\mu,h}(z)$ ,  $U_{\mu,h}(z)$ , et  $V_{\mu,h}(z)$  dans le domaine II constitué par le plan dont on a enlevé le segment  $]-\infty, a]$  de l'axe réel.

On voit de suite que  $\Psi_{\mu,h}(z)$  est une fonction holomorphe dans  $\Pi$ , de sorte que  $U_{\mu,h}(z)$  et  $V_{\mu,h}(z)$  sont des fonctions harmoniques dans le même domaine.

La connaissance, soit sur un segment  $[\alpha, \beta]$  de l'axe réel à droite du point  $a$ , soit dans un domaine  $D$  contenu dans  $\Pi$ , d'une fonction réelle  $U(z)$  satisfaisant sur ce segment, ou dans ce domaine, à une égalité de la forme

$$U(z) = U_{\mu,h}(z) + \text{const.},$$

détermine complètement la fonction  $V_{\mu,h}(z)$  dans tout le domaine  $\Pi$ .

En effet, si l'on a sur le segment  $[\alpha, \beta]$

$$U(z) = U_{\mu,h}(z) + K,$$

la fonction

$$\Psi_{\mu,h}(z) + K = U_{\mu,h}(z) + K + iV_{\mu,h}(z),$$

holomorphe dans  $\Pi$ , coïncide avec  $U(z)$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

Donc, si l'on connaît  $U(z)$  sur  $[\alpha, \beta]$ ,  $V_{\mu,h}(z)$  est déterminée comme étant le coefficient de  $i$  dans la fonction  $\Psi(z)$  holomorphe dans  $\Pi$  et qui coïncide avec  $U(z)$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

Si l'on a dans le domaine  $D$  contenu dans  $\Pi$  et sans point commun avec l'axe réel <sup>(1)</sup>

$$U(z) = U_{\mu,h}(z) + K,$$

la fonction  $U(z)$  est harmonique dans  $D$  et prolongeable analytiquement dans tout le domaine  $\Pi$ , son prolongement étant  $U_{\mu,h}(z) + K$ . La fonction  $\Psi_{\mu,h}(z) + K$ , holomorphe dans  $\Pi$ , coïncide avec ce prolongement pour  $z$  réel supérieur à  $a$ .

Donc, si l'on connaît  $U(z)$  dans  $D$ , la fonction  $V_{\mu,h}(z)$  est déterminée comme étant le coefficient de  $i$  dans la fonction  $\Psi(z)$  holomorphe dans  $\Pi$  et qui coïncide pour  $z$  réel supérieur à  $a$  avec le prolongement analytique de la fonction harmonique  $U(z)$ .

2.4. Nous allons voir maintenant que la connaissance de  $V_{\mu,h}(z)$  dans le domaine  $\Pi$  détermine la fonction  $\mu$  et la constante  $h$  <sup>(2)</sup>.

Cela résulte du théorème suivant :

**THÉORÈME II.** — L'expression  $-\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} V_{\mu,h}(t + iy)$  définit une fonction croissante équivalente à  $\mu$ .

<sup>(1)</sup> Si  $D$  rencontrait l'axe réel, on serait ramené au cas précédent.

<sup>(2)</sup> Cf. note <sup>(1)</sup>, p. 122.

En effet, nous allons montrer que, si l'on pose  $z = x + iy$ , lorsque,  $x$  restant fixe et égal à  $x_0$ ,  $y$  tend vers zéro par valeurs positives,  $V_{\mu,h}(z)$  tend vers  $-\pi \frac{\mu(x_0 - 0) + \mu(x_0 + 0)}{2}$ .

Si  $x_0 > a$ , ceci résulte de la continuité de  $V_{\mu,h}(z)$  pour  $z = x_0$ .

Il suffit donc de considérer le cas où  $x_0 \leq a$ .

On a, pour  $y \neq 0$ ,

$$V_{\mu,h}(z) = \int_{-\infty}^{a+0} \operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t} d\mu(t) + \left[ h - \int_{-\infty}^{a+0} \frac{d\mu(t)}{A-t} \right] y,$$

l'argument qui figure dans la première intégrale étant pris avec la détermination comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Le second terme tend vers zéro avec  $y$ .

Si l'on désigne par  $a'$  un nombre réel compris entre  $a$  et  $A$  et par  $L$  un nombre réel inférieur à  $x_0$ , le premier terme peut s'écrire

$$\int_{-\infty}^L \operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t} d\mu(t) + \int_L^{a'} \operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t} d\mu(t).$$

La première intégrale représente une fonction de  $z$  continue à l'extérieur du segment  $]-\infty, L]$  de l'axe réel et nulle pour  $z = x_0$ ; elle tendra donc ici vers zéro.

Quant à la seconde, on peut lui appliquer le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe  $\int$  :  $x$  restant égal à  $x_0$ , quel que soit  $y$  différent de zéro, la fonction  $\operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t}$  reste en module inférieure à  $\pi$ . Si  $y$  tend vers zéro par valeurs positives, elle tend vers zéro pour  $t < x_0$ , vers  $\pi$  pour  $x_0 < t \leq a'$  et vers  $\frac{\pi}{2}$  pour  $t = x_0$ . Donc, si l'on appelle  $\varphi(t)$  la fonction prenant ces valeurs, l'intégrale  $\int_L^{a'} \operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t} d\mu(t)$  tend vers  $\int_L^{a'} \varphi(t) d\mu(t)$ , laquelle est égale à

$$\pi[\mu(a') - \mu(x_0 + 0)] + \frac{\pi}{2} [\mu(x_0 + 0) - \mu(x_0 - 0)] = -\frac{\pi}{2} [\mu(x_0 + 0) + \mu(x_0 - 0)].$$

La fonction  $\mu$  étant ainsi déterminée par la connaissance de la fonction  $V_{\mu,h}(z)$ , l'égalité écrite plus haut donnant l'expression de cette dernière fonction déterminera ensuite la constante  $h$ .

2.5. Notons qu'il résulte de ce qui précède que, si l'on a dans un domaine  $D$  ou sur un segment de l'axe réel situé à droite du point  $a$

$$U_{\mu_1, h_1}(z) - U_{\mu_2, h_2}(z) = \text{const.},$$

les fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont équivalentes et  $h_1 = h_2$ .

En particulier,  $U_{\mu,h}(z)$  ne peut être constante dans un domaine  $D$  ou sur un segment de l'axe réel à droite de  $a$  sans que  $\mu(t) = 0$  et  $h = 0$ .

2.6. Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat annoncé au début du chapitre.

Revenons donc à la suite des polynomes  $P_n(z)$  ayant tous leurs zéros réels et au plus égaux à  $a$ , et supposons que, soit dans un domaine  $D$ , soit sur un segment  $[\alpha, \beta]$  de l'axe réel situé à droite du point  $a$ , l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$  converge vers une fonction limite  $U(z)$ .

Appelons  $A$  un nombre réel quelconque supérieur à  $a$ .

$a$ . Nous allons montrer d'abord que, de toute suite d'entiers croissants  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ , on peut en extraire une autre, soit  $n'_1, n'_2, \dots, n'_k, \dots$ , telle que :

1° la suite des fonctions  $\mu_{n'_k}$  soit vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ;

2° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n'_k)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n'_k)}}$  ait une limite finie  $h$ ,

et que l'on aura alors dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu,h}(z) = U(z) + \text{const.}$$

Posons

$$\rho(n) = \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n)}} \quad \text{et} \quad \psi_n(t) = \frac{1}{\rho(n)} \nu_n(t).$$

On a

$$\frac{1}{\rho(n)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n)}} = 1.$$

Or on voit immédiatement que, quel que soit  $t < A$ , cette expression est au moins égale à  $-\frac{\psi_n(t)}{A-t}$ .

Donc, pour  $t \leq a$ , on a

$$\psi_n(t) \geq t - A.$$

Par conséquent, de la suite des fonctions croissantes  $\psi_{n_k}$ , nulles pour  $t > a$ , on peut extraire une suite vaguement convergente  $\psi_{n'_k}$ . Appelons  $\psi$  la fonction limite.

Comme d'autre part  $\frac{1}{\rho(n'_k)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n'_k)}}$  tend vers 1, il résulte du théorème I que pour  $k$  infini l'expression  $\frac{1}{\rho(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(A)} \right|$  converge à l'extérieur du segment  $]-\infty, a]$  de l'axe réel vers  $U_{\psi,1}(z)$ , fonction qui n'est pas constante dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ , d'après la remarque de la fin du paragraphe précédent.

En particulier,  $z_0$  étant un point quelconque extérieur au segment  $]-\infty, a]$  de l'axe réel,  $\frac{1}{\rho(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z_0)}{P_{n'_k}(A)} \right|$  tend vers  $U_{\psi,1}(z_0)$ .

Par différence on voit que  $\frac{1}{\rho(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(z_0)} \right|$  tend vers  $U_{\psi,1}(z) - U_{\psi,1}(z_0)$ .

De même, en supposant que  $z_0$  appartient à D, ou à  $[\alpha, \beta]$ , on voit que dans D, ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(z_0)} \right|$  tend pour  $n$  infini vers  $U(z) - U(z_0)$ .

En particulier, si l'on prend pour  $z_1$  un point de D, ou de  $[\alpha, \beta]$ , tel que  $U_{\psi,1}(z_1) \neq U_{\psi,1}(z_0)$ , l'expression  $\frac{1}{\rho(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z_1)}{P_{n'_k}(z_0)} \right|$  tendra pour  $k$  infini vers  $U_{\psi,1}(z_1) - U_{\psi,1}(z_0)$ , tandis que  $\frac{1}{\varphi(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z_1)}{P_{n'_k}(z_0)} \right|$  tendra vers  $U(z_1) - U(z_0)$ , et l'on verra par division que  $\frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)}$  tend vers  $\frac{U(z_1) - U(z_0)}{U_{\psi,1}(z_1) - U_{\psi,1}(z_0)} = h$ .

L'expression  $\frac{1}{\varphi(n'_k)} \sum_{A - \alpha_p^{(n'_k)}} \frac{1}{\alpha_p^{(n'_k)}}$ , qui est égale à  $\frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)}$ , tend donc vers  $h$ .

D'autre part, comme  $\mu_{n'_k}(t) = \frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)} \cdot \psi_{n'_k}(t)$ , la suite des fonctions croissante  $\mu_{n'_k}$  est vaguement convergente vers la fonction  $\mu$  définie par  $\mu(t) = h\psi(t)$ .

Enfin l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(z_0)} \right| = \frac{\rho(n'_k)}{\varphi(n'_k)} \cdot \frac{1}{\rho(n'_k)} \log \left| \frac{P_{n'_k}(z)}{P_{n'_k}(z_0)} \right|$$

converge en dehors du segment  $[-\infty, a]$  de l'axe réel vers

$$h \cdot [U_{\psi,1}(z) - U_{\psi,1}(z_0)] = U_{\mu,h}(z) - U_{\mu,h}(z_0).$$

On en déduit que dans D, ou sur  $[\alpha, \beta]$ , l'on a

$$U_{\mu,h}(z) - U_{\mu,h}(z_0) = U(z) - U(z_0),$$

ou

$$U_{\mu,h}(z) = U(z) + [U_{\mu,h}(z_0) - U(z_0)] = U(z) + \text{const.}$$

b. Ceci étant, une première suite d'entiers  $n'_k$  extraite de la suite de tous les entiers nous fournira une fonction croissante  $\mu$  et une constante  $h$  telles que dans D, ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu,h}(z) = U(z) + \text{const.}$$

Si alors la suite des fonctions  $\mu_n$  tout entière n'était pas vaguement convergente vers la fonction  $\mu$ , il existerait un nombre réel  $t_0$  et une suite partielle  $\mu_{n_k}$  tels que  $\mu$  soit continue pour  $t = t_0$  et  $\mu_{n_k}(t_0)$  tende vers une limite, finie ou non, différente de  $\mu(t_0)$ .

De la suite des entiers  $n_k$  on pourrait extraire une suite  $n''_k$  telle que :

1° la suite des fonctions  $\mu_{n''_k}$  soit vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu'$ ;

2° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n_k)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n_k)}}$  ait une limite  $h'$ ;

et l'on devrait avoir dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu', h'}(z) = U(z) + \text{const.}$$

La fonction  $\mu'$  ne pourrait être équivalente à  $\mu$  parce que  $\mu_{n_k}(t_0)$  ne tendrait pas vers  $\mu(t_0)$ , mais il faudrait avoir dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu', h'}(z) - U_{\mu, h}(z) = \text{const.}$$

On arriverait donc à une contradiction.

Donc la suite des fonctions  $\mu_n$  est vaguement convergente vers la fonction  $\mu$ . Si l'on supposait maintenant que l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n)}}$  ne tend pas vers  $h$  pour  $n$  infini, on pourrait trouver une suite partielle  $\frac{1}{\varphi(n_k)}, \sum \frac{1}{A - \alpha_p^{(n_k)}}$  tendant vers une limite  $h''$ , finie ou non, différente de  $h$ . Le cas d'une limite infinie est d'ailleurs exclu du fait que de cette suite on doit pouvoir en extraire encore une autre ayant une limite finie.

On verrait alors que l'expression  $\frac{1}{\varphi(n_k)} \log \left| \frac{P_{n_k}''(z)}{P_{n_k}''(z_0)} \right|$  convergerait à l'extérieur du segment  $] -\infty, a]$  de l'axe réel vers  $U_{\mu, h''}(z) - U_{\mu, h''}(z_0)$ , ce qui entraînerait que l'on ait dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu, h''}(z) - U_{\mu, h}(z) = \text{const.}$$

et conduirait à une nouvelle contradiction.

## 2.7. Grâce à l'égalité

$$U_{\mu, h}(z) = U(z) + \text{const.}$$

qui a lieu dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ , la connaissance de  $U(z)$  détermine la fonction croissante  $\mu$  et la constante  $h$ , comme il a été expliqué aux paragraphes 2.3 et 2.4.

On peut d'ailleurs compléter comme il suit l'énoncé donné au début du chapitre :

$\Psi(z)$  étant la fonction holomorphe en dehors du segment  $] -\infty, a]$  de l'axe réel et qui coïncide pour  $z$  réel  $> a$  avec  $U(z)$  ou avec son prolongement analytique, et  $V(z)$  étant le coefficient de  $i$  dans  $\Psi(z)$ , on peut prendre

$$\mu(t) = - \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} V(t + iy) \quad (1).$$

---

(1) La fonction  $\mu$  de l'énoncé est en effet équivalente à celle-ci et, si elle ne lui était pas égale, on pourrait la remplacer par elle.



La constante  $h$  sera ensuite déterminée par l'égalité

$$V(z) = \int_{-\infty}^{a+0} \operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t} d\mu(t) + \left[ h - \int_{-\infty}^{a+0} \frac{d\mu(t)}{A-t} \right] y,$$

où  $\operatorname{Arg} \frac{z-t}{A-t}$  est pris avec la détermination comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

2.8. Notons encore qu'il résulte de ce qui précède que, si l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$$

converge vers une fonction limite  $U(z)$ , soit dans un domaine  $D$ , soit sur un segment  $[\alpha, \beta]$  de l'axe réel à droite du point  $a$ , il en est de même partout à l'extérieur du segment  $]-\infty, a]$  de l'axe réel et la convergence est uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive de ce dernier segment.

D'abord la suite des fonctions  $\mu_n$  converge vaguement vers une fonction limite  $\mu$  et,  $A$  étant un nombre réel quelconque supérieur à  $a$ ,  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum \frac{1}{A - \alpha_p}$  tend vers une limite  $h$ .

Alors, d'après le théorème I, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(A)} \right|$$

converge en dehors du segment  $]-\infty, a]$  de l'axe réel vers  $U_{\mu,h}(z)$ , la convergence étant uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive de ce segment.

En particulier,  $z_0$  étant un point quelconque de  $D$ , ou de  $[\alpha, \beta]$ ,

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log \left| \frac{P_n(z_0)}{P_n(A)} \right|$$

tend vers  $U_{\mu,h}(z_0)$ .

D'autre part,  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z_0)|$  tend vers  $U(z_0)$ .

Par différence on voit que  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(A)|$  tend vers  $U(z_0) - U_{\mu,h}(z_0)$ .

Le résultat annoncé découle ensuite de l'égalité

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)| = \frac{1}{\varphi(n)} \log \left| \frac{P_n(z)}{P_n(A)} \right| + \frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(A)|.$$

Notons que la limite de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$  peut être définie en dehors de  $D$ , ou de  $[\alpha, \beta]$ , comme prolongement analytique de  $U(z)$  ou comme partie réelle de  $\Psi(z)$ , fonction holomorphe dans  $\Pi$  qui coïncide avec  $U(z)$  sur  $[\alpha, \beta]$ .

### III. — Application aux polynômes définis par certaines relations de récurrence.

3.1. A titre d'exemple de ce qui précède, nous étudierons des suites de polynômes définis par certaines relations de récurrence.

Auparavant nous allons établir le lemme suivant :

*Soit une suite de nombres réels  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  liés par la relation de récurrence à coefficients réels*

$$u_{n+1} - p_n u_n + q_n u_{n-1} = 0,$$

*dans laquelle on suppose que pour  $n$  infini*

$$\begin{aligned} p_n &\rightarrow 2, & n^\rho (p_n - 2) &\rightarrow 0, \\ q_n &\rightarrow 1, & n^{2\rho} (p_n - q_n - 1) &\rightarrow \lambda^2 \neq 0 \quad (\lambda > 0), \end{aligned}$$

*avec  $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$ .*

*Si l'on pose*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\lambda_n}{n^\rho},$$

*pour  $n$  infini  $\lambda_n$  tend vers  $\lambda$  ou vers  $-\lambda$ .*

On a en effet

$$\lambda_n = (p_n - 1) n^\rho - \frac{n^\rho (n - 1)^\rho q_n}{\lambda_{n-1} + (n - 1)^\rho}.$$

Pour se rendre compte comment varie  $\lambda_r$  lorsque l'on passe de  $r = n - 1$  à  $r = n$ , il est commode de considérer la courbe  $(C_n)$  ayant pour équation en axes rectangulaires

$$y = (p_n - 1) n^\rho - \frac{n^\rho (n - 1)^\rho q_n}{x + (n - 1)^\rho}.$$

La parallèle à  $Ox$  menée par le point de  $(C_n)$  d'abscisse  $\lambda_{n-1}$  coupe la première bissectrice des axes au point d'abscisse  $\lambda_n$ .

