Annales scientifiques de l'É.N.S.

F. Didon

Note sur une formule de calcul intégral

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 31-48

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__31_0>

NOTE

SUR UNE

FORMULE DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR M. F. DIDON,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

I.

Dans le cas où $f(t)$, fonction bien déterminée de la variable imaginaire t, a, pour tout point d'un contour fermé T, une valeur différente de zéro et de l'infini, on sait que l'intégrale $\int \frac{f'(t)\,dt}{f(t)}$, étendue à tout ce contour, est égale au produit de $2\pi\sqrt{-1}$ par un nombre entier p.

Je vais démontrer, dans ce paragraphe, la proposition plus générale suivante :

« Si Δ désigne le déterminant fonctionnel de n fonctions bien déterminées $f(t, u, v,\ldots)$, $\varphi(t, u, v,\ldots)$, $\psi(t, u, v,\ldots)\ldots$ à n variables imaginaires $t, u, v,\ldots$, et s'il n'existe aucun système de points $t, u, v,\ldots$, pris le premier sur un contour fermé T, le deuxième sur un contour fermé U, le troisième sur un contour fermé V, etc., susceptible d'annuler ou de rendre infinie l'une quelconque des fonctions $f, \varphi, \psi,\ldots$, l'intégrale multiple d'ordre n,

$$\int\int\int \frac{\Delta}{f(t, u, v,\ldots)\,\varphi(t, u, v,\ldots)\,\psi(t, u, v,\ldots)\ldots}\,dt\,du\,dv,\ldots,$$

dans laquelle on fait parcourir à t tout le contour T, à u tout le contour U, etc., aura une valeur de la forme $(2\pi\sqrt{-1})^n p$, p représentant encore un nombre entier. »

Je commencerai par prendre le cas de deux variables qui conduit à l'intégrale double

$$\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u} - \frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)\,\varphi(t,u)}\,dt\,du,$$

différence des deux suivantes :

$$\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du, \qquad \int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du.$$

J'observe tout d'abord que l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}$$

permet de regarder $\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}$ et $\frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}$ comme les dérivées partielles relatives à t et à u, d'une même fonction $F(t, u)$. Ces dérivées ne devant être envisagées que le long de contours où elles sont finies et continues, je supposerai que $F(t, u)$ soit une fonction continue de t et de u. On voit ainsi que $F(t, u)$ n'est autre chose que l'une quelconque des déterminations de $\log f(t, u)$, que l'on rend continue par l'addition à certains moments critiques des constantes convenables. Cela dit, j'arrive au calcul de l'intégrale

$$\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du.$$

En donnant à u une valeur déterminée se rapportant à un point quelconque du contour U, on est conduit à évaluer l'intégrale simple

$$\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt,$$

qu'on étendra à tout le contour T, en partant d'un point quelconque t_1

et s'en éloignant sur le contour, toujours dans le même sens, jusqu'à ce qu'on y soit revenu. Si l'on considère la portion de l'intégrale qui correspond à un arc variable du contour, compris entre le point t_1 et le point t, on aura, grâce à une intégration par parties,

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt = \left[\mathrm{F}(t,u) \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} \right]_{t_1}^{t} - \int_{t_1}^{t} \mathrm{F}(t,u) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt,$$

et, quand t atteindra de nouveau la valeur t_1, on obtiendra l'intégrale simple que l'on cherche. Mais, d'une part, $\dfrac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}$ n'a qu'une valeur pour $t = t_1$; d'autre part, $\mathrm{F}(t,u)$ s'accroît, quand le point t a parcouru le contour T, de l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} dt$, étendue à tout ce contour; de sorte qu'en remarquant que la valeur de cette dernière intégrale ne dépend que du nombre des racines t des équations

$$f(t,u) = 0, \quad f(t,u) = \infty$$

qui se trouvent enfermées par le contour T, que, de plus, ces racines, quand u varie le long de U, décrivent des courbes qui sont toujours situées à l'intérieur de T, puisque, si elles traversaient ce contour, on aurait

$$f(t,u) = 0 \quad \text{ou} \quad f(t,u) = \infty,$$

pour un système de points t, u, pris respectivement sur T et U, ce qui est contraire à notre hypothèse, et que dès lors le nombre de ces racines est constant, tant que u est sur U, on voit bien que la variation de $\mathrm{F}(t,u)$ peut être représentée par $\displaystyle\int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)} dt$, u_1 étant un point déterminé du contour U. Par conséquent

$$\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt = \frac{\frac{d\varphi(t_1,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)} \int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)} dt - \int \mathrm{F}(t,u) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} dt,$$

et

$$\int\!\!\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du$$

$$=\int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)}\,dt \int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)}\,du - \int\!\!\int \mathrm{F}(t,u)\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du.$$

On trouve de même

$$\int\!\!\int \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du$$

$$=\int \frac{\frac{df(t_1,u)}{du}}{f(t_1,u)}\,du \int \frac{\frac{d\varphi(t,u_1)}{dt}}{\varphi(t,u_1)}\,dt - \int\!\!\int \mathrm{F}(t,u)\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)}\,dt\,du.$$

Mais

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} = \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)}.$$

Donc, en définitive,

$$\int\!\!\int \begin{vmatrix} \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial t}}{f(t,u)} & \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial t}}{\varphi(t,u)} \\ \frac{\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}}{f(t,u)} & \frac{\frac{\partial \varphi(t,u)}{\partial u}}{\varphi(t,u)} \end{vmatrix} dt\,du = \begin{vmatrix} \int \frac{\frac{df(t,u_1)}{dt}}{f(t,u_1)}\,dt & \int \frac{\frac{d\varphi(t,u_1)}{dt}}{\varphi(t,u_1)}\,dt \\ \int \frac{\frac{df(t_1,u)}{du}}{f(t_1,u)}\,du & \int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u)}{du}}{\varphi(t_1,u)}\,du \end{vmatrix};$$

ce qui démontre la proposition énoncée dans le cas de $n=2$, puisque chacun des éléments du dernier déterminant est de la forme $2\pi\sqrt{-1}\,p$, p étant un nombre entier. Pour prouver généralement le théorème, on fera voir que, s'il est vrai pour $n=m-1$, il l'est encore pour $n=m$. Afin d'abréger l'écriture, je vais passer du cas de $n=2$ au cas de $n=3$; le raisonnement que j'emploierai devrait être reproduit presque identiquement, si l'on voulait passer de $n=m-1$ à $n=m$. Soit donc à calculer

$$\int\int\int \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial t}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial t}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial u}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial u}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial v}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial v}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix} dt\,du\,dv.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{A}(t,u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial u}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial u}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial v}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial v}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{B}(t,u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial v}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial v}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial t}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial t}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{C}(t,u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial t}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial t}}{\psi(t,u,v)} \\ \dfrac{\dfrac{\partial \varphi(t,u,v)}{\partial u}}{\varphi(t,u,v)} & \dfrac{\dfrac{\partial \psi(t,u,v)}{\partial u}}{\psi(t,u,v)} \end{vmatrix},$$

cette intégrale peut être mise sous la forme

$$\int\int\int \frac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)} \mathrm{A}(t,u,v)\,dt\,du\,dv$$

$$\int\int\int \frac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)} \mathrm{B}(t,u,v)\,dt\,du\,dv + \int\int\int \frac{\dfrac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)} \mathrm{C}(t,u,v)\,dt\,du\,dv.$$

Soit $F(t, u, v)$ une fonction continue de t, u, v, ayant pour dérivées partielles relatives à t, u, v les fonctions respectives

$$\frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)}, \quad \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)}, \quad \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)}.$$

On verra, comme plus haut, qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}&\int\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial t}}{f(t,u,v)} A(t,u,v)\,dt\,du\,dv\\ &= \int \frac{\frac{df(t,u_1,v_1)}{dt}}{f(t,u_1,v_1)}\,dt \int\int A(t_1,u,v)\,du\,dv - \int\int\int F(t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}A(t,u,v)\,dt\,du\,dv,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial u}}{f(t,u,v)} B(t,u,v)\,dt\,du\,dv\\ &= \int \frac{\frac{df(t_1,u,v_1)}{du}}{f(t_1,u,v_1)}\,du \int\int B(t,u_1,v)\,dt\,dv - \int\int\int F(t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}B(t,u,v)\,dt\,du\,dv,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int\int\int \frac{\frac{\partial f(t,u,v)}{\partial v}}{f(t,u,v)} C(t,u,v)\,dt\,du\,dv\\ &= \int \frac{\frac{df(t_1,u_1,v)}{dv}}{f(t_1,u_1,v)}\,dv \int\int C(t,u,v_1)\,dt\,du - \int\int\int F(t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}C(t,u,v)\,dt\,du\,dv,\end{aligned}$$

t_1, u_1 et v_1 étant trois points arbitraires pris respectivement sur les contours T, U et V. Mais, d'après ce qui a été établi pour $n = 2$, on a

$$\int\int A(t_1,u,v)\,du\,dv = \begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u,v_1)}{du}}{\varphi(t_1,u,v_1)}\,du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1,u,v_1)}{du}}{\psi(t_1,u,v_1)}\,du \\ \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1,u_1,v)}{dv}}{\varphi(t_1,u_1,v)}\,dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1,u_1,v)}{dv}}{\psi(t_1,u_1,v)}\,dv \end{vmatrix},$$

$$\int\int \mathrm{B}(t, u_1, v)\,dt\,du\,dv = \begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\varphi(t_1, u_1, v)}\,dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\psi(t_1, u_1, v)}\,dv \\ \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1, v_1)}\,dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\psi(i, u_1, v_1)}\,dt \end{vmatrix},$$

$$\int\int \mathrm{C}(t, u, v_1)\,dt\,du = \begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1, v_1)}\,dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\psi(t, u_1, v_1)}\,dt \\ \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u, v_1)}{du}}{\varphi(t_1, u, v_1)}\,du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u, v_1)}{du}}{\psi(t_1, u, v_1)}\,du \end{vmatrix},$$

de plus, comme on le vérifie immédiatement,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{A}(t, u, v) + \frac{\partial}{\partial u}\mathrm{B}(t, u, v) + \frac{\partial}{\partial v}\mathrm{C}(t, u, v) = 0.$$

Donc l'intégrale triple que nous cherchions à calculer peut être représentée par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \displaystyle\int \frac{\frac{df(t, u_1, v_1)}{dt}}{f(t, u_1, v_1)}\,dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1, v_1)}\,dt & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t, u_1, v_1)}{dt}}{\psi(t, u_1, v_1)}\,dt \\ \displaystyle\int \frac{\frac{df(t_1, u, v_1)}{du}}{f(t_1, u, v_1)}\,du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u, v_1)}{du}}{\varphi(t_1, u, v_1)}\,du & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u, v_1)}{du}}{\psi(t_1, u, v_1)}\,du \\ \displaystyle\int \frac{\frac{df(t_1, u_1, v)}{dv}}{f(t_1, u_1, v)}\,dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\varphi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\varphi(t_1, u_1, v)}\,dv & \displaystyle\int \frac{\frac{d\psi(t_1, u_1, v)}{dv}}{\psi(t_1, u, v_1)}\,dv \end{vmatrix},$$

et par conséquent, d'après ce qu'on sait sur les intégrales simples qui constituent les éléments de ce déterminant, sa valeur est de la forme $(2\pi\sqrt{1})^3 p$, p étant un nombre entier.

II.

Supposons maintenant que les fonctions $f(t, u, v, \ldots)$, $\varphi(t, u, v, \ldots)$, $\psi(t, u, v, \ldots), \ldots$ soient algébriques, rationnelles et entières. Dans ce cas, si l'on considère le système des équations $f(t, u, v,\ldots) = 0$, $\varphi(t, u, v,\ldots) = 0$, $\psi(t, u, v,\ldots) = 0,\ldots$, on peut établir facilement que le nombre p est au plus égal en valeur absolue au nombre des solutions $(t', u', v',\ldots)$ de ce système, qui sont constituées chacune par un point t' situé dans l'intérieur de T, un point u' dans l'intérieur de U, un point v' dans l'intérieur de V, etc. Je me bornerai, pour abréger l'écriture, à examiner le cas de deux fonctions $f(t, u)$ et $\varphi(t, u)$. J'avertis de suite que, pour l'exactitude de la proposition, il est nécessaire d'admettre que les coefficients des plus hautes puissances de t et de u dans $f(t, u)$ et $\varphi(t, u)$ soient numériques, afin, par exemple, qu'aucune des déterminations de u tirées de l'équation $f(t, u) = 0$ ne puisse devenir infinie pour une valeur finie de t. Je passe maintenant à la démonstration du théorème.

Si $f_1(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ désignent deux polynômes entiers en x et y, et que $F(x, y)$ soit un troisième polynôme de degré moindre que le déterminant fonctionnel $\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} = P_1(x, y)$ des deux premiers, on a la formule bien connue de Jacobi

$$\sum \frac{F(\alpha_1, \beta_1)}{P_1(\alpha_1, \beta_1)} = 0,$$

dans laquelle la sommation se rapporte à toutes les solutions (α_1, β_1) du système d'équations

$$f_1(x, y) = 0, \quad \varphi_1(x, y) = 0. \tag{1}$$

Appliquons cette formule au cas où $f_1(x, y)$ et $\varphi_1(x, y)$ sont égaux respectivement aux produits $f(x, y)(x - t)$, $\varphi(x, y)(y - u)$ de deux fonctions entières $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ par les facteurs du premier degré $x - t$, $y - u$. Les solutions du système (1) peuvent, dans ce cas, être divisées en quatre groupes. Le premier groupe comprendra les solutions (α, β) du système

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0; \tag{2}$$

le second groupe les solutions (t, b_i) formées en combinant la valeur t de x avec les racines $y = b_i$ de l'équation $\varphi(t, y) = 0$; le troisième groupe les combinaisons (a_i, u), qu'on obtient en associant à la valeur u de y les diverses valeurs a_i de x tirées de l'équation $f(x, u) = 0$; enfin le quatrième groupe sera constitué par la solution unique $x = t$, $y = u$. Le déterminant fonctionnel $P_1(x, y)$ se calculera immédiatement au moyen des formules

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x-t) + f, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x-t),$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{dx}(y-u), \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y-u) + \varphi,$$

qui donnent

$$P_1(x,y) = (x-t)(y-u)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (x-t)\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + (y-u) f \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\varphi,$$

ou, plus simplement,

$$P_1(x,y) = (x-t)(y-u)P(x,y) + (x-t)\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + (y-u) f\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f\varphi,$$

en représentant par $P(x, y)$ le déterminant fonctionnel relatif aux fonctions f et φ. On voit alors qu'on aura pour $P_1(x, y)$ quatre formes différentes, correspondant aux quatre groupes de solutions, et qui seront

$$(\alpha - t)(\beta - u)P(\alpha, \beta), \quad (b_i - u) f(t, b_i)\frac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i},$$

$$(a_i - t)\varphi(a_i, u)\frac{\partial f(a_i, u)}{\partial a_i}, \quad f(t, u)\varphi(t, u).$$

La formule de Jacobi pourra être appliquée à une fonction entière quelconque $F(x, y)$ dont le degré sera moindre que celui du produit $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, et elle donnera

$$\sum \frac{F(\alpha, \beta)}{(\alpha - t)(\beta - u)P(\alpha, \beta)} + \sum \frac{F(t, b_i)}{(b_i - u) f(t, b_i)\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}}$$
$$+ \sum \frac{F(a_i, u)}{(a_i - t)\varphi(a_i, u)\dfrac{\partial f(a_i, u)}{\partial a_i}} + \frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = 0.$$

Les sommations se rapportent respectivement aux racines des trois premiers groupes.

Faisons l'hypothèse

$$F(x, y) = P(x, y).$$

Dans ce cas,

$$F(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta),$$

$$\frac{F(t, b_i)}{f(t, b_i)\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}} = \frac{\dfrac{\partial f(t, b_i)}{\partial t}\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i} - \dfrac{\partial f(t, b_i)}{\partial b_i}\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial t}}{f(t, b_i)\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}}$$

$$= \frac{1}{f(t, b_i)}\left[\frac{\partial f(t, b_i)}{\partial t} - \frac{\partial f(t, b_i)}{\partial b_i}\frac{\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial t}}{\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}}\right].$$

Mais b_i est une fonction de t définie par la relation

$$\varphi(t, b_i) = 0,$$

qui donne, par la différentiation,

$$\frac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{\partial b_i}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial t}}{\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}};$$

donc

$$\frac{F(t, b_i)}{f(t, b_i)\dfrac{\partial \varphi(t, b_i)}{\partial b_i}} = \frac{1}{f(t, b_i)}\left[\frac{\partial f(t, b_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, b_i)}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt}\right] = \frac{\dfrac{d f(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)},$$

où le numérateur n'est plus une dérivée partielle. On trouvera de même

$$\frac{F(a_i, u)}{\varphi(a_i, u)\dfrac{\partial f(a_i, u)}{\partial a_i}} = \frac{\dfrac{d\varphi(a_i, u)}{du}}{\varphi(a_i, u)},$$

formule dans laquelle, en prenant la dérivée qui entre dans le second membre, on devra considérer a_i comme une fonction de u définie par la relation $f(a_i, u) = 0$. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{P(t,u)}{f(t,u)\,\varphi(t,u)} = &-\sum \frac{1}{(t-\alpha)(u-\beta)} \\ &+\sum \frac{1}{u-b_i}\,\frac{\frac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)} + \sum \frac{1}{t-a_i}\,\frac{\frac{d\varphi(a_i,u)}{du}}{f(a_i,u)}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par $dt\,du$, puis intégrons les résultats par rapport à t le long d'un contour fermé T, et par rapport à u le long d'un autre contour fermé U, t et u étant ainsi des variables imaginaires, comme dans les intégrales définies simples étudiées par Cauchy. Parmi les solutions (α, β) du système (2), il peut en exister quelques-unes pour chacune desquelles le point α soit dans l'intérieur du contour T, et en même temps le point B dans l'intérieur du contour U; soit S le nombre de ces solutions. L'intégrale

$$\int\!\!\int \frac{dt\,du}{(t-\alpha)(u-\beta)} = \int \frac{dt}{t-\alpha} \int \frac{du}{u-\beta}$$

n'aura une valeur différente de zéro que quand les points α et β correspondants se trouveront respectivement dans l'intérieur des contours T et U, et, dans ce cas, sa valeur sera égale, d'après un théorème bien connu de Cauchy, à

$$(2\pi\sqrt{-1})^2 = -4\pi^2.$$

Donc

$$-\sum \int\!\!\int \frac{dt\,du}{(t-\alpha)(u-\beta)} = 4S\pi^2.$$

Envisageons maintenant l'intégrale

$$(4)\quad \int\!\!\int \frac{\frac{df(t,b_i)}{dt}}{f(t,b_i)}\,\frac{dt\,du}{u-b_i}.$$

Pour la calculer, on peut d'abord attribuer à t une valeur constante se rapportant à un point du contour T, puis effectuer l'intégration de $\frac{du}{u-b_i}$ le long du contour U; le résultat de cette dernière intégration est o ou $2\pi\sqrt{-1}$, suivant que le point b_i se trouve à l'extérieur de ce contour ou à son intérieur. Or, quand on fera parcourir au point t le contour T, le point b_i décrira une courbe qui sera située tout entière soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de U; car, si elle traversait le contour U, pour chacun des points d'intersection on aurait, puisque $\varphi(t, b_i)$ est identiquement nul,

$$\varphi(t, u) = 0,$$

u se rapportant à ce point et t à un point de T, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que nous avons faite. Donc la valeur de l'expression (4) est ou zéro ou bien celle de l'intégrale

$$2\pi i \int \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} dt,$$

dans laquelle l'intégration doit être faite tout le long du contour T. Cette dernière quantité est évidemment égale à

$$2\pi i(2\pi m' i) = -4\pi^2 m',$$

m' désignant le nombre de racines de l'équation $f(t, b_i) = 0$ situées à l'intérieur de T. Ce sont les seuls points critiques que nous ayons à examiner, puisque nous admettons que la plus haute puissance de u dans $\varphi(t, u)$ a pour coefficient une constante, et qu'alors b_i et par suite $f(t, b_i)$ ne peuvent devenir infinis pour aucune valeur finie de t. En résumé, l'expression

$$\sum \int\int \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} \frac{dt\, du}{u - b_i} \tag{5}$$

est de la forme $-4\pi^2 m$, m ne pouvant pas être négatif; je dis, de plus, que m est au plus égal à S. En effet, pour calculer l'intégrale (4), au lieu d'opérer comme précédemment, on peut d'abord donner à u une valeur constante se rapportant à un point du contour U, et intégrer la différentielle

$$\frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} \frac{dt}{u - b_i}$$

le long du contour T. Parmi les points critiques, on remarque, en premier lieu, les racines $\alpha\mu$ de l'équation $f(t, b_i) = 0$ qui sont à l'intérieur de T; ces racines font partie de quelques-unes des solutions (α_μ, β_μ) du système (2) et elles fournissent dans l'intégrale la quantité $2\pi\sqrt{-1}\sum \frac{1}{u-\beta_\mu}$. La portion correspondante de (5) est $2\pi\sqrt{-1}\sum\int\frac{du}{u-\beta}$, les β étant les associés de tous les α qui se trouvent enfermés dans le contour T, et par conséquent cette portion est égale à $-4\pi^2$S. Mais il faut aussi considérer les points critiques donnés par la relation $b_i = u$. S'il y a des racines de cette équation à l'intérieur de T, ces racines, par la continuité, formeront des courbes situées tout entières à cet intérieur, lorsque u voyagera sur U, en vertu de l'hypothèse que nous avons faite antérieurement, tandis que les courbes formées par les racines primitivement extérieures restent partout extérieures. Soit t_i une racine intérieure; le résidu correspondant aura pour valeur

$$-\frac{1}{\frac{db_i}{dt_i}}\frac{\frac{df(t_i, b_i)}{dt_i}}{f(t_i, b_i)},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{dt_i}{du}\frac{\frac{df(t_i, u)}{du}\frac{du}{dt_i}}{f(t_i, u)} = -\frac{\frac{df(t_i, u)}{du}}{f(t_i, u)},$$

puisque de $b_i = u$ on tire

$$\frac{db_i}{dt_i}\frac{dt_i}{du} = 1.$$

On est donc conduit à calculer l'expression

$$-2\pi i\sum\int\frac{\frac{df(t_i, u)}{du}}{f(t_i, u)}du,$$

la somme s'étendant à quelques-unes des racines t_i des diverses équations $b_i = u$, racines t_i qui sont des déterminations de t, définies par l'équation $\varphi(t, u) = 0$. Cette expression est égale à

$$-2\pi i(2\pi i m'') = 4\pi^2 m'',$$

m'' étant un nombre entier positif. Donc la somme (5) est égale à

$$-4\pi^2 S + 4\pi^2 m'',$$

ce qui établit la relation relative au nombre m, à laquelle nous voulions arriver. On montre de même que l'intégrale qui se rapporte au troisième terme du second membre de la formule (3) est de la forme $-4\pi^2 n$, n n'étant pas négatif et ayant une valeur absolue au plus égale à S, et l'on en conclura

$$\int\int \frac{P(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)}\, dt\, du = 4\pi^2(S - m - n) = 4\pi^2 p,$$

p étant compris entre $-S$ et $+S$. C'est le théorème que nous nous proposions de démontrer. Si $S = 0$, $p = 0$.

III.

La formule (3) du paragraphe précédent peut être mise sous une autre forme. On peut, en effet, calculer les deux dernières sommes qui entrent dans le second membre de cette formule au moyen d'opérations très-simples, effectuées sur les fonctions algébriques $f(t, u)$, $\varphi(t, u)$, $P(t, u)$. Considérant les polynômes f et φ comme des fonctions de u, et effectuant sur elles les opérations du plus grand commun diviseur, on en déduira une identité de la forme

$$1 = f(t, u)\varphi_1(t, u) + \varphi(t, u) f_1(t, u),$$

dans laquelle φ_1 et f_1 sont des polynômes en u; par conséquent,

$$\frac{P(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = \frac{P(t, u)\varphi_1(t, u)}{\varphi(t, u)} + \frac{P(t, u) f_1(t, u)}{f(t, u)}.$$

Si l'on extrait des fractions rationnelles en u du second membre de cette dernière identité les parties entières, leur somme sera nulle, et en désignant par $\varphi_2(t, u)$ et $\mathrm{F}(t, u)$ les restes des divisions par $\varphi(t, u)$ et $f(t, u)$ des polynômes respectifs $\mathrm{P}(t, u)\varphi_1(t, u)$ et $\mathrm{P}(t, u)f_1(t, u)$, on aura identiquement

$$\frac{\mathrm{P}(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = \frac{\varphi_2(t, u)}{\varphi(t, u)} + \frac{\mathrm{F}(t, u)}{f(t, u)}.$$

Or

$$\sum \frac{1}{u - b_i} \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} = \sum \frac{1}{u - b_i} \left[\frac{\mathrm{P}(t, u)}{\frac{\partial}{\partial u}\Big(f(t, u)\varphi(t, u)\Big)} \right]_{u = b_i};$$

donc

$$\sum \frac{1}{u - b_i} \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)} = \frac{\varphi_2(t, u)}{\varphi(t, u)}.$$

On aura de même

$$\sum \frac{1}{t - a_i} \frac{\frac{d\varphi(a_i, u)}{du}}{\varphi(a_i, u)} = \frac{f_2(t, u)}{f(t, u)},$$

$f_2(t, u)$ étant un polynôme en t (généralement fractionnaire en u), dont la formation est analogue à celle de $\varphi_2(t, u)$. La formule (3) devient donc

$$\frac{\mathrm{P}(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} - \frac{\varphi_2(t, u)}{\varphi(t, u)} - \frac{f_2(t, u)}{f(t, u)} = -\sum \frac{1}{(t - \alpha)(u - \beta)},$$

et l'on en déduit, pour le nombre S des racines contenues dans les deux contours T et U, la formule

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4\pi^2} \int\int \left[\frac{\mathrm{P}(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} - \frac{\varphi_2(t, u)}{\varphi(t, u)} - \frac{f_2(t, u)}{f(t, u)} \right] dt\, du,$$

qui suppose seulement satisfaite cette unique condition, à savoir que le contour T ne passe par aucun point α et le contour U par aucun des points β.

Je terminerai cet article par quelques observations. L'intégrale

$$\int\int \sum \frac{1}{u - b_i} \frac{\frac{df(t, b_i)}{dt}}{f(t, b_i)}\, dt\, du$$

est évidemment nulle, si tous les points b_i qui se rapportent à un même point t du contour T, le point t_1, par exemple, sont situés à l'extérieur de U, c'est-à-dire si

$$\int \frac{\frac{d\varphi(t, u)}{du}}{\varphi(t_1, u)}\, du = 0.$$

Je suppose qu'on ait, en même temps, l'égalité

$$\int \frac{\frac{df(t, u_1)}{dt}}{f(t, u_1)}\, dt = 0,$$

qui entraîne celle-ci :

$$\int\int \sum \frac{1}{t - a_i} \frac{\frac{d\varphi(a_i, u)}{du}}{\varphi(a_i, u)}\, dt\, du = 0;$$

alors, en se rapportant à la formule (3), citée plus haut, on en conclura

$$S = \frac{1}{4\pi^2} \int\int \frac{P(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)}\, dt\, du = -\frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\frac{df(t_1, u)}{du}}{f(t_1, u)}\, du \int \frac{\frac{d\varphi(t, u_1)}{dt}}{\varphi(t, u_1)}\, dt,$$

c'est-à-dire que S sera rigoureusement égal au produit du nombre des racines de l'équation $f(t_1, u) = 0$, qui sont à l'intérieur de U, par le nombre des racines de l'équation $\varphi(t, u_1) = 0$, qui sont enfermées par le contour T. Ceci suppose qu'il n'y ait aucune racine de $\varphi(t_1, u) = 0$ dans U, et aucune racine de $f(t, u_1) = 0$ dans T. Si ces dernières conditions ne sont pas réalisées à l'égard de f et de φ, elles pourront l'être quelquefois par une détermination convenable des constantes λ et λ' à l'égard des équations

$$f(t_1, u) + \lambda'\varphi(t_1, u) = 0, \quad f(t, u_1) + \lambda\varphi(t, u_1) = 0,$$

et, par conséquent, comme les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll} f(t, u) = 0, & \varphi(t, u) = 0, \\ f(t, u) + \lambda\varphi(t, u) = 0, & f(t, u) + \lambda'\varphi(t, u) = 0 \end{array}$$

sont équivalents, S sera encore égal au produit du nombre des racines de

$$f(t_1, u) + \lambda\varphi(t_1, u) = 0,$$

qui sont dans U, par le nombre des racines de

$$f(t, u_1) + \lambda'\varphi(t, u_1) = 0,$$

qui sont dans l'intérieur de T.

La seconde remarque que je ferai se rapportera à la formule du paragraphe II, qui a conduit, comme cas particulier, à la formule (3), et qui donne une certaine décomposition de l'expression $\frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)}$, quand le degré du numérateur est moindre que celui du dénominateur. On peut la transformer comme la formule (3), et l'on est ainsi amené à l'identité

$$\frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)} = -\sum\frac{F(\alpha, \beta)}{(t-\alpha)(u-\beta)P(\alpha, \beta)} + \frac{\Phi_1(t, u)}{\varphi(t, u)} + \frac{F_1(t, u)}{f(t, u)},$$

dans laquelle $\frac{\Phi_1(t, u)}{\varphi(t, u)}$ et $\frac{F_1(t, u)}{f(t, u)}$ désignent des fractions rationnelles par rapport aux variables respectives u et t. On voit de suite que $\Phi_1(t, u)$ est de la forme $\frac{\Phi_2(t, u)}{\pi(t-\alpha)}$, Φ_2 étant un polynôme entier par rapport à t et u, et $\pi(t, \alpha)$ étant le produit de tous les facteurs binômes analogues à $t-\alpha$; de même $F_1(t, u)$ est de la forme $\frac{F_2(t, u)}{\pi(u-\beta)}$. Cette identité rappelle la décomposition en fractions simples des fractions rationnelles à une variable, en ce sens que la partie $-\sum\frac{F(\alpha, \beta)}{(t-\alpha)(u-\beta)P(\alpha, \beta)}$ est tout à fait analogue à la somme $\sum\frac{\varphi(\alpha)}{(t-\alpha)f'(\alpha)}$ qui représente $\frac{\varphi(t)}{f(t)}$; mais il y a une différence essentielle, puisque, quand on a extrait cette partie de $\frac{F(t, u)}{f(t, u)\varphi(t, u)}$, il reste encore des fractions $\frac{\Phi_1(t, u)}{\varphi(t, u)}$, $\frac{F_1(t, u)}{f(t, u)}$, qui sont à la vérité plus simples que cette dernière.

Enfin j'énoncerai sans démonstration les formules suivantes, qu'on vérifie facilement, et dont l'exactitude suppose seulement qu'aucune des fonctions f et φ ne s'annule pour un système de points t, u, pris respectivement sur les contours T et U :

$$\int\int -\frac{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\dfrac{\partial f}{\partial u}}{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\dfrac{\partial f}{\partial t}}\left[\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^2}{f^2}-\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}{\varphi^2}\right]dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial u}}{f}\,dt\,du-\int\int\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{dt\,du}}{\varphi}\,dt\,du=4p\pi^2,$$

$$\int\int -\frac{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\dfrac{\partial f}{\partial t}}{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\dfrac{\partial f}{\partial u}}\left[\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\varphi^2}-\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{f^2}\right]dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u}}{\varphi}\,dt\,du-\int\int\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial u}}{f}\,dt\,du=4p\pi^2,$$

$$\int\int\frac{\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2}{\varphi^2\left(-f\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)}\,dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\left(-f\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\dfrac{df}{du}\right)^2}{f^2\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)}\,dt\,du$$

$$-\int\int\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{\left(-f\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}+\varphi\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)}\,dt\,du$$

$$+\int\int\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t\,\partial u}}{f}\,dt\,du+\int\int\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial u}}{\varphi}\,dt\,du=4p\pi^2,$$

p ayant la même signification que précédemment.