PIERRE BOOS

Propriétés caractéristiques de courbes ou de surfaces (suite et fin)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 183-222
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__183_0>

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

DE

COURBES OU DE SURFACES

PAR M. PIERRE BOOS.

(*suite et fin*).

DEUXIÈME PARTIE.
SURFACES.

CHAPITRE I.
DÉFINITION ET RECHERCHE DES POINTS (R) ET (R').

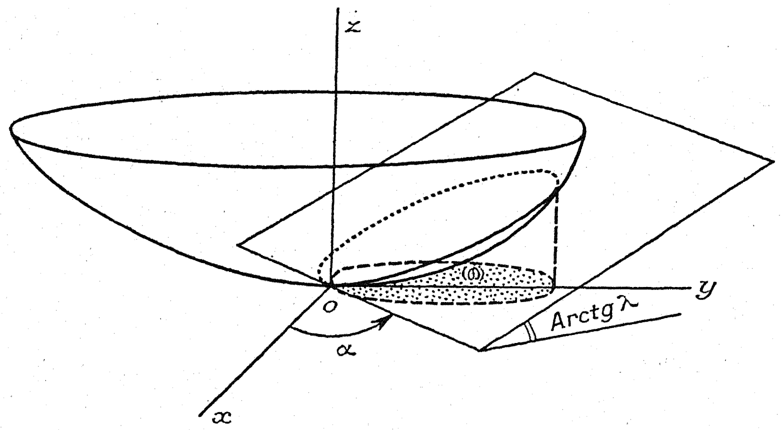
1. Nous nous proposons dans cette Partie d'établir relativement aux surfaces analytiques des résultats analogues aux précédents en considérant la figure formée par un plan sécant et la calotte découpée par lui dans la surface. Nous supposons que la surface est convexe de sorte que les dimensions de la figure tendront vers zéro en même temps que l'angle du plan sécant avec le plan tangent à la surface en un point de la section; un point de l'intersection du plan et de la surface doit jouer un rôle particulier pour la détermination de l'angle du plan sécant et d'un plan tangent et comme nous désirons étudier des fonctions de deux variables seulement, il est naturel de considérer les figures correspondant aux plans sécants qui pivotent autour d'un point régulier fixe, O, de la surface; c'est donc une propriété de la surface en ce point que nous mettrons en évidence. La figure formée par le plan sécant dépend effectivement de deux paramètres : l'un, qui fixe sa position, est l'angle α que la trace du plan sécant fait avec une direction fixe du plan tangent en O et l'autre, qui détermine

les dimensions de la figure, est l'angle du plan sécant et du plan tangent en O (cet angle sera déterminé par sa tangente que nous désignons par λ). Nous utiliserons aussi ultérieurement un autre paramètre arbitraire à la place de cet angle des plans sécant et tangent.

En général la figure dépend des deux paramètres λ et α et nous allons chercher en premier lieu s'il existe des surfaces (ou plus exactement des points sur une surface) telles que certains éléments de la figure ne dépendent que de λ et non de α. L'élément le plus intéressant (à cause de ses propriétés affines) est le volume compris entre le plan sécant et la calotte; nous dirons que la surface possède en O la propriété (R), ou que le point O est un point (R), si ce volume ne dépend que de λ.

2. Nous rapportons la surface aux axes suivants ayant pour origine le point O : la normale Oz à la surface et les deux directions principales Ox et Oy en O.

Fig. 4.



Puisque le point O est, par hypothèse, un point régulier convexe, le développement de la cote z d'un point de la surface en fonction de x et y peut s'écrire

$$z = a(\sin^2\varphi\, x^2 + \cos^2\varphi\, y^2) + \ldots, \tag{1}$$

en désignant par φ l'angle, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, tel que $\cot^2\varphi = \frac{R_1}{R_2}$, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux en O.

Nous avons défini le plan sécant par l'angle α que fait sa trace sur le plan xOy avec l'axe Ox et par la tangente λ de l'angle qu'il fait avec le plan xOy, son équation est donc

$$z_1 = \lambda(y\cos\alpha - x\sin\alpha). \tag{2}$$

Dans tout ce qui suit les plans sécants seront choisis de telle façon que λ soit arbitraire à l'intérieur d'un intervalle non nul comprenant zéro.

Le volume cherché est égal à l'intégrale double $\iint(z_1 - z)\,dx\,dy$ étendue à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$ correspondant à l'intersection de la surface et du plan. Pour l'évaluer nous effectuons le changement de variables

$$x = \rho\frac{\cos u}{\sqrt{2}\sin\varphi}, \qquad y = \rho\frac{\sin u}{\sqrt{2}\cos\varphi}. \tag{A}$$

La section de la surface par le plan sécant est alors représentée par la relation

$$\lambda\frac{\sin u\cos\alpha\sin\varphi - \cos u\sin\alpha\cos\varphi}{\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{a}{2}\rho + \rho^2(\ldots). \tag{3}$$

Quel que soit u, ρ est infiniment petit avec λ puisque la surface est convexe et nous pouvons calculer le développement en série de ρ en fonction de λ (les coefficients de ce développement sont des fonctions de u). Le calcul du premier terme est immédiat, on obtient

$$\rho = \lambda\frac{\sqrt{2}}{a}\frac{\sin u\cos\alpha\sin\varphi - \cos u\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} + \lambda^2(\ldots), \tag{4}$$

les limites du domaine auquel on doit étendre l'intégrale double après le changement de variables sont : pour ρ, zéro, et la valeur définie par (4); pour u, les deux valeurs u_0 et $u_0 + \pi$ qui annulent le coefficient de λ dans (4).

L'intégrale admet un développement limité suivant les puissances de λ et on l'obtient en remplaçant ρ par le développement (4) dans

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi}\frac{du}{2\sin\varphi\cos\varphi}\left[\frac{\lambda}{3\sqrt{2}}\rho^3\frac{\sin u\cos\alpha\sin\varphi - \cos u\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{a}{8}\rho^4 + \ldots\right],$$

le premier terme du développement du volume V cherché est donc

$$\frac{\lambda^4}{12a^3 \sin^5\varphi \cos^5\varphi}\int_{u_0}^{u_0+\pi} (\sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha \cos\varphi)^4\, du.$$

Or, d'après la valeur de u_0 nous avons

$$(5)\quad [\sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha \cos\varphi]^2 = \sin^2(u-u_0)\,[\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi]$$

et par suite l'intégrale donnant le premier terme du développement de V est immédiatement calculée. On trouve

$$(6)\qquad V = \lambda^4\,\frac{\pi[\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi]^2}{32\,a^3 \sin^5\varphi \cos^5\varphi} + \ldots,$$

que l'on peut écrire également

$$V = \lambda^4\,\frac{\pi[1 - \cos 2\varphi \cos 2\alpha]^2}{128\,a^3 \sin^5\varphi \cos^5\varphi} + \ldots.$$

3. Pour que le point O soit un point (R) de la surface, il est nécessaire que tous les coefficients du développement de V suivant les puissances de λ soient indépendants de α. Donc nécessairement $1 - \cos 2\varphi \cos 2\alpha$ est indépendant de α ce qui exige $\varphi = \frac{\pi}{4}$, et le point O doit être un *ombilic*.

Nous voyons immédiatement que *les sphères sont les seules surfaces analytiques dont tous les points sont des points* (R) puisqu'il faut que tous les points soient des ombilics.

4. Nous chercherons maintenant s'il peut exister sur une surface (autre qu'une sphère) un point O, au moins, possédant la propriété (R); remarquons qu'un point régulier d'une surface de révolution est un tel point (R) s'il est situé sur l'axe de la surface, puisque les rotations qui transforment la surface en elle-même font coïncider les figures correspondant aux différentes valeurs de α. Autrement dit, il suffit pour qu'un point soit un point (R) que la surface soit de révolution autour de la normale en ce point, si bien que le développement (1) ne contient que des puissances (entières) de x^2+y^2. Nous allons démontrer que cette condition suffisante est aussi nécessaire.

Soit en effet

$$z = \frac{a}{2}(x^2+y^2) + \ldots + \mathrm{P}(x, y) + \ldots, \tag{7}$$

le développement de z où l'on désigne par $\mathrm{P}(x, y)$ le polynome homogène de degré n contenant tous les termes figurant dans le développement de z et ayant ce degré. Nous supposons que tous les polynomes analogues et de degré inférieur à n sont égaux au produit d'une constante par une puissance de x^2+y^2 et nous voulons déterminer la forme nécessaire du polynome P. Pour cela nous devons calculer dans le développement de V suivant les puissances de λ, le premier terme dont le coefficient peut dépendre de P.

La relation (3) nous montre que le degré, en λ, du premier terme du développement de ρ dont le coefficient dépend de P est égal à $n-1$ et nous obtenons sans difficulté, pour représenter l'intersection de la surface et du plan, la relation

$$\begin{aligned}\rho = {} & \frac{\lambda\, 2\sin(u-\alpha)}{a} + \sum_{j=2}^{j<\frac{n}{2}} \lambda^{2j-1}\mathrm{A}_j \sin^{2j-1}(u-\alpha) \\ & - \frac{2^n}{a^n}\lambda^{n-1}\sin^{n-1}(u-\alpha).\mathrm{P}(\cos u, \sin u) + \ldots,\end{aligned} \tag{8}$$

dans laquelle les termes non écrits sont de degré, en λ, supérieur à $n-1$ et les grandes lettres A, B,... désignent ici, comme plus loin, des constantes dont la valeur n'intervient pas. Nous remarquons que dans le développement de ρ^k la première puissance de λ dont le coefficient fait intervenir P est de degré $n-2+k$ et son coefficient est

$$-k\left(\frac{2}{a}\right)^{n-1+k}\sin^{n-2+k}(u-\alpha)\,\mathrm{P}(\cos u, \sin u) + \mathrm{B}\sin^{n-2+k}(u-\alpha).$$

L'intégrale double donnant le volume est devenue, après le changement de variables,

$$\mathrm{V} = \iint_{\varpi}\left[\lambda\rho^2\sin(u-\alpha) - \frac{a\rho^3}{2} - \ldots - \rho^{n+1}\mathrm{P}(\cos u, \sin u) - \ldots\right] d\rho\, du,$$

donc on a

$$\mathrm{V} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\left[\lambda\frac{\rho^3}{3}\sin(u-\alpha) - \frac{a\rho^4}{8} - \ldots - \rho^{n+2}\frac{\mathrm{P}(\cos u, \sin u)}{n+2} - \ldots\right] du,$$

où l'on doit remplacer ρ par l'expression (8); les termes non écrits dans la dernière intégrale ont un degré, en ρ, supérieur à $n+2$ s'ils ont pour coefficient une fonction de u dont la forme ne nous est pas connue, ou bien sont d'un degré pair supérieur ou égal à 6 s'ils ont pour coefficient une constante.

Après le remplacement de ρ par (8), l'élément différentiel de l'intégrale donnant V a pour développement par rapport à λ

$$\lambda^4 \frac{2\sin^4(u-\alpha)}{3a^2} + \sum B_i \lambda^{2i} \sin^{2i}(u-\alpha)$$
$$+\lambda^{n+2}\left[C\sin^{n+2}(u-\alpha) - \left(\frac{2}{a}\right)^{n+2} \frac{\sin^{n+2}(u-\alpha).P(\cos u, \sin u)}{n+2}\right] + \ldots,$$

les termes non écrits sont de degré supérieur à $n+2$. Il en résulte que le premier terme du développement de V dont le coefficient peut dépendre de α est de degré $n+2$ en λ, puisque les premiers termes de (7) vérifient une condition suffisante pour que le volume soit indépendant de α. Le coefficient de ce terme est, à une constante additive près provenant des premiers termes de (7),

$$-\left(\frac{2}{a}\right)^{n+2} \frac{1}{n+2} \int_\alpha^{\alpha+\pi} \sin^{n+2}(u-\alpha).P(\cos u, \sin u)\,du.$$

Pour que le point O soit un point (R) il faut donc que l'intégrale

$$\int_\alpha^{\alpha+\pi} \sin^{n+2}(u-\alpha).P(\cos u, \sin u)\,du \tag{9}$$

soit indépendante de α. Rappelons que P est un polynome homogène de degré n.

5. La méthode qui semble ici la plus directe pour déterminer le polynome P serait d'expliciter ce polynome et d'évaluer l'intégrale (9), nous pourrions ainsi obtenir des équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les coefficients de P; mais ce procédé ne permet de conclure qu'après avoir démontré que les déterminants des systèmes obtenus ne sont pas nuls, or ces déterminants ont pour éléments des

quotients de coefficients du binome et il ne nous a pas été possible d'en faire l'étude directe [1].

Pour trouver la forme que doit avoir le polynome P nous cherchons les conditions imposées par l'intégrale (9) au polynome de Fourier identique à $P(\cos u, \sin u)$. On peut en effet écrire

$$(10)\quad f(u) \equiv P(\cos u, \sin u) = a_0 + a_1 \cos u + b_1 \sin u + \ldots + a_n \cos nu + b_n \sin nu$$

et remarquer que tous les coefficients, dont l'indice est de la parité différente de celle de n, sont nuls. En effet, si n est impair, le remplacement de u par $u + \pi$ donne à $P(\cos u, \sin u)$ la valeur opposée, cela exige que

$$a_0 + a_2 \cos 2u + b_2 \sin 2u + \ldots + a_{n-1} \cos(n-1)u + b_{n-1} \sin(n-1)u$$

soit identiquement nul, ce qui n'est possible qu'en donnant la valeur o à tous les coefficients d'indice pair de (10). De même, si n est pair, la fonction $f(u)$ admet la période π et nous en concluons que tous les coefficients d'indice impair dans (10) doivent être nuls.

En effectuant le changement de variable $u = x + \alpha$, nous ramenons le problème au suivant : *déterminer une fonction, ayant la forme* (10) *telle que l'intégrale*

$$(11)\qquad \int_0^\pi \sin^{n+2} x . f(x+\alpha)\, dx$$

soit indépendante de α.

Puisque cette intégrale (11) doit être indépendante de α, ses dérivées successives par rapport à α sont nulles, or, comme nous pouvons dériver sous le signe somme, nous voyons, d'après la dérivée première, que

$$\int_0^\pi \sin^{n+1} x \cos x f(x+\alpha)\, dx = 0,$$

et, d'après la dérivée seconde,

$$(n+2)\int_0^\pi \sin^{n+2} x f(x+\alpha)\, dx = (n+1)\int_0^\pi \sin^n x f(x+\alpha)\, dx,$$

[1] Nous indiquons plus loin (§ 16) les conclusions que l'on peut obtenir en comparant ce procédé à celui que nous avons utilisé pour obtenir effectivement la forme de P.

donc, si l'intégrale (11) est indépendante de α il en est de même de l'intégrale $\int_0^\pi \sin^n x f(x+\alpha)\,dx$ et, par suite, de toutes les intégrales

$$\int_0^\pi \sin^{n-2j} x f(x+\alpha)\,dx, \tag{12}$$

dans lesquelles j est un entier inférieur ou égal à la partie entière de $n/2$.

Nous donnons ci-dessous les valeurs d'un certain nombre d'intégrales définies que l'on obtient par des calculs élémentaires (soit par intégration par parties, soit en tenant compte de l'expression de $\sin^k x$ en fonction des sinus et cosinus de multiples de x) :

$$\int_0^\pi \sin^k x \sin m(x+\alpha)\,dx = 0, \qquad \int_0^\pi \sin^k x \cos m(x+\alpha)\,dx = 0,$$

si m est supérieur à k et de même parité que k;

$$\int_0^\pi \sin^k x \cos k(x+\alpha)\,dx = (-1)^{j+1}\, 2^{-k}\pi \sin k\alpha,$$
$$\int_0^\pi \sin^k x \sin k(x+\alpha)\,dx = (-1)^{j}\quad 2^{-k}\pi \cos k\alpha,$$

si k est impair et égal à $2j+1$;

$$\int_0^\pi \sin^k x \cos k(x+\alpha)\,dx = (-1)^{j}\, 2^{-k}\pi \cos k\alpha,$$
$$\int_0^\pi \sin^k x \sin k(x+\alpha)\,dx = (-1)^{j}\, 2^{-k}\pi \sin k\alpha,$$

si k est pair et égal à $2j$.

Donnons alors à j dans l'intégrale (12) les valeurs décroissantes successives depuis $E\left(\frac{n}{2}\right)$. Si n est pair, la première condition ainsi obtenue est que $\int_0^\pi f(x+\alpha)\,dx$ soit indépendant de α; elle est toujours vérifiée puisque cette intégrale a pour valeur $a_0\pi$, tous les coefficients d'indice impair étant nuls dans $f(u)$. La deuxième intégrale à considérer est $\int_0^\pi \sin^2 x f(x+\alpha)\,dx$ dont nous obtenons la valeur en utilisant le tableau précédent, c'est à une constante additive près provenant de a_0 : $-a_2\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha - b_2\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha$; ce qui ne peut être indépendant de α qu'à la condition que a_2 et b_2 soient tous deux nuls.