Les points de rencontre de  $(C_n)$  avec cette bissectrice ont leurs abscisses données par l'équation

$$x^2 + [(n - 1)^\rho - n^\rho (p_n - 1)]x - n^\rho (n - 1)^\rho [p_n - q_n - 1] = 0,$$

qui, pour  $n$  infini, devient à la limite

$$x^2 - \lambda^2 = 0.$$

Dès que  $n$  dépasse une certaine valeur  $n_0$ , cette équation a deux racines réelles de signe contraire  $x'_n$  et  $x''_n$ , et pour  $n$  infini ces deux racines tendent respectivement vers  $-\lambda$  et  $+\lambda$ .

Notons que l'on a

$$(1) \quad \lambda_n - \lambda_{n-1} = - \frac{(\lambda_{n-1} - x'_n)(\lambda_{n-1} - x''_n)}{\lambda_{n-1} + (n-1)^p}.$$

A tout nombre positif  $\eta$  inférieur à  $2\lambda$  correspond un entier  $N(\eta)$  supérieur à  $n_0$  et tel que pour  $n \geq N(\eta)$  on ait

$$-(n-1)^p < -\lambda - \eta < x'_n < -\lambda + \eta < x''_n.$$

$\eta$  étant fixé, supposons d'abord que pour un certain  $n_1$  supérieur ou égal à  $N(\eta) - 1$  l'on ait

$$\lambda_{n_1} \geq -\lambda + \eta.$$

Le graphique montre de proche en proche que pour  $n > n_1$  on aura toujours

$$\lambda_n \geq -\lambda + \eta.$$

Mais il pourra arriver ou bien qu'à partir d'une certaine valeur de  $n$  l'on ait toujours

$$-\lambda + \eta \leq \lambda_n \leq x''_n,$$

ou bien qu'à partir d'une certaine valeur de  $n$  l'on ait toujours

$$\lambda_n \geq x''_n,$$

ou bien que chacune des inégalités

$$-\lambda + \eta \leq \lambda_n < x''_n \quad \text{et} \quad \lambda_n > x''_n$$

ait lieu une infinité de fois.

Dans le premier cas  $\lambda_n$  finira par croître constamment avec  $n$  et tendra vers une limite  $\mu$  au moins égale à  $-\lambda + \eta$  et au plus égale à  $\lambda$ ; dans le second cas  $\lambda_n$  finira par décroître constamment et tendra vers une limite  $\mu$  au moins égale à  $\lambda$ .

Dans les deux cas l'égalité (1) montre que le produit  $n^p(\lambda_n - \lambda_{n-1})$  tendra vers  $\lambda^2 - \mu^2$ . La convergence de la série  $\Sigma(\lambda_n - \lambda_{n-1})$  nécessitera alors que  $\lambda^2 - \mu^2 = 0$ , d'où  $\mu = \lambda$ .

Si l'on a une infinité de fois chacune des inégalités

$$-\lambda + \eta \leq \lambda_n < x''_n \quad \text{et} \quad \lambda_n > x''_n,$$

lorsque  $n$  croîtra,  $\lambda_n$  présentera une infinité de maxima et de minima. Pour un maximum on aura

$$x''_{n+1} \leq \lambda_n \leq x''_n$$

et pour un minimum

$$x''_n \leq \lambda_n \leq x''_{n+1},$$

ce qui montre que  $\lambda_n$  tendra encore vers  $\lambda$ .

Si l'on suppose maintenant que,  $n_1$  étant  $\geq N(\eta) - 1$ , l'on ait  $\lambda_{n_1} < -n_1^p$ , l'on aura

$$\lambda_{n_1+1} > x''_{n_1+1} > -\lambda + \eta.$$

Si  $\lambda_{n_1} = -n_1^\rho$ , l'on aura

$$\lambda_{n_1+1} = \infty \quad \text{et} \quad \lambda_{n_1+2} > -\lambda + \eta.$$

Dans les deux cas il résulte de ce qui précède que pour  $n$  infini  $\lambda_n$  tendra vers  $\lambda$ .

Supposons enfin que, avec  $n_1 \geq N(\eta) - 1$ , on ait

$$-n_1^\rho < \lambda_{n_1} \leq -\lambda - \eta.$$

Le graphique montre alors que pour  $n > n_1$  ou bien il se trouvera une valeur de  $n$  pour laquelle  $\lambda_n \leq -n^\rho$ , ce qui nous ramènera au cas précédent, ou bien  $\lambda_n$  ira constamment en décroissant tout en restant supérieur à  $-n^\rho$ . Mais cette dernière circonstance est impossible.

En effet, si elle se produisait, ou bien  $\lambda_n$  tendrait en décroissant vers une limite finie  $\mu$  au plus égale à  $-\lambda - \eta$ , ou bien  $\lambda_n$  tendrait vers  $-\infty$ . La première hypothèse entraînerait, comme plus haut, que  $n^\rho(\lambda_n - \lambda_{n-1})$  tende vers  $\lambda^2 - \mu^2$ , qui, ici, ne pourrait être nul; et ceci serait incompatible avec la convergence de la série  $\Sigma(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ . Dans la seconde hypothèse l'inégalité

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n > \frac{(\lambda_{n-1} + \lambda + \eta)^2}{(n-1)^\rho},$$

qui résulte de l'égalité (1), entraînerait que le produit  $n^\rho(\lambda_{n-1} - \lambda_n)$  tende vers  $+\infty$  et par suite que  $\frac{\lambda_n}{n^{1-\rho}}$  tende vers  $-\infty$ , ce qui contredirait l'inégalité  $\lambda_n > -n^\rho$  puisque  $1 - \rho \geq \rho$ .

Finalement on voit que, dès l'instant qu'il existe une valeur  $n_1$  de  $n$  au moins égale à  $N(\eta) - 1$  pour laquelle on n'a pas  $-\lambda - \eta < \lambda_{n_1} < -\lambda + \eta$ , pour  $n$  infini  $\lambda_n$  tend vers  $\lambda$ .

Par suite ou bien, quelque petit que soit  $\eta$ , on aura toujours pour  $n \geq N(\eta) - 1$

$$-\lambda - \eta < \lambda_n < -\lambda + \eta,$$

ou bien pour une certaine valeur de  $\eta$  il existera une valeur  $n_1$  de  $n$  supérieure ou égale à  $N(\eta) - 1$  et pour laquelle on n'aura pas ces inégalités, et alors pour  $n$  infini  $\lambda_n$  tendra vers  $\lambda$ . Autrement dit, ou bien pour  $n$  infini  $\lambda_n$  tend vers  $-\lambda$ , ou bien il tend vers  $+\lambda$ .

3.2. Ceci étant, considérons une suite de polynômes à coefficients réels définie de la façon suivante :

On prendra  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = \alpha x + \beta$ . Puis les polynômes suivants seront définis de proche en proche par la relation de récurrence

$$P_{n+1}(x) - (a_n x + b_n) P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) = 0, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

dans laquelle nous supposons que  $a_n > 0$ ,  $c_n > 0$ , et que pour  $n$  infini

$$n^2 a_n \rightarrow u \neq 0, \quad n^2 (b_n - 2) \rightarrow 0, \quad c_n \rightarrow 1$$

et

$$n^2 \rho (b_n - c_n - 1) \rightarrow \nu, \quad \text{avec } 0 < \rho \leq \frac{1}{2}.$$

On supposera que l'on a pris  $\alpha > 0$ .

Un raisonnement classique montre que les polynomes de cette suite ont tous leurs zéros réels et que les zéros de deux polynomes consécutifs sont entrelacés :

Si l'on suppose établi que  $P_n(x)$  a tous ses zéros réels, soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , et entrelacés avec ceux de  $P_{n-1}(x)$ , on voit que les signes de  $P_{n+1}(x)$  pour les valeurs

$$-\infty, x_1, x_2, \dots, x_n, +\infty$$

sont alternés, de sorte que  $P_{n+1}(x)$  a tous ses zéros réels et entrelacés avec  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Or,  $P_2(x)$  est positif pour  $\pm \infty$  et négatif pour le zéro  $-\frac{\beta}{\alpha}$  de  $P_1(x)$ ; il a donc un zéro réel plus petit et un plus grand que  $-\frac{\beta}{\alpha}$ .

Il résulte de cette disposition relative des zéros des polynomes de la suite que, lorsque l'on passe de  $P_n(x)$  à  $P_{n+1}(x)$ , le nombre de zéros supérieurs à un nombre donné  $x_0$  ne peut que ne pas changer ou augmenter d'une unité. On voit que, si  $P_n(x_0)$  et  $P_{n+1}(x_0)$  sont différents de zéro et de même signe,  $P_n(x)$  et  $P_{n+1}(x)$  ont le même nombre de zéros supérieurs à  $x_0$ .

Si l'on a

$$a_n x_0 + b_n \geq 1 + c_n,$$

c'est-à-dire

$$x_0 \geq \frac{1 + c_n - b_n}{a_n},$$

la relation entre  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  et  $P_{n-1}$  montre que les inégalités  $P_n(x_0) \geq P_{n-1}(x_0) > 0$  entraînent  $P_{n+1}(x_0) \geq P_n(x_0)$ .

Or, pour  $n$  infini,  $\frac{1 + c_n - b_n}{a_n}$  a une limite finie  $-\frac{\nu}{u}$ ; donc cette expression a une borne supérieure finie  $M$ , d'ailleurs  $\geq -\frac{\nu}{u}$ .

En prenant  $x_0$  au moins égal au plus grand des deux nombres  $M$  et  $\frac{1-\beta}{\alpha}$ , on aura, quel que soit  $n$ ,

$$a_n x_0 + b_n \geq 1 + c_n,$$

et de plus

$$P_1(x_0) \geq P_0(x_0) = 1;$$

on en déduira de proche en proche que

$$P_n(x_0) \geq P_{n-1}(x_0) \geq \dots \geq P_0(x_0) = 1.$$

Tous les polynomes de la suite seront donc positifs pour  $x = x_0$ , ce qui prouve qu'ils auront tous le même nombre de zéros supérieurs à  $x_0$ . Or  $P_0(x)$  n'en a aucun.

Nous avons donc une suite de polynomes ayant tous leurs zéros réels et inférieurs à un même nombre fixe : le plus grand des deux nombres  $M$  et  $\frac{1-\beta}{\alpha}$ , soit  $X$ .

D'autre part, lorsque  $x$  est réel, la relation de récurrence qui lie  $P_{n+1}(x)$ ,  $P_n(x)$  et  $P_{n-1}(x)$  est de la forme étudiée au paragraphe précédent, en posant

$$P_n(x) = u_n, \quad a_n x + b_n = p_n, \quad c_n = q_n.$$

Ici, pour  $n$  infini

$$\begin{aligned} p_n &\rightarrow 2, & n^2(p_n - 2) &\rightarrow 0, \\ q_n &\rightarrow 1, & n^2(q_n - 1) &\rightarrow ux + v. \end{aligned}$$

On pourra appliquer notre lemme si  $ux + v > 0$ , c'est-à-dire  $x > \frac{-v}{u}$ .

Dans ce cas, si l'on pose

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = 1 + \frac{\lambda_n(x)}{n^2},$$

$\lambda_n(x)$  tendra pour  $n$  infini vers  $\varepsilon\sqrt{ux + v}$ , avec  $\varepsilon = \pm 1$  (et pouvant *a priori* dépendre de  $x$ ).

Une première conséquence est que, si  $x_0 > \frac{-v}{u}$ ,  $P_{n+1}(x_0)$  et  $P_n(x_0)$  sont de même signe pour  $n$  assez grand, de sorte que le nombre de zéros de  $P_n(x)$  supérieurs à  $x_0$  ne change plus à partir d'une certaine valeur de  $n$  et reste donc borné.

Une autre conséquence est la suivante : on a, pour  $n$  infini,

$$\log \left| \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} \right| \sim \frac{\varepsilon\sqrt{ux + v}}{n^2}.$$

Or, si  $x > X$ , on a

$$\log |P_n(x)| = \sum_0^{n-1} \log \left| \frac{P_{p+1}(x)}{P_p(x)} \right|.$$

On en déduit que pour  $x > X$

$$\log |P_n(x)| \sim \frac{n^{1-\rho}}{1-\rho} \varepsilon\sqrt{ux + v},$$

de sorte que

$$\frac{1}{n^{1-\rho}} \log |P_n(x)| \rightarrow \frac{\varepsilon}{1-\rho} \sqrt{ux + v}.$$

Il résulte de là que, si  $\nu_n$  est la fonction croissante associée à  $P_n$ , la suite des fonctions croissantes  $\frac{1}{n^{1-\rho}} \nu_n$  est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ .

Pour déterminer cette fonction  $\mu$ , on doit considérer la fonction  $\Psi(z)$  holomorphe en dehors du segment  $]-\infty, X]$  de l'axe réel et qui coïncide pour  $z = x$  réel  $> X$  avec la limite de  $\frac{1}{n^{1-\rho}} \log |P_n(x)|$ .

Cette fonction limite devant être continue, le signe de  $\varepsilon$  est indépendant de  $x$ .

En posant

$$z = -\frac{\nu}{u} + r e^{i\theta}, \quad \text{avec } -\pi < \theta < +\pi,$$

on a évidemment

$$\Psi(z) = \frac{\varepsilon}{1-\rho} \sqrt{ur} e^{i\frac{\theta}{2}},$$

d'où

$$V(z) = \frac{\varepsilon}{1-\rho} \sqrt{ur} \sin \frac{\theta}{2}.$$

On sait que l'on peut prendre

$$\mu(t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} V(t + iy).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mu(t) &= 0 && \text{pour } t > -\frac{\nu}{u}, \\ \mu\left(-\frac{\nu}{u}\right) &= 0, \\ \mu(t) &= -\frac{\varepsilon}{\pi(1-\rho)} \sqrt{-ut - \nu} && \text{pour } t < -\frac{\nu}{u}, \end{aligned}$$

et l'on voit que  $\varepsilon = +1$ , puisque  $\mu$  doit être croissante.

Cette fonction étant continue,  $\frac{1}{n^{1-\rho}} \nu_n(t)$  tend vers  $\mu(t)$  pour toutes les valeurs de  $t$ .

Ceci se traduit pour  $t < -\frac{\nu}{u}$ , par exemple, par le fait que le nombre de zéros de  $P_n(x)$  au moins égaux à  $t$  est équivalent pour  $n$  infini à

$$\frac{n^{1-\rho}}{\pi(1-\rho)} \sqrt{-ut - \nu}.$$

Notons, d'autre part, que  $\frac{1}{n^{1-\rho}} \log |P_n(z)|$  converge à l'extérieur du segment  $]-\infty, X]$  vers  $\mathcal{R}[\Psi(z)]$  <sup>(1)</sup>.

3.3. Prenons par exemple la suite des polynomes définis par

$$(n+a)P_{n+1}(x) - (2n+b+cx)P_n(x) + (n+d)P_{n-1}(x) = 0,$$

---

(1) Il en résulte que les séries de la forme  $\sum A_n P_n(z)$  ont pour domaines de convergence les domaines intérieurs à des paraboles d'axe  $Ox$  et de foyer le point  $-\frac{\nu}{u}$ .

avec

$$a > -1, \quad d > -1, \quad c > 0,$$

et

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \alpha x + \beta, \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

En divisant par  $n + a$ , cette relation de récurrence se met sous la forme indiquée au paragraphe précédent.

Les conditions indiquées sont remplies avec  $\rho = \frac{1}{2}$  et l'on a

$$u = c, \quad v = b - d - a, \quad M = \frac{d + a - b}{c}.$$

Les polynomes  $P_n(x)$  ont donc tous leurs zéros réels et inférieurs au plus grand des deux nombres  $\frac{d + a - b}{c}$  et  $\frac{1 - \beta}{\alpha}$ .

Le nombre de ces zéros supérieurs à un nombre donné  $x_0$  supérieur à  $\frac{d + a - b}{c}$  reste borné quand  $n$  croît.

Le nombre des zéros au moins égaux à un nombre donné  $x_0$  inférieur à  $\frac{d + a - b}{c}$  est équivalent pour  $n$  infini à

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{n(a + d - b - cx_0)}.$$

Si l'on prenait les polynomes définis par

$$(n + a) P_{n+1}(x) - (2n + b - cx) P_n(x) + (n + d) P_{n-1}(x) = 0,$$

avec

$$a > -1, \quad d > -1, \quad c > 0,$$

et

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = -\alpha x + \beta, \quad \text{avec } \alpha > 0,$$

les polynomes  $P_n(-x)$ , de zéros opposés à ceux de  $P_n(x)$ , seraient définis de la même façon que ceux que nous venons d'étudier. On en déduit que  $P_n(x)$  aurait tous ses zéros réels et bornés inférieurement par un nombre fixe, que le nombre de zéros inférieurs à un nombre fixe  $x_0$  inférieur à  $\frac{b - a - d}{c}$

resterait borné quand  $n$  croîtrait indéfiniment, et que pour  $x_0 > \frac{b - a - d}{c}$  le nombre de zéros au plus égaux à  $x_0$  serait équivalent à  $\frac{2}{\pi} \sqrt{n(a + d - b + cx_0)}$ ,

Considérons en particulier les polynomes de Laguerre  $\Pi_n(x)$  définis par

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) = x^\alpha e^{-x} \Pi_n(x).$$

On sait qu'ils ont tous leurs zéros réels et positifs et satisfont à la relation de récurrence

$$\Pi_{n+1}(x) - (2n + 1 + \alpha - x) \Pi_n(x) + n(n + \alpha) \Pi_{n-1}(x) = 0.$$



En posant

$$\Pi_n(x) = n! P_n(x),$$

cette relation devient

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1+\alpha-x)P_n(x) + (n+\alpha)P_{n-1}(x) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = 1 + \alpha - x.$$

Il résulte alors de ce qui précède, si  $\alpha > -1$ , que pour  $x > 0$  le nombre de zéros du  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Laguerre au plus égaux à  $x$  est équivalent pour  $n$  infini à  $\frac{2}{\pi} \sqrt{nx}$  <sup>(1)</sup>.

Ceci résulte d'ailleurs aussi des formules asymptotiques connues pour les polynômes de Laguerre.

#### IV. — Suites de polynômes à zéros réels, dans le cas général.

4.1. La méthode que nous avons employée au Chapitre II permet aussi d'étudier les suites de polynômes à zéros réels sans supposer ceux-ci bornés supérieurement ou inférieurement.

Il est alors plus commode d'utiliser des fonctions additives d'ensemble au lieu de fonctions croissantes. Nous appelons donc  $\nu_n(e)$  la fonction d'ensemble définie sur l'axe réel comme égale au nombre de zéros de  $P_n(z)$  appartenant à l'ensemble  $e$ , chacun étant compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Nous désignons ensuite par  $\mu_n$  la fonction d'ensemble définie par

$$\mu_n(e) = \frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(e),$$

$\varphi(n)$  ayant la même signification qu'au Chapitre II.

Nous appelons encore  $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_p^{(n)}, \dots$  les zéros de  $P_n(z)$ , rangés d'ailleurs dans l'ordre que l'on voudra, et nous désignons par  $E$  l'ensemble des points limites de points  $\alpha_p^{(n)}$ .

On arrive ainsi au résultat général suivant, que nous donnons sans démonstration :

*Soient  $h(t)$  et  $k(t)$  deux fonctions continues pour toutes les valeurs de  $t$  et satisfaisant pour  $t$  infini à*

$$h(t) = \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad k(t) \sim \frac{1}{t^2}.$$

---

(1) L'hypothèse  $\alpha > -1$  est d'ailleurs inutile car dans la théorie qui précède le fait que  $\alpha > -1$ , qui entraînait  $c_n > 0$ , n'a servi qu'à établir la réalité des zéros.

Alors, pour qu'il existe des coefficients  $c_n$  tels que la suite des fonctions  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$  soit convergente en dehors de l'ensemble  $E$ , il faut et il suffit que :

1° la suite des fonctions d'ensemble  $\mu_n$  soit convergente vers une fonction limite  $\mu$ ;

2° Pour  $n$  infini, l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum h[\alpha_p^{(n)}]$  ait une limite finie  $H$ ;

3° Pour  $n$  infini, l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum k[\alpha_p^{(n)}]$  ait une limite finie  $K$ .

Lorsque la convergence a lieu, elle est uniforme dans tout domaine borné situé à distance positive de  $E$ .

La fonction limite  $U(z)$  est harmonique dans l'ensemble complémentaire de  $E$  et l'on a

$$U(z_1) - U(z_0) = \int_E \left\{ \log \left| \frac{z_1 - t}{z_0 - t} \right| + h(t) \cdot \mathcal{R}[z_1 - z_0] \right\} d\mu(e) \\ - H \mathcal{R}[z_1 - z_0] - \frac{1}{2} \left[ K - \int_E k(t) d\mu(e) \right] \cdot \mathcal{R}[z_1^2 - z_0^2].$$

La convergence de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |c_n P_n(z)|$  dans un domaine, si petit soit-il, sans point commun avec l'axe réel, ou sur un segment de l'axe réel dont on sait qu'il est sans point commun avec  $E$ , entraîne la convergence partout en dehors de  $E$ , et la connaissance de la limite  $U(z)$  soit dans ce domaine, soit sur ce segment, détermine la fonction  $\mu$  sur tout l'axe réel, ainsi que les valeurs de  $H$  et  $K$ .

Lorsque l'on sait que les zéros de tous les polynômes  $P_n(z)$  sont bornés supérieurement, ou inférieurement, par un nombre fixe  $a$ , on peut supprimer la condition relative à  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum k[\alpha_p^{(n)}]$  qui est conséquence des deux autres, et enlever dans la formule écrite plus haut le terme en  $\mathcal{R}[z_1^2 - z_0^2]$  qui est automatiquement nul.

En particulier, si l'on a  $\alpha_p^{(n)} \leq a$ , en prenant  $h(t)$  égal à  $\frac{1}{t-A}$ , avec  $A > a$ , pour  $t \leq a$ , on retrouve les résultats du Chapitre II.

## V. — Suites de produits canoniques à zéros réels et négatifs.

5.1. Notre méthode s'applique encore à l'étude des suites de fonctions entières de même genre fini ayant tous leurs zéros réels.

Nous nous bornerons ici au cas d'une suite de produits canoniques  $\Pi_1(z)$ ,  $\Pi_2(z)$ , ...,  $\Pi_n(z)$ , ... de même genre fini  $p$  et à zéros réels et négatifs.

Nous désignerons les zéros de  $\Pi_n(z)$  par  $-\alpha_1^{(n)}, -\alpha_2^{(n)}, \dots, -\alpha_r^{(n)}, \dots$ , ou plus simplement par  $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_r, \dots$ , de sorte que l'on aura

$$\Pi_n(z) = \Pi \left( 1 + \frac{z}{\alpha_r} \right) e^{-\frac{z}{\alpha_r} + \frac{z^2}{2\alpha_r^2} - \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p\alpha_r^p} \dots}$$

Nous appellerons  $\nu_n(t)$  le nombre de zéros de  $\Pi_n(z)$  au moins égaux à  $-t$ .

De plus, à chaque  $\Pi_n(z)$  nous associerons deux fonctions  $S_n(t)$  et  $\Sigma_n(t)$  définies pour  $t > 0$  par

$$S_n(t) = \sum_{\alpha_r \leq t} \frac{1}{\alpha_r^p} \quad \text{si } p > 0 \quad \text{et} \quad = \sum_{\alpha_r \leq t} \log \frac{1}{\alpha_r} \quad \text{si } p = 0,$$

et

$$\Sigma_n(t) = \sum_{\alpha_r > t} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}}.$$

$\varphi(n)$  étant toujours une fonction positive de l'entier  $n$ , nous nous proposons d'établir les résultats suivants :

Si : 1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  définies par  $\mu_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(t)$  est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ,

2°  $A$  étant un nombre positif tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ ,

a. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$  a une limite finie  $h$  pour  $n$  infini,

b. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$  a une limite finie  $k$ ,

alors, dans le domaine  $\Pi$  constitué par le plan privé de la partie négative  $Ox'$  de l'axe réel, la détermination réelle pour  $z$  réel positif de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  tend pour  $n$  infini vers une fonction limite  $\Psi(z)$ . La convergence est uniforme dans tout domaine borné contenu dans  $\Pi$  et situé à distance positive de  $Ox'$ .

Réciproquement, si l'on sait que la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(z)|$ , partie réelle de la précédente, converge vers une fonction limite  $U(z)$  soit dans un domaine contenu dans  $\Pi$ , soit sur un segment de l'axe réel situé à droite de l'origine, on peut affirmer que :

1° la suite des fonctions  $\mu_n$  définies comme plus haut est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ,

2° quel que soit le nombre réel positif  $A$  tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ ,

a. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$  a une limite finie  $h$  pour  $n$  infini,

b. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$  a une limite finie  $k$ .

La connaissance de  $U(z)$  détermine la fonction  $\mu$  et, une fois choisi  $A$ , les valeurs de  $h$  et  $k$ .

5.2. Nous suivrons une marche analogue à celle du Chapitre II.

Mais faisons d'abord une remarque sur l'énoncé que nous venons de donner :

Il est évident que la fonction  $\mu$  qui y figure est nécessairement nulle pour  $t < 0$  comme les fonctions  $\mu_n$  qui convergent vaguement vers elle. Mais, de plus, on voit aisément que l'on a  $\mu(+0) = 0$  [et par suite  $\mu(0) = 0$ ].

En effet, en supposant par exemple  $p > 0$ , on a, quel que soit le nombre réel positif  $a$  au plus égal à  $A$ ,

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A) \geq \frac{\mu_n(a)}{a^p}.$$

Si  $a$  est choisi de manière que  $\mu$  soit continue pour  $t = a$ , on en déduit à la limite

$$h \geq \frac{\mu(a)}{a^p}.$$

On a donc pour toutes les valeurs positives assez petites de  $t$  pour lesquelles  $\mu$  est continue

$$\mu(t) \leq ht^p.$$

De même, si  $p = 0$ , on a pour toutes les valeurs positives assez petites de  $t$  pour lesquelles  $\mu$  est continue

$$\mu(t) \leq \frac{h}{\log \frac{1}{t}}.$$

5.3. THÉORÈME I. — Le genre  $p$  étant supposé au moins égal à 1, si :

1° La suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  définies par  $\mu_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(t)$  est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ,

2°  $A$  étant un nombre positif tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ ,

a. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r \leq A} \frac{1}{\alpha_r^p} a$  a une limite finie  $h$  pour  $n$  infini,

b. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r > A} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}} a$  a une limite finie  $k$ ,

alors dans le domaine II la détermination réelle pour  $z$  réel positif de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  tend pour  $n$  infini vers

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & \int_0^{+\infty} \left\{ \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{pt^p} \right\} d\mu(t) \\ & + \frac{(-1)^p}{p} \left[ h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p} \right] z^p + \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right] z^{p+1}, \end{aligned}$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

La convergence est uniforme dans tout domaine borné contenu dans  $\Pi$  et situé à distance positive de  $Ox'$ .

a. Notons d'abord que l'on a

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r \leq \Lambda} \frac{1}{\alpha_r^\rho} = \int_0^\Lambda \frac{d\mu_n(t)}{t^\rho}, \quad \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r > \Lambda} \frac{1}{\alpha_r^{\rho+1}} = \int_\Lambda^{+\infty} \frac{d\mu_n(t)}{t^{\rho+1}}.$$

De ce que ces expressions tendent pour  $n$  infini vers des limites finies  $h$  et  $k$  et que la fonction  $\mu_n$  converge vaguement vers  $\mu$ , il résulte par les lemmes des paragraphes 1.4 et 1.4.2 que les intégrales

$$\int_0^\Lambda \frac{d\mu(t)}{t^\rho} \quad \text{et} \quad \int_\Lambda^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{\rho+1}}$$

sont convergentes et que l'on a

$$\int_0^\Lambda \frac{d\mu(t)}{t^\rho} \leq h \quad \text{et} \quad \int_\Lambda^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{\rho+1}} \leq k.$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^\rho \frac{z^\rho}{\rho t^\rho} \right\} d\mu(t)$$

est aussi convergente, car lorsque  $t$  tend vers 0 la fonction entre crochets est un infiniment grand de l'ordre de  $\frac{1}{t^\rho}$ , et pour  $t$  infini elle est infiniment petite de l'ordre de  $\frac{1}{t^{\rho+1}}$ .

b. La détermination considérée de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  est égale à

$$\frac{1}{\varphi(n)} \sum \left\{ \log \left( 1 + \frac{z}{\alpha_r} \right) - \frac{z}{\alpha_r} + \dots + (-1)^\rho \frac{z^\rho}{\rho \alpha_r^\rho} \right\},$$

chaque logarithme étant pris avec la détermination réelle pour  $z$  réel  $> 0$ .

Ceci peut s'écrire

$$\int_0^\Lambda g_1(t) d\mu_n(t) + \int_\Lambda^{+\infty} g_2(t) d\mu_n(t) + \frac{(-1)^\rho}{p} z^\rho \cdot \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r \leq \Lambda} \frac{1}{\alpha_r^\rho} + \frac{(-1)^\rho}{p+1} z^{\rho+1} \cdot \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r > \Lambda} \frac{1}{\alpha_r^{\rho+1}},$$

avec

$$g_1(t) = \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^{\rho-1} \frac{z^{\rho-1}}{(p-1)t^{\rho-1}},$$

et

$$g_2(t) = \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^{\rho+1} \frac{z^{\rho+1}}{(p+1)t^{\rho+1}},$$

où les logarithmes sont pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Considérons un domaine borné  $\Delta$  situé à distance positive de  $Ox'$  et appelons  $R$  la borne supérieure de  $|z|$  dans  $\Delta$ .

D'abord, les deux derniers termes de la formule ci-dessus convergent uniformément dans  $\Delta$  vers

$$\frac{(-1)^p}{p} h z^p \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^p}{p+1} k z^{p+1}.$$

D'autre part, dans tout intervalle tel que  $[\varepsilon, A]$ , avec  $0 < \varepsilon < A$ ,  $g_1(t)$  est uniformément continu par rapport à  $t$  quand  $z$  parcourt  $\Delta$ . De plus, on a quand  $z$  est dans  $\Delta$

$$|g_1(t)| \leq \log \left( 1 + \frac{R}{t} \right) + \pi + \frac{R}{t} + \frac{R^2}{2t^2} + \dots + \frac{R^{p-1}}{(p-1)t^{p-1}},$$

de sorte que le produit  $t^p g_1(t)$  tend uniformément vers 0 quand  $t$  tend vers 0. Il résulte donc du lemme du paragraphe 1.4.2 que pour  $n$  infini l'intégrale

$$\int_0^A g_1(t) d\mu_n(t)$$

converge uniformément dans  $\Delta$  vers

$$\int_0^A g_1(t) d\mu(t).$$

De même, dans tout intervalle fini tel que  $[A, L]$ , la fonction  $g_2(t)$  est uniformément continue par rapport à  $t$  lorsque  $z$  parcourt  $\Delta$ . De plus, quand  $z$  est dans  $\Delta$ , on a pour  $t \geq 2R$ , par exemple, une inégalité de la forme

$$|g_2(t)| \leq M \frac{R^{p+2}}{t^{p+2}},$$

de sorte que le produit  $t^{p+1} g_2(t)$  tend uniformément vers 0 pour  $t$  infini. Il résulte alors du lemme des paragraphes 1.4 et 1.4.1 que pour  $n$  infini l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu_n(t)$$

converge uniformément dans  $\Delta$  vers

$$\int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu(t).$$

En définitive, l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$ , prise avec la détermination indiquée, converge uniformément dans  $\Delta$  vers

$$\int_0^A g_1(t) d\mu(t) + \int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu(t) + \frac{(-1)^p}{p} h z^p + \frac{(-1)^p}{p+1} k z^{p+1},$$

ce qui s'écrit ensuite sous la forme donnée dans l'énoncé.

Notons que dans l'expression de  $\Psi(z)$  les coefficients de  $z^p$  et  $z^{p+1}$  sont du signe de  $(-1)^p$ .

5.3.1. THÉORÈME I bis. Le genre  $p$  étant nul, si :

1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  définies par  $\mu_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} \nu_n(t)$  est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ,

2°  $A$  étant un nombre positif tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ ,

a. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r \leq A} \log \frac{1}{\alpha_r} a$  pour  $n$  infini une limite finie  $h$ ,

b. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r > A} \frac{1}{\alpha_r} a$  une limite finie  $k$ ,

alors dans le domaine  $\Pi$  la détermination réelle pour  $z$  réel positif de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  tend pour  $n$  infini vers

$$\Psi(z) = \int_0^{+\infty} \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) d\mu(t) + h - \int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t) + \left[ k - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t} \right] z,$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ . La convergence est uniforme dans tout domaine borné contenu dans  $\Pi$  et située à distance positive de  $Ox'$ .

a. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r \leq A} \log \frac{1}{\alpha_r} &= \int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu_n(t), \\ \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{\alpha_r > A} \frac{1}{\alpha_r} &= \int_A^{+\infty} \frac{d\mu_n(t)}{t}, \end{aligned}$$

et, de ce que ces expressions tendent pour  $n$  infini vers des limites finies  $h$  et  $k$  et que la suite des fonctions  $\mu_n$  converge vaguement vers la fonction  $\mu$ , il résulte que les intégrales

$$\int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t) \quad \text{et} \quad \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t}$$

sont convergentes et que l'on a

$$\int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t) \leq h \quad \text{et} \quad \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t} \leq k.$$

L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) d\mu(t)$$

est aussi convergente, car quand  $t$  tend vers zéro  $\log\left(1 + \frac{z}{t}\right)$  tend vers  $+\infty$  comme  $\log \frac{1}{t}$ , et pour  $t$  infini  $\log\left(1 + \frac{z}{t}\right)$  est infiniment petit de l'ordre de  $\frac{1}{t}$ .

b. La détermination considérée de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  peut s'écrire

$$\int_0^A g_1(t) d\mu_n(t) + \int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu_n(t) + \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{x_r \leq A} \log \frac{1}{x_r} + z \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{x_r > A} \frac{1}{x_r},$$

avec

$$g_1(t) = \log(t + z) \quad \text{et} \quad g_2(t) = \log\left(1 + \frac{z}{t}\right) - \frac{z}{t},$$

les logarithmes étant pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Si l'on suppose que  $z$  varie dans un domaine borné  $\Delta$  contenu dans  $\Pi$  et situé à distance positive de  $Ox'$ , on voit d'abord que pour  $n$  infini les deux derniers termes convergent uniformément vers  $h + kz$ , puis le lemme rappelé au paragraphe 1.3 montre que l'intégrale

$$\int_0^A g_1(t) d\mu_n(t)$$

converge uniformément vers

$$\int_0^A g_1(t) d\mu(t);$$

enfin, on voit comme plus haut, par application du lemme des paragraphes 1.4 et 1.4.1, que l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu_n(t)$$

converge uniformément vers

$$\int_A^{+\infty} g_2(t) d\mu(t).$$

On a donc bien le résultat annoncé.

Notons que, dans l'expression de  $\Psi(z)$ , la constante  $h = \int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t)$  et le coefficient de  $z$  sont positifs ou nuls, donc encore du signe de  $(-1)^p$ .

5.4.  $p$  étant un entier positif, étant données une fonction croissante  $\mu$ , nulle pour  $t \leq 0$  et telle que  $\mu(+0) = 0$  et que les intégrales

$$\int_0^L \frac{d\mu(t)}{t^p} \quad \text{et} \quad \int_L^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}},$$



où  $L$  est un nombre positif quelconque, soient convergentes, et deux constantes réelles  $H$  et  $K$ , nous leur associerons une fonction  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  définie en dehors de  $Ox'$  par

$$\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = \int_0^{+\infty} \left\{ \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p! t^p} \right\} d\mu(t) + H z^p + K z^{p+1},$$

où le logarithme est pris avec la détermination dans laquelle le coefficient de  $i$  est compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

De même, étant données une fonction croissante  $\mu$ , nulle pour  $t \leq 0$  et telle que  $\mu(+0) = 0$  et que les intégrales

$$\int_0^L \log \frac{1}{t} d\mu(t) \quad \text{et} \quad \int_L^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t}$$

soient convergentes, et deux constantes réelles  $H$  et  $K$ , nous leur associerons la fonction

$$\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = \int_0^{+\infty} \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) d\mu(t) + H + Kz,$$

où le logarithme est toujours pris de la même façon.

Nous désignerons par

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) \quad \text{et} \quad V_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$$

la partie réelle et le coefficient de  $i$  dans  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  (pour  $p$  différent ou non de 0).

On voit de suite que la fonction  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  est holomorphe dans le domaine  $\Pi$  constitué par le plan privé de  $Ox'$ , de sorte que

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) \quad \text{et} \quad V_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$$

sont harmoniques dans le même domaine.

La connaissance de  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  dans un domaine contenu dans  $\Pi$  la détermine donc dans  $\Pi$  tout entier. De plus, sa connaissance sur  $Ox$ , ou sur un segment de  $Ox$ , détermine  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  dans  $\Pi$  tout entier, car c'est la fonction holomorphe dans  $\Pi$  qui coïncide avec  $U_{\mu, H, K}^{(p)}$  pour  $z$  réel positif.

Donc la connaissance de  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$ , soit dans un domaine  $D$  contenu dans  $\Pi$ , soit sur un segment de  $Ox$ , détermine  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  dans tout le domaine  $\Pi$  (et cela sans qu'il soit nécessaire de connaître l'entier  $p$ ).

5.5. La connaissance de  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  détermine ensuite la fonction  $\mu$  et les constantes  $H$  et  $K$  (1), comme il résulte du théorème suivant :

---

(1) Cf. note (1), p. 122.

THÉORÈME II. — *L'expression*

$$\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} V_{\mu, n, k}^{(p)}(-t + iy)$$

définit une fonction croissante équivalente à  $\mu$ .

En effet, nous allons montrer que, lorsque,  $x$  restant fixe,  $y$  tend vers 0 par valeurs positives,  $V_{\mu, n, k}^{(p)}(x + iy)$  tend vers

$$\pi \frac{\mu(-x+0) + \mu(-x-0)}{2}.$$

Si  $x > 0$ , ceci résulte de la continuité de  $V_{\mu, n, k}^{(p)}(z)$  pour  $z = x$ .

Il suffit donc de considérer le cas où  $x \leq 0$ .

Soit  $L$  un nombre réel supérieur à  $-x$ , et désignons par  $J[ \ ]$  le coefficient de  $i$  dans la quantité entre crochets. Si  $p > 0$  on peut écrire,

$$\begin{aligned} V_{\mu, n, k}^{(p)}(z) = & J \left\{ \int_0^L \left[ \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{pt^p} \right] d\mu(t) \right\} \\ & + J \left\{ \int_L^{+\infty} \left[ \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{pt^p} \right] d\mu(t) \right\} \\ & + n J[z^p] + k J[z^{p+1}]. \end{aligned}$$

La seconde intégrale est une fonction de  $z$  continue pour  $z = x$  et réelle en ce point; par conséquent si l'on fait  $z = x + iy$ , le second terme tendra vers zéro avec  $y$ . Il en est évidemment de même du 3<sup>e</sup> et du 4<sup>e</sup> terme.

Le premier terme s'écrit

$$\int_0^L \left\{ \text{Arg}(z+t) + J \left[ -\frac{z}{t} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{pt^p} \right] \right\} d\mu(t),$$

où l'argument est pris avec la détermination comprise entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

Si l'on fait  $z = x + iy$  et si,  $x$  restant fixe, on astreint  $y$  à rester inférieur en module à un nombre fixe,  $|z|$  restera inférieur à un nombre fixe  $R$  et la fonction sous le signe  $\int$  restera inférieure en module à  $\pi + \frac{R}{t} + \dots + \frac{R^p}{pt^p}$ , qui est sommable par rapport à la fonction  $\mu$  sur l'intervalle  $(0, L)$ .

Si maintenant  $y$  tend vers zéro par valeurs positives, la fonction sous le signe  $\int$  tend vers  $\pi$  pour  $0 < t < -x$ , vers zéro pour  $t > -x$ , et vers  $\frac{\pi}{2}$  pour  $t = -x$ .

En appliquant le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe  $\int$ , on voit que l'intégrale considérée tend vers

$$\frac{\pi}{2} [\mu(-x+0) - \mu(-x-0)] + \pi [\mu(-x-0) - \mu(+0)] = \pi \frac{\mu(-x+0) + \mu(-x-0)}{2}.$$

On raisonnerait de façon semblable dans le cas où  $p = 0$ .

Notons que la fonction  $\mu$  est ainsi déterminée par la connaissance de  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  sans qu'il soit besoin de connaître la valeur de l'entier  $p$ .

Une fois  $\mu$  déterminée, et  $p$  étant connu, les valeurs de  $H$  et de  $K$  sont déterminées par la formule qui donne l'expression de  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$ .

5.6. Notons encore qu'il résulte de ce qui précède que, si l'on a dans tout un domaine contenu dans  $\Pi$ , ou sur tout un segment de  $Ox$ ,

$$U_{\mu_1, H_1, K_1}^{(\rho)}(z) = U_{\mu_2, H_2, K_2}^{(\rho)}(z),$$

les fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont équivalentes, et l'on a

$$H_1 = H_2, \quad K_1 = K_2.$$

En particulier,  $U_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z)$  ne peut être nulle dans un domaine, ou sur un segment de  $Ox$ , sans que  $\mu(t) = 0$  et  $H = K = 0$ .

5.7. Considérons maintenant de nouveau une suite de produits canoniques de même genre fini  $p$  et à zéros réels et négatifs, et supposons que, soit dans un domaine  $D$  contenu dans  $\Pi$ , soit sur un segment  $[\alpha, \beta]$  de  $Ox$ , l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(z)|$$

converge vers une fonction limite  $U(z)$ .

Nous allons montrer que :

1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  définies par

$$\mu_n(t) = \frac{1}{\varphi(n)} v_n(t)$$

est vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ;

2°  $A$  étant un nombre réel positif quelconque tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ ,

a. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$  a une limite finie  $h$  quand  $n$  tend vers l'infini,

b. l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$  a une limite finie  $k$  <sup>(1)</sup>.

Nous ferons le raisonnement en supposant  $p \neq 0$  et nous laisserons au lecteur le soin de le modifier comme il convient pour le cas où  $p = 0$ .

a. Nous montrerons d'abord que, quelle que soit la suite d'entiers croissants  $n_1, n_2, \dots, n_q, \dots$ , on peut trouver une autre suite  $n'_1, n'_2, \dots, n'_q, \dots$  extraite de celle-ci et un nombre positif  $A$  tels que :

(1) Voir page 140 les définitions de  $S_n(t)$  et  $\Sigma_n(t)$ .

1° la suite des fonctions  $\mu_{n'_q}$  soit vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$  telle que  $\mu(+0) = 0$ ,

2° la fonction  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ ,

3° les expressions  $\frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(A)$  et  $\frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A)$  aient des limites finies  $h$  et  $k$ ,

et que l'on aura alors dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = U(z),$$

avec

$$H = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p} \right], \quad K = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right].$$

Choisissons arbitrairement un nombre positif  $a$  <sup>(1)</sup> et posons

$$\rho(n) = S_n(a) + \Sigma_n(a) \quad \text{et} \quad \psi_n(t) = \frac{1}{\rho(n)} \nu_n(t).$$

On aura

$$\frac{1}{\rho(n)} S_n(a) \leq 1, \quad \frac{1}{\rho(n)} \Sigma_n(a) \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho(n)} [S_n(a) + \Sigma_n(a)] = 1.$$

Or, quel que soit  $t$  réel satisfaisant à  $0 < t \leq a$ , on a

$$\frac{1}{\rho(n)} S_n(a) \geq \frac{\psi_n(t)}{t^p},$$

et, quel que soit  $t$  réel et  $> a$ , on a

$$\frac{1}{\rho(n)} \Sigma_n(a) \geq \frac{\psi_n(t) - \psi_n(a)}{t^{p+1}}.$$

Les fonctions  $\psi_n$ , nulles pour  $t \leq 0$ , satisferont donc pour  $0 < t \leq a$  à

$$\psi_n(t) \leq t^p,$$

et pour  $t > a$  à

$$\psi_n(t) \leq \psi_n(a) + t^{p+1} \leq a^p + t^{p+1}.$$

Par conséquent, de la suite des fonctions  $\psi_{n_q}$  on pourra extraire une suite vaguement convergente  $\psi_{n'_q}$ , et l'on voit que la fonction limite  $\psi$  satisfera nécessairement à  $\psi(+0) = 0$ .

Choisissons un nombre positif  $A$  tel que  $\psi$  soit continue pour  $t = A$ .

Les expressions

$$\frac{1}{\rho(n''_q)} S_{n''_q}(A) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho(n''_q)} \Sigma_{n''_q}(A)$$

seront bornées indépendamment de  $n''_q$ .

(1) Dans le cas où  $p = 0$ , il faut prendre  $a < 1$  pour que  $\log \frac{1}{a} > 0$ .

En effet, d'abord ceci est évident si  $A = a$ ; Si  $A > a$  on a,

$$0 \leq \frac{1}{\rho(n_q'')} \Sigma n_q''(A) \leq \frac{1}{\rho(n_q'')} \Sigma n_q''(a) \leq 1,$$

et, d'autre part, en appelant  $B$  un nombre positif inférieur à  $a$  et tel que  $\psi$  soit continue pour  $t = B$ ,

$$0 \leq \frac{1}{\rho(n_q'')} \Sigma n_q''(A) \leq \frac{1}{\rho(n_q'')} \Sigma n_q''(a) + \int_B^A \frac{d\psi_{n_q''}(t)}{t^p} \leq 1 + \int_B^A \frac{d\psi_{n_q''}(t)}{t^p},$$

et le dernier terme tend pour  $n_q''$  infini vers la limite finie  $\int_B^A \frac{d\psi(t)}{t^p}$ .

Si  $A < a$ , on peut raisonner de façon semblable.

Il résulte de là que de la suite d'entiers  $n_1'', n_2'', \dots, n_q'', \dots$  on pourra en extraire une autre  $n_1', n_2', \dots, n_q', \dots$  telle que

$$\frac{1}{\rho(n_q')} \Sigma n_q'(A) \text{ tende vers une limite finie } h_1,$$

$$\frac{1}{\rho(n_q')} \Sigma n_q'(A) \text{ tende vers une limite finie } k_1.$$

Il est évident que la suite des fonctions  $\psi_{n_q'}$  sera encore vaguement convergente vers  $\psi$ .

Il résulte alors du théorème I que dans le domaine  $\Pi$  la détermination réelle pour  $z$  réel positif de  $\frac{1}{\rho(n_q')} \log \Pi_{n_q'}(z)$  convergera pour  $q$  infini vers  $\Psi_{\psi, H_1, K_1}^{(p)}(z)$ , avec

$$H_1 = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h_1 - \int_0^A \frac{d\psi(t)}{t^p} \right], \quad K_1 = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k_1 - \int_A^{+\infty} \frac{d\psi(t)}{t^{p+1}} \right],$$

de sorte que  $\frac{1}{\rho(n_q')} \log |\Pi_{n_q'}(z)|$  convergera vers  $U_{\psi, H_1, K_1}^{(p)}(z)$ .

Cette dernière fonction ne peut être nulle dans tout le domaine  $D$ , ou sur tout le segment  $[\alpha, \beta]$ .

En effet ceci exigerait que

$$\psi(t) = 0 \quad \text{et} \quad H_1 = K_1 = 0,$$

d'où  $h_1 = k_1 = 0$ .

Les expressions

$$\frac{1}{\rho(n_q')} \Sigma n_q'(A) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho(n_q')} \Sigma n_q'(a)$$

tendraient donc vers zéro pour  $n_q'$  infini, et il en serait nécessairement de même de

$$\frac{1}{\rho(n_q')} \Sigma n_q'(a) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho(n_q')} \Sigma n_q'(a),$$

car on a

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(A) - \frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(a) = \int_a^A \frac{d\psi_{n'_q}(t)}{t^p},$$

et

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(a) - \frac{1}{\rho(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A) = \int_a^A \frac{d\psi_{n'_q}(t)}{t^{p+1}},$$

et les seconds membres tendraient vers zéro pour  $n'_q$  infini.

Or, on sait que

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(a) + \frac{1}{\rho(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(a) = 1.$$

Soit donc  $z_0$  un point de D, ou de  $[\alpha, \beta]$ , tel que

$$U_{\Psi, H_1, K_1}^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

Alors

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} \log |\Pi_{n'_q}(z_0)|$$

tend pour  $n'_q$  infini vers  $U(z_0)$ ;

$$\frac{1}{\rho(n'_q)} \log |\Pi_{n'_q}(z_0)|$$

tend vers  $U_{\Psi, H_1, K_1}^{(p)}(z_0)$ , et l'on voit par division que  $\frac{\rho(n'_q)}{\varphi(n'_q)}$  tend vers la limite finie

$$\frac{U(z_0)}{U_{\Psi, H_1, K_1}^{(p)}(z_0)} = \lambda.$$

Comme

$$\mu_{n'_q}(t) = \frac{\rho(n'_q)}{\varphi(n'_q)} \cdot \psi_{n'_q}(t),$$

la suite des fonctions croissantes  $\mu_{n'_q}$  est vaguement convergente vers la fonction  $\mu$  définie par  $\mu(t) = \lambda \psi(t)$ , fonction qui satisfait à  $\mu(+0) = 0$  et qui est, comme  $\psi$ , continue pour  $t = A$ .

De même, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(A) = \frac{\rho(n'_q)}{\varphi(n'_q)} \cdot \frac{1}{\rho(n'_q)} S_{n'_q}(A)$$

tend pour  $q$  infini vers  $\lambda h_1 = h$ .

De même,  $\frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A)$  tend vers  $\lambda k_1 = k$ .

Enfin, l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} \log |\Pi_{n'_q}(z)| = \frac{\rho(n'_q)}{\varphi(n'_q)} \cdot \frac{1}{\rho(n'_q)} \log |\Pi_{n'_q}(z)|$$

converge dans le domaine  $\Pi$  vers  $\lambda U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  qui est égal à  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$ , avec

$$H = \lambda H_1 = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p} \right], \quad K = \lambda K_1 = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right],$$

et, par suite, on a dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = U(z).$$

b. Ceci étant, on pourra d'abord trouver une suite  $n'_q$  extraite de la suite de tous les entiers et un nombre positif  $A_0$  tels que :

1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_{n'_q}$  soit vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu$ ;

2° la fonction  $\mu$  soit continue pour  $t = A_0$ ;

3° les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n'_q)} S_{n'_q}(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n'_q)} \Sigma_{n'_q}(A_0)$$

aient des limites finies  $h_0$  et  $k_0$ .

On aura dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = U(z),$$

avec

$$H = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h_0 - \int_0^{A_0} \frac{d\mu(t)}{t^p} \right],$$

$$K = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k_0 - \int_{A_0}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right].$$

Si alors la suite des fonctions  $\mu_n$  tout entière n'était pas vaguement convergente vers la fonction  $\mu$ , il existerait un nombre réel  $t_0$  et une suite partielle  $\mu_{n_q}$  tels que  $\mu$  soit continue pour  $t = t_0$  et que  $\mu_{n_q}(t_0)$  tende vers une limite, finie ou non, différente de  $\mu(t_0)$ .

On pourrait alors trouver une autre suite partielle  $\mu_{n''}$  extraite de celle-ci et un nombre réel positif  $A'$  tels que :

1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_{n''}$  soit vaguement convergente vers une fonction limite  $\mu'$  telle que  $\mu'(+0) = 0$ ;

2° la fonction  $\mu'$  soit continue pour  $t = A'$ ;

3° les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n''_q)} S_{n''_q}(A') \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n''_q)} \Sigma_{n''_q}(A')$$

aient des limites finies  $h'$  et  $k'$ ;

et l'on devrait avoir dans D, ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu, H', K'}^{(\rho)}(z) = U(z) = U_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z),$$

avec

$$H' = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h' - \int_0^{A'} \frac{d\mu(t)}{t^p} \right], \quad K' = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k' - \int_{A'}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right].$$

La fonction  $\mu'$  ne pourrait être équivalente à  $\mu$  puisque  $\mu_{n_q''}(t_0)$  ne tendrait pas vers  $\mu(t_0)$ . On arriverait donc à une contradiction.

La suite des fonctions  $\mu_n$  est donc vaguement convergente vers la fonction  $\mu$ . On voit ensuite que les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A_0)$$

tendent respectivement pour  $n$  infini vers  $h_0$  et  $k_0$ .

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver une suite d'entiers croissants  $n_q'''$  telle que

$$\frac{1}{\varphi(n_q''')} S_{n_q'''}(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n_q''')} \Sigma_{n_q'''}(A_0)$$

aient des limites  $h''$  et  $k''$ , finies ou non, avec  $h'' \neq h_0$  ou  $k'' \neq k_0$ . Le cas où l'une de ces limites serait infinie est d'ailleurs exclu du fait que de la suite  $n_q'''$  on doit pouvoir en extraire encore une autre  $n_q^{IV}$  telle que

$$\frac{1}{\varphi(n_q^{IV})} S_{n_q^{IV}}(A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n_q^{IV})} \Sigma_{n_q^{IV}}(A_0)$$

aient des limites finies.

Le théorème I entraînerait alors que dans le domaine  $\Pi$  l'expression

$$\frac{1}{\varphi(n_q''')} \log |\Pi_{n_q'''}(z)|$$

convergerait vers  $U_{\mu, H'', K''}^{(\rho)}(z)$ , avec

$$H'' = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h'' - \int_0^{A_0} \frac{d\mu(t)}{t^p} \right], \quad K'' = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k'' - \int_{A_0}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right].$$

On aurait donc dans D, ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu, H'', K''}^{(\rho)}(z) = U(z) = U_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z),$$

alors que  $H'' \neq H$  ou  $K'' \neq K$ , d'où contradiction.

Si maintenant  $A$  est un nombre positif quelconque tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ , les expressions

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$$



tendront respectivement, pour  $n$  infini, vers les limites

$$h = h_0 + \int_{A_0}^A \frac{d\mu(t)}{t^p}, \quad k = k_0 + \int_A^{A_0} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}},$$

car on a

$$\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A) = \frac{1}{\varphi(n)} S_n(A_0) + \int_{A_0}^A \frac{d\mu_n(t)}{t^p},$$

et

$$\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A) = \frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A_0) + \int_A^{A_0} \frac{d\mu_n(t)}{t^{p+1}}.$$

Notons que l'on a

$$\frac{(-1)^p}{p} \left[ h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p} \right] = H, \quad \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right] = K.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, nous laissons au lecteur le soin de modifier comme il convient le raisonnement qui précède pour le cas où  $p = 0$ . Dans ce cas, la première des égalités ci-dessus sera remplacée par

$$h - \int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t) = H.$$

#### 5.8. Grâce à l'égalité

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = U(z)$$

qui a lieu dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ , la connaissance de  $U(z)$  détermine la fonction croissante  $\mu$  et les constantes  $H$  et  $K$ , comme il a été expliqué aux paragraphes 5.3 et 5.4. Ensuite, une fois fixé  $A$ , les égalités que nous venons de mentionner déterminent  $h$  et  $k$ .

On peut compléter comme il suit l'énoncé donné au début du Chapitre :

$\Psi(z)$  étant la fonction holomorphe en dehors de  $Ox'$  qui coïncide pour  $z$  réel positif avec  $U(z)$ , ou avec son prolongement analytique, et  $V(z)$  étant le coefficient de  $i$  dans  $\Psi(z)$ , on peut prendre

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} V(-t + iy) \quad (1).$$

Les constantes  $H$  et  $K$  étant ensuite déterminées par la formule

$$\Psi(z) = \int_0^{+\infty} \left\{ \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) - \frac{z}{t} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{p t^p} \right\} d\mu(t) + H z^p + K z^{p+1}, \quad \text{si } p > 0,$$

ou

$$\Psi(z) = \int_0^{+\infty} \log \left( 1 + \frac{z}{t} \right) d\mu(t) + H + K z, \quad \text{si } p = 0,$$

---

(1) Cf. note (1), page 129.

où le logarithme est pris dans les deux cas avec le coefficient de  $i$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ ,  $h$  et  $k$  seront déterminées, une fois  $A$  fixé, par

$$H = \frac{(-1)^p}{p} \left[ h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p} \right] \quad \text{si } p > 0, \quad H = h - \int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t) \quad \text{si } p = 0,$$

$$K = \frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k - \int_A^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right].$$

Il est évident que, si l'on connaît d'avance une fonction croissante  $\mu^*$  nulle pour  $t \leq 0$  et satisfaisant à  $\mu^*(+\infty) = 0$  et deux constantes  $H^*$  et  $K^*$  telles que l'on ait dans  $D$ , ou sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$U_{\mu^*, H^*, K^*}^{(p)}(z) = U(z),$$

on peut prendre de suite

$$\mu = \mu^*, \quad H = H^*, \quad K = K^*.$$

5.9. Il est intéressant de remarquer que la convergence de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(z)|$  sur un segment de droite non nécessairement situé sur  $Ox$  suffit encore à entraîner les conditions indiquées plus haut, si ce segment satisfait à des hypothèses convenables. Il en est ainsi, en particulier, pour tout segment porté par une demi-droite  $\widehat{Ox}$  ou issue de  $O$ , distincte de  $Ox'$ , et telle que, si l'on appelle  $\theta$  l'angle  $\widehat{Ox, Ou}$ , pris de module  $< \pi$ , il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p} \quad (1).$$

Cela résulte de ce que, si les fonctions  $U_{\mu_1, H_1, K_1}^{(p)}(z)$  et  $U_{\mu_2, H_2, K_2}^{(p)}$  sont égales sur un segment satisfaisant à la condition indiquée, les fonctions  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont équivalentes et l'on a  $H_1 = H_2$ ,  $K_1 = K_2$ ; en particulier  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  ne peut être nulle sur un tel segment sans que  $\mu(t) = 0$  et  $H = K = 0$ . On voit alors qu'un tel segment peut jouer le même rôle qu'un segment de  $Ox$  dans les raisonnements du paragraphe 5.7.

Il suffit donc de montrer qu'une fonction  $\mathcal{U}(z)$  de la forme

$$U_{\mu_1, H_1, K_1}^{(p)}(z) - U_{\mu_2, H_2, K_2}^{(p)}(z)$$

ne peut être nulle sur un segment de droite satisfaisant à la condition indiquée sans être nulle dans tout le domaine  $\Pi$ .

D'ailleurs, par suite de l'analyticité, si la fonction  $\mathcal{U}(z)$  est nulle sur un segment porté par une demi-droite issue de  $O$ , elle est nulle sur toute cette demi-droite. Il suffira donc de montrer que, si l'on a

$$\mathcal{U}(r e^{i\theta}) = 0 \quad \text{quel que soit } r > 0$$

(1) Il en est de même pour beaucoup d'autres segments; nous nous sommes limité volontairement à ceux dont le support passe par  $O$ , ce qui suffit pour les applications que nous avons en vue.

pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p},$$

$\mathcal{U}(z)$  est nulle dans tout le domaine II.

5.10. L'entier  $p$  étant fixé  $\geq 1$ , étant donné  $\alpha$  satisfaisant à  $0 < \alpha < \pi$ , on voit aisément qu'il existe deux nombres positifs  $A(\alpha)$  et  $B(\alpha)$  tels que, si  $u = \rho e^{i\theta}$ , avec  $|\theta| \leq \alpha$ , et si l'on prend pour  $\log(1+u)$  la valeur dans laquelle le coefficient de  $i$  est de module  $< \pi$ , on a

$$\left| \log(1+u) - u + \dots + (-1)^p \frac{u^p}{p} \right| \leq A(\alpha) \rho^p \quad \text{pour } \rho \geq 1,$$

et

$$\left| \log(1+u) - u + \dots + (-1)^p \frac{u^p}{p} \right| \leq B(\alpha) \rho^{p+1} \quad \text{pour } \rho \leq 1.$$

Il en résulte que, si  $p \geq 1$ , toute fonction  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  satisfait pour  $|\theta| \leq \alpha$  à l'inégalité

$$|\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(r e^{i\theta})| \leq A(\alpha) r^p \int_0^r \frac{d\mu(t)}{t^p} + B(\alpha) r^{p+1} \int_r^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} + |H| r^p + |K| r^{p+1}.$$

Pour  $r$  infini, le second terme est manifestement  $o[r^{p+1}]$ . Comme le premier peut s'écrire

$$A(\alpha) r^p \left[ \frac{\mu(r)}{r^p} + p \int_0^r \frac{\mu(t) dt}{t^{p+1}} \right]$$

et que  $\mu(r) = o[r^{p+1}]$ , il est aussi  $o[r^{p+1}]$ .

Pour  $r$  infiniment petit, le premier terme est  $o[r^p]$ . Comme le second peut s'écrire

$$B(\alpha) r^{p+1} \left[ -\frac{\mu(r)}{r^{p+1}} + (p+1) \int_r^{+\infty} \frac{\mu(t) dt}{t^{p+2}} \right]$$

et que  $\mu(r) = o[r^p]$ , il est aussi  $o[r^p]$ .

On voit donc que, quel que soit  $\alpha$  satisfaisant à  $0 < \alpha < \pi$ , on a pour  $r$  infiniment grand

$$\max_{|\theta| \leq \alpha} |\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(r e^{i\theta})| = O[r^{p+1}],$$

et pour  $r$  infiniment petit

$$\max_{|\theta| \leq \alpha} |\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(r e^{i\theta})| = O[r^p].$$

On verrait de façon semblable que  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  satisfait aux mêmes relations dans le cas où  $p = 0$ .

La fonction  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$ , partie réelle de  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$ , satisfait évidemment aux mêmes relations.

De plus, on a manifestement

$$U_{\mu, H, K}^{(p)}(r e^{-i\theta}) = U_{\mu, H, K}^{(p)}(r e^{i\theta}).$$

En définitive, si l'on considère une fonction  $\mathcal{U}(z)$  de la forme

$$U_{\mu_1, H_1, K_1}^{(p)}(z) - U_{\mu_2, H_2, K_2}^{(p)}(z),$$

on voit que  $\mathcal{U}(z)$  est une fonction harmonique dans le domaine  $\Pi$ , satisfaisant à  $\mathcal{U}(r e^{-i\theta}) = \mathcal{U}(r e^{i\theta})$  et, quel que soit  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < \pi$ , à

$$\max_{|\theta| \leq \alpha} |\mathcal{U}(r e^{i\theta})| = O[r^{p+1}] \quad \text{pour } r \text{ infiniment grand,}$$

et

$$\max_{|\theta| \leq \alpha} |\mathcal{U}(r e^{i\theta})| = O[r^p] \quad \text{pour } r \text{ infiniment petit.}$$

5.11. Ceci étant, supposons qu'une fonction  $\mathcal{U}(z)$  de la forme

$$U_{\mu_1, H_1, K_1}^{(p)}(z) - U_{\mu_2, H_2, K_2}^{(p)}(z)$$

satisfasse à  $\mathcal{U}(r e^{i\theta_0}) = 0$  pour tout  $r$  positif, avec  $0 < |\theta_0| < \pi$ .

Définissons une fonction  $\mathcal{H}(Z)$  pour  $\mathcal{R}(Z) \geq 0$  avec  $Z \neq 0$  par

$$\mathcal{H}(Z) = \mathcal{U}\left(Z^{\frac{2|\theta_0|}{\pi}}\right),$$

où  $Z^{\frac{2|\theta_0|}{\pi}}$  sera pris avec la détermination d'argument  $\frac{2|\theta_0|}{\pi} \text{Arg} Z$ , avec  $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg} Z \leq +\frac{\pi}{2}$ .

$\mathcal{H}(Z)$  est harmonique dans le demi-plan  $\mathcal{R}(Z) > 0$ , continue pour  $\mathcal{R}(Z) = 0$  avec  $Z \neq 0$ , et nulle pour ces valeurs. On peut la prolonger analytiquement dans le demi-plan  $\mathcal{R}(Z) < 0$  en prenant

$$\mathcal{H}(X + iY) = -\mathcal{H}(-X + iY),$$

et l'on obtiendra ainsi une fonction harmonique dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine.

Comme  $\mathcal{U}(r e^{-i\theta}) = \mathcal{U}(r e^{i\theta})$ , on a

$$\mathcal{H}(X - iY) = \mathcal{H}(X + iY)$$

et, en combinant avec la relation précédente,

$$\mathcal{H}(-Z) = -\mathcal{H}(Z).$$

De plus, si l'on pose  $|Z| = R$ , il résulte des propriétés établies plus haut pour  $\mathcal{U}(Z)$ , en prenant  $\alpha = |\theta_0|$ , que l'on a pour  $R$  infini

$$|\mathcal{H}(Z)| = O\left[R^{\frac{2(p+1)|\theta_0|}{\pi}}\right],$$

et pour  $R$  infiniment petit

$$|\mathcal{H}(Z)| = O\left[R^{\frac{2p|\theta_0|}{\pi}}\right].$$

La deuxième relation montre d'abord que  $\mathcal{H}(Z)$  est harmonique à l'origine; on a

$$\mathcal{H}(0) = 0 \quad \text{puisque} \quad \mathcal{H}(-Z) = -\mathcal{H}(Z).$$

La fonction  $\mathcal{H}(Z)$  est donc la partie réelle d'une fonction entière  $\mathcal{F}(Z)$ , que l'on peut d'ailleurs supposer nulle à l'origine.  $\mathcal{F}(Z)$  est alors impaire

On voit ensuite que, si  $\mathcal{F}(Z)$  n'est pas identiquement nulle, elle est un polynôme dont tous les termes sont de degré au plus égal à  $\frac{2(p+1)|\theta_0|}{\pi}$  et au moins égal à  $\frac{2p|\theta_0|}{\pi}$ , degré qui est d'ailleurs impair.

Ceci n'est possible que s'il existe au moins un entier impair  $m$  satisfaisant à

$$\frac{2p|\theta_0|}{\pi} \leq m \leq \frac{2(p+1)|\theta_0|}{\pi},$$

ou

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta_0| \leq m \frac{\pi}{2p}.$$

Donc, s'il n'existe aucun tel entier, on a

$$\mathcal{F}(Z) \equiv 0, \quad \text{d'où} \quad \mathcal{H}(Z) \equiv 0,$$

puis  $\mathcal{U}(re^{i\theta}) = 0$  pour  $|\theta| \leq |\theta_0|$  et par suite  $\mathcal{U}(z) = 0$  dans tout le domaine  $\Pi$ .

5.12. Il est clair que, comme dans le cas d'un domaine ou d'un segment de  $Ox$ , la connaissance de la limite  $U(z)$  de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(z)|$  sur un segment  $S$  satisfaisant à la condition indiquée au paragraphe 5.9 détermine la fonction  $\mu$  vers laquelle les fonctions  $\mu_n$  convergent vaguement et, en fonction de  $A$ , les limites  $h$  et  $k$  de  $S_n(A)$  et  $\Sigma_n(A)$ .

L'égalité  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = U(z)$ , qui a lieu sur le segment  $S$ , détermine  $\mu$ ,  $H$  et  $K$ ; puis  $h$  et  $k$  sont donnés par les formules écrites plus haut.

Mais, ici, il n'existe pas un procédé aussi simple pour la détermination effective de  $\mu$ ,  $H$  et  $K$ .

## VI. — Examen d'un cas particulier.

6.1. D'après ce qui précède, les produits canoniques  $\Pi_n(z)$  étant de même genre fini  $p$  et à zéros réels et négatifs, si dans un domaine  $D$  sans point commun avec la demi-droite  $Ox'$ , ou sur un segment de  $Ox$ , ou même sur un segment satisfaisant à la condition indiquée au paragraphe 5.9., la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(z)|$  converge vers une fonction limite  $U(z)$ , alors, dans le

domaine  $\Pi$  constitué par le plan privé de la demi-droite  $Ox'$ , la détermination réelle pour  $z$  réel positif de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  converge vers une fonction limite  $\Psi(z)$ . Celle-ci appartient à la famille des fonctions  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  définies au paragraphe 5.4, et même plus précisément à la famille des fonctions  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  pour lesquelles  $H$  et  $K$  sont du signe de  $(-1)^p$ .

Elle est entièrement déterminée par le fait que sa partie réelle est égale à  $U(z)$  dans le domaine ou sur le segment considéré.

6.2. D'autre part on peut énoncer le résultat suivant :

La fonction  $\mu$  (possédant les propriétés indiquées au paragraphe 5.4) et les constantes  $H$  et  $K$  du signe de  $(-1)^p$  étant fixées, et  $A$  étant un nombre réel positif quelconque tel que  $\mu$  soit continue pour  $t = A$ , pour que la suite des produits canoniques  $\Pi_n(z)$  de genre  $p$  et à zéros réels et négatifs possède la propriété que, dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$ , la détermination réelle pour  $z$  réel positif de la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  converge vers  $\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$ , il faut et il suffit que :

1° la suite des fonctions croissantes  $\mu_n$  définies comme plus haut soit vaguement convergente vers la fonction  $\mu$ ;

2° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(A)$  tende vers la limite  $h$  définie par l'égalité :

$$\frac{(-1)^p}{p} \left[ h - \int_0^A \frac{d\mu(t)}{t^p} \right] = H \quad \text{ou} \quad h - \int_0^A \log \frac{1}{t} d\mu(t) = H$$

suivant que  $p \neq 0$  ou  $p = 0$ ;

3° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(A)$  tende vers la limite  $k$  définie par l'égalité

$$\frac{(-1)^p}{p+1} \left[ k - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t^{p+1}} \right] = K.$$

La convergence de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(z)|$  vers  $U_{\mu, H, K}^{(p)}(z)$  dans un domaine, ou sur un segment de  $Ox$ , ou même sur un segment satisfaisant à la condition indiquée au paragraphe 5.9, suffit à entraîner ces conditions.

Si la fonction  $\mu$  est continue quel que soit  $t$ , la condition que la suite des fonctions  $\mu_n$  converge vaguement vers  $\mu$  équivaut à celle que, pour  $t > 0$ ,  $\mu_n(t)$  tende vers  $\mu(t)$ ; de plus, on peut choisir  $A$  tout à fait arbitrairement.

6.3. Examinons s'il est possible, avec un choix convenable de  $\mu$ ,  $H$  et  $K$ , que l'on ait

$$\Psi_{\mu, H, K}^{(p)}(z) = az^\rho,$$

$a$  et  $\rho$  étant deux constantes réelles (avec  $a \neq 0$  et  $\rho \geq 0$ ) et  $z^\rho$  étant pris avec la détermination réelle et positive pour  $z$  réel positif.

Le théorème II du paragraphe 5.5 montre que la fonction  $\mu$  doit être équivalente à celle qui vaut 0 pour  $t \leq 0$  et  $\frac{a}{\pi} t^\rho \sin \pi \rho$  pour  $t > 0$ . Cette dernière étant continue quel que soit  $t$ , nous pouvons même dire *égale* au lieu de *équivalente*.

Si  $\rho$  n'est pas entier, on a  $\sin \pi \rho \neq 0$ ; la croissance de  $\mu$  nécessite que  $a \sin \pi \rho > 0$  et les autres conditions que doit remplir  $\mu$  se traduisent par  $p < \rho < p+1$  [en tenant compte de celle-ci, la première équivaut à  $(-1)^p a > 0$ ].

Ces conditions étant remplies, en prenant  $\mu(t) = 0$  pour  $t \leq 0$  et  $\mu(t) = \frac{a}{\pi} t^\rho \sin \pi \rho$  pour  $t > 0$ , on trouve que l'intégrale qui figure dans l'expression de  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z)$  est égale à  $az^\rho$ .

On aura alors

$$\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z) = az^\rho$$

en prenant en outre  $H = K = 0$ .

Si  $\rho$  est entier on doit avoir  $\mu(t) = 0$ . La fonction  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z)$  doit donc se réduire à  $H z^\rho + K z^{\rho+1}$ , qui ne peut être égal à  $az^\rho$  que si  $\rho = p$  ou  $\rho = p+1$ . Si  $\rho = p$ , on aura  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z) = az^\rho$  en prenant  $H = a$ ,  $K = 0$ ; si  $\rho = p+1$ , il faudra prendre  $H = 0$ ,  $K = a$ .

Dans les deux cas  $H$  et  $K$  ne peuvent être du signe de  $(-1)^p$  que si  $(-1)^p a > 0$ .

En résumé, *on ne peut avoir  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z) = az^\rho$ , en prenant  $H$  et  $K$  du signe de  $(-1)^p$ , que si*

$$p \leq \rho \leq p+1 \quad \text{et} \quad (-1)^p a > 0.$$

*Si  $p < \rho < p+1$ , on a  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z) = az^\rho$  en prenant  $\mu(t)$  égale à 0 pour  $t \leq 0$  et  $\frac{a}{\pi} t^\rho \sin \pi \rho$  pour  $t > 0$ , et  $H = K = 0$ .*

*Si  $\rho = p$ , on a  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z) = az^\rho$  en prenant  $\mu(t) = 0$ ,  $H = a$ ,  $K = 0$ .*

*Si  $\rho = p+1$ , on a  $\Psi_{\mu, H, K}^{(\rho)}(z) = az^\rho$  en prenant  $\mu(t) = 0$ ,  $H = 0$ ,  $K = a$ .*

6.4. En appliquant d'abord le résultat énoncé au paragraphe 6.1, on voit que, les produits canoniques  $\Pi_n(z)$  de genre  $p$  ayant tous leurs zéros réels et négatifs, la fonction  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(x)$  ne peut tendre vers  $ax^\rho$  pour  $x$  réel et positif que si

$$p \leq \rho \leq p+1 \quad \text{et} \quad (-1)^p a > 0.$$

Ces inégalités étant supposées satisfaites, le résultat énoncé au paragraphe 6.2 donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que, dans le domaine  $\Pi$ , la détermination réelle pour  $z$  réel positif de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(z)$  converge vers  $az^\rho$ . On peut prendre  $A = 1$ .

En supposant  $p > 0$ , on trouve que :

a. si  $p < \rho < p + 1$ , il faut et il suffit que lorsque  $n$  tend vers l'infini

1° pour  $t$  positif  $\mu_n(t)$  tende vers  $\frac{a}{\pi} t^\rho \sin \pi \rho$ ,

2° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(1)$  tende vers  $\frac{\rho}{\rho - p} \frac{a}{\pi} \sin \pi \rho$ ,

3° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(1)$  tende vers  $\frac{\rho}{p + 1 - \rho} \frac{a}{\pi} \sin \pi \rho$ .

b. si  $\rho = p$ , il faut et il suffit que :

1° pour  $t$  positif  $\mu_n(t)$  tende vers 0,

2° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(1)$  tende vers  $(-1)^p p a$ ,

3° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(1)$  tende vers 0.

c. Si  $\rho = p + 1$ , il faut et il suffit que :

1° pour  $t$  positif  $\mu_n(t)$  tende vers 0,

2° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} S_n(1)$  tende vers 0,

3° l'expression  $\frac{1}{\varphi(n)} \Sigma_n(1)$  tende vers  $(-1)^p (p + 1) a$ .

Dans le cas où  $p = 0$ , il faut remplacer dans ces énoncés  $\frac{\rho}{\rho - p}$  par  $\frac{1}{\rho}$  et  $(-1)^p p a$  par  $a$ .

Dans tout les cas la convergence de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log \Pi_n(x)$  vers  $ax^\rho$  pour  $x$  réel positif suffit à entraîner les conditions indiquées.

Il en est de même de la convergence de  $\frac{1}{\varphi(n)} \log |\Pi_n(r e^{i\theta})|$  vers  $ar^\rho \cos \rho \theta$  pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p}.$$

## VII. — Étude des fonctions entières orientées.

7.1. Une fonction entière est dite orientée si, ses zéros étant rangés par ordre de module croissant en la suite  $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ , la demi-droite  $Oz_n$  a une position limite  $Ou$  pour  $n$  infini. On dira que cette fonction est orientée dans la direction  $Ou$ . Nous nous proposons essentiellement ici d'appliquer les résultats précédents à l'étude de la relation entre la distribution des zéros d'une telle fonction, supposée de genre fini, et sa croissance en fonction de  $|z|$  lorsque le point  $z$  se déplace sur une demi-droite issue de  $O$ .

On peut toujours se ramener par un changement de variable linéaire au cas où  $Ou$  est la direction d'argument  $\pi$ .



Nous commencerons par étudier la relation entre la distribution des zéros d'un produit canonique  $\Pi(z)$  de genre fini et à zéros tous réels et négatifs et la croissance de  $\Pi(z)$  lorsque  $z$  s'éloigne sur une demi-droite issue de 0.

Nous désignerons les zéros de  $\Pi(z)$  par  $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_r, \dots$ , de sorte que

$$\Pi(z) = \Pi\left(1 + \frac{z}{\alpha_r}\right) e^{-\frac{z}{\alpha_r} + \dots + (-1)^p \frac{z^p}{\alpha_r^p}} \quad (1),$$

et nous appellerons  $\nu(t)$  le nombre de zéros de module au plus égal à  $t$ .

Nous considérerons dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$  la détermination réelle pour  $z$  réel positif de  $\log \Pi(z)$  et nous la désignerons par  $\text{Log} \Pi(z)$ .

La méthode consistera à considérer la famille des produits canoniques  $\Pi(\lambda z)$ , où  $\lambda$  est un nombre réel positif quelconque, et à en extraire des suites.

$\Pi(\lambda z)$  est un produit canonique de même genre que  $\Pi(z)$  et à zéros réels et négatifs  $\frac{-\alpha_1}{\lambda}, \frac{-\alpha_2}{\lambda}, \dots, \frac{-\alpha_r}{\lambda}, \dots$ .

Si l'on considère dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$  la détermination réelle pour  $z$  réel et positif de  $\log \Pi(\lambda z)$ , elle sera égale à  $\text{Log} \Pi(\lambda z)$ .

En donnant à  $\lambda$  une suite de valeurs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ , on obtiendra une suite de produits canoniques  $\Pi_1(z), \Pi_2(z), \dots, \Pi_n(z), \dots$ , où  $\Pi_n(z)$  aura pour zéros  $-\alpha_1^{(n)} = \frac{-\alpha_1}{\lambda_n}, \dots, -\alpha_r^{(n)} = \frac{-\alpha_r}{\lambda_n}, \dots$ .

Si l'on cherche à appliquer à cette suite l'un des résultats du paragraphe 6.4, on aura à considérer la fonction  $\nu_n(t)$  égale au nombre de zéros de  $\Pi_n(z)$  au moins égaux à  $-t$  et les expressions  $S_n(1)$  et  $\Sigma_n(1)$ . On aura

$$\nu_n(t) = \nu(\lambda_n t)$$

et

$$S_n(1) = \sum_{\alpha_r^{(n)} \leq 1} \frac{1}{[\alpha_r^{(n)}]^p} = \lambda_n^p \sum_{\alpha_r \leq \lambda_n} \frac{1}{\alpha_r^p} \quad \text{si } p > 0,$$

$$S_n(1) = \sum_{\alpha_r^{(n)} \leq 1} \log \frac{1}{\alpha_r^{(n)}} = \sum_{\alpha_r \leq \lambda_n} \log \frac{\lambda_n}{\alpha_r} \quad \text{si } p = 0,$$

et

$$\Sigma_n(1) = \sum_{\alpha_r^{(n)} > 1} \frac{1}{[\alpha_r^{(n)}]^{p+1}} = \lambda_n^{p+1} \sum_{\alpha_r > \lambda_n} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}}.$$

On est donc conduit à former la fonction  $\nu(\lambda t)$  et les expressions  $S_\lambda$  et  $\Sigma_\lambda$  définies par

$$S_\lambda = \lambda^p \sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^p} \quad \text{si } p > 0 \quad \text{et} \quad S_\lambda = \sum_{\alpha_r \leq \lambda} \log \frac{\lambda}{\alpha_r} \quad \text{si } p = 0,$$

$$\Sigma_\lambda = \lambda^{p+1} \sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}},$$

(1) Il est bien entendu que  $p$  est pris le plus petit possible pour que ce produit soit convergent.

de manière que

$$S_n(1) = S_{\lambda_n} \quad \text{et} \quad \Sigma_n(1) = \Sigma_{\lambda_n}.$$

Il peut être commode de transformer ces expressions comme il suit :

si  $p > 0$ , on a

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^p} = \int_0^\lambda \frac{d\nu(t)}{t^p}$$

et en intégrant par parties on trouve

$$\int_0^\lambda \frac{d\nu(t)}{t^p} = \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^p} + p \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{p+1}};$$

de même, pour  $p = 0$ ,

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \log \frac{\lambda}{\alpha_r} = \int_0^\lambda \log \frac{\lambda}{t} d\nu(t) = \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t};$$

dans tous les cas

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^{p+1}} = \int_\lambda^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{t^{p+1}} = \frac{-\nu(\lambda)}{\lambda^{p+1}} + (p+1) \int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^{p+2}} \quad (1).$$

On a ainsi

$$S_\lambda = \nu(\lambda) + p \lambda^p \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{p+1}} \quad \text{si } p > 0, \quad S_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t} \quad \text{si } p = 0,$$

et

$$\Sigma_\lambda = -\nu(\lambda) + (p+1) \lambda^{p+1} \int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^{p+2}}.$$

7.2. Comme premier exemple, supposons que l'on ait, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\nu(t) \sim A t^\rho$ , avec  $\rho$  positif et non entier.

Le genre de  $\Pi(z)$  est alors l'entier  $p$  tel que

$$p \leq \rho < p+1.$$

Si  $p > 0$ , on trouve que, pour  $\lambda$  infini, on a

$$\nu(\lambda t) \sim A t^\rho \lambda^\rho \quad (t \text{ fixe}),$$

$$S_\lambda \sim \frac{A \rho}{\rho - p} \lambda^\rho,$$

$$\Sigma_\lambda \sim \frac{A \rho}{p+1-\rho} \lambda^\rho.$$

(1) Il faut observer ici que la convergence de l'intégrale  $\int_\lambda^{+\infty} \frac{d\nu(t)}{t^{p+1}}$  entraîne que pour  $t$  infini  $\frac{\nu(t)}{t^{p+1}}$  tend vers zéro

Donc, quelle que soit la suite  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  tendant vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{\lambda_n^\rho} \nu(\lambda_n t) \quad \text{tend pour } t > 0 \text{ vers } A t^\rho,$$

$$\frac{1}{\lambda_n^\rho} S_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } \frac{A \rho}{\rho - p},$$

et

$$\frac{1}{\lambda_n^\rho} \Sigma_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } \frac{A \rho}{p + 1 - \rho}.$$

Par suite, dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$ , la fonction  $\frac{1}{\lambda_n^\rho} \text{Log} \Pi(\lambda_n z)$  converge vers  $\frac{\pi A}{\sin \pi \rho} z^\rho$ , où  $z^\rho$  est pris avec la détermination réelle et positive pour  $z$  réel positif.

Si  $p = 0$ , au lieu de  $S_\lambda \sim \frac{A \rho}{\rho - p} \lambda^\rho$  on a  $S_\lambda \sim \frac{A \lambda^\rho}{\rho}$  et l'on arrive au même résultat.

Ceci étant vrai quelle que soit la suite  $\lambda_n$ , on peut dire que, lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{\lambda^\rho} \text{Log} \Pi(\lambda z) \quad \text{tend vers } \frac{\pi A}{\sin \pi \rho} z^\rho.$$

En particulier, pour  $z = 1$ ,

$$\frac{1}{\lambda^\rho} \text{Log} \Pi(\lambda) \quad \text{tend vers } \frac{\pi A}{\sin \pi \rho}.$$

Autrement dit, si  $\lambda$  est réel et positif,  $\text{Log} \Pi(\lambda)$  est équivalent pour  $\lambda$  infini à  $\frac{\pi A}{\sin \pi \rho} \lambda^\rho$ .

On peut aussi prendre  $z = e^{i\theta}$ , avec  $-\pi < \theta < +\pi$ .

On voit alors que, si  $\lambda$  est réel et positif, on a pour  $\lambda$  infini

$$\text{Log} \Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim \frac{\pi A}{\sin \pi \rho} e^{i\rho\theta} \lambda^\rho.$$

7.2.1. Supposons maintenant que l'on ait lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  :  $\nu(t) \sim A t^p$ , avec  $p$  entier positif.

$\Pi(z)$  est alors de genre  $p$  et l'on trouve que pour  $\lambda$  infini

$$\nu(\lambda t) \sim A t^p \lambda^p,$$

$$S_\lambda \sim p A \lambda^p \log \lambda,$$

$$\Sigma_\lambda \sim p A \lambda^p.$$

Donc, quelle que soit la suite  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  tendant vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{\lambda_n^p \log \lambda_n} \nu(\lambda_n t) \quad \text{tend vers } 0,$$

$$\frac{1}{\lambda_n^p \log \lambda_n} S_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } p A,$$

$$\frac{1}{\lambda_n^p \log \lambda_n} \Sigma_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } 0,$$

d'où résulte que  $\frac{1}{\lambda_n^p \log \lambda_n} \text{Log} \Pi(\lambda_n z)$  tend vers  $(-1)^p A z^p$ .

Par suite, quand  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{\lambda^p \log \lambda} \text{Log} \Pi(\lambda z)$  tend vers  $(-1)^p A z^p$ .

En faisant alors  $z = 1$ , on voit que, si  $\lambda$  est réel et positif et tend vers  $+\infty$ , on a

$$\text{Log} \Pi(\lambda) \sim (-1)^p A \lambda^p \log \lambda.$$

En faisant  $z = e^{i\theta}$ , avec  $-\pi < \theta < +\pi$ , on voit que

$$\text{Log} \Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim (-1)^p A e^{p\theta i} \lambda^p \log \lambda.$$

7.2.2. Comme autre exemple, prenons encore

$$\Pi(z) = \prod_0^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{2^n}\right).$$

On trouve que pour  $t$  infini positif

$$\nu(t) \sim \frac{\log t}{\log 2},$$

que pour  $\lambda$  infini

$$S_\lambda \sim \frac{(\log \lambda)^2}{2 \log 2},$$

et que  $\Sigma_\lambda < 2$ .

Par conséquent, pour  $\lambda$  infini

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\log \lambda)^2} \nu(\lambda t) &\text{ tend vers } 0, \\ \frac{1}{(\log \lambda)^2} S_\lambda &\text{ tend vers } \frac{1}{2 \log 2}, \\ \frac{1}{(\log \lambda)^2} \Sigma_\lambda &\text{ tend vers } 0. \end{aligned}$$

On en conclut que, dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$ ,

$$\frac{1}{(\log \lambda)^2} \text{Log} \Pi(\lambda z) \text{ tend vers } \frac{1}{2 \log 2}.$$

En faisant  $z = e^{i\theta}$ , avec  $-\pi < \theta < +\pi$ , on voit que pour  $\lambda$  réel positif infiniment grand

$$\text{Log} \Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim \frac{(\log \lambda)^2}{2 \log 2}.$$

7.3. Dans les exemples qui précèdent, nous avons déduit de la distribution des zéros de  $\Pi(z)$  la croissance de  $\text{Log} \Pi(z)$  quand  $z$  s'éloigne sur une demi-droite issue de  $O$  et distincte de  $Ox'$ .

Nous allons voir maintenant que les résultats du paragraphe 6.3 permettent dans certains cas de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que, pour  $x$  réel positif infiniment grand,  $\log \Pi(x)$  soit équivalent à une fonction donnée.

Soit  $\rho(x)$  une fonction définie pour  $x$  positif assez grand, dérivable, satisfaisant à

$$q < \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) < q + 1 \quad (\text{avec } q \text{ entier } \geq 0)$$

et telle que, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\rho'(x)x \log x$  tende vers zéro.

Nous allons montrer que le produit canonique  $\Pi(z)$  ne peut satisfaire pour  $x$  réel positif infiniment grand à  $\log \Pi(x) \sim Ax^{\rho(x)}$ , avec  $A \neq 0$ , que si  $(-1)^q A > 0$ , et que, cette condition étant remplie, il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que l'on ait pour  $t$  positif infiniment grand

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t) \quad (1).$$

a. Supposons donc d'abord que l'on ait quand  $x$  réel tend vers  $+\infty$

$$\log \Pi(x) \sim Ax^{\rho(x)}.$$

On voit que, si  $\lambda_n$  tend vers  $+\infty$  de manière que  $\rho(\lambda_n)$  ait une limite  $\rho_0$  (nécessairement comprise entre  $q$  et  $q + 1$ ), pour  $x$  réel positif  $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \log \Pi(\lambda_n x)$  tend vers  $Ax^{\rho_0}$ .

Les résultats du paragraphe 6.4 montrent d'abord que ceci exige que le genre  $p$  de  $\Pi(z)$  soit égal à  $q$  et que  $(-1)^q A > 0$ , puis que pour  $t$  positif  $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \nu(\lambda_n t)$  doit tendre vers  $\frac{A}{\pi} t^{\rho_0} \sin \pi \rho_0$ .

En particulier, pour  $t = 1$ ,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \nu(\lambda_n) \text{ doit tendre vers } \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0.$$

Par suite,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)} \sin \pi \rho(\lambda_n)} \nu(\lambda_n) \text{ doit tendre vers } \frac{A}{\pi}.$$

Comme de toute suite de valeurs de  $\lambda$  tendant vers  $+\infty$  on peut en extraire une qui satisfasse à la condition indiquée, on voit que pour  $\lambda$  infini

$$\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)} \sin \pi \rho(\lambda)} \nu(\lambda) \text{ tend vers } \frac{A}{\pi};$$

autrement dit

$$\nu(\lambda) \sim \frac{A}{\pi} \lambda^{\rho(\lambda)} \sin \pi \rho(\lambda).$$

---

(1) Ce résultat a été établi pour la première fois par M. VALIRON [*Annales de Toulouse*, (3), 5, 1913, p. 117-257].

b. Réciproquement, supposons que l'on ait pour  $t$  tendant vers  $+\infty$

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

Ceci entraîne d'abord que  $\Pi(z)$  soit de genre  $q$ .

D'autre part, on a pour  $\lambda$  infini

$$\int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{q+1}} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\lambda^{\rho(\lambda)-q}}{\rho(\lambda)-q},$$

car la dérivée du second membre est équivalente à  $\frac{\nu(\lambda)}{\lambda^{q+1}}$ . De même,

$$\int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^{q+2}} \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\lambda^{\rho(\lambda)-q-1}}{q+1-\rho(\lambda)},$$

car la dérivée du second membre est équivalente à  $\frac{-\nu(\lambda)}{\lambda^{q+2}}$ .

Par suite, si  $q > 0$ , on a

$$S_\lambda \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\rho(\lambda)}{\rho(\lambda)-q} \lambda^{\rho(\lambda)},$$

si  $q = 0$ , on a

$$S_\lambda \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\lambda^{\rho(\lambda)}}{\rho(\lambda)},$$

et dans tous les cas

$$\Sigma_\lambda \sim \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho(\lambda) \frac{\rho(\lambda)}{q+1-\rho(\lambda)} \lambda^{\rho(\lambda)}.$$

On voit alors que, si  $\lambda_n$  tend vers  $+\infty$  de manière que  $\rho(\lambda_n)$  ait une limite  $\rho_0$ ,

$$(a) \quad \text{pour } t > 0, \quad \frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \nu(\lambda_n t) \quad \text{tend vers } \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0 t^{\rho_0},$$

$$(b) \quad \frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} S_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0 \frac{\rho_0}{\rho_0 - q} \text{ dans le cas où } q > 0$$

$$\text{et vers } \frac{A}{\pi \rho_0} \sin \pi \rho_0 \text{ dans le cas où } q = 0,$$

$$(c) \quad \frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \Sigma_{\lambda_n} \quad \text{tend vers } \frac{A}{\pi} \sin \pi \rho_0 \frac{\rho_0}{q+1-\rho_0}.$$

Par suite, dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$ , la fonction

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \text{Log} \Pi(\lambda_n z) \quad \text{tend vers } A z^{\rho_0},$$

où  $z^{\rho_0}$  est pris avec la détermination réelle et positive pour  $z$  réel positif.

En particulier, pour  $z = 1$ ,

$$\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \text{Log} \Pi(\lambda_n) \quad \text{tend vers } A.$$

Comme de toute suite de valeurs de  $\lambda$  tendant vers  $+\infty$  on peut en extraire une satisfaisant à la condition indiquée, on voit que pour  $\lambda$  infini  $\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)}} \text{Log} \Pi(\lambda)$  tend vers  $A$ . Autrement dit, pour  $\lambda$  réel positif infiniment grand,

$$\text{Log} \Pi(\lambda) \sim A \lambda^{\rho(\lambda)}.$$

Notons qu'en faisant  $z = e^{i\theta}$ , avec  $-\pi < \theta < +\pi$ , au lieu de  $z = 1$ , l'on verrait que pour  $\lambda$  infini  $\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)} e^{i\theta \rho(\lambda)}} \text{Log} \Pi(\lambda e^{i\theta})$  tend vers  $A$ , c'est-à-dire que, pour  $\lambda$  réel positif infiniment grand et  $\theta$  fixe,

$$\text{Log} \Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim A \lambda^{\rho(\lambda)} e^{i\theta \rho(\lambda)}.$$

On verrait aussi que  $\frac{1}{\lambda^{\rho(\lambda)}} [\log |\Pi(\lambda e^{i\theta})| - A \lambda^{\rho(\lambda)} \cos \theta \rho(\lambda)]$  tend vers zéro, de sorte que

$$\log |\Pi(\lambda e^{i\theta})| = A \lambda^{\rho(\lambda)} \cos \theta \rho(\lambda) + o[\lambda^{\rho(\lambda)}].$$

Si  $\cos \theta \rho$  ne s'annule pas pour  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) \leq \rho \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \rho(x)$ , on peut écrire

$$\log |\Pi(\lambda e^{i\theta})| \sim A \lambda^{\rho(\lambda)} \cos \theta \rho(\lambda).$$

Notons que, la fonction  $\rho(x)$  satisfaisant aux conditions indiquées, si  $\Pi(z)$  est supposé de genre  $q$ , le fait que, pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(q+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2q},$$

l'on ait pour  $r$  infini

$$\log |\Pi(r e^{i\theta})| \sim A r^{\rho(r)} \cos \theta \rho(r)$$

suffit à entraîner que pour  $t$  infini

$$v(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

En effet, si  $\lambda_n$  tend vers  $+\infty$  de façon que  $\rho(\lambda_n)$  ait une limite  $\rho_0$ ,  $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \log |\Pi(\lambda_n r e^{i\theta})|$  tend alors vers  $A r^{\rho_0} \cos \theta \rho_0$ , ce qui entraîne les mêmes conditions que la convergence de  $\frac{1}{\lambda_n^{\rho(\lambda_n)}} \log \Pi(\lambda_n x)$  vers  $A x^{\rho_0}$  pour  $x$  réel positif.

7.3.1. On peut penser qu'il est peut-être intéressant de considérer le cas particulier où  $\rho(x)$  a une limite  $\rho$  pour  $x$  infini.

On voit que l'ensemble des fonctions de la forme  $x^{\rho(x)}$ , où  $\rho(x)$  est dérivable et telle que pour  $x$  infini positif  $\rho'(x) \cdot x \log x$  tende vers 0, et tend en outre vers  $\rho$  pour  $x$  infini positif, est identique à l'ensemble des fonctions de la forme  $x^2 \omega(x)$ , où  $\omega(x)$  est positive, dérivable et telle que pour  $x$  infini  $\frac{x \omega'(x)}{\omega(x)}$  tende vers zéro.

Ceci nous amène à l'énoncé suivant :

Si  $\rho$  n'est pas entier et si  $\omega(x)$  est une fonction positive définie pour  $x$  positif assez grand, dérivable, et telle que pour  $x$  infini positif  $\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}$  tende vers 0, on ne peut avoir pour  $x$  réel positif infiniment grand  $\log \Pi(x) \sim Ax^\rho \omega(x)$  (avec  $A \neq 0$ ), que si  $(-1)^q A > 0$ , où  $q$  est la partie entière de  $\rho$ , et, cette condition étant remplie, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait pour  $t$  tendant vers  $+\infty$

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^\rho \omega(t) \sin \pi \rho.$$

Nous laissons au lecteur le soin de voir ce que donne la remarque qui termine le paragraphe précédent.

7.4. Nous allons voir que, même si  $\rho$  est un nombre entier positif ou nul, notre méthode permet encore de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log \Pi(x) \sim Ax^\rho \omega(x) \quad (\text{avec } A \neq 0),$$

$\omega(x)$  étant toujours une fonction donnée satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer.

Supposons donc d'abord que  $\rho$  soit égal au nombre entier positif  $q$ .

Notons que les conditions imposées à  $\omega(x)$  entraînent que, si  $k$  est une constante positive quelconque, on a, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\omega(kx) \sim \omega(x).$$

Il résulte de là l'hypothèse que pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log \Pi(x) \sim Ax^q \omega(x)$$

équivalant à celle que, si  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , pour  $x$  réel positif

$$\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \log \Pi(\lambda x) \quad \text{tend vers } Ax^q,$$

ou encore que, pour  $x$  réel positif, quelle que soit la suite de valeurs  $\lambda_n$  tendant vers  $+\infty$ ,

$$\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \log \Pi(\lambda_n x) \quad \text{tend vers } Ax^q.$$

On sait que, si  $p$  est le genre de  $\Pi(z)$ , qui est aussi celui de tous les produits canoniques  $\Pi(\lambda_n z)$ , ceci n'est possible que si

$$p \leq q \leq p+1 \quad [\text{et } (-1)^p A > 0].$$

Il faut donc que  $p$  soit égal à  $q$  ou à  $q-1$ .



Si l'on suppose  $p = q$  [ce qui nécessite  $(-1)^q A > 0$ ], pour que pour  $x$  réel positif  $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \log \Pi(\lambda_n x)$  tende vers  $Ax^q$ , il faut et il suffit que

$$1^\circ \text{ pour } t \text{ positif } \frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \nu(\lambda_n t) \text{ tende vers } 0,$$

$$2^\circ \text{ l'expression } \frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} S_{\lambda_n} \text{ tende vers } (-1)^q q A,$$

$$3^\circ \text{ l'expression } \frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \Sigma_{\lambda_n} \text{ tende vers } 0.$$

Pour que ceci soit satisfait quelle que soit la suite  $\lambda_n$  tendant vers  $+\infty$ , il faut et il suffit que pour  $\lambda$  infini

$$1^\circ \text{ pour } t \text{ positif } \frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \nu(\lambda t) \text{ tende vers } 0,$$

$$2^\circ \text{ l'expression } \frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} S_\lambda \text{ tende vers } (-1)^q q A,$$

$$3^\circ \text{ l'expression } \frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \Sigma_\lambda \text{ tende vers } 0.$$

La première condition équivaut à  $\nu(t) = o[t^q \omega(t)]$  pour  $t$  infini positif, et les deux autres se traduisent par  $S_\lambda \sim (-1)^q q A \lambda^q \omega(\lambda)$  et  $\Sigma_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)]$  pour  $\lambda$  infini positif.

Comme  $\frac{1}{\lambda^q} S_\lambda$ , qui est égal à  $\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$ , est nécessairement une fonction non décroissante de  $\lambda$  infiniment grande avec  $\lambda$ , ceci n'est possible que si  $\omega(x)$  tend vers  $+\infty$  pour  $x$  infini et

$$\inf_{u > x} \omega(u) \sim \omega(x) \quad (1).$$

Si l'on suppose  $p = q - 1$  [ce qui nécessite  $(-1)^q A < 0$ ], pour que pour  $x$  réel positif  $\frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \log \Pi(\lambda_n x)$  tende vers  $Ax^q$ , il faut et il suffit que :

$$1^\circ \text{ pour } t \text{ positif } \frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \nu(\lambda_n t) \text{ tende vers } 0,$$

$$2^\circ \text{ l'expression } \frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} S_{\lambda_n} \text{ tende vers } 0,$$

$$3^\circ \text{ l'expression } \frac{1}{\lambda_n^q \omega(\lambda_n)} \Sigma_{\lambda_n} \text{ tende vers } (-1)^{q-1} q A.$$

Pour que ceci soit vrai quelle que soit la suite  $\lambda_n$  tendant vers  $+\infty$ , il faut et il suffit que l'on ait pour  $t$  infini positif

$$\nu(t) = o[t^q \omega(t)],$$

---

(1) Ce ne serait pas le cas par exemple pour

$$\omega(x) = \log(\log x) \{ 2 + \sin[\log(\log x)] \}.$$

et pour  $\lambda$  infini positif

$$S_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)] \quad \text{et} \quad \Sigma_\lambda \sim (-1)^{q-1} q A \lambda^q \omega(\lambda).$$

Comme  $\frac{1}{\lambda^q} \Sigma_\lambda$ , qui est égal à  $\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$ , est nécessairement une fonction non croissante de  $\lambda$  qui tend vers zéro pour  $\lambda$  infini positif, ceci n'est possible que si  $\omega(x)$  tend vers zéro pour  $x$  infini positif et

$$\sup_{u > x} \omega(u) \sim \omega(x) \quad (1).$$

Au total, on voit que l'on ne peut avoir pour  $x$  réel positif infiniment grand  $\log \Pi(x) \sim A x^q \omega(x)$ , avec les conditions que nous avons indiquées pour  $\omega(x)$ , que si :

ou bien  $\omega(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $\inf_{u > x} \omega(u) \sim \omega(x)$   
 et  $(-1)^q A > 0$ ,  
 ou bien  $\omega(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et  $\sup_{x > u} \omega(u) \sim \omega(x)$   
 et  $(-1)^q A < 0$ .

Dans le premier cas, il faut et il suffit pour que l'on ait la propriété énoncée que  $\Pi(z)$  soit de genre  $q$  et que l'on ait pour  $t$  infini positif

$$\nu(t) = o[t^q \omega(t)],$$

et pour  $\lambda$  infini positif

$$S_\lambda \sim (-1)^q q A \lambda^q \omega(\lambda) \quad \text{ou} \quad \sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda)$$

et

$$\Sigma_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Dans le second cas, il faut et il suffit que  $\Pi(z)$  soit de genre  $q-1$  et que l'on ait pour  $t$  infini positif

$$\nu(t) = [t^q \omega(t)],$$

et pour  $\lambda$  infini positif

$$S_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)]$$

et

$$\Sigma_\lambda \sim (-1)^{q-1} q A \lambda^q \omega(\lambda) \quad \text{ou} \quad \sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda).$$

Nous allons voir que dans les deux cas ces conditions se réduisent.

(1) Ce ne serait pas le cas pour

$$\omega(x) = \frac{1}{\log(\log x)} \{2 + \sin[\log(\log x)]\}.$$

a. Dans le premier cas, si l'on a pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda),$$

les autres conditions sont automatiquement satisfaites.

En effet, ceci peut se traduire par

$$(1) \quad \frac{\nu(\lambda)}{\lambda^q} + q \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda),$$

ou

$$\frac{\nu(\lambda)}{\lambda} + q \lambda^{q-1} \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^q q A \lambda^{q-1} \omega(\lambda).$$

Le premier membre est la dérivée à droite de  $\lambda^q \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{q+1}}$  et le second membre est équivalent à la dérivée de  $(-1)^q A \lambda^q \omega(\lambda)$ , fonction qui tend vers l'infini. On a donc pour  $\lambda$  infini

$$\lambda^q \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^q A \lambda^q \omega(\lambda)$$

et en combinant ceci avec la relation (1) on trouve

$$\nu(\lambda) = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Cette dernière relation montre que le genre de  $\Pi(z)$  ne dépasse pas  $q$ .

Comme par ailleurs  $\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$  croît indéfiniment avec  $\lambda$ , il est exactement égal à  $q$ .

D'autre part, pour  $\lambda$  infini  $\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}$  tend vers zéro et sa dérivée est équivalente à  $-\frac{\omega(\lambda)}{\lambda^2}$ . La relation  $\frac{\nu(\lambda)}{\lambda^{q+2}} = o\left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda^2}\right]$  entraîne donc

$$\int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^{q+2}} = o\left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda}\right].$$

La formule

$$\Sigma_\lambda = -\nu(\lambda) + (q+1)\lambda^{q+1} \int_\lambda^{+\infty} \frac{\nu(t) dt}{t^{q+2}}$$

montre alors que

$$\Sigma_\lambda = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

b. Dans le second cas, si la série  $\sum \frac{1}{\alpha_r^q}$  est convergente et si l'on a pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda),$$

les autres conditions sont automatiquement satisfaites.

D'abord  $\Pi(z)$  est bien de genre  $q - 1$ .

Si  $q = 1$ , cela résulte de la convergence de  $\sum \frac{1}{\alpha_r}$ , et si  $q > 1$ , cela résulte de ce que  $\sum \frac{1}{\alpha_r^q}$  converge et  $\sum \frac{1}{\alpha_r^{q-1}}$  diverge. En effet, si cette dernière série était convergente, on aurait

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} < \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^{q-1}},$$

d'où, pour  $\lambda$  infini,

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} = o\left[\frac{1}{\lambda}\right],$$

ce qui est incompatible avec la relation donnée.

Ensuite la relation

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda) \quad \text{pour } \lambda \text{ infini}$$

peut se traduire par

$$(2) \quad \frac{v(\lambda)}{\lambda^q} + q \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda),$$

ou

$$\frac{v(\lambda)}{\lambda} + q \lambda^{q-1} \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^{q-1} q A \lambda^{q-1} \omega(\lambda).$$

Le premier membre est la dérivée à droite de  $\lambda^q \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t^{q+2}}$  et le second membre est équivalent à la dérivée de  $(-1)^{q-1} A \lambda^q \omega(\lambda)$ , fonction qui tend vers  $+\infty$ . On a donc pour  $\lambda$  infini

$$\lambda^q \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{v(t) dt}{t^{q+1}} \sim (-1)^{q-1} A \lambda^q \omega(\lambda),$$

et en combinant ceci avec la relation (2) on trouve

$$v(\lambda) = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Pour  $\lambda$  infini,  $\lambda \omega(\lambda)$  tend vers  $+\infty$  et sa dérivée est équivalente à  $\omega(\lambda)$ . La relation  $\frac{v(\lambda)}{\lambda^q} = o[\omega(\lambda)]$  entraîne donc

$$\int_0^{\lambda} \frac{v(t) dt}{t^q} = o[\lambda \omega(\lambda)].$$

Alors, si  $q > 1$ , la formule

$$S_{\lambda} = v(\lambda) + (q-1) \lambda^{q-1} \int_0^{\lambda} \frac{v(t) dt}{t^q}$$

montre que pour  $\lambda$  infini

$$S_{\lambda} = o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Si  $q = 1$ , la formule

$$S_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t}$$

montre que

$$S_\lambda = o[\lambda \omega(\lambda)].$$

En définitive, on peut énoncer le résultat suivant :

*Si  $q$  est un entier positif et  $\omega(x)$  une fonction positive définie pour  $x$  positif assez grand, dérivable et telle que pour  $x$  infini positif  $\frac{x \omega'(x)}{\omega(x)}$  tende vers zéro, le produit canonique  $\Pi(z)$  de genre fini et à zéros réels et négatifs ne peut satisfaire pour  $x$  réel positif infiniment grand à*

$$\log \Pi(x) \sim A x^q \omega(x)$$

*que si l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

(a).  $\omega(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et

$$\inf_{u > x} \omega(u) \sim \omega(x) \quad \text{et} \quad (-1)^q A > 0.$$

(b).  $\omega(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et

$$\sup_{u > x} \omega(u) \sim \omega(x) \quad \text{et} \quad (-1)^q A < 0.$$

*Dans le premier cas, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que pour  $\lambda$  infini*

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda).$$

*Dans le second cas, il faut et il suffit que la série  $\sum \frac{1}{\alpha_r^q}$  soit convergente et que l'on ait pour  $\lambda$  infini*

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda).$$

Dans les deux cas on voit aisément que la condition indiquée peut effectivement être satisfaite.

Remarquons que, lorsqu'elle est satisfaite, dans le plan privé de la demi-droite  $Ox'$ , la fonction  $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \log \Pi(\lambda z)$  tend pour  $r$  infini vers  $A z^q$ , d'où l'on déduit que, si  $-\pi < \theta < +\pi$ , l'on a pour  $\lambda$  réel positif infiniment grand

$$\log \Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim A \lambda^q \omega(\lambda) e^{q\theta i}$$

et

$$\log |\Pi(\lambda e^{i\theta})| = A \lambda^q \omega(\lambda) \cos q\theta + o[\lambda^q \omega(\lambda)].$$

Si  $\cos q\theta \neq 0$ , on peut écrire

$$\log |\Pi(\lambda e^{i\theta})| \sim A \lambda^q \omega(\lambda) \cos q\theta.$$

Notons que,  $\omega(x)$  étant une fonction du type indiqué au début de l'énoncé précédent et satisfaisant à l'une des conditions (a) ou (b), si le genre  $p$  de  $\Pi(z)$  est supposé a priori égal à  $q$  ou  $q-1$ , suivant le cas, le fait que, pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p},$$

l'on ait pour  $r$  infini

$$\log |\Pi(r e^{i\theta})| \sim A r^q \omega(r) \cos q\theta$$

suffit à entraîner que pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda) \quad \text{dans le cas (a),}$$

ou

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda) \quad \text{dans le cas (b).}$$

En effet, pour  $\lambda$  infini  $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \log |\Pi(\lambda r e^{i\theta})|$  tend alors vers  $A r^q \cos q\theta$ , ce qui entraîne les mêmes conditions que la convergence de  $\frac{1}{\lambda^q \omega(\lambda)} \log \Pi(\lambda x)$  vers  $A x^q$  pour  $x$  réel positif.

7.5. On peut traiter de la même façon le cas où  $\rho$  serait nul.

La fonction  $\omega$  étant toujours assujettie aux mêmes conditions, l'hypothèse que l'on ait pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log \Pi(x) \sim A \omega(x)$$

équivalent à celle que, lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ , pour  $x$  réel positif,  $\frac{1}{\omega(\lambda)} \log \Pi(\lambda x)$  tende vers  $A$ .

D'après le paragraphe 6.4, ceci n'est possible que si  $\Pi(z)$  est de genre zéro et  $A > 0$  [il faut  $p \leq 0 \leq p+1$  et  $(-1)^p A > 0$ ]. De plus,  $\Pi$  étant supposé de genre zéro, pour que la propriété indiquée ait lieu, il faut et il suffit que, lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ ,

$$1^\circ \text{ pour } t \text{ positif } \frac{1}{\omega(\lambda)} v(\lambda t) \text{ tende vers } 0,$$

$$2^\circ \frac{1}{\omega(\lambda)} S_\lambda \text{ tende vers } A,$$

$$3^\circ \frac{1}{\omega(\lambda)} \Sigma_\lambda \text{ tende vers } 0,$$

ou encore que l'on ait pour  $t$  infini  $v(t) = o[\omega(t)]$  et pour  $\lambda$  infini

$$S_\lambda \sim A \omega(\lambda) \quad \text{et} \quad \Sigma_\lambda = o[\omega(\lambda)].$$

La formule

$$S_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t}$$

montre que  $S_\lambda$  est une fonction convexe de  $\log \lambda$  et que, si  $\nu$  n'est pas bornée, c'est-à-dire si  $\Pi(z)$  n'est pas un polynôme,  $\frac{S_\lambda}{\log \lambda}$  est infiniment grand avec  $\lambda$ .

Donc, si l'on rejette le cas du polynôme, les conditions indiquées ne peuvent être satisfaites que si pour  $x$  infini positif,  $\frac{\omega(x)}{\log x}$  tend vers  $+\infty$  et qu'il existe une fonction  $\omega_1(x)$  qui soit fonction convexe de  $\log x$  et telle que

$$\omega(x) \sim \omega_1(x) \quad (1).$$

D'autre part, si la condition

$$S_\lambda \sim A \omega(\lambda), \quad \text{ou} \quad \int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t} \sim A \omega(\lambda)$$

est satisfaite, les autres le sont aussi.

On voit d'abord que

$$\nu(t) = o[\omega(t)].$$

En effet, si  $k$  est une constante quelconque réelle et supérieure à 1, on a pour  $u$  infini

$$\int_0^{ku} \frac{\nu(t) dt}{t} \sim A \omega(ku) \sim A \omega(u).$$

Or

$$\int_0^{ku} \frac{\nu(t) dt}{t} \geq \nu(u) \int_u^{ku} \frac{dt}{t} = \nu(u) \log k.$$

Donc

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{\omega(u)} \leq \frac{A}{\log k}.$$

Ceci étant vrai quel que soit  $k$ , on a

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow +\infty} \frac{\nu(u)}{\omega(u)} = 0.$$

On déduit ensuite de là que  $\Pi(z)$  est de genre zéro, puis que pour  $\lambda$  infini  $\Sigma_\lambda = o[\omega(\lambda)]$ .

(1) Ce ne serait pas le cas pour

$$\omega(x) = (\log x)^2 \{ 2 + \sin[a \log(\log x)] \}, \quad \text{avec } e^{\frac{2\pi}{a}} < 3.$$

Il serait facile de préciser cette condition, mais nous la laissons telle quelle pour ne pas compliquer l'énoncé.

En définitive, on a l'énoncé suivant :

Si  $\omega(x)$  est une fonction positive définie pour  $x$  positif assez grand, dérivable et telle que pour  $x$  infini positif  $\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}$  tende vers zéro, le produit canonique  $\Pi(z)$  de genre fini et à zéros réels et négatifs, supposé non réduit à un polynome, ne peut satisfaire pour  $x$  réel positif infiniment grand à

$$\log \Pi(x) \sim A \omega(x)$$

que si  $A > 0$  et si  $\omega(x)/\log x$  tend vers  $+\infty$  pour  $x$  infini et qu'il existe une fonction  $\omega_1(x)$  qui soit fonction convexe de  $\log x$  telle que

$$\omega(x) \sim \omega_1(x).$$

Ces conditions étant remplies, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que pour  $\lambda$  infini

$$\int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t} \sim A \omega(\lambda).$$

On voit immédiatement que cette condition peut effectivement être satisfaite.

Alors, dans le plan privé de  $Ox'$ , la fonction  $\frac{1}{\omega(\lambda)} \text{Log} \Pi(\lambda z)$  tend vers  $A$  pour  $\lambda$  infini, de sorte que

$$\log \Pi(\lambda e^{i\theta}) \sim A \omega(\lambda) \quad \text{et} \quad \log |\Pi(\lambda e^{i\theta})| \sim A \omega(\lambda).$$

Notons que, si  $\Pi(z)$  est supposé de genre zéro, le fait que, pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \frac{\pi}{2}$ , l'on ait pour  $r$  infini

$$\log |\Pi(r e^{i\theta})| \sim A \omega(r)$$

suffit à entraîner que pour  $\lambda$  infini

$$\int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t} \sim A \omega(\lambda).$$

En effet,  $\frac{1}{\omega(\lambda)} \log |\Pi(\lambda r e^{i\theta})|$  tend alors vers  $A$ , ce qui entraîne les mêmes conditions que la convergence de  $\frac{1}{\omega(\lambda)} \log \Pi(\lambda x)$  vers  $A$  pour  $x$  réel positif.

7.6. Dans les énoncés des paragraphes 7.4 et 7.5 on pourrait remplacer l'hypothèse que  $\omega(x)$  est dérivable et que pour  $x$  infini  $x\omega'(x)/\omega(x)$  tend vers zéro par celle que, quelle que soit la constante positive  $k$ , l'on a pour  $x$  infini  $\omega(kx) \sim \omega(x)$ , qui en est une conséquence.

En effet, c'est seulement ce fait qui est intervenu pour établir que les conditions indiquées étaient nécessaires, et l'on n'a considéré la dérivée de  $\omega(x)$  que



pour la démonstration des réciproques. Or, dans ces réciproques,  $\omega(x)$  est assujettie non seulement à l'hypothèse que nous venons de rappeler, mais aussi à d'autres. On voit aisément que, si  $\omega(x)$  satisfait à ces autres conditions et si, quel que soit  $k$  positif, on a pour  $x$  infini  $\omega(kx) \sim \omega(x)$ , on peut trouver une fonction  $\Omega(x)$  dérivable et telle que pour  $x$  infini  $x\Omega'(x)/\Omega(x)$  tende vers zéro et  $\omega(x) \sim \Omega(x)$ . On pourrait alors raisonner avec  $\Omega(x)$  comme on l'a fait avec  $\omega(x)$ .

On pourrait aussi, dans l'énoncé de la fin du paragraphe 7.3.1, supposer que le rapport  $\frac{\omega(kx)}{\omega(x)}$  tend uniformément vers 1 pour  $x$  infini quand  $k$  décrit un intervalle tel que  $(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$ . Cela compliquerait les raisonnements sans grand profit.

7.7. Il est intéressant de noter que les conditions trouvées au paragraphe 7.4 peuvent être satisfaites même avec une croissance tout à fait irrégulière pour la fonction  $\nu(t)$ .

Considérons par exemple le produit canonique ayant comme zéros tous les entiers négatifs de la forme  $-2^n$ , chacun ayant comme ordre de multiplicité  $2^n$ .

Le genre est 1 et l'on trouve que pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r} \sim \frac{\log(\log \lambda)}{\log 2},$$

de sorte que pour  $x$  réel positif très grand

$$\log \Pi(x) \sim -\frac{x \log(\log x)}{\log 2}.$$

Or on a

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \nu(t)}{\log t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \nu(t)}{\log t} = \frac{1}{2}.$$

7.8. Si maintenant, au lieu de supposer que le produit canonique  $\Pi(z)$  a tous ses zéros réels et négatifs, on le suppose simplement orienté dans la direction  $Ox'$ , les résultats des paragraphes 7.3, 7.4. et 7.5 subsistent en remplaçant  $\log \Pi(x)$  par  $\log |\Pi(x)|$  et en appelant  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$  les modules des zéros,  $\nu(t)$  étant toujours le nombre de zéros de module au plus égal à  $t$ .

Cela résulte du fait suivant :

$\Pi(z)$  étant orienté dans la direction  $Ox'$  et ses zéros ayant pour modules  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$ , si l'on appelle  $\Pi'(z)$  le produit canonique de zéros  $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_r, \dots$ , l'on a pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log |\Pi(x)| \sim \log \Pi'(x)$$

et, plus généralement, si  $|\theta| < \pi$  et s'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p},$$

où  $p$  est le genre de  $\Pi(z)$ , on a pour  $r$  infini

$$\log |\Pi(re^{i\theta})| \sim \log |\Pi'(re^{i\theta})| \quad (1).$$

Si de plus on admet la possibilité pour  $\Pi(z)$  d'avoir un certain nombre de zéros nuls, on voit que les résultats subsistent encore en remplaçant éventuellement

$$\sum_{\alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \quad \text{par} \quad \sum_{0 < \alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q}$$

et

$$\int_0^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t} \quad \text{par} \quad \int_0^\lambda \frac{\nu(t) - \nu(0)}{t} dt.$$

7.9. Nous pouvons maintenant traiter le cas général d'une fonction entière de genre fini orientée dans la direction  $Ox'$ .

Une telle fonction peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = e^{P(z) + iQ(z)} \Pi(z),$$

$P$  et  $Q$  étant des polynômes à coefficients réels, et  $\Pi$  un produit canonique de genre fini orienté dans la direction  $Ox'$ .

On appellera  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$  les modules des zéros,  $\nu(t)$  le nombre de ces zéros de module au plus égal à  $t$ ,  $p$  le genre de  $\Pi(z)$ ,  $s$  le degré de  $P(z)$ , et  $Cz^s$  le terme de plus haut degré de  $P(z)$ .

(\*) Pour établir ce fait, il suffit d'observer que, si  $\theta$  satisfait à la condition indiquée, d'une part pour  $r$  infiniment grand l'expression

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \mathcal{R} \left[ \log \left( 1 + \frac{re^{i\theta}}{\alpha_r} \right) - \frac{re^{i\theta}}{\alpha_r} + \dots + (-1)^p \frac{r^p e^{ip\theta}}{p \alpha_r^p} \right]$$

croît plus vite que  $r^p$  si  $p > 0$  et que  $\log r$  si  $p = 0$ ; d'autre part pour  $u$  réel positif l'expression

$$\frac{\mathcal{R} \left[ \log(1 + ue^{i(\theta-\varphi)}) - ue^{i(\theta-\varphi)} + \dots + (-1)^p \frac{u^p e^{ip(\theta-\varphi)}}{p} \right]}{\mathcal{R} \left[ \log(1 + ue^{i\theta}) - ue^{i\theta} + \dots + (-1)^p \frac{u^p e^{ip\theta}}{p} \right]}$$

reste comprise entre deux bornes  $m(\varphi)$  et  $M(\varphi)$  qui tendent vers 1 lorsque  $\varphi$  tend vers zéro.

Si les zéros de  $\Pi(z)$  sont  $-\alpha_1 e^{i\varphi_1}, -\alpha_2 e^{i\varphi_2}, \dots, -\alpha_r e^{i\varphi_r}, \dots$ , la première remarque montre que pour  $r$  infiniment grand  $\log |\Pi'(re^{i\theta})|$  tend vers l'infini et les plus petite et plus grande limite de  $\frac{\log |\Pi(re^{i\theta})|}{\log |\Pi'(re^{i\theta})|}$  sont, quel que soit  $\lambda > 0$ , les mêmes que celles de

$$\frac{\sum_{\alpha_r > \lambda} \mathcal{R} \left[ \log \left( 1 + \frac{re^{i(\theta-\varphi_r)}}{\alpha_r} \right) - \frac{re^{i(\theta-\varphi_r)}}{\alpha_r} + \dots + (-1)^p \frac{r^p e^{ip(\theta-\varphi_r)}}{p \alpha_r^p} \right]}{\sum_{\alpha_r > \lambda} \mathcal{R} \left[ \log \left( 1 + \frac{re^{i\theta}}{\alpha_r} \right) - \frac{re^{i\theta}}{\alpha_r} + \dots + (-1)^p \frac{r^p e^{ip\theta}}{p \alpha_r^p} \right]}.$$

La deuxième remarque montre ensuite que, si petit que soit  $\varepsilon$  positif, il suffit de prendre  $\lambda$  assez grand pour être assuré que celles-ci sont comprises entre  $1 - \varepsilon$  et  $1 + \varepsilon$ .

On a pour  $x$  réel

$$\log |f(x)| = P(x) + \log |\Pi(x)|$$

et, comme pour  $x$  infini positif

$$\log |\Pi(x)| = o[x^{p+1}] \quad \text{et} \quad x^p = o[\log |\Pi(x)|],$$

on a

$$\log |f(x)| \sim Cx^s \quad \text{si } s > p,$$

et

$$\log |f(x)| \sim \log |\Pi(x)| \quad \text{si } s \leq p.$$

Notons que, dans le cas où  $s \leq p$ , si  $Q$  est aussi de degré  $\leq p$ , l'on a pour  $r$  infini avec  $\theta$  fixe (de module  $< \pi$ )

$$\log |f(re^{i\theta})| = \log |\Pi(re^{i\theta})| + O[r^p];$$

dans le cas où  $s > p$ , si l'on suppose  $f(z)$  réelle pour  $z$  réel, de sorte que l'on peut prendre  $Q(z) = 0$  ou  $Q(z) = \pi$ , l'on a dans les mêmes conditions

$$\log |f(re^{i\theta})| = Cr^s \cos s\theta + o[r^s].$$

On déduit aisément de là les résultats suivants :

I. Si  $\rho(x)$  est une fonction définie pour  $x$  positif assez grand, dérivable, et telle que

$$q < \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) < q + 1 \quad (\text{avec } q \text{ entier } \geq 0)$$

et que pour  $x$  infini positif  $\rho'(x)x \log x$  tende vers zéro, l'on ne peut avoir pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log |f(x)| \sim Ax^{\rho(x)}$$

que si  $(-1)^q A > 0$ . Cette condition étant remplie, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que

$$s \leq q \quad \text{et} \quad \nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

Si, de plus,  $Q$  est aussi de degré  $\leq q$ , de sorte que  $f$  est de genre  $q$ , on a aussi pour  $r$  infini avec  $\theta$  fixe (de module  $< \pi$ )

$$\log |f(re^{i\theta})| = Ar^{\rho(r)} \cos \theta \rho(r) + o[r^{\rho(r)}].$$

Inversement, dans l'hypothèse où  $f$  est de genre  $q$ , le fait que, pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(p+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2p},$$

l'on ait pour  $r$  infini

$$\log |f(re^{i\theta})| \sim Ar^{\rho(r)} \cos \theta \rho(r)$$

suffit à entraîner que pour  $t$  infini

$$\nu(t) \sim \frac{A}{\pi} t^{\rho(t)} \sin \pi \rho(t).$$

II. Si  $\omega(x)$  est une fonction positive définie pour  $x$  positif assez grand et telle que, quelle que soit la constante positive  $k$ , l'on ait pour  $x$  infini  $\omega(kx) \sim \omega(x)$ , l'on ne peut avoir pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log |f(x)| \sim A x^q \omega(x), \quad \text{avec } q \text{ entier } > 0 \text{ et } A \neq 0,$$

que si l'on est dans l'un des trois cas suivants :

(a).  $\omega(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et

$$\inf_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x),$$

et d'autre part  $(-1)^q A > 0$ .

(b).  $\omega(x)$  tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et

$$\sup_{u>x} \omega(u) \sim \omega(x),$$

et d'autre part  $(-1)^q A < 0$ .

(c).  $\omega(x)$  tend pour  $x$  infini vers une limite finie et non nulle  $l$ , de sorte que la relation indiquée équivaut à

$$\log |f(x)| \sim K x^q, \quad \text{avec } K = A l.$$

Dans le cas (a), pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que  $s \leq q$  et que pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{0 < \alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda).$$

Dans le cas (b), il faut et il suffit que  $s \leq q-1$ , que la série  $\sum_{\alpha_r \neq 0} \frac{1}{\alpha_r^q}$  soit convergente, et que pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda).$$

Dans le cas (c), il faut et il suffit que

$$s = q, \quad C = K \quad \text{et} \quad p < q.$$

Dans les cas (a) et (b), si, en plus des conditions indiquées, le degré de  $Q$  satisfait à la même inégalité que  $s$ , l'on a pour  $r$  infini avec  $\theta$  fixe (de module  $< \pi$ )

$$\log |f(r e^{i\theta})| = A r^q \omega(r) \cos q \theta + o[r^q \omega(r)].$$

Dans le cas (c), si, en plus des conditions indiquées,  $f(z)$  est supposée réelle pour  $z$  réel, on a pour  $r$  infini avec  $\theta$  fixe (toujours de module  $< \pi$ )

$$\log |f(re^{i\theta})| = Kr^q \cos q\theta + o[r^q].$$

Inversement, la fonction  $\omega(x)$  du type indiqué et la constante  $A$  satisfaisant aux conditions (a) ou aux conditions (b), si l'on suppose que le genre  $g$  de  $f(z)$  est égal à  $q$  ou à  $q-1$ , suivant le cas, le fait que, pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(g+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2g},$$

l'on ait pour  $r$  infini

$$\log |f(re^{i\theta})| \sim Ar^q \omega(r) \cos q\theta$$

suffit à entraîner que pour  $\lambda$  infini

$$\sum_{0 < \alpha_r \leq \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^q q A \omega(\lambda) \quad \text{si l'on a les conditions (a),}$$

ou

$$\sum_{\alpha_r > \lambda} \frac{1}{\alpha_r^q} \sim (-1)^{q-1} q A \omega(\lambda) \quad \text{si l'on a les conditions (b).}$$

Si  $f(z)$  est supposée réelle pour  $z$  réel, et de genre  $q$ , le fait que pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \pi$  et telle qu'il n'existe aucun entier impair  $m$  satisfaisant à

$$m \frac{\pi}{2(q+1)} \leq |\theta| \leq m \frac{\pi}{2q},$$

l'on ait pour  $r$  infini

$$\log |f(re^{i\theta})| \sim Kr^q \cos q\theta$$

suffit à entraîner que

$$s = q, \quad C = K \quad \text{et} \quad p < q.$$

III. Si  $\omega(x)$  est une fonction positive définie pour  $x$  réel positif assez grand et telle que, quel que soit  $k$  positif, l'on ait pour  $x$  infini  $\omega(kx) \sim \omega(x)$ , l'on ne peut avoir pour  $x$  réel positif infiniment grand

$$\log |f(x)| \sim A \omega(x)$$

que si  $A > 0$ ,  $\frac{\omega(x)}{\log x}$  tend vers  $+\infty$  pour  $x$  infini, et qu'il existe une fonction  $\omega_1(x)$  qui soit fonction convexe de  $\log x$  et telle que  $\omega(x) \sim \omega_1(x)$  <sup>(1)</sup>.

Ces conditions étant remplies, pour que l'on ait la relation indiquée, il faut et il suffit que  $P$  se réduise à une constante et que pour  $\lambda$  infini

$$\int_0^\lambda \frac{v(t) - v(0)}{t} dt \sim A \omega(\lambda).$$

(1) Nous excluons le cas où  $f(z)$  se réduirait à un polynôme.

*Si, de plus,  $Q$  est aussi une constante, de sorte que  $f$  est de genre zéro, l'on a aussi pour  $r$  infini avec  $\theta$  fixe (de module  $< \pi$ )*

$$\log |f(re^{i\theta})| \sim A \omega(r).$$

*Inversement, si  $f$  est supposée de genre zéro, le fait que, pour une valeur de  $\theta$  de module  $< \frac{\pi}{2}$ , l'on ait pour  $r$  infini*

$$\log |f(re^{i\theta})| \sim A \omega(r)$$

*suffit à entraîner*

$$\int_0^\lambda \frac{\nu(t) - \nu(0)}{t} dt \sim A \omega(\lambda).$$

