

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

POL BURNIAT

**Sur la réduction à l'ordre minimum des systèmes de courbes
algébriques planes de genre quelconque**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 62 (1945), p. 93-114

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62_93_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LA RÉDUCTION A L'ORDRE MINIMUM

DES

SYSTÈMES DE COURBES ALGÈBRIQUES PLANES

DE GENRE QUELCONQUE

PAR M. POL BURNIAT.

Introduction.

Le problème de la réduction crémonienne à l'ordre minimum des systèmes linéaires de courbes algébriques planes est résolu pour les courbes de genre $p = 0, 1, 2, 3$. Il n'est évidemment pas résolvable dans toute sa généralité pour une valeur quelconque de p ⁽¹⁾.

La suite des adjoints purs d'indices $1, 2, \dots$ d'un système linéaire de courbes planes $|c|$ fournissant une suite de caractère birationnellement invariantif attachée à ce système et en constituant ce que, à certain point de vue, on serait tenté d'appeler l'ascendance, on peut songer à réduire à l'ordre minimum les systèmes $|c|$ de genre quelconque dont la suite des adjoints satisfait à une loi déterminée.

C'est dans cet esprit que nous avons entrepris et résolu le problème de la réduction des systèmes $|c|$ dont le genre forme avec les genres de ses adjoints successifs une progression arithmétique décroissante. Nous apportons ainsi une modeste contribution à une question importante de géométrie algébrique plane.

Les résultats essentiels acquis au cours de ce travail sont énoncés aux n^{os} 11, 15, 19 et 23.

(1) Pour la bibliographie, voir par exemple : FABIO CONFORTO, *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939, pp. 300-304 et 328-335.

I. — Les systèmes d'argument t .

1. Disons qu'un système complet irréductible $|c_i|$ de courbes planes c_i de genre p_i est d'argument $t > 0$ ou au sens large si p_i forme avec les genres p_{i-1}, p_{i-2}, \dots de ses adjoints purs infinis $|c_{i-1}|, |c_{i-2}|, \dots$ d'indices $1, 2, \dots$ une progression arithmétique décroissante de raison t . Nous déterminons l'indice i de telle sorte que $|c_i|$ soit son dernier adjoint infini. Nous convenons cependant que si l'adjoint $|c_{s-1}|$ de $|c_s|$ est composé avec les courbes d'un faisceau $|\theta|, |c_{s-1}|$, s'il existe, est l'adjoint pur de $|\theta|$.

La notion de système d'argument t ne présente évidemment un certain intérêt que si $i \geq 3$, ce que nous supposerons toujours dans ce qui suit. De la définition qui vient d'être proposée, il résulte que l'on a $p_1 \leq 1$.

2. Supposons qu'il existe dans la suite des adjoints $|c_{i-1}|, |c_{i-2}|, \dots$ un premier système $|c_s|, s > 1$, composé avec les courbes θ de genre p d'un faisceau $|\theta|$ et que $c_s \equiv n\theta, n \geq 1$. Alors $|c_s|$ est de genre (virtuel) $p_s = n(p-1) + 1$ et de dimension $r_s = n = p_{s+1} - 1$, car $|c_{s+1}|$, par hypothèse, est irréductible. On doit donc avoir $p_{s+1} = n + 1$. D'autre part, $p_{s+1} = p_s + t = n(p-1) + 1 + t$. Il s'ensuit que

$$n(p-1) + 1 + t = n + 1,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $p = 1, t = n$ ou $p = 0, t = 2n$. De toute façon, $|\theta|$ n'a pas d'adjoint infini, et contrairement à ce que l'on a supposé, $s = 1$. De là :

Seul l'adjoint d'indice $i - 1$ de $|c_i|$ peut être un faisceau ou composé avec les courbes d'un faisceau. Celui-ci est de genre 0 ou 1 et t vaut n ou $2n$.

Observons encore que $p_1 = 1$ ou $p_1 = -n + 1$, suivant que $p = 1$ ou $p = 0$.

3. Tout faisceau de courbes elliptiques irréductibles est birationnellement réductible à un faisceau $|\theta|$

$$\theta \equiv C_{3k}(A_1^k \dots A_g^k), \quad k \geq 1$$

de Halphen.

Or Wiman ⁽¹⁾ a démontré qu'un faisceau de Halphen proprement dit ($k > 1$) ne peut apparaître dans l'adjoint d'un système de courbes de dimension 2 au moins, que seul un système birationnellement équivalent à un système de sextiques doté de 8 points-base doubles peut avoir pour adjoint un système ∞^1 de courbes elliptiques (nécessairement transformable en un faisceau de cubiques doté de 8 points-base simples assignés).

(1) Zur theorie des endlichen Gruppen von birationalen Transformationen (Math. Ann., 48, 1896).

Il résulte de là que *si le dernier adjoint $|c_i|$ d'un système d'argument t est réductible, il est nécessairement composé avec les courbes rationnelles d'un faisceau.*

4. Chaque adjoint infini $|c_s|$ du système $|c_i|$ d'argument t étant l'adjoint d'un système irréductible de genre p_{s+1} , possède la dimension :

$$(1) \quad r_s = p_{s+1} - 1 = p_s - 1 + t, \quad s = i - 1, i - 2, \dots, 2, 1,$$

et $r_{i-1}, r_{i-2}, \dots, r_2, r_1$ forment une progression arithmétique de raison t .

Si nous exigeons de la dimension r_i de $|c_i|$ qu'elle satisfasse à la condition analogue

$$r_i = p_i - 1 + t,$$

nous dirons que le système $|c_i|$ correspondant est d'argument t au sens étroit, ou plus simplement d'argument t .

La restriction résultant de l'introduction de cette condition supplémentaire n'est pas d'importance majeure. En effet, si $|c_i|$ est d'argument t au sens large, $|c_{i-1}|$ est certainement d'argument t , car sa dimension r_{i-1} satisfait à (1). Par suite, tout système d'argument t au sens large peut être obtenu comme système dont l'adjoint d'indice 1 est d'argument t (au sens étroit).

Nous verrons que tout système d'argument t au sens large est totalement ou partiellement contenu dans un système d'argument t .

Nous considérerons d'abord les systèmes d'argument t au sens étroit.

5. Le système $|c_i|$ étant d'argument t , considérons le système $|c_s|$, $s = 2, 3, \dots, i$. Il est de dimension r_s et découpe sur une courbe c_{s-1} générique une série linéaire non spéciale, car elle est d'ordre ⁽¹⁾

$$c_s \cdot c_{s-1} = 2p_s - 2 > 2p_{s-1} - 2$$

et, qui, complète, possède la dimension

$$2p_s - 2 - p_{s-1} = p_s - 2 + t = r_s - 1.$$

Il s'ensuit que $|c_{s-1}|$ est partiellement contenu dans $|c_s|$ et que le système $|x_s|$, défini par l'équivalente

$$(1) \quad c_s \equiv c_{s-1} + x_s,$$

est effectif. D'autre part, comme une courbe x_s passe par chaque point-base de $|c_i|$, on peut écrire

$$(2) \quad c'_s \equiv c_{s-1} + x'_s,$$

et x'_s , partie fixe de l'adjoint impur $|c'_s|$ de $|c_{s-1}|$, est une courbe isolée ou la courbe 0. Le système $|x_s|$ dont l'adjoint se réduit à une courbe isolée ou à la courbe 0, est de genre virtuel 1 et l'on a $x_s \cdot x'_s = 0$.

⁽¹⁾ Nous représentons par le symbole $a.b$ le nombre d'intersections libres de deux courbes a et b .

Partant de (1), l'on peut écrire

$$(3) \quad p_s = p_{s-1} + 1 + c_{s-1} \cdot x_s - 1 \quad \text{ou} \quad x_s \cdot c_{s-1} = t.$$

Si $t > 1$, $|c_s|$, qui est de dimension $r_s = p_s - 1 + t > p_s$, est régulier et sa série caractéristique est d'ordre

$$(4) \quad c_s \cdot c_s = r_s + p_s - 1 = 2p_s - 2 + t.$$

Dès lors, de la relation

$$c_s \cdot c_s = (c_{s-1} + x_s) \cdot (c_{s-1} + x_s) = c_{s-1} \cdot c_{s-1} + 2c_{s-1} \cdot x_s + x_s \cdot x_s,$$

on tire, en vertu de (3) et de (4) (où l'on substitue $s - 1$ à s),

$$(5) \quad x_s \cdot x_s = 0$$

et, ensuite,

$$(c_{s-1} + x_s) \cdot x_s = c_{s-1} \cdot x_s = c_s \cdot x_s = t.$$

Observons que (5) implique que $|x_s|$ qui est elliptique, est une courbe isolée ou un faisceau. Plus que cela, la dernière alternative, en admettant qu'elle puisse se présenter, ne peut le faire qu'exceptionnellement, car aucune hypothèse restrictive n'a été formulée sur la configuration des points-base de $|c_i|$ et, par suite, sur celle des points-base assignés de $|x_s|$.

Si $t = 1$, $|c_s - x_s| = |c_{s-1}|$ a la dimension $r_{s-1} = r_s - t = r_s - 1$ et x_s est effectivement fondamentale monovalente pour $|c_s|$; $|x_s|$ se réduit donc à une courbe isolée éventuellement 0 et $x_s \cdot x_s = 0$.

On sait par (3) que $c_{s-1} \cdot x_s = 1$, donc que $|c_{s-1}|$ découpe sur x_s une série linéaire g_1 qui se réduit nécessairement à un point fixe B_{s-1} , car x_s est de genre 1. Toutes les courbes c_{s-1} ont donc ce point en commun; celui-ci est extérieur à la base assignée de $|c_{s-1}|$ et ce système possède la surabondance 1. La série caractéristique de $|c_{s-1}|$ est spéciale et de dimension

$$r_{s-1} - 1 = p_{s-1} - 2 + t = p_{s-1} - 1,$$

c'est donc la série canonique. Notons encore que $|c_{s-1}|$ possède le degré virtuel

$$2p_{s-1} - 1 = 2p_{s-1} - 2 + t.$$

Supposons que $|c_s|$ est régulier. Il est alors de degré

$$r_s + p_s - 1 = 2p_s - 1 \quad \text{car} \quad r_s = p_s - 1 + t = p_s$$

et

$$c_s \cdot x_s = c_s \cdot (c_s - c_{s-1}) = 1.$$

Mais x_s est de genre virtuel 1; $|c_s|$ ne peut donc découper sur x_s qu'une série linéaire g_1^0 . Autant dire que $|c_s|$ possède sur cette courbe un point-base simple non assigné $B_s = g_1^0$ et a la surabondance 1.

De toute façon, on a virtuellement $c_s \cdot x_s = 1$, $c_{s-1} \cdot x_s = 1$ et, par conséquent,

$$x_s \cdot x_s = x_s \cdot (c_s - c_{s-1}) = 0.$$

En résumé : si $|c_s|$ est un système d'argument t , le système $|c_s|$ $s = 1, 2, \dots, i$ est de degré virtuel (et effectif pour $t \geq 2$) $c_s \cdot c_s = 2p_s - 2 + t$; de plus, $|c_s - c_{s-1}|$, $s \geq 2$, définit un système effectif $|x_s|$ de genre virtuel 1 tel que $x_s \cdot x_s = 0$ et se réduisant, pour une base non particularisée de $|c_i|$, à une courbe isolée. Enfin, on a virtuellement (et effectivement pour $t \geq 2$)

$$c_s \cdot x_s = c_{s-1} \cdot x_s = t.$$

6. Le système $|x_s| = |c_s - c_{s-1}|$, $s \geq 2$, possède une base assignée égale à la différence des bases assignées de $|c_s|$ et $|c_{s-1}|$. On sait que $c_{s-1} \cdot x_s = t$, donc que $|c_{s-1}|$ découpe une série linéaire de dimension $t - 1 - e$, $e \geq 0$, sur une courbe x_s générique, car x_s est de genre (virtuel) un. On sait d'autre part que $r_s \geq r_2 = r_1 + t > t$. Il résulte de là qu'il existe un système de courbes c_{s-1} particulières, soient les courbes \bar{c}_{s-1} , formées de x_s et d'une résiduelle \bar{c}_{s-2} variable dans un système linéaire $|\bar{c}_{s-2}|$ de dimension

$$r_{s-1} - t + e = r_{s-2} + e = p_{s-1} - 1 + e.$$

Désignons par $|\bar{c}_{s-1}|$ le système $|x_s + \bar{c}_{s-2}|$; $|\bar{c}_{s-1}|$ est totalement contenu dans $|c_{s-1}|$.

La série linéaire découpée sur une c_{s-1} générique par une \bar{c}_{s-2} est de dimension $r = p_{s-1} - 1 + e$ et d'ordre

$$n = \bar{c}_{s-2} \cdot c_{s-1} = (\bar{c}_{s-2} - x_s) \cdot c_{s-1} \leq c_{s-1} \cdot c_{s-1} - c_{s-1} \cdot x_s = 2p_{s-1} - 2,$$

car la base de $|c_{s-1}|$ contient celle de $|\bar{c}_{s-1}|$. Écrivons $n = 2p_{s-1} - 2 - j$, $j \geq 0$. Je dis que $e = j = 0$ et que, par suite, $|\bar{c}_{s-2}|$ est un adjoint de $|c_{s-1}|$. En effet, la série linéaire découpée par $|\bar{c}_{s-2}|$ sur c_{s-1} est une série $g_{2p_{s-1}-2-j}^{p_{s-1}-1+e}$. Si $e > 0$, cette série est non spéciale et doit être d'ordre au moins égal à $2p_{s-1} - 1 + e$, ce qui n'est pas le cas. D'autre part, pour $e = 0$, la série en question doit avoir un ordre au moins égal à $2p_{s-1} - 2$, ce qui exige $j = 0$.

D'après cela, observons que

$$\bar{c}_{s-1} \cdot c_{s-1} = (\bar{c}_{s-2} + x_s) \cdot c_{s-1} = 2p_{s-1} - 2 + t = c_{s-1} \cdot c_{s-1}.$$

Les systèmes $|c_{s-1}|$ et $|\bar{c}_{s-1}|$ ont donc même base et $c_{s-1} \equiv \bar{c}_{s-1}$.

En somme, nous avons montré que l'opération $c_{s-1} - x_s$ était possible et définissait un adjoint $|\bar{c}_{s-2}|$ de $|c_{s-1}|$. On peut préciser et démontrer que $|c_{s-2}|$ est l'adjoint pur $|c_{s-2}|$ de $|c_{s-1}|$.

Pour prouver ce dernier point, notons d'abord que

$$\begin{aligned} \bar{c}_{s-2} \cdot c_{s-2} &= (c_{s-1} - x_s) \cdot (c_{s-1} - x_s) = c_{s-1} \cdot c_{s-1} - 2c_{s-1} \cdot x_s + x_s \cdot x_s \\ &= (2p_{s-1} - 2 + t) - 2t - 0 = 2p_{s-2} - 2 + t, \end{aligned}$$

où $\bar{c}_{s-2} \cdot \bar{c}_{s-2} = c_{s-2} \cdot c_{s-2}$ (n° 5).

Si $|\bar{c}_{s-2}|$ était un adjoint impur de $|c_{s-1}|$, on aurait $\bar{c}_{s-2} \equiv c_{s-2} + \theta$, θ étant une courbe partie fixe de $|\bar{c}_{s-2}|$ et

$$\bar{c}_{s-2} \cdot \bar{c}_{s-2} = (c_{s-2} + \theta) \cdot (c_{s-2} + \theta) = c_{s-2} \cdot c_{s-2} + 2c_{s-2} \cdot \theta + \theta \cdot \theta.$$

Mais $c_{s-2} \cdot \theta = 0$, car

$$c_{s-1} \cdot c_{s-2} = c_{s-1} \cdot (c_{s-2} + \theta) = 2p_{s-1} - 2.$$

D'autre part,

$$\theta \cdot \theta = \theta \cdot \theta + c_{s-2} \cdot \theta = (\theta \cdot c_{s-2} + \theta) < 0,$$

car θ est partie fixe de $|c_{s-2} + \theta|$. Au total, si l'on avait $\bar{c}_{s-2} = c_{s-2} + \theta$, la relation $\bar{c}_{s-2} \cdot \bar{c}_{s-2} = c_{s-2} \cdot c_{s-2}$ ne pourrait avoir lieu. Il faut donc bien admettre que $\bar{c}_{s-2} \equiv c_{s-2}$.

7. Si $|c_i|$ est d'argument t (au sens étroit), on a

$$c_i = c_1 + (i-1)(c_2 - c_1).$$

Pour le prouver, écrivons encore $x \equiv c_i - c_{i-1}$. D'après ce qui précède, $c_{i-1} - x \equiv c_{i-2}$ ou $x \equiv c_{i-1} - c_{i-2}$. Par suite, $c_{i-3} \equiv c_{i-2} - x$, et ainsi de suite. Autant dire que

$$x \equiv c_i - c_{i-1} \equiv c_{i-1} - c_{i-2} \equiv \dots \equiv c_2 - c_1,$$

ou $c_i \equiv c_1 + (i-1)(c_2 - c_1)$.

Remarquons que pour $t=2$, comme pour $t=1$ (n° 5), $|x|$ se réduit à une courbe isolée. En effet, si $|x|$ était un faisceau, celui-ci découperait une série linéaire g_2^1 sur une c_i générique; $|c_i|$ serait donc hyperelliptique et l'on aurait $|c_{i-1}| = (p_i - 1)|x|$, ce qui est impossible pour $i-1 > 1$ (n° 2).

8. Le théorème précédent fournit une méthode pratique pour la détermination des systèmes $|c_i|$ d'argument t birationnellement distincts. Pour les obtenir, on peut opérer comme suit :

a. construire les systèmes $|c_1|$ birationnellement distincts de genre $p_1 \leq 1$ et dimension r_1 capables d'être adjoints de système, $|c_2|$ de genre $p_1 + t$ et dimension $r_1 + t$.

b. construire les systèmes $|c_2|$ de ces genre et dimension birationnellement distincts dont les adjoints purs sont précisément ces systèmes $|c_1|$.

c. construire ceux des systèmes $|c_i| = |c_1 + (i-1)(c_2 - c_1)|$ qui sont effectifs.

C'est de cette méthode que nous userons dans ce qui suit.

9. Occupons-nous d'abord du cas $p_1 < 0$. Il ne se présente que si $|c_1|$ est composé avec les courbes d'un faisceau, celles-ci étant rationnelles (n° 2) et $|c_2|$

est hyperelliptique. Or un faisceau de courbes rationnelles est birationnellement réductible à un faisceau de droites $|C_1(A)|$ de sommet A. Si chaque courbe c_i est formée à l'aide de $n > 1$ courbes du faisceau, on peut donc écrire $c_i \equiv C_n(A^n)$.

Sur une courbe c_2 générique, la série linéaire g_2^1 portée par cette courbe et avec laquelle la série canonique est composée, est découpée par le faisceau $|C_1(A)|$. De plus, puisque $r_1 = n$, $p_2 = r_1 + 1 = n + 1$. On déduit de là que si $|c_2|$ est d'ordre $n + m + 3$, $m \geq 0$:

- 1° A est base $(n + m + 1)$ -uple pour $|c_2|$;
- 2° $|c_2|$ possède encore m points-base doubles A_1, \dots, A_n et $q \geq 0$ points-base simples B_1, \dots, B_q .

En somme, on a

$$c_2 \equiv C_{n+m+3}(A^{n+m+1}A_1^2 \dots A_m^2 B_1 \dots B_q),$$

$$x \equiv c_2 - c_1 \equiv C_{m+3}(A^{m+1}A_1^2 \dots A_m^2 B_1 \dots B_q).$$

Mais on sait que $x.x = 0$, q doit donc être tel que

$$(m + 3)^2 = (m + 1)^2 + 4m + q \quad \text{ou} \quad q = 8.$$

De là,

$$x \equiv C_{m+3}(A^{m+1}A_1^2 \dots A_m^2 B_1 \dots B_8),$$

et

$$(I) \quad c_i \equiv c_1 + (i - 1)x \equiv C_{n+i-1(m+3)}(A^{n+(i-1)(m+1)}A_1^{2i-2}, \dots, A_m^{2i-2}B_1^{i-1}, \dots, B_8^{i-1})$$

avec

$$t = p_2 - p_1 = n + 1 - (-n + 1) = 2n, \quad p_i = (-n + 1) + (i - 1)2n = (2i - 3)n + 1.$$

La réponse ainsi obtenue doit être examinée de plus près.

10. Si $m = 0$, on

$$(II) \quad |c_i| = |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-1}B_1^{i-1}, \dots, B_8^{i-1})|, \quad n \geq 1.$$

Un tel système est certainement d'ordre minimum, car $n + 3(i - 1)$ est l'ordre minimum d'un système dont l'adjoint l'indice $i - 1$ est réduit à l'ordre minimum n .

Supposons maintenant que l'on a $m \geq 1$.

Observons que toute transformation de Jonquières conservant le plan w de $|c_i|$ et le sommet A conserve le faisceau $|C_1(A)|$ et transforme $|c_i|$ en un système $|c_i^0|$ composé avec des droites de $|C_1(A)|$. Il transforme par suite $|c_i|$ en un système $|c_i^0|$ répondant à la formule (I) du n° 9, seul m pouvant changer de valeur (ce qui correspond à une modification du nombre des droites fondamentales AA, impropres pour $|c_i|$). Nous pouvons donc faire l'hypothèse que $|c_i|$ est réduit à l'ordre minimum par des transformations de Jonquières de

sommet A. Cette hypothèse entraîne des conséquences pour la configuration des points-base de $|c_i|$.

Parce que la somme des ordres des points d'un triple AA_sA_k ou AA_sB_k excède l'ordre de $|c_i|$, les trois points d'un tel triple ne peuvent servir de base à une transformation quadratique conservant A, car celle-ci réduirait l'ordre $|c_i|$. Il résulte de là que les points A_s ou B_k sont infiniment voisins de A et qu'un point A_s ou B_k ne peut succéder à un point A_j du domaine du premier ordre de A sur une branche linéaire de courbe.

Supposons qu'un point Y de la base de $|c_i|$ succède au point A_s (nécessairement, d'après ce qui précède, sur une branche cuspidale de courbe). Une transformation quadratique de deuxième espèce $T(AA_sX)$ basée sur A, A_s et un point générique X du plan transforme $|c_i|$ en un système du même type et du même ordre $|c_i^0|$, mais pour lequel Y est transformé en un point-base du même ordre de multiplicité (situé dans le domaine du premier ordre de A), tandis que A_s disparaît pour être remplacé par un point $(2i-2)$ -uple infiniment voisin de A (dans le domaine du premier ordre de celui-ci) et commun à $2i-2$ branches linéaires de courbe c_i^0 qui, prises deux à deux, ne sont pas en général osculatrices en A. Il s'ensuit que l'on peut, sans augmenter l'ordre de $|c_i|$, faire en sorte que les points A_s soient infiniment voisins de A dans des directions différentes, et que tout point B_k ou bien appartienne au domaine du premier ordre de A ou succède à un autre point B_s de ce domaine.

Trois points B_j, B_s, B_k ne peuvent succéder à un point A sur une branche linéaire de courbe si les deux premiers ne sont pas alignés sur A. En effet, dans le cas contraire, la transformation de Jonquières d'ordre trois et de base $(AB_jB_sB_kA_1)$ serait réductrice de l'ordre de $|c_i|$, ainsi qu'on le vérifie par un calcul élémentaire.

D'après cela, il y a $a \geq 1$ points B_s proches de A. La loi de proximité en ce point doit donc être satisfaite et l'on doit avoir

$$n + (m+1)(i-1) \geq 2m(i-1) + (i-1)a$$

ou

$$(\alpha) \quad m + a \leq \frac{n}{i-1} + 1.$$

Des systèmes d'ordre minimum du type (I) avec m donné existent certainement. Par exemple, ceux pour lesquels tous les points $A_1, \dots, A_m B_1, \dots, B_s$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes, si l'on prend n satisfaisant à la relation (α) dans laquelle on fait $a = 8$.

10^{bis}. Supposons qu'une transformation birationnelle n'appartenant pas au type de Jonquières puisse encore abaisser l'ordre de $|c_i|$. Elle change les droites par A en courbes d'un certain ordre $z > 1$ et $|C_n(A^n)|$ en un système de courbes

d'ordre zn composées avec les précédentes. Elle change $|c_i|$ en un système de courbes d'ordre $n^0 \geq zn + (i-1)3$. Mais, par hypothèse,

$$n^0 < n + (m+3)(i-1).$$

Donc

$$n + (m+3)(i-1) > zn + 3(i-1) \quad \text{ou} \quad n + m(i-1) > zn \geq 2n,$$

car $z \geq 2$, ou $m(i-1) > n$. De là, enfin, parce que $a \geq 1$,

$$(1) \quad m + a > \frac{n}{i-1} + 1.$$

Cette dernière relation étant en contradiction avec la relation (α) du n° 10, nous devons rejeter l'hypothèse que nous venons de faire et admettre que tout système $|c_i|$ actuellement considéré est réductible birationnellement à un système d'ordre minimum du type (I) ou (II).

11. Ces premiers résultats peuvent être résumés de la façon suivante :

Tout système $|c_i|$ d'argument t pour lequel $|c_1|$ est de genre $p_1 < 0$ est birationnellement réductible à un système d'ordre minimum de l'un des types suivants :

$$(1) \quad |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-1}B_1^{i-1}, \dots, B_8^{i-1})|, \quad n > 1, \quad t = 2n,$$

$$(2) \quad |C_{n+(i-1)(m+3)}(A^{n+(i-1)(m+1)}A_1^{2i-2}, \dots, A_m^{2i-2}B_1^{i-1}, \dots, B_8^{i-1})|, \quad n > 1, \quad t = 2n.$$

Pour le système (2), les points A_1, \dots, A_m sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes; B_1, \dots, B_8 sont infiniment voisins de A, aucun d'eux ne succédant à un point A_s ; trois points B ne peuvent succéder à A sur une branche linéaire de courbe si les deux premiers ne sont pas alignés sur A. Si a est le nombre des points B proches de A, la relation suivante est satisfaite

$$m + a \leq \frac{n}{i-1} + 1.$$

12. Lorsque $p_1 = 0$, $|c_1|$ est birationnellement transformable en l'un des systèmes de courbes suivants :

- 1° Faisceau de droites $c_1 \equiv C_1(A)$;
- 2° Système des coniques $c_1 \equiv C_2$;
- 3° Système de courbes $c_1 \equiv C_n(A^{n-1})$, $n \geq 1$;
- 4° Système de courbes $c_1 \equiv C_n(A^{n-1}A_1^1, \dots, A_m^1)$, $n > 1$, $n-1 \geq m > 0$; pour $m \geq 2$, les points A_1, \dots, A_m sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes.

Pour ces systèmes, on a respectivement

$$r_1 = 1, 5, 2n, 2n - m; p_2 = 2, 6, 2n + 1, 2n - m + 1,$$

et

$$t = p_2 - p_1 = 2, 6, 2n + 1, 2n - m + 1.$$

Pour construire les systèmes $|c_i|$ associés à un système $|c_1| = |C_1|(A)$, il suffit de raisonner comme il vient d'être fait en substituant $C_1(A)$ à $C_n(A^n)$. On trouve d'abord les systèmes d'ordre minimum

$$(1) \quad |C_{3i-2}(A^i B_1^{i-1}, \dots, B_s^{i-1})|,$$

puis, formellement, les systèmes

$$(2) \quad |C_{1+(i-1)(m+3)}(A^{1+(i-1)(m+1)} A_1^{2i-2}, \dots, A_m^{2i-2} B_1^{i-1}, \dots, B_s^{i-1})|, \quad m \geq 1.$$

Pour ces derniers que l'on peut supposer birationnellement irréductibles à des systèmes du même type et d'ordre inférieur, on trouve comme au n° 10 que $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_s$ doivent être infiniment voisins de A et que, de plus, m et le nombre $a \geq 1$ des points B proches de A doivent satisfaire à la relation (α) qui s'écrit actuellement

$$m + a \leq \frac{1}{i-1} + 1.$$

Cette relation est contradictoire en soi parce que $m + a \geq 2$ et $i > 2$. Les systèmes (2) ne sont donc pas effectifs et seuls les systèmes (1) doivent être retenus.

13. Ce premier cas ayant été examiné, conservons l'hypothèse $p_1 = 0$ et supposons en outre que $c'_2 \equiv c_1$. Alors $x \equiv c_2 - c_1$ est une cubique virtuellement elliptique de degré 0. Nous la désignerons par la notation $x \equiv C_3(A_1 A_2, \dots, A_9)$ où $x = C_3(AA_1, \dots, A_8)$. Les systèmes $|c_i|$ correspondant aux systèmes $|c_1|$ plus haut définis (2°, 3°, 4°) seront donc

$$(1) \quad |c_i| = |c_1 + (i-1)x| = |C_{3i-1}(A_1^{i-1} A_2^{i-1}, \dots, A_9^{i-1})|,$$

$$(2) \quad |c_i| = |c_1 + (i-1)x| = |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^{i-1}, \dots, A_s^{i-1})|, \quad n \geq 1,$$

$$(3) \quad |c_i| = |c_1 + (i-1)x| = |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^i, \dots, A_m^i A_{m+1}^{i-1}, \dots, A_s^{i-1})| \quad m > 0, \quad n \geq 2,$$

car les points-base assignés de $|c_i|$ figurent parmi ceux de $|x| = |c_2 - c_1|$. Notons, que pour les systèmes (3), les points A_1, \dots, A_m , si $m > 1$, sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes. La relation de proximité en A doit donc être satisfaite et l'on doit avoir

$$n - 2 + i \geq mi \quad \text{ou} \quad m \leq \frac{n-2}{i} + 1.$$

Les systèmes (1), (2) et (3) sont d'ordre minimum parce que leur système $|c_1|$ est lui-même d'ordre minimum. On le montre comme au n° 10.

14. Voyons ce qui se passe si $p_1 = 0$ et si $c'_2 \not\equiv c_1$.

Nous savons que

$$c'_2 \equiv c_1 + x' \quad \text{si} \quad c_2 \equiv c_1 + x.$$

La courbe x' est formée de courbes fondamentales pour $|c_1|$. En effet,

$$c_1.x' = (c_2 - x).x' = c_2.x' - x.x' = c_2.x' = 0,$$

car $x.x' = 0$ (x étant elliptique) et

$$c_2.x' = c_2.(c'_2 - c_1) = 0,$$

car $|c'_2|$ et $|c_1|$ sont des adjoints de $|c_2|$. Or seules les courbes désignées au 4° du n° 12 (le 1° ayant déjà été examiné) possèdent de telles courbes fondamentales : les droites AA_1, \dots, AA_m . On ne peut donc associer l'hypothèse $x' \equiv c'_2 - c_1 \equiv 0$ qu'à un système

$$|c_1| = |C_n(A^{n-1}A_1, \dots, A_m)|, \quad m > 0.$$

Changeons de notations et écrivons

$$c_1 \equiv C_n(A^{n-1}A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_q), \quad m > 0, \quad q \geq 0, \quad m + q \leq n - 1.$$

Le système $|c'_2|$ ne peut différer de $|c_1|$ que par tout ou partie des droites fondamentales $AA_1, \dots, AA_m, AB_1, \dots, AB_q$. En disposant convenablement des indices, on peut faire en sorte que précisément

$$c'_2 \equiv c_1 + AA_1 + \dots + AA_m \equiv C_{n+m}(A^{n-1+m}A_1^2, \dots, A_m^2B_1, \dots, B_q).$$

De là

$$c_2 \equiv C_{n+m+3}(A^{n+m}A_1^3, \dots, A_m^3B_1^2, \dots, B_qB_{q+1}, \dots, B_{q+b}), \quad b \geq 0,$$

$$x \equiv c_2 - c_1 \equiv C_{m+3}(A^{m+1}A_1^2, \dots, A_m^2B_1, \dots, B_qB_{q+1}, \dots, B_{q+b}).$$

Or $x.x = 0$. Par conséquent

$$(m+3)^2 - (m+1)^2 - 4m - q - b = 0 \quad \text{ou} \quad q + b = 8$$

et

$$c_i \equiv c_1 + (i-1)x \equiv C_{n+(i-1)(m+3)}(A^{n-1+(i-1)(m+1)}A_1^{2i-1} \dots A_m^{2i-1}B_1^i \dots B_q^iB_{q-1}^{i-1} \dots B_q^{i-1}).$$

Par hypothèse, n° 12, les points $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_q$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes. En raisonnant comme on l'a fait plus haut, on montre que l'on peut, sans augmenter l'ordre de $|c_i|$ (la somme des ordres de multiplicité de A et d'un point A_s égalant l'ordre de c_i), faire en sorte qu'un point-base A_s ne soit jamais suivi d'un point-base B_k .

Comme au n° 12, on constate qu'une transformation de Jonquières transforme $|c_1|$ en un système du même type. Cette transformation transforme donc $|c_i|$ en un système répondant à la même formule, et l'on peut supposer $|c_i|$ réduit à l'ordre minimum de son type par de telles transformations.

Cette hypothèse de l'ordre minimum étant réalisée, on montre encore que si des points $B^iB^{i-1}B^{i-2} \dots$ succèdent à A sur une branche linéaire de courbe, les deux premiers sont alignés sur A (n° 12).

Enfin, si a est le nombre des points B proches de A , la relation de proximité en A conduit à la condition

$$n - 1 + (i - 1)(m + 1) \geq (2i - 1)m + a(i - 1) + q$$

ou

$$m + a + \frac{m + q}{i - 1} \leq \frac{n - 1}{i - 1} + 1.$$

L'existence de systèmes $|c_i|$ du type indiqué et d'ordre minimum $n + (i - 1)(m + 3)$ est assurée ainsi qu'en témoigne l'exemple pour lequel $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_s$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes, n étant choisi de façon à satisfaire à la relation de proximité en A

$$n - 1 + (i - 1)(m + 1) \geq m(2i - 1) + 8(i - 1) + q$$

pour les valeurs de m et de i choisies.

15. Résumons ces nouveaux résultats.

Tout système $|c_i|$ d'argument t pour lequel le dernier adjoint infini $|c_1|$ est de genre 0 est réductible birationnellement à un système d'ordre minimum de l'un des types suivants ⁽¹⁾

- (1) $|C_{3i-2}(A_1^{i-1} A_2^{i-1} \dots A_9^{i-1})|, \quad t = 2,$
- (2) $|C_{3i-1}(A_1^{i-1} \dots A_9^{i-1})|, \quad t = 6,$
- (3) $|C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t = 2n + 1, \quad n \geq 1,$
- (4) $|C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^i A_2^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t = 2n, \quad n > 1,$
- (5) $|C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^i \dots A_m^i A_{m+1}^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t = 2n - m + 1, \quad 8 \geq m \geq 2,$
- (6) $\left\{ \begin{array}{l} |C_{n+(i-1)(m+3)}(A^{n-1+(i-1)(m+1)} A_1^{2i-1} \dots A_m^{2i-1} B_1^i \dots B_q^i B_{q+1}^{i-1} \dots B_8^{i-1})|, \\ n \geq 2, \quad m \geq 1, \quad q \leq 8, \quad t = 2n + 1 - m - q. \end{array} \right.$

Pour les systèmes (5), les points A_1, \dots, A_m sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes et l'on doit avoir

$$m \leq \frac{n - 2}{i} + 1.$$

Pour les systèmes (6), les points $A_1, \dots, A_m; B_1, \dots, B_q$ sont infiniment voisins de A dans des directions distinctes, un point A_0 n'est suivi d'aucun autre point-base; si des points $B^i B^{i-1} B^{i-2} \dots$ succèdent à A sur une branche linéaire de courbe, les deux premiers sont alignés sur A ; de plus on doit avoir

$$m + a + \frac{m + q}{i - 1} \leq \frac{n - 1}{i - 1} + 1,$$

$a > 0$ étant le nombre des points B proches de A .

(1) Pour (5), l'ordre n'est peut-être minimum que vis-à-vis du groupe des transformations de Jonquières (n° 14).

16. Il nous reste à examiner le cas $p_1 = 1$. On sait ($n^{\text{os}} 2, 3$) que dans ce cas le système $|c_1|$ est irréductible et ne peut être birationnellement identique à un faisceau de Halphen proprement dit. De là, les seules éventualités à considérer du point de vue crémonien

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \quad & |c_1| = |C_3(A_1 \dots A_m)|, \quad 0 \leq m \leq 8 \quad (n^{\circ} 3), \\ 2^{\circ} \quad & |c_1| = |C_4(A_1^2 A_2^2)|, \end{aligned}$$

car on sait qu'un système infini de courbes elliptiques irréductible qui n'est pas un faisceau de Halphen proprement dit est birationnellement transformable en un système de cubiques doté ou non de points-base ou en un système de quartiques doté de deux points-base doubles.

17. Moyennant $x \equiv c_2 - c_1$, nous avons $c_1 \cdot x = t$, ($n^{\circ} 5$). Donc, sur une courbe x , $|c_1|$ découpe une série linéaire g_t de dimension maximum $t - 1$ et comme $r_1 = p_1 - 1 + t = t$, x est contenue dans une courbe c_1 .

Examinons d'abord ce qui se passe lorsque $c_1 \equiv C_4(A_1^2 A_2^2)$.

Puisque x fait partie d'une courbe c_1 et est de genre et de degré (virtuels) un et zéro, x est une courbe $C_3(A_1, \dots, A_9)$ ou $C_4(A_1^2 A_2^2 A_3, \dots, A_{10})$. D'autre part, puisque $c_i \equiv c_1 + (i - 1)x$, on a

$$c_i \equiv C_{3i+1}(A_1^{i+1} A_2^{i+1} A_3^{i-1} \dots A_9^{i-1}) \quad \text{ou} \quad c_i \equiv C_{4i}(A_1^{2i} A_2^{2i} A_3^{i-1} \dots A_{10}^{i-1}).$$

Mais en faisant subir au système $|c_i|$ correspondant à la deuxième alternative une transformation quadratique $T(A_1 A_2 A_3)$ (1) basée sur les points A_1, A_2, A_3 , on transforme ce système en un système de courbes analogues aux premières. Nous devons donc nous borner au choix de $x \equiv C_3(A_1, \dots, A_9)$.

Si $c_1 \equiv C_3(A_1, \dots, A_m)$, x ne peut être qu'une cubique $C_3(A_1, \dots, A_9)$ et l'on a

$$c_i \equiv C_{3i}(A_1^i \dots A_m^i A_{m+1}^{i-1} \dots A_9^{i-1}).$$

On vérifie de suite que pour un système $|c_i|$ de pareilles courbes on a

$$r_1 = 9 - m, \quad p_2 = 9 - m + 1, \quad t = p_2 - p_1 = 9 - m,$$

tandis que si $c_1 \equiv C_4(A_1^2 A_2^2)$, on a

$$r_1 = 8, \quad p_2 = r_1 + 1, \quad t = p_2 - p_1 = 8.$$

18. Le système $|c_i|$ d'argument $t = 1$ n'est représenté que par le type

$$(1) \quad |c_i| = |C_{3i}(A_1^i \dots A_8^i A_9^{i-1})|.$$

(1) Pareille transformation existe toujours, car étant donnés les ordres de multiplicité de ces points pour C_4 , les deux derniers ne peuvent ni être proches du premier ni être alignés sur lui.

En effet, on doit avoir dans ce cas $p_2 = p_1 + t = p_1 + 1$ et $p_1 \leq 1$. D'autre part, $p_2 = r_1 + 1$ et $r_1 \geq 1$. De là, $2 \leq p_2 \leq 2$ ou $p_2 = 2$, $p_1 = r_1 = 1$ et $|c_1|$ doit être un faisceau de courbes elliptiques.

Ainsi que nous l'avons prévu (n° 5), $|c_i|$ et ses adjoints successifs sont tous de surabondance 1 car une courbe variable c_s , $s = 1, 2, \dots, i$ ne coupe $x \equiv C_3(A_1, \dots, A_9)$ qu'en un seul point B_s , lequel doit être fixe parce que x est elliptique. Les systèmes $|c_i|$ définis par (1), virtuellement, sont donc effectivement des systèmes

$$|C_{3i}(A_1^i \dots A_8^i A_9^{i-1} B_i)|,$$

B_i étant un point-base non assigné dont la position sur la cubique x dépend de la valeur de l'indice.

Le système (1) a été considéré notamment par G. Fano et Faedo.

Signalons en passant qu'il existe, sur x , des relations fonctionnelles entre les différents points B_i , B_{i-1} , \dots , $B_1 = A_9$. Considérons en effet le faisceau de courbes défini par deux courbes $2c_s$ et $c_{s+1} + c_{s-1}$. Ce faisceau est précisément un faisceau $|C_{6i}(A_1^i, \dots, A_8^{2i} A_9^{2i-2})|$ découpant sur x une série linéaire d'ordre 2 et comprenant parmi ses groupes les couples $2B_s$ et $B_{s+1} + B_{s-1}$. On a donc sur x l'équivalence $2B_s \equiv B_{s+1} + B_{s-1}$ et B_s est l'un des points doubles de la série linéaire $|B_{s+1} + B_{s-1}|$, $s = 1, 2, \dots, i-1$.

19. En somme, les systèmes $|c_i|$ d'argument t pour lesquels le dernier adjoint infini $|c_1|$ est de genre 1 sont birationnellement réductibles aux systèmes d'ordre minimum

$$\begin{aligned} |C_{3i}(A_1^i \dots A_m^i A_{i-1}^{m+1} \dots A_9^{i-1})|, & \quad 0 \leq m \leq 8, \quad t = 9 - m, \\ |C_{3i+1}(A_1^{i+1} A_2^{i-1} \dots A_9^{i-1})|, & \quad t = 8. \end{aligned}$$

Les systèmes du premier type pour lesquels $m = 8$ sont de surabondance 1.

20. Ainsi que nous l'avons montré au n° 4, tout système $|\bar{c}_i|$ d'argument t au sens large admet comme adjoint pur un système $|\bar{c}_{i-1}|$ d'argument t au sens étroit. Comme nous supposons $i \geq 3$, $|c_{i-2}|$ existe.

Écrivons $\bar{c}_i \equiv c_{i-1} + \gamma$. Nous tirons de là $\bar{c}'_i \equiv c'_{i-1} + \gamma'$. Or un théorème connu ⁽³⁾ permet d'affirmer que la courbe γ' , partie fixe de $|\bar{c}'_i|$, est contenue dans la partie fixe du système $|\bar{c}'_{i-1}| = |c'_{i-1}|$, système dont l'existence est assurée ainsi que nous venons de le rappeler. La partie fixe de $|c'_{i-1}|$ est

(1) G. FANO, Osservazioni intorno il sistema aggiunto puro (Rend. Circ. Mat., Palermo, XI, p. 29, 1915).

(2) FAEDO, Sulle superficie regolari a sezioni iperpiane canoniche (Rend. Lincei, 1938, pp. 197-202 et 276-280).

(3) Cf. FABIO CONFORTO, Le superficie razionali, Zanichelli, Bologna, 1939, pp. 209-213. Voir aussi notre n° 24 suivant.

précisément la courbe x' . Il s'ensuit que $|\bar{c}_i| = |c_{i-1} + y'|$ est contenu dans $|c'_{i-1} + x'| = |c'_i|$, $|c_i|$ étant, tout au moins formellement, le système d'argument t (au sens étroit) d'adjoint pur $|c_{i-1}|$.

Tout système d'adjoint impur $|C_m(A^{z_1}, \dots, A^{z_s})|$ est un système

$$|C_{m+3}(A^{z_1+1} \dots A^{z_s+1} B_1 \dots B_r)|,$$

$B_1, B_2 \dots B_r, r \geq 0$ étant des points-base simples arbitrairement imposés au système

$$|C_{m+3}(A^{z_1+1} \dots A^{z_s+1})|.$$

Il résulte de là que $|\bar{c}_i|$ est totalement ou partiellement contenu dans $|c_i|$.

21. Si $|c_i|$ contient totalement $|\bar{c}_i|$, celui-ci n'est que le système $|c_i|$ dont on enrichit la base au moyen de points simples. Dans le cas contraire, nous pouvons d'abord supposer que la base de $|\bar{c}_i|$ est dénuée de points simples. Ce système obtenu, il suffit d'ajouter des points simples à sa base pour obtenir ceux qu'écarte la restriction provisoirement faite.

Le système $|\bar{c}_i|$ ne peut être partiellement contenu dans $|c_i|$ que si $|c'_i|$ possède une partie fixe $x' \equiv c'_i - c_{i-1}$. Cette éventualité ne se présente que pour les systèmes (2) et (6) des nos 11 et 15. Cette partie fixe est précisément formée des droites fondamentales impropres AA_1, \dots, AA_m des systèmes $|c_i|$ en question. En disposant convenablement des indices, on peut toujours faire en sorte que, précisément, $y' \equiv AA_1 + \dots + AA_s, s \leq m$. On aura alors

$$\bar{c}'_i \equiv c_{i-1} + AA_1 + \dots + AA_s \equiv c'_i - AA_{s+1} - \dots - AA_m,$$

$|\bar{c}'_i|$ passera $m - s$ fois de moins que les c'_i par A et une fois de moins par chacun des points A_{s+1}, \dots, A_m que ces mêmes courbes. Autant dire que $|\bar{c}_i|$ possède la même particularité vis-à-vis de $|c_i|$ que $|\bar{c}'_i|$ vis-à-vis de $|c'_i|$ et que $|\bar{c}_i|$ est soit du type

$$|C_{n+(i-1)(m+3)-(m-s)}(A^{n+(i-1)(m+1)-(m-s)} A_1^{2i-2} \dots A_s^{2i-2} A_{s+1}^{2i-3} \dots A_m^{2i-3} B_1^{i-1} \dots B_s^{i-1})|,$$

soit du type

$$|C_{n+(i-1)(m+3)-(m-s)}(A^{n-1+(i-1)(m+1)-m-s} A_1^{2i-1} \dots A_s^{2i-1} A_{s+1}^{2i-2} \dots A_m^{2i-2} B_1 \dots B_q B_{q+1}^{i-1} \dots B_s^{i-1})|,$$

avec $s \leq m$, soit, si on lève la restriction initiale, d'un type obtenu en accroissant de points simples les bases de ces systèmes.

22. Les conditions d'existence des deux systèmes qui viennent d'être formellement définis se ramènent aux conditions imposées par la loi proximité de en A . Elles sont identiques à celles déjà trouvées pour les systèmes $|c_i|$ correspondants. En effet, dans le premier cas, on trouve

$$n + (i-1)(m+1) - (m-s) \geq s(2i-2) + (m-s)(2i-3) + a(i-1)$$

ou

$$n + (i-1)(m+1) \geq m(2i-2) + m(i-1)$$

et

$$n + (i-1)(m+1) - 1 - (m-s) \geq s(2i-1) + (m-s)(2i-2) + a(i-1) + q$$

ou

$$n-1 - (i-1)(m+1) \geq (2i-1)m + a(i-1) + q,$$

et ces conditions sont bien celles que nous avons mises en évidence aux n^{os} 10 et 14.

Rappelons que a représente toujours le nombre des points B proches de A .

De ce qui précède, il résulte que les systèmes $|c_i|$ formels dont nous sommes partis pour déterminer les systèmes $|\bar{c}_i|$ sont effectifs.

23. Faisant une somme des résultats acquis au cours de cette Note, nous pouvons dire que :

Si $|c_i|$ est un système complet irréductible de courbes planes de genre p_i tel que p_i forme avec les genres p_{i-1}, p_{i-2}, \dots de ses adjoints purs $|c_{i-1}|, |c_{i-2}|, \dots$, d'indices $1, 2, \dots$ une progression arithmétique décroissante de raison t , i étant choisi de telle sorte que $|c_1|$ soit le dernier adjoint pur infini de $|c_i|$, le système $|c_i|$ est birationnellement réductible à un système d'ordre minimum de l'un des types suivants :

$$(I) \quad |C_{3i-1}(A_1^{i-1} \dots A_9^{i-1})|, \quad t=6,$$

$$(II) \quad |C_{3i}(A_1^i \dots A_m^i A_{m+1}^{i-1} \dots A_9^i)|, \quad t=9-m, \quad 0 \leq m \leq 8,$$

$$(III) \quad |C_{3i+1}(A_1^{i+1} A_2^{i+1} A_8^{i-1} \dots A_9^{i-1})|, \quad t=8,$$

$$(IV) \quad |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-1} A_1^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t=2n, \quad n \geq 1,$$

$$(V) \quad |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t=2n+1, \quad n \geq 1,$$

$$(VI) \quad |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^i A_2^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t=2n, \quad n > 1,$$

$$(VII) \quad |C_{n+3(i-1)}(A^{n+i-2} A_1^i \dots A_m^i \dots A_{m+1}^{i-1} \dots A_8^{i-1})|, \quad t=2n-m+1, \quad 8 \leq m \leq 2, \quad n > 1,$$

$$(VIII) \quad |C_{n+(i-1)(m+1)}(A^{n+(i-1)(m+1)} A_1^{2i-2} \dots A_m^{2i-2} B_1^{i-1} \dots B_8^{i-1})|, \quad n > 1, \quad t=2n, \quad m > 0.$$

$$(IX) \quad \begin{cases} |C_{n+(i-1)(m+3)}(A^{n-1+(i-1)(m+1)} A_1^{2i-1} \dots A_m^{2i-1} B_1^i \dots B_7^i B_{7+1}^{i-1} \dots B_8^{i-1})| \\ t=2n+1-m-q, \quad n \geq 2, \quad m \geq 1, \quad 0 \leq q \leq 8, \end{cases}$$

ou à un système obtenu en enrichissant de points simples la base de l'un de ces systèmes, ou à un système VIII ou IX diminué de $1 \leq m_1 \leq m$ de ses droites fondamentales impropres AA_1, \dots, AA_m , et doté éventuellement de points-base simples supplémentaires.

Les configurations de points-base des systèmes VII, VIII, IX doivent satisfaire aux conditions stipulées aux n^{os} 11 et 15 (1).

(1) F. CONFORTO, loc. cit.

24. Une autre méthode peut paraître plus propice à la détermination des systèmes d'argument t : celle qui prendrait comme point de départ les deux propriétés suivantes des systèmes de courbes :

I. Si $|c|$ est un système linéaire de courbes, $|c'|$ son adjoint impur, $|c^0|$ son adjoint pur (supposé existant), la partie fixe de $|c'|$ est formée de courbes fondamentales impropres monovalentes pour $|c|$ et $|c^0|$.

II. Si $|c^{0'}|$ existe, la partie fixe de $|c'|$ est comprise dans celle de $|c^{0'}|$.

Ces deux propriétés découlent simplement de théorèmes auxquels nous avons fait allusion (1).

Mais cette méthode, outre qu'elle ne rend compte qu'à posteriori de la structure des systèmes $|c_i|$ d'argument t , entraîne de nombreuses et fastidieuses vérifications numériques pour le calcul des bases.

A titre exemplatif, esquissons une détermination des systèmes $|c_i|$ correspondant au cas $c_i \equiv C_n(A^{n-1}A_1A_2 \dots A_m)$ ou, ainsi que nous l'écrirons pour plus de facilité, $c_i \equiv C_n(A^{n-1}, mA)$, $m \leq n-1$.

1° Si $c'_2 \equiv c_1$, on a évidemment $c_2 \equiv C_{n+3}(A^n, mA^2, qB)$ $q \geq 0$. Mais $r_2 = r_1 + t = (2n - m) + (2n - m + 1) = 4n - 2m + 1$. De là la condition

$$\frac{(n+3)(n+6)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - 3m - q = 4n - 2m + 1,$$

d'où l'on tire, tout calcul effectué, $m + q = 8$ et

$$c_2 \equiv C_{n+3}[A^n, mA^2, (8-m)B].$$

Puisque $|c'_2|$ est dénué de partie fixe, il en est de même pour $|c'_3|$ (II), et l'on a

$$c_3 \equiv C_{n+6}[A^{n+1}, mA^3, (8-m)B^2, sB], \quad s \geq 0.$$

En exprimant que $r_3 = r_2 + t = 6n - 3m + 2$ à partir de l'ordre et de la base de $|c_3|$, on trouve que $s = 0$. En continuant de la sorte, on retrouve, par induction complète, le système (VII).

2° Si $c'_2 \not\equiv c_1$, $x' \equiv c'_2 - c_1$ ne peut être formé qu'à l'aide de tout ou partie des droites AA_1, \dots, AA_m qui sont les seules courbes fondamentales impropres de $|c_1|$, (I). Adoptant les notations du n° 13, nous sommes amenés à substituer l'écriture $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_q$ à l'écriture A_1, \dots, A_m . Et nous aurons, moyennant $x' = AA_1 + \dots + AA_m$,

$$c_1 \equiv C_n(A^{n-1}, mA, qB) \\ c_2 \equiv C_{n+m+3}(A^{n+m}, mA^3, qB^2, sB), \quad s \geq 0.$$

(1) Voir aussi la Note relative au n° 15.

Exprimant que $|c_2|$ doit avoir la dimension $r_2 = r_1 + t = 4n - 2m - 2q + 1$, nous trouverons que

$$\frac{(n+m+3)(n+m+6)}{2} - \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} - 6m - 3q - s = 4n - 2m - 2q + 1,$$

ou

$$s + q = 8.$$

Passons à $|c_3|$. A cause de (II), la partie fixe de $|c'_3|$ est contenue dans celle de $|c'_2|$. On peut donc la supposer formée des droites AA_1, \dots, AA_{m_1} , $m_1 \leq m$. On a alors

$$c_3 \equiv C_{n+m+m_1+6}(A^{n+1+m+m_1}, m_1 A^5, (m-m_1) A^4, q B^5, (8-q) B^2, s B).$$

Exprimons que $r_3 = r_2 + t$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{(n+m+m_1+6)(n+m+m_1+9)}{2} - \frac{(n+1+m+m_1)(n+2+m+m_1)}{2} \\ - 15m - 10(m-m_1) - 6q - 3(8-q) - s \\ = 6n - 3m - 3q + 2 \quad \text{ou} \quad -m + m_1 - s = 0, \end{aligned}$$

de qui exige, puisque $m - m_1 \geq 0$, $m = m_1$ et $s = 0$. De là,

$$c_3 \equiv C_{n+2m+6}(A^{n+1+2m}, m A^5, q B^5, 8 - q B^2).$$

De proche en proche, on arrive, de cette façon laborieuse, au système formel (IX).

11. — Les surfaces d'argument t .

25. On peut représenter les courbes c_i d'un système $|c_i|$ d'argument t par les sections hyperplanes d'une surface rationnelle convenable que nous dirons d'argument t . Avant de dire un mot de ces surfaces, montrons qu'un système $|c_i|$, $i \geq 3$, est toujours simple.

Si $|c_i|$ est composé avec une involution J d'ordre m , la série caractéristique de la courbe générique de $|c_i|$ est composée avec une involution j du même ordre subordonnée à J . Cette involution j ne peut être une série linéaire g_2^1 , sans quoi $|c_i|$ serait hyperelliptique, ce qui est impossible pour $i \geq 3$ (n° 3).

Pour $t > 1$, $|c_i|$ est régulier, sa série caractéristique est une série linéaire $g_{n_i}^{r_i-1} = g_{2p_i+t-2}^{p_i+t-2}$. Si cette série est composée avec une involution d'ordre m , on a

$$2 \leq m \leq n_i : (r_i - 1) = (2p_i - 2 + t) : (p_i - 2 + t) = 1 + \frac{p_i}{p_i - 2 + t}.$$

Le dernier membre de cette suite de relations est inférieur à 2 pour $t \geq 2$. Alors on a $2 \leq m \leq 1$, ce qui est absurde. Si $t = 2$, on a $2 \leq m \leq 2$ ou $m = 2$ et $g_{n_i}^{r_i-1} = g_{2p_i}^{p_i}$. Mais alors, sur la courbe Z image de l'involution j d'ordre 2,

l'image de la série $g_{2p_i}^{n_i}$ est une série $g_{p_i}^{n_i}$, Z est donc rationnelle et j est une série linéaire d'ordre 2, ce qui est inadmissible. Si $t=1$, $r_i=p_i$ et le degré de $|c_i|$ vaut $2p_i-2$. La série caractéristique de ce système est la série canonique qui, si elle est composée avec une involution, ne peut l'être qu'avec une série linéaire g_2^1 , ce qui est encore impossible pour $i \geq 2$.

Au total, la série caractéristique d'un système $|c_i|$, $i \geq 3$, est toujours simple.

26. Rappelons rapidement comment on peut construire les surfaces F images des systèmes $|c_i|$.

Entre les courbes de $|c_i|$ et les hyperplans d'un espace S à r_i dimensions, établissons une projectivité quelconque H . À un point A générique du plan ω de $|c_i|$, faisons correspondre, dans S , le sommet A^0 de la gerbe des hyperplans homologues, dans H , des courbes c_i passant par A . Lorsque A décrit ω , A^0 décrit la surface F qui, parce que $|c_i|$ est simple, est en correspondance birationnelle avec ω . La surface F est d'ordre $c_i \cdot c_i$ et normale dans S .

Nous représenterons par c^0 la courbe de F qui correspond à la courbe c de ω .

27. Supposons d'abord que l'on a $t \geq 2$. Plaçons-nous dans le cas le plus général. Alors le système $|c_i - c_{i-1}| = |x|$ se réduit à une courbe x unique (n° 5). Désignons par x^0 la courbe qui, sur F , correspond à la courbe x de ω .

On a $x \cdot c_i = t$ et le système $x + |c_{i-1}|$ est de dimension $r_{i-1} = r_i - t$. Il s'ensuit que x^0 est d'ordre t et appartient à l'espace s_{t-1} à $t-1$ dimensions commun à tous les hyperplans découpant sur F les sections décomposées $x^0 + c_{i-1}^0$.

On voit de suite que $|c_i^0 - kx^0|$, $k \leq t-1$, est le système image des courbes $c_i - kx \equiv c_{i-k}$. Celles-ci forment un système de dimension $r_i - kt$. On conclut qu'il existe, passant par s_{t-1} , un espace s_{2t-1} , $s_{3t-1} \dots s_{(i-1)t-1}$ à $2t-1$, $3t-1 \dots$ dimensions ayant avec F un contact biponctuel, triponctuel, \dots , $(i-1)$ -ponctuel en chaque point de x^0 .

En somme : Une surface F image projective d'un système $|c_i|$ général d'argument $t \geq 3$ est d'ordre $2p_i - 2 + t$ et normale dans un espace S à $p_i - 1 + t$ dimensions; elle passe par une courbe elliptique x^0 d'ordre t normale dans un espace s_{t-1} à $t-1$ dimensions et possède un contact biponctuel, triponctuel, \dots , $(i-1)$ -ponctuel avec un espace s_{2t-1} , s_{3t-1} , \dots , $s_{(i-1)t-1}$ passant par s_{t-1} .

28. Il n'y a que deux types de systèmes $|c_i|$ d'argument $t=2$ existant d'ailleurs pour toute valeur de i , à savoir

$$|c_i| = |C_{3i}(A_1^t \dots A_7^t A_8^{t-1} A_9^{t-1})|,$$

$$|c_i| = |C_{3i-2}(A_1^t A_1^{t-1} \dots A_8^{t-1})|.$$

Ils sont de genre, degré et dimension respectifs ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} p_i &= 2i - 1, & r_i &= 2i = p_i + 1, & n_i &= 4i - 2 = 2p_i, \\ p_i &= 2i - 2, & r_i &= 2i - 1 = p_i + 1, & n_i &= 4i - 4 = 2p_i. \end{aligned}$$

Considérons l'une des surfaces F correspondantes. Elle est d'ordre $2p_i$ et normale dans un espace S_{p_i+1} à p_i+1 dimensions.

Les courbes c_i découpent sur x (qui est unique pour $t=2$ (n° 7) une série linéaire g_2^1 , car $c_i \cdot x = t = 2$. Les courbes c_i passant par un point a_1 de x passent en conséquence par un second point a_2 de la courbe et le couple a_1, a_2 correspond à un même point A de F . Les courbes c_i passant par a_1 , donc par a_2 , forment un système de degré $2p_i - 2$. Les sections hyperplanes c_i^0 qui leur correspondent sur F sont découpées par les hyperplans passant par A ; elles n'ont, prises deux à deux, que $2p_i - 2$ points communs en dehors de A . Ce dernier point est donc double pour la surface.

Parmi les ∞^{p_i} courbes c_i passant par a_1 , et par suite par a_2 , figurent les ∞^{p_i-1} courbes du système $x + |c_{i-1}|$ qui ne dépendent pas du choix de a_1 sur x . Ce système est découpé sur F par les hyperplans passant par une droite d contenant A . Lorsque a_i décrit x , A décrit d qui est une droite double pour F .

Aux ∞^{p_i-2} sections hyperplanes $2d + c_{i-1}^0$ passant par d correspondent les ∞^{p_i-2} courbes $x + c_{i-1}$ du plan ω .

Aux deux branches d'une courbe c_i en les deux points a_1 et a_2 qu'elle possède sur x , correspondent deux branches de la courbe image c_i^0 issues de A .

29. Considérons les courbes du système à composante fixe $2x + |c_{i-2}|$. Ce système a la dimension $p_i - 4$. Il a pour image le système des sections de F par les hyperplans d'une gerbe dont l'axe est un espace à trois dimensions s_3 contenant d . D'autre part, on a, si l'on désigne par \bar{c}_i^0 les sections hyperplanes passant par le point A de d ,

$$c_i^0 \cdot \bar{c}_i^0 = 2p_i, \quad \bar{c}_i^0 \cdot \bar{c}_i^0 = 2p_i - 2, \quad c_i^0 \cdot c_{i-2}^0 = c_i \cdot c_{i-2} = c_i \cdot (c_{i-1} - x) = 2p_i - 4.$$

Les sections hyperplanes de F passant par s_3 n'ayant, d'après cela, que $2p_i - 4$ intersections variables \bar{c}_i^0 , celles-ci touchent s_3 par chacune de leurs branches en A et l'espace s_3 contient la courbe d , des points infiniment voisins de la droite double d sur F .

D'une façon générale, on trouve, en raisonnant de proche en proche, que les courbes des systèmes à courbe fixe $3x + |c_{i-3}|, \dots, (i-1)x + |c_1|$ ont pour images les sections de F par des hyperplans passant respectivement par un espace s_k à 5 dimensions contenant s_3, \dots , par un espace s_{2i-3} à $2i-3$ dimensions contenant s_{2k-5} . On reconnaît aussi sans difficulté que s_{2k-1} , $k=2, 3, \dots$ possède un contact k -ponctuel avec chacune des deux branches

(1) On a $p_1 = 1$ ou 0 , donc $p_i = 1 + (i-1)t = 2i-1$ ou $p_i = 0 + (i-1)t = 2i-2$ ou $t=2$.

de \bar{c}_i^0 en A, c'est-à-dire possède un contact d'ordre $k-1$ avec chacune des deux nappes de F passant par cette droite [il suffit de considérer que $\bar{c}_i^0 c_{i-k}^0 = c_i(c_i - kx) = 2p_i - 2k$].

30. On peut se demander si la courbe des points de F infiniment voisins de d dans le domaine du premier ordre de cette droite n'est pas une courbe double pour la surface. La réponse est négative.

Considérons une courbe c_i^0 générique, soit \bar{c}_i^0 . Elle coupe d en un point A. Si ses deux tangentes en A coïncidaient avec une droite unique b , le point A, infiniment voisin de A sur b , serait double pour \bar{c}_i^0 et F. Les courbes c_i^0 passant par A et A_1 formeraient un système linéaire de dimension p_i-1 découpant sur \bar{c}_i^0 une série linéaire spéciale $g_{2p_i-2}^{p_i-2}$, ce qui n'est possible que si $|c_i^0|$ est hyperelliptique ($2A$ constituant alors un groupe neutre d'ordre 2 pour la série canonique de \bar{c}_i^0). Comme nous savons que pareille chose est impossible pour $i \geq 3$, notre affirmation est justifiée.

31. En résumé :

Une surface F image d'un système de courbes d'argument $t=2$ est à sections de genre $p_i=2i-1$ ou $2i-2$ et normale dans un espace S_i à p_i+1 dimensions; elle est d'ordre $2p_i$, possède une droite double d par laquelle passent deux nappes distinctes de la surface; chacune de ces nappes possède un contact d'ordre $1, 2, \dots, i-2$ avec un même espace $s_3, s_5, \dots, s_{2i-5}$ à $3, 5, \dots, 2i-3$ dimensions le long de cette droite. Les hyperplans passant par s_{2i-3} coupent encore F suivant un réseau de courbes elliptiques normales d'ordre p_i+1 ou un faisceau de courbes rationnelles normales d'ordre p_i .

Les courbes elliptiques ou rationnelles en question sont les images des courbes c_1 de genre $p_1=1$ ou $p_1=0$ formant le dernier adjoint infini de $|c_i|$; leur ordre vaut

$$c_i^0 \cdot c_1^0 = c_i[c_i - (i-1)x] = 2p_i - (i-1)t = p_i + p_1,$$

c'est-à-dire p_i+1 ou p_i suivant que $p_1=1$ ou $p_1=0$.

32. Il n'est qu'un système $|c_i|$ d'argument $t=1$: le système, (n° 18),

$$|c_i| = |C_{3i}(A_1^i, \dots, A_8^i A_9^{i-1} B_i)|.$$

La surface F d'argument 1, image de ce système, se présente comme une généralisation de la surface $F_4^{(3)}$ de Noether, surface d'ordre 4 normale dans l'espace S et image du système

$$|c_3| = |C_9(A_1^3, \dots, A_8^3 \cdot A_9^2 B_3)|^{(1)}.$$

(1) Voir, par exemple, F. CONFORTO, *loc. cit.*, p. 202-209.

Entre autres particularités projectives, la surface $F_k^{(3)}$ possède un point propre double uniplanaire A auquel est infiniment voisin un point A_1 double tacnodal dont le plan osculateur contient une droite de la surface passant par A.

Comme l'a fait G. Fano, on pourrait croire à priori que la surface F image du système $|c_i|$ général possède une singularité formée de $i - 2$ points doubles uniplanaires infiniment voisins successifs suivis d'un point double tacnodal. Il n'en est rien. Faedo a prouvé en effet, après M^{me} Defrise-Gussenhoven, que si l'on impose une singularité de ce type à une surface, le principe du déchargement joue et conduit, en fin de compte, à une singularité analogue à celle que possède la surface de Noëther.

33. Les propriétés projectives d'une surface F d'argument $t = 1$ s'obtiennent aisément à partir des propriétés élémentaires des systèmes $|c_i|$ correspondants, à savoir : un système $|c_s|$, $s = 1, 2, \dots, i$ est de genre et dimension i , de degré $2i - 2$, et sa série caractéristique est la série canonique; il donne lieu aux relations simples

$$c_s \cdot c_s = 2s - 2 \quad \text{et} \quad c_s \cdot c_k = s + k - 1, \quad s \neq k.$$

Sans nous étendre sur cette question déjà traitée par Fano et Faedo, nous nous contenterons d'énoncer les propriétés les plus remarquables de F.

La surface F d'argument $t = 1$ est normale dans un espace S_i à i dimensions et à sections hyperplanes canoniques.

Elle passe par une droite simple d et possède un contact d'ordre $1, 2, \dots, i - 2$ avec un espace s_2, s_3, \dots, s_{i-1} le long de cette droite.

La droite d porte un point A double uniplanaire pour la surface, les espaces linéaires à $2, 3, \dots, i - 1$ dimensions osculateurs à F en A sont précisément s_2, s_3, \dots, s_{i-1} . Le point A_1 infiniment voisin de A sur d est double tacnodal pour F et de plan osculateur s_2 .