Supposons alors démontré que les coefficients de f dont l'indice est inférieur à $2p$ (a_0 excepté) doivent être nuls pour que les intégrales (12) correspondant aux valeurs de j supérieures à $\frac{n}{2}-p$ soient indépendantes de α. L'intégrale correspondant à $j=\frac{n}{2}-p$ est $\int_0^\pi \sin^{2p}x f(x+\alpha)\,dx$ dont nous pouvons obtenir la valeur à l'aide du tableau précédent, puisqu'il ne figure plus dans f aucun terme dont l'indice soit inférieur à l'exposant de $\sin x$ dans cette intégrale (a_0 excepté); cette intégrale ne peut être indépendante de α que si $(-1)^p 2^{-2p}\pi\{a_{2p}\cos 2p\alpha + b_{2p}\sin 2p\alpha\}$ l'est, donc il faut que a_{2p} et b_{2p} soient nuls.

Par conséquent, nous démontrons, en donnant à j les valeurs décroissantes successives jusqu'à la valeur 0, que tous les coefficients de f (a_0 excepté) sont nuls. Cette condition nécessaire est manifestement suffisante pour que (11) soit indépendant de α.

Si nous supposons n impair le même raisonnement peut être répété, mais ici f ne contient que des termes d'indice impair et j varie de $(n-1)/2$ à zéro, la première intégrale considérée a donc pour valeur $-\frac{\pi}{2}a_1\sin\alpha + \frac{\pi}{2}b_1\cos\alpha$, ce qui ne peut pas être indépendant de α si a_1 et b_1 ne sont pas nuls; on démontre de proche en proche comme ci-dessus que tous les coefficients de f doivent être nuls, si bien que dans ce cas la fonction f est identiquement nulle.

Donc le polynome $P(\cos u, \sin u)$, identique à la fonction $f(u)$, doit se réduire à la constante a_0 si n est pair ou être identiquement nul si n est impair; par suite, si n est impair, l'ensemble des termes de degré n dans le développement de z doit être identiquement nul et si n est pair nous avons $P(\cos u, \sin u) \equiv a_0[\cos^2 u + \sin^2 u]^{\frac{n}{2}}$ et $P(x,y)$ est identique à $a_0(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$.

Il en résulte que la fonction z est seulement fonction de x^2+y^2, donc la surface est de révolution autour de Oz et nous pouvons énoncer le théorème suivant : *s'il existe, sur une surface analytique, un point régulier convexe* O *tel que le volume compris entre un plan sécant passant par* O *et la calotte découpée par lui ne dépende que de l'angle du plan sécant et du plan tangent en* O, *la surface est de révolution autour de la normale en* O. Nous supposons, ainsi qu'il ressort de la démonstration, que la propriété relative au volume est vraie quel que soit l'angle du plan sécant et du plan tangent lorsque cet angle est choisi à l'intérieur d'un certain intervalle comprenant zéro.

6. Ainsi donc lorsqu'une surface possède un point (R) il existe un groupe continu de transformations transformant la surface en elle-même : plus précisément ces transformations sont des déplacements qui permettent de faire coïncider les figures correspondant à la même valeur de λ et à deux valeurs différentes de α; il en résulte que tous les éléments que nous pourrons étudier sont indépendants de α lorsque le point O est un point (R). Avant de rechercher si l'on peut caractériser les surfaces de révolution par des propriétés correspondant à d'autres éléments de la figure, nous nous proposons de déterminer des surfaces sur lesquelles existe un point régulier tel que la relation entre le volume V, l'angle α et le paramètre λ contienne effectivement α et ait une forme particulière. Pour choisir cette forme nous nous laissons guider par des remarques géométriques.

Soit (S) une surface ayant en O un point régulier où la normale est Oz, si la surface (S) est transformée en elle-même par un groupe continu d'affinités conservant le volume et maintenant invariants tous les points de Oz, nous pourrons faire correspondre géométriquement à la figure définie par les valeurs λ et α des paramètres, une autre figure définie par λ' et α' ayant même volume que la première, α' pourra prendre toutes les valeurs possibles et il existera une relation entre λ, α, λ' et α'.

Un groupe d'affinités maintenant invariants les points de Oz et conservant le volume est représenté par

$$(13)\qquad \begin{cases} x = x_1 \sin\tau + y_1 \cos\tau \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \\ y = -x_1 \cos\tau \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + y_1 \sin\tau, \\ z = z_1, \end{cases}$$

où φ est un paramètre arbitraire fixe et τ est la variable définissant les différentes transformations du groupe. Ces transformations (13) transforment en elles-mêmes des surfaces qui sont découpées par les plans perpendiculaires à Oz suivant des ellipses semblables dont les centres sont sur Oz, et dont les axes sont dans les plans xOz et yOz, le rapport de ces axes étant tangφ.

Pour simplifier les énoncés nous utiliserons l'expression *surface de révolution affine* pour désigner de telles surfaces, et nous préciserons l'*axe* Oz *invariant par les transformations du groupe* ainsi que la *direction des plans des différentes ellipses*. Cette notation se justifie, car les surfaces en question sont des transformées de surfaces de révolution par une certaine transformation affine et surtout parce qu'on peut les engendrer en soumettant une courbe quelconque (non située dans un plan parallèle à ceux des ellipses) aux transformations du groupe. Une telle surface a une équation de la forme

$$z = F(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi)$$

et, comme le point O est régulier, le développement de z ne contient que des puissances entières de $x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi$.

Le plan sécant défini par les valeurs λ et α des paramètres est le transformé, d'un certain plan contenant Ox, par la transformation (13) que définit la relation

$$-\sin\tau \sin\alpha + \cos\tau \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cos\alpha = 0, \tag{14}$$

l'équation du plan correspondant passant par Ox est

$$z = y\left\{\lambda\left(\cos\alpha \sin\tau + \cos\tau \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \sin\alpha\right)\right\}. \tag{15}$$

Or le volume compris entre la surface et le plan sécant n'est pas altéré par cette transformation (13), donc le volume correspondant à la figure définie par λ et α ne dépend que du coefficient de y dans l'équation (15). En tenant compte de (14) ce coefficient peut s'exprimer très simplement en fonction de λ et de α, c'est

$$\frac{\lambda[\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}}{\sin\varphi},$$

donc : sur les surfaces de révolution affine autour de Oz parallèlement au plan xOy, le volume V ne dépend que du produit de la tangente de l'angle des plans sécant et tangent par une fonction de l'angle α.

7. Nous dirons que le point O régulier convexe d'une surface est un point (R′) si le volume V ne dépend que du produit de λ par une fonction $g(\alpha)$; en un tel point la surface « possédera » la propriété (R′). L'étude géométrique du paragraphe 6 montre que les surfaces de révolution affine autour de la normale en O parallèlement au plan tangent possèdent la propriété (R′); réciproquement, nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface possède la propriété (R′).

La méthode que nous utiliserons pour chercher les points (R′) est la même que celle exposée plus haut en détail. Les hypothèses faites sur le point O nous permettent en effet d'utiliser les résultats du paragraphe 2; le volume V devant être une fonction de $\lambda g(\alpha)$, il faut que l'on puisse identifier son développement avec un développement de la forme $\Sigma A_j \lambda^j g^j(\alpha)$ et la formule (6) nous donne immédiatement la valeur de la fonction inconnue g qui doit être

$$[\cos^2\alpha \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\alpha]^{\frac{1}{2}}$$

(on peut, bien entendu, multiplier g par une constante arbitraire sans rien changer au résultat).

Nous savons que si z est seulement fonction de $x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi$, le point O possède la propriété (R′), ce qu'il est d'ailleurs très facile de montrer analytiquement. En effet nous avons alors

$$z = F(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi)$$

et l'intégrale donnant le volume devient, après le changement de variables (A),

$$V = \iint_{(\varphi)} \left[\frac{\lambda \rho^2 (\sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha \cos\varphi)}{\sqrt{2} \sin\varphi \cos\varphi} - \rho F(\rho^2) \right] \frac{d\rho \, du}{2 \sin\varphi \cos\varphi},$$

les limites étant, pour u, u_0 et $u_0 + \pi$ et pour ρ, o et la fonction $\rho_1(u)$ définie par

$$\frac{\lambda (\sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha \cos\varphi)}{\sqrt{2} \cos\varphi \sin\varphi} = \frac{1}{\rho} F(\rho^2),$$

donc cette fonction ρ_1 ne dépend que de la valeur de

$$\lambda(\sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha \cos\varphi),$$

et, d'après (5), ρ_1 est une fonction de

$$\lambda[\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}} \sin(u - u_0),$$

d'où l'on déduit que le volume V est égal à une intégrale de la forme

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi} G\left[\lambda(\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \sin(u - u_0)\right] du,$$

dans laquelle le changement de variable $u - u_0 = t$ conduit à une expression qui ne dépend que de $\lambda(\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$.

Supposons alors démontré que l'ensemble des termes du développement (1), dont le degré est inférieur à n, doit se réduire au développement d'un polynome en $x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi$, nous pouvons écrire

$$(16) \qquad z = a(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi) + \ldots + P(x \sin\varphi, y \cos\varphi) + \ldots,$$

où P représente l'ensemble des termes de degré n. Les termes non écrits de degré inférieur à n ne donneront dans V que des quantités ayant la forme voulue; le premier terme de V qui pourra empêcher l'identification avec un développement $\Sigma A_j \lambda^j g^j(\alpha)$ doit contenir P.

Après le changement de variables (A), l'intersection de la surface (16) et du plan sécant est définie par l'expression de ρ en fonction de u; pour simplifier l'écriture nous posons

$$S = \sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha \cos\varphi,$$

alors on a, pour représenter cette intersection,

$$(17) \qquad \rho = \frac{\sqrt{2}}{a} \frac{\lambda S}{\sin\varphi \cos\varphi} + \ldots - \sqrt{2}\lambda^{n-1} \frac{P(\cos u, \sin u) S^{n-1}}{a^n \sin^{n-1}\varphi \cos^{n-1}\varphi} + \ldots,$$

les termes non écrits sont de degré, en λ, supérieur à $n - 1$ ou bien sont tels que les coefficients de $\lambda^p S^p$ sont indépendants de u et p supérieur ou égal à 2.

Le volume V est donné par l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi} \frac{du}{2 \sin\varphi \cos\varphi} \left[\frac{\lambda \rho^3 S}{3\sqrt{2} \sin\varphi \cos\varphi} - \frac{a\rho^4}{8} - \ldots - \frac{\rho^{n+2} P(\cos u, \sin u)}{(n+2)\sqrt{2^n}} - \ldots\right],$$

où φ doit être remplacé par la valeur (17) et u_0 par la valeur indiquée au paragraphe 2.

On démontre comme plus haut (p. 187) que le premier terme du développement de V qui n'est pas le produit d'une constante par une puissance de $\lambda[\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \sin^2\alpha\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$ est de degré $n+2$ (en λ) et a pour expression

$$\lambda^{n+2}\left\{ B(\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \sin^2\alpha\cos^2\varphi)^{\frac{n+2}{2}} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(n+2)a^{n+2}\sin\varphi\cos\varphi}\int_{u_0}^{u_0+\pi}\frac{S^{n+2}P(\cos u, \sin u)}{\sin^{n+2}\varphi\cos^{n+2}\varphi}du \right\},$$

où B désigne une certaine constante, nulle si n est impair.

En tenant compte de (5), l'intégrale figurant dans l'expression ci-dessus se transforme et le premier terme de V qui peut empêcher l'identification souhaitée est égal finalement à

$$-\lambda^{n+2}\frac{[\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \cos^2\alpha\sin^2\varphi]^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)a^{n+2}\sin^{n+3}\varphi\cos^{n+3}\varphi}$$
$$\times\left[C + \int_{u_0}^{u_0+\pi}\sin^{n+2}(u-u_0)P(\cos u, \sin u)\,du\right].$$

Il faut donc déterminer la fonction $P(\cos u, \sin u)$ par la condition que l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi}\sin^{n+2}(u-u_0)P(\cos u, \sin u)\,du,$$

soit indépendante de α. Mais on a

$$\tang\alpha = \tang u_0 \tang\varphi, \qquad \text{donc} \qquad u_0 = \operatorname{arc\,tang}\frac{\tang\alpha}{\tang\varphi}.$$

et l'intégrale ne pourra être indépendante de α que si elle est indépendante de u_0 et pour cela il faut (§ 5) que le polynome $P(\cos u, \sin u)$ soit identiquement nul si n est impair et identique à $a_0(\cos^2 u + \sin^2 u)^{\frac{n}{2}}$ si n est pair.

Il est donc nécessaire que tous les termes de (16) soient de degré pair et représentent le développement d'une somme de puissances de $x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi$. Donc : *une surface est de révolution affine autour de la normale en un point régulier* O, *parallèlement au plan tangent en ce point, si le volume compris entre un plan sécant passant par* O *et la calotte qu'il découpe ne dépend que du produit de la tangente de l'angle des plans sécant et tangent en* O *par une fonction du paramètre qui fixe la position du plan sécant autour de la normale en* O.

Par exemple les six sommets d'un ellipsoïde sont des points (R'); si l'ellipsoïde est de révolution, les deux sommets situés sur l'axe sont des points (R) et tous les points du parallèle médian sont des points (R').

CHAPITRE II.

AUTRES PROPRIÉTÉS DES POINTS (R) ET (R'). POINTS (R'').

8. Nous avons déjà remarqué que tous les éléments attachés à la figure qui nous occupe sont indépendants de α lorsque le point O est un point (R), puisque le groupe des transformations qui font coïncider une figure particulière avec une autre, correspondant à la même valeur de λ, est un groupe de déplacements. Par contre, le groupe des transformations qui transforment en elles-mêmes les surfaces ayant un point (R') ne conserve invariants que certains des éléments que nous pouvons considérer et ces éléments seuls nous conduiront à des propriétés intéressantes simples pour les points (R').

En premier lieu l'aire de la calotte n'est pas conservée par les transformations affines (13) et par suite nous n'étudierons à son sujet que le problème suivant : existe-t-il des points tels que l'aire de la calotte ne dépende que de α et non pas de λ? Il suffit qu'un point soit un point (R) pour qu'il jouisse de la propriété envisagée ici.

La valeur de cette aire est égale à l'intégrale

$$\iint_{\varpi} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

étendue au domaine ϖ défini au paragraphe 2. Nous effectuons le changement de variables (A) et nous cherchons un développement de l'aire en fonction de λ; pour que le point O possède la propriété étudiée, tous les coefficients du développement ainsi trouvé doivent être indépendants de α. Après ce changement de variables, l'intégrale donnant l'aire devient

$$\iint \frac{\rho + \rho^3 a^2 (\sin^2\varphi \cos^2 u + \cos^2\varphi \sin^2 u) + \ldots}{2 \sin\varphi \cos\varphi} d\rho\, du$$

et, par suite, on a

$$\mathcal{A} = \int_{u_0}^{u_0+\pi} \frac{du}{2 \sin\varphi \cos\varphi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}(\ldots)\right],$$

les termes non écrits sont, en ρ, de degré supérieur ou égal à 4 et il faut remplacer dans cette expression ρ par (4) et u_0 par la valeur définie au paragraphe 2. On trouve ainsi

$$\mathcal{A} = \frac{\lambda^2 \pi (\sin^2\alpha \cos^2\varphi + \cos^2\alpha \sin^2\varphi)}{4 a^2 \sin^3\varphi \cos^3\varphi} + \ldots,$$

ce premier terme nous montre que l'aire $\mathcal{A}$ ne peut être indépendante de α que si le point O est un ombilic.

Nous savons qu'il suffit que le point O soit un point (R) pour que $\mathcal{A}$ soit indépendante de α. Montrons, comme au paragraphe 4, que la condition suffisante est aussi nécessaire. Soit n le degré le plus bas des termes de (1) tels que le polynome $P(x, y)$ qui les représente tous ne soit pas le produit d'une constante par $(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$, alors z admet le développement (7) et les termes de degré inférieur à n dans ce développement donnent dans $\mathcal{A}$ des éléments indépendants de α. Après le changement de variables le développement de $\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}$ devient

$$1 + \frac{a^2\rho^2}{2} + \ldots + an\rho^n P(\cos u, \sin u) + \ldots,$$

où les termes non écrits sont indépendants de u et de degré supérieur à 2, ou bien sont de degré supérieur à n. On a donc

$$\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{a^2\rho^4}{8} + \ldots + \frac{an\rho^{n+2}}{n+2} P(\cos u, \sin u) + \ldots\right] du,$$

où l'on doit remplacer ρ par le développement (8). L'aire en question admet donc un développement suivant les puissances de λ et les premiers termes de ce développement sont indépendants de α; le terme de degré n (en λ) est le premier qui puisse dépendre de α et il a pour coefficient, à une constante additive près,

$$(9') \qquad -\left(\frac{2}{a}\right)^{n+1}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\sin^n(u-\alpha)\,P(\cos u, \sin u)\,du.$$

Il faut donc pour que l'aire soit indépendante de α que l'intégrale ci-dessus soit elle-même indépendante de α, or cette intégrale est égale à l'intégrale (12) correspondant à $j=0$, donc elle ne peut être indépendante de α que si tous les coefficients du polynome P mis sous la forme (10) sont nuls (a_0 excepté) jusqu'à ceux dont l'indice est égal à l'exposant de $\sin(u-\alpha)$ dans l'intégrale; on voit donc que, ici encore, le polynome P doit être identiquement nul si n est impair ou égal au produit d'une constante par une puissance de x^2+y^2 si n est pair; par suite le point O est nécessairement un point (R).

9. Nous nous proposons maintenant d'étudier des éléments invariants par les transformations du groupe (13) et qui par suite dépendront seulement du produit de λ par une fonction de α lorsque le point O sera un point (R′), cette fonction de α est d'ailleurs nécessairement $[\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$. Les transformations du groupe (13) maintiennent invariantes les aires situées dans un plan perpendiculaire à Oz, par suite la projection sur le plan tangent en O de l'intersection de la surface et du plan sécant limite une aire qui est indépendante de λ lorsque le point O est un point (R) et qui dépend seulement de $\lambda[\cos^2\varphi\sin^2\alpha+\sin^2\varphi\cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}$ lorsque O est un point (R′). Il est très facile de montrer que cette propriété est caractéristique en étudiant l'intégrale double $\iint dx\,dy$ étendue au domaine $\mathcal{D}$.

Les transformations (13) maintiennent invariants les points de Oz, donc aussi les longueurs sur cet axe, et ceci nous invite à envisager un élément nouveau de notre figure : nous appelons hauteur de la calotte la plus grande distance au plan sécant d'un point de la calotte; cette plus grande distance correspond à un point où le plan tangent à la surface est parallèle au plan sécant; or le parallélisme de deux plans ainsi que le contact d'un plan et de la surface se conservent par les transformations (13), donc aussi le point de Oz par lequel passent les différents plans tangents considérés pour avoir les hauteurs des calottes homologues par les transformations (13). Il en résulte que la projection sur Oz de la hauteur de la calotte ne doit dépendre, lorsque le point est un point (R′), que du produit de λ par une fonction de α. Ces remarques géométriques nous ont également conduit à prendre comme paramètre, au lieu de l'angle du plan sécant et du plan tangent en O, cette projection de la hauteur de la calotte sur Oz qui est aussi la distance du point O au point d'intersection de Oz et du plan tangent parallèle au plan sécant.

Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées d'un point situé sur la calotte et tel que le plan tangent soit parallèle au plan sécant, ces quantités X, Y, Z doivent vérifier le système

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(X, Y) = -\lambda \sin\alpha, \\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}(X, Y) = \lambda \cos\alpha, \end{cases}$$

et X, Y, Z doivent tendre vers O en même temps que λ.

La hauteur de la calotte est la distance du point (X, Y, Z) au plan sécant, donc cette hauteur est

$$\Delta = [\lambda(Y\cos\alpha - X\sin\alpha) - Z](1+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or si le point O est un point (R′), z est une fonction $F(x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi)$ et par suite le système (18) devient

$$2X\sin\varphi F'(X^2\sin^2\varphi + Y^2\cos^2\varphi) = -\lambda\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi},$$

$$2Y\cos\varphi F'(X^2\sin^2\varphi + Y^2\cos^2\varphi) = \lambda\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi},$$

ce qui prouve que $X^2\sin^2\varphi + Y^2\cos^2\varphi$ ne dépend que du produit $\lambda(\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \sin^2\alpha\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$ (on le voit en ajoutant les deux équations membre à membre après les avoir élevées au carré) donc Z ne dépend que de $\lambda(\cos^2\alpha\sin^2\varphi + \sin^2\alpha\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$; de même en multipliant la première équation par $-\lambda\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$ et en l'ajoutant membre à membre au produit de la seconde par $\lambda\dfrac{\cos\alpha}{\cos\varphi}$, on démontre que $\lambda[Y\cos\alpha - X\sin\alpha]$ ne dépend aussi que de $\lambda[\cos^2\alpha\sin^2\varphi+\sin^2\alpha\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$. Donc le numérateur de Δ est bien seulement fonction du produit de λ par une fonction de α, ainsi que nous l'avions remarqué géométriquement car ce numérateur n'est autre que la projection de la hauteur de la calotte sur Oz.

Il est très facile de démontrer que cette propriété est caractéristique des points (R) et (R′). En effet le système (18) nous fournit immédiatement les premiers termes des développements de X et de Y suivant les puissances de λ, on trouve

$$X = -\lambda\frac{\sin\alpha}{2a\sin^2\varphi}+\ldots,\qquad Y=\lambda\frac{\cos\alpha}{2a\cos^2\varphi}+\ldots,$$

on en déduit Z, d'où le numérateur de Δ qui est

$$\Delta_1=\lambda^2\frac{\sin^2\alpha\cos^2\varphi+\cos^2\alpha\sin^2\varphi}{4a\sin^2\varphi\cos^2\varphi}+\ldots.$$

Donc pour que Δ_1 soit indépendant de α, il faut que O soit un ombilic; pour que Δ_1 soit fonction du produit de λ par une fonction $g(\alpha)$, cette dernière doit être $[\cos^2\alpha\sin^2\varphi+\sin^2\alpha\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}$.

Comme il suffit que le point O soit un point (R) ou un point (R′) pour que Δ_1 ait la forme voulue, nous supposons que les premiers termes de z sont conformes à la condition suffisante (c'est-à-dire sont des puissances de $x^2\sin^2\varphi+y^2\cos^2\varphi$) et que les termes de degré n sont les premiers qui ne vérifient pas cette condition. Nous étudions simultanément le cas où Δ_1 est fonction de $\lambda g(\alpha)$ et celui où Δ_1 (et aussi Δ) est indépendant de α, car il suffit dans ce dernier cas de supposer $\varphi=\pi/4$ d'après la condition trouvée pour le premier terme du développement de z.

Soit alors

$$z=a(x^2\sin^2\varphi+y^2\cos^2\varphi)+\ldots+\sum b_{m,k}x^k y^{m-k}\sin^k\varphi\cos^{m-k}\varphi+\ldots.$$

en désignant par $b_{m,k}$ des constantes; le système (18) nous donne aisément les développements de X et de Y

$$X = -\lambda \frac{\sin\alpha}{2a\sin^2\varphi} + \ldots + \lambda^{m-1} \sum k b_{m,k} \frac{(-1)^k \sin^{k-1}\alpha \cos^{m-k}\alpha}{2^m a^m \sin^k\varphi \cos^{m-k}\varphi} + \ldots,$$

$$Y = \lambda \frac{\cos\alpha}{2a\cos^2\varphi} + \ldots + \lambda^{m-1} \sum (m-k) b_{m,k} \frac{(-1)^{k-1} \sin^k\alpha \cos^{m-k-1}\alpha}{2^m a^m \sin^k\varphi \cos^{m-k}\varphi} + \ldots,$$

les termes non écrits sont de degré (en λ) supérieur à $m-1$ ou bien correspondent aux termes de z qui vérifient la condition suffisante.

Le développement de Z s'en déduit très facilement, d'où

$$\Delta_1 = \frac{\lambda^2}{4a}\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\varphi} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi}\right) + \ldots + \frac{\lambda^m}{2^m a^m} \sum b_{m,k} \frac{(-1)^{k-1} \sin^k\alpha \cos^{m-k}\alpha}{\sin^k\varphi \cos^{m-k}\varphi} + \ldots,$$

expression dans laquelle les termes non écrits correspondent aux termes de z qui vérifient la condition suffisante, ou bien sont de degré supérieur à m. Il est donc nécessaire que

$$\Sigma b_{m,k}(-1)^k \sin^k\alpha \cos^k\varphi \cos^{m-k}\alpha \sin^{m-k}\varphi \equiv A(\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \cos^2\alpha\sin^2\varphi)^{\frac{m}{2}}.$$

A étant une constante; il en résulte que les termes de degré n doivent constituer le développement d'une puissance de $x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi$ si n est pair; si n est impair, ils doivent être identiquement nuls, cela est évident si φ est différent de $\frac{\pi}{4}$, puisque le premier membre est un polynome et le second est irrationnel; si φ est égal à $\frac{\pi}{4}$, le premier membre de degré impair dépend sûrement de α s'il n'est pas identiquement nul. Donc le point O doit être un point (R′) si $\varphi \neq \frac{\pi}{4}$, ou un point (R) si φ est égal à $\frac{\pi}{4}$.

10. Nous avons remarqué au début du paragraphe précédent que les plans tangents, voisins du plan tangent en O, qui se déduisent de l'un d'eux par les transformations (13), coupent l'axe Oz en un même point; on constate que ces plans tangents touchent la surface en des points qui ont même cote, puisque les transformations (13) maintiennent invariante la cote d'un point. Donc si une surface est de révolution affine autour de Oz parallèlement au plan tangent en O, un cône

circonscrit ayant pour sommet un point de Oz (voisin de O) touche la surface suivant une courbe plane dont le plan est parallèle au plan tangent en O ([1]).

Cette propriété caractérise les points (R) ou (R′). En effet nous pouvons représenter la surface au voisinage de O par l'équation

$$z = a(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi) + \Sigma a_p(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi)^p + \mathrm{P}(x \sin\varphi, y\cos\varphi) + \ldots,$$

où l'on désigne par P le polynome homogène de degré n qui groupe les termes de plus bas degré dont l'ensemble n'est pas une puissance de $x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi$. Un plan tangent voisin du plan tangent en O touche la surface en un point dont les coordonnées x, y, z sont toutes trois voisines de zéro et il rencontre l'axe Oz en un point dont la cote K est déterminée par la relation

$$\text{(19)}\quad \begin{aligned} \mathrm{K} = &- a(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi) - \Sigma(2p-1)a_p(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi)^p \\ &-(n-1)\mathrm{P}(x\sin\varphi, y\cos\varphi) + \ldots. \end{aligned}$$

Nous représenterons sous la forme

$$\text{(B)}\qquad x = r\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sin\varphi}, \qquad y = r\frac{\sin\beta}{\sqrt{2}\cos\varphi}$$

les coordonnées x et y du point de contact d'un plan tangent mené par un point M de Oz, alors la cote z de ce point de contact est

$$z = \frac{ar^2}{2} + \sum \frac{a_p r^{2p}}{2^p} + \frac{r^n}{\sqrt{2^n}}\mathrm{P}(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots.$$

Soit $-a\mu^2$ la cote du point M (μ est petit et tend vers zéro quand M tend vers O); nous pourrons déterminer le développement de r suivant les puissances de μ en fonction du paramètre β figurant dans les expressions de x et de y, il suffit pour cela de faire $\mathrm{K} = -a\mu^2$ dans (19) et de déterminer r par la méthode des coefficients indéterminés; on obtient

$$\text{(20)}\qquad r = \mu\sqrt{2} + \ldots - \mu^{n-1}\frac{n-1}{a\sqrt{2}}\mathrm{P}(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots.$$

([1]) Il s'agit d'un cône qui enveloppe des plans tangents tendant vers le plan tangent en O lorsque le sommet du cône tend vers O et nous supposons toujours que le point O est un point régulier convexe de la surface.

d'où l'on déduit que la cote du point de contact est

$$z = a\mu^2 + \ldots + n\mu^n P(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots, \tag{21}$$

les termes non écrits sont de degré supérieur à n ou bien correspondent aux termes vérifiant la condition suffisante et sont alors indépendants de β. Pour que le point O possède la propriété cherchée, il faut que z conserve la même valeur quel que soit β et qu'il en soit ainsi pour toutes les valeurs de μ, donc les coefficients du développement (21) doivent être tous indépendants de β et par suite il faut que $P(\cos\beta, \sin\beta)$ soit identique à une constante. Cela exige que le polynome $P(x \sin\varphi, y\cos\varphi)$ soit identiquement nul si n est impair ou qu'il soit identique à $a_0(x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi)^{\frac{n}{2}}$ si n est pair. Donc la surface est de révolution affine autour de Oz parallèlement au plan tangent en O.

Remarquons que nous arrivons à la même conclusion si nous supposons simplement que les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Oz touchent la surface suivant des courbes planes parallèles (sans supposer comme plus haut que les plans de ces courbes sont parallèles au plan tangent en O). En effet il faut alors pouvoir trouver des coefficients A, B, C, D indépendants de β tels qu'il existe entre les coordonnées du point de contact du plan tangent une relation de la forme

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

qui doit être vérifiée quel que soit β et de plus les coefficients A, B, C doivent être les produits d'une même fonction de μ par des constantes; on peut donc, en modifiant la valeur de D, supposer que A, B, C sont des constantes (indépendantes de β et de μ). Le premier membre de la relation peut être développé suivant les puissances de μ et tous les coefficients doivent être identiquement nuls. En posant

$$D = d_0 + \mu d_1 + \mu^2 d_2 + \ldots,$$

il vient

$$d_0 + \mu\left[A\frac{\cos\beta}{\sin\varphi} + B\frac{\sin\beta}{\cos\varphi} + d_1\right] + \mu^2[\ldots] \equiv 0;$$

cela exige que A et B soient nuls et les plans des courbes de contact doivent être parallèles au plan tangent en O; nous sommes donc ramené à l'étude précédente. Cela est d'ailleurs évident géométriquement.

11. Dans le paragraphe qui précède nous n'avons eu nullement besoin de supposer les axes rectangulaires pour effectuer les différents calculs; si nous supposons que $O\xi$ et $O\eta$ coïncident avec Ox et Oy et que le nouvel axe $O\zeta$ est défini par ses cosinus directeurs i, j, k relativement à $Oxyz$, le plan tangent en ξ, η, ζ à la surface représentée par l'équation $\zeta = f(\xi, \eta)$ est défini par une équation de la même forme que plus haut et la distance du point O au point de rencontre de ce plan avec $O\zeta$ est $\zeta - \xi f'_\xi - \eta f'_\eta$. Par suite il est naturel, pour étudier les cônes circonscrits à la surface lorsque leurs sommets sont sur une droite (D) passant par O et ayant pour cosinus directeurs i, j, k, de prendre pour axes Ox, Oy et cette droite (D). La surface est alors représentée en coordonnées obliques par une équation de la même forme que (1) et la recherche du point de contact d'un plan tangent passant par le point M de (D) ayant pour coordonnées 0, 0, $-a\mu^2$ s'effectue exactement comme dans le cas particulier où la droite (D) est normale à la surface. Donc : *s'il existe une droite* (D) *passant par un point régulier convexe*, O, *d'une surface analytique telle que les cônes circonscrits ayant leurs sommets sur* (D) *touchent la surface suivant des courbes planes situées dans des plans parallèles*, l'équation de la surface doit être de la forme

$$\zeta = f(x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi);$$

nous dirons que *la surface est de révolution affine autour de la droite* (D) *parallèlement au plan tangent en* O et que le point O est un point (R″).

Cette appellation généralise celle que nous avons introduite plus haut. Par exemple tous les points d'un ellipsoïde sont des points (R″) relativement à la droite joignant ce point au centre de la surface.

Le paramètre OM que nous avons été amené à choisir nous permettra d'obtenir des propriétés intéressantes du volume V lorsque la surface possède en O l'une des propriétés (R), (R′) ou (R″). En effet les surfaces ayant un point (R″) admettent un groupe de transformations affines de déterminant 1 qui les transforment en elles-mêmes. Ces transformations conservent les volumes compris entre un plan et la surface et conservent le point d'intersection d'un plan avec l'axe de révolution affine. Nous voyons donc géométriquement que si un point O est un point (R″) [les points (R′) et (R) ne sont que des points (R″) particuliers], le volume compris entre un plan sécant et la calotte qu'il découpe ne dépend que de la distance du point O au point d'intersection de l'axe et du plan tangent parallèle au plan sécant. Il n'est guère simple d'introduire l'angle des plans sécant et tangent en O pour déterminer le plan sécant, à cause de l'obliquité des axes, pourtant nous utiliserons encore l'équation du plan sécant mise sous la forme (2), étant entendu que dans le cas général (pour les points R″) le paramètre λ ne représente plus la tangente de l'angle des plans.

12. Cette propriété que nous venons de remarquer est-elle une propriété caractéristique des surfaces de révolution affine? Conservons dans le plan tangent les axes Ox et Oy précédemment employés et prenons comme axe Oz, en général oblique, la droite (D). Soit $OM = -a\mu^2$ la cote du point d'intersection de (D) et du plan tangent arbitraire (Q) qui nous permet de définir le plan sécant et par suite de construire la figure étudiée. Nous déterminons le plan (Q) en lui imposant la condition de toucher la surface en un point d'un certain plan arbitraire (Π) passant par Oz; soit $y = x \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\varphi$ l'équation de (Π) (β est arbitraire).

Lorsque μ et β sont donnés, le plan tangent est parfaitement déterminé et par suite le plan sécant qui lui est parallèle et passe par O; nous écrivons l'équation de ce plan sécant sous la forme (2) et les quantités λ et α sont déterminées en fonction de μ et de β.

Si les axes sont rectangulaires nous aurons le volume compris entre le plan sécant et la calotte qu'il découpe par une application des résultats des paragraphes 2 et 7. Si la droite (D) sur laquelle se déplace M n'est pas la normale, nous pouvons appeler ξ, η, ζ, les coordonnées du point (x, y, z) lorsqu'on rapporte la surface aux axes rectangulaires Ox, Oy et la normale à la surface. Le volume d'un domaine quelconque de l'espace est égal à l'intégrale triple $\iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta$ étendue au domaine en question, ce qui par un changement de variables se ramène à $k\iiint dx\, dy\, dz$. Finalement nous aurons à effectuer les même calculs que la droite (D) soit ou non normale à la surface et il suffira, pour avoir le volume de multiplier la valeur des intégrales par le cosinus directeur k.

La cote z d'un point de la surface peut être représentée par le développement (16) où l'on suppose toujours que les termes non écrits ont un degré supérieur à n ou bien sont des puissances de $x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi$. Le plan tangent (Q) est défini par les valeurs, en son point de contact, de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ et le plan sécant qui lui est parallèle est représenté par l'équation

$$Z = X\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

dont les coefficients peuvent être développés suivant les puissances de r (développements qui dépendent de β), par suite, en tenant compte de (20), suivant les puissances de μ. Nous avons pour calculer les quantités λ et α qui figurent dans l'équation (2) le système suivant :

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda \cos\alpha = \sqrt{2}\, a r \sin\beta \cos\varphi + \ldots + \cos\varphi\, 2^{-\frac{n-1}{2}} r^{n-1} P'_w(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots, \\ -\lambda \sin\alpha = \sqrt{2}\, a r \cos\beta \sin\varphi + \ldots + \sin\varphi\, 2^{-\frac{n-1}{2}} r^{n-1} P'_v(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots, \end{cases}$$

dans lequel nous désignons par $P'_v(v, w)$ et $P'_w(v, w)$ les dérivées partielles de $P(v, w)$.

Nous voyons donc que $4a^2\mu^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi$ est le premier terme du développement de $\lambda^2(\cos^2\alpha \sin^2\varphi + \sin^2\alpha \cos^2\varphi)$; par suite le premier terme du développement, suivant les puissances de μ, du volume V cherché, est le produit par le cosinus directeur k [de (D) relativement à la normale en O] de la quantité $\frac{\pi a}{\sin 2\varphi} \mu^4$ qui est bien indépendante de β.

Pour que le point O possède la propriété que nous désirons il faut que tous les coefficients du développement de V suivant les puissances de μ soient indépendants de β et nous savons qu'il suffit pour cela que la surface soit de révolution affine autour de (D). Donc les termes non écrits dans (16) vérifient une condition suffisante quand leur degré est inférieur à n, si bien que le calcul du premier terme de V qui peut dépendre de β doit faire intervenir le polynome P; ce premier terme est donc, en μ, de degré $n + 2$.

Pour simplifier l'écriture nous posons

$$L = (\cos^2\alpha \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \cos^{-1}\varphi \sin^{-1}\varphi.$$

Cela étant, les relations (22) nous donnent facilement

$$\lambda^2 L^2 = 2a^2 r^2 + \ldots + 2^{2-\frac{n}{2}} n a r^n P(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots,$$

donc, d'après (20),

$$\lambda^2 L^2 = 4a^2 \mu^2 + \ldots + 4a\mu^n P(\cos\beta, \sin\beta) + \ldots,$$

où les termes non écrits sont indépendants de β ou sont, en μ, de degré supérieur à n. D'autre part nous savons que le volume V est alors représenté par le développement

$$\begin{aligned}\frac{V}{k} = \pi \frac{\lambda^4 L^4}{32 a^3 \sin\varphi \cos\varphi} + \ldots \\ - \frac{\lambda^{n+2} L^{n+2}}{(n+2)a^{n+2} \sin\varphi \cos\varphi} \int_{u_0}^{u_0+\pi} \sin^{n+2}(u - u_0)\, P(\cos u, \sin u)\, du + \ldots,\end{aligned}$$

dans lequel les termes non écrits sont en λ de degré supérieur à $n+2$ ou bien sont tels que les coefficients de $\lambda^p L^p$ sont des constantes (p étant d'ailleurs supérieur à 4).

Dans l'intégrale précédente u_0 est déterminé par la relation

(23) $$\operatorname{tang} u_0 \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\alpha,$$

qui nous donne immédiatement

$$\operatorname{tang} u_0 = -\frac{1}{\operatorname{tang}\beta} + \mu(\ldots), \qquad \text{d'où} \quad u_0 = \beta - \frac{\pi}{2} + \mu(\ldots),$$

par suite le coefficient de μ^{n+2} dans le développement de V/k sera, à une constante additive près provenant des premiers termes de z,

$$\frac{\pi P(\cos\beta, \sin\beta)}{\sin\varphi \cos\varphi} - \frac{2^{n+2}}{n+2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n+2} t}{\sin\varphi \cos\varphi} P\left[\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2} + t\right), \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2} + t\right)\right] dt$$

et nous devons déterminer P pour que l'expression ci-dessus soit indépendante de β.

Autrement dit, nous devons chercher des fonctions $f(u)$, ayant la forme (10), vérifiant les conditions indiquées au paragraphe 5, telles que

$$\pi f(\beta) - \frac{2^{n+2}}{n+2}\int_0^\pi \sin^{n+2} t\, f\left(\beta - \frac{\pi}{2} + t\right) dt, \tag{24}$$

soit indépendant de β. Il suffit évidemment que f soit une constante, mais ce n'est pas nécessaire.

En dérivant cette expression (24) par rapport à β nous n'avons pu simplifier beaucoup les conditions imposées et nous avons dû calculer la valeur de (24) en fonction des coefficients a_p et b_p de $f(\beta)$. Pour cela nous complétons le tableau des intégrales définies données au paragraphe 5 par les intégrales suivantes dont les valeurs s'obtiennent à l'aide des formules d'Euler :

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1} t \sin[(2j+1)(t+\alpha)]\, dt = \pi\, 2^{-2m-1}(-1)^j C_{2m+1}^{m-j} \cos(2j+1)\alpha,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2m+1} t \cos[(2j+1)(t+\alpha)]\, dt = \pi\, 2^{-2m-1}(-1)^{j+1} C_{2m+1}^{m-j} \sin(2j+1)\alpha,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2m} t \cos 2j(t+\alpha)\, dt = \pi\, 2^{-2m}(-1)^j C_{2m}^{m-j} \cos 2j\alpha,$$

$$\int_0^\pi \sin^{2m} t \sin 2j(t+\alpha)\, dt = \pi\, 2^{-2m}(-1)^j C_{2m}^{m-j} \sin 2j\alpha,$$

j est inférieur ou égal à m.

Nous pouvons alors calculer la valeur d'une expression (24) correspondant à une fonction $f(u)$ qui a pour expression

$$A\cos(n-2p)u + B\sin(n-2p)u,$$

on obtient

$$\pi[A\cos(n-2p)\beta + B\sin(n-2p)\beta]\left[1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2}\right] \tag{25}$$

et par suite nous pouvons étudier la fonction de β définie par (24) lorsque f est représentée par le polynome de Fourier (10), puisque les indices de tous les coefficients de (10) ont la même parité que n.

Si n est impair $f(u)$ peut s'écrire

$$\sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \{ a_{n-2p}\cos(n-2p)u + b_{n-2p}\sin(n-2p)u \},$$

donc l'expression (24) prend la valeur

$$\pi \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)\beta + b_{n-2p} \sin(n-2p)\beta \} \left[1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2} \right],$$

c'est donc un polynome de Fourier qui ne peut être indépendant de β qu'à la condition que tous ses coefficients soient nuls (puisqu'aucun des termes ci-dessus n'est indépendant de β, n étant impair). Donc tous les coefficients de $f(u)$, dont l'indice est tel que $1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2}$ ne soit pas nul, doivent être nuls. C'est-à-dire que tous les coefficients de $f(u)$ doivent être nuls à l'exception de ceux qui correspondent à $p = 0$, puisque ces derniers, seuls, disparaissent de l'expression (24). Les coefficients a_n et b_n peuvent donc être choisis arbitrairement et eux seuls peuvent l'être.

Si n est pair nous avons de même

$$f(u) = a_0 + \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)u + b_{n-2p} \sin(n-2p)u \}$$

et l'expression (24) devient, en désignant par D une certaine constante

$$D + \pi \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} \{ a_{n-2p} \cos(n-2p)\beta + b_{n-2p} \sin(n-2p)\beta \} \left(1 - \frac{C_{n+2}^{p+1}}{n+2} \right),$$

ce qui ne peut être indépendant de β qu'à la condition de donner la valeur 0 à tous les coefficients a et b dont l'indice est différent de zéro et tel que $n + 2 - C_{n+2}^{p+1}$ ne soit pas nul. Par conséquent le polynome de Fourier f doit être identique à $a_0 + A \cos nu + B \sin nu$, quel que soit n pair ou impair, mais a_0 est nul si n est impair.

Il en résulte que la considération de ce terme en μ^{n+2} dans V, ne nous prouve pas que la condition suffisante est nécessaire. Il suffit en effet que le polynome $P(v, w)$ ait une expression de la forme suivante pour que ce terme soit indépendant de β

$$A \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^j C_n^{2j} v^{n-2j} w^{2j} + B \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^j C_n^{2j+1} v^{n-2j-1} w^{2j+1},$$

expression à laquelle on doit ajouter le produit de $(v^2+w^2)^{\frac{n}{2}}$ par une constante arbitraire a_0 si n est pair.

13. Puisque la condition suffisante n'est peut-être pas nécessaire, il nous faut chercher s'il existe une surface possédant la propriété désirée, telle que le polynome P correspondant ait la forme ci-dessus où A et B ne seraient pas nuls. Pour cela nous déterminerons les polynomes homogènes de degré supérieur à n qui figurent dans le développement de z.

Soit donc

$$z = a(x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi) + \ldots + \mathrm{P}(x\sin\varphi,\, y\cos\varphi) + \Sigma\, \mathrm{X}_q(x\sin\varphi,\, y\cos\varphi),$$

où X_q désigne un polynome homogène de degré q (supérieur à n) et où P est le polynome trouvé ci-dessus, les termes non écrits sont des puissances de $(x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi)$.

Nous calculerons le volume en fonction de μ et il faudra pousser le développement de V/k jusqu'aux termes qui nous permettront de déterminer successivement les polynomes X. Or un polynome X_q est tel que la fonction $\mathrm{X}_q(\cos u,\, \sin u)$ soit identique à un polynome de Fourier ne contenant que des termes dont l'ordre est inférieur ou égal à q et de même parité que q. Le calcul du paragraphe précédent nous apprend aussi que le premier coefficient de V/k dans lequel intervient le polynome X_q est celui de μ^{q+2} et dans ce coefficient figurent seulement, parmi les coefficients inconnus du polynome de Fourier cherché, ceux dont l'ordre est inférieur ou égal à $q-2$.

En déterminant successivement les polynomes X à partir de celui d'indice $n+1$, nous aurons à chaque détermination deux constantes arbitraires nouvelles (ou 3 si le polynome X est de degré pair mais la constante additive correspondant à la puissance de $x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi$ ne modifie en rien les calculs effectués plus loin). La détermination des coefficients du polynome X_q (mis sous forme de polynome de Fourier) ne sera possible que si les autres éléments du coefficient de μ^{q+2} dans V/k forment eux-mêmes un polynome de Fourier ne contenant que des termes d'ordre inférieur ou égal à $q-2$ et de même parité que q.

Dans ce paragraphe nous nous proposons de montrer que la détermination de X_q est possible lorsque q est inférieur à $2n-2$. Nous ne ferons pas la détermination complète de ces polynomes, car le calcul est long (et sans grand intérêt) même dans le cas où $q=n+2$.

En premier lieu nous déterminons l'équation du plan sécant mené par O parallèlement au plan (Q) en fonction de μ et du paramètre β. Pour cela nous devons compléter les calculs des paragraphes précédents. La cote du point de rencontre de Oz et du plan tangent au point x, y, z est donnée par

$$(26)\quad \begin{aligned} K = -a\mu^2 = &-a(x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi) + \ldots - (n-1)\,P(x\sin\varphi,\ y\cos\varphi) \\ &- \Sigma(q-1)X_q(x\sin\varphi,\ y\cos\varphi), \end{aligned}$$

où les termes non écrits sont des puissances de $x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi$. Les abscisse et ordonnée du point de contact du plan (Q) étant encore représentées en fonction de β par les expressions (B), on a, pour déterminer r en fonction de μ et de β, la relation

$$(27)\qquad -a\mu^2 = -a\frac{r^2}{2} + \ldots - (n-1)\,r^n 2^{-\frac{n}{2}}P - \Sigma(q-1)\,r^q 2^{-\frac{q}{2}}X_q,$$

où les termes non écrits sont indépendants de β. Dès lors le développement de r en fonction de μ est de la forme

$$r = \mu\sqrt{2} + \ldots - \mu^{n-1}\frac{(n-1)}{a\sqrt{2}}P(\cos\beta,\ \sin\beta) + \Sigma\mu^m Y_m.$$

Les coefficients de ce développement s'obtiennent par la méthode des coefficients indéterminés. La détermination de Y_m conduit à une expression linéaire en fonction des polynomes X et P tant que l'on n'a pas à faire intervenir dans r^2 le carré du premier terme qui dépend de β (par l'intermédiaire de P; ce terme est de degré $n-1$), ni dans r^n un terme dont le coefficient dépend de β. Donc, pour toutes les puissances de μ inférieures à $2n-3$, les coefficients Y_m seront des fonctions linéaires des différents polynomes X d'indice inférieur ou égal à $m+1$; le coefficient de μ^{2n-3} fera intervenir P^2. On en conclut que tous les coefficients des puissances μ^m dans le développement de r sont identiques à des polynomes de Fourier dont l'ordre est $m+1$ tant que m est inférieur à $2n-3$; mais le coefficient de μ^{2n-3} contient deux termes d'ordre $2n$ qui proviennent de P^2 tandis que le polynome X inconnu qui figure dans ce même coefficient de μ^{2n-3} n'est que d'ordre $2n-2$. Il est donc probable que nous serons arrêté dans la détermination des polynomes X lors du calcul du terme en μ^{2n} de V/k.

Des remarques précédentes et du développement (27) nous déduisons que r admet le développement

$$r = \mu\sqrt{2} - \ldots - \mu^{n-1}\frac{(n-1)\,\mathrm{P}(\cos\beta,\,\sin\beta)}{a\sqrt{2}} - \ldots \tag{28}$$
$$+ \mu^{2n-3}\left[\frac{n(n-1)^2\mathrm{P}^2}{2a^2\sqrt{2}} - \frac{2n-3}{a\sqrt{2}}\mathrm{X}_{2n-2}\right] + \ldots,$$

dans lequel les termes non écrits sont de trois catégories différentes : ou bien ils sont de degré supérieur à $2n-3$, ou bien leurs coefficients sont des constantes et leur degré supérieur à 2, ou bien leurs coefficients sont des polynomes de Fourier dont l'ordre dépasse d'une unité le degré m (supérieur ou égal à n) de μ, mais dans ces polynomes de Fourier les seuls termes d'ordre le plus élevé $(m+1)$ proviennent du polynome X_{m+1} non déterminé par l'étude des termes de V/k dont le degré est inférieur à $m+3$; en effet les ordres des polynomes de Fourier croissent avec leurs indices et les seuls qui figurent dans le coefficient de μ^m dans (28) sont d'indice inférieur ou égal à $m+1$.

Le développement (28) nous donnant l'expression de r, nous pouvons, pour utiliser les calculs des premiers paragraphes, écrire l'équation du plan tangent sous la forme (2) alors λ et α sont déterminés par le système

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda\cos\alpha &= r\sqrt{2}a\sin\beta\cos\varphi + \ldots + r^{n-1}2^{\frac{1-n}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{P}'_v(\cos\beta,\,\sin\beta) \\ &\quad + \Sigma r^{q-1}2^{\frac{1-q}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{X}'_{q,w}(\cos\beta,\,\sin\beta), \\ -\lambda\sin\alpha &= r\sqrt{2}a\cos\beta\sin\varphi + \ldots + r^{n-1}2^{\frac{1-n}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{P}'_u(\cos\beta,\,\sin\beta) \\ &\quad + \Sigma r^{q-1}2^{\frac{1-q}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{X}'_{q,v}(\cos\beta,\,\sin\beta), \end{aligned}\right.$$

dans lequel $\mathrm{X}'_{q,v}$ et $\mathrm{X}'_{q,w}$ représentent les dérivées partielles du polynome homogène $\mathrm{X}_q(v,\,w)$, donc $\mathrm{X}'_{q,v}$ et $\mathrm{X}'_{q,w}$ sont de degré $q-1$ et le polynome de Fourier identique à $\mathrm{X}'_{q,v}(\cos\beta,\,\sin\beta)$ est d'ordre $q-1$. Les termes non écrits dans (29) correspondent à des puissances de $x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi$ figurant dans z. Nous ajoutons membre à membre les deux équations (29) après les avoir multipliées respectivement par $(\cos\varphi)^{-1}$ et $(\sin\varphi)^{-1}$ puis élevées au carré. Nous obtenons ainsi

$$\lambda^2 L^2 = 2a^2 r^2 + \ldots + naPr^n 2^{\frac{4-n}{2}} + \ldots + r^{2n-2}[(2n-2)2^{2-n} a X_{2n-2} + \ldots] + \ldots,$$

dans cette expression les termes non écrits sont indépendants de β et de degré supérieur à 2, ou bien sont de degré supérieur à n et leur coefficient est un polynome de Fourier dont l'ordre est égal au degré de r, ou bien sont de degré supérieur à $2n-2$. On vérifie ces affirmations en tenant compte des remarques sur les ordres de $X'_{q,v}$ et de $X'_{q,w}$; notons encore que dans les termes de degré m inférieur à $2n-2$, les seuls éléments d'ordre m du polynome de Fourier coefficient de r^m proviennent du polynome X_m.

En tenant compte de (28) nous obtenons

$$(30)\qquad \lambda^2 L^2 = 4a^2\mu^2 + \ldots + 4a\mu^n P + \ldots + \mu^{2n-2}[4aX_{2n-2} - (n^2-1)P^2] + \ldots,$$

où les termes non écrits sont de trois catégories, ils correspondent à des puissances de $x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi$, ou bien ils sont de degré m supérieur à n et leur coefficient est un polynome de Fourier d'ordre m dont les termes d'ordre le plus élevé proviennent exclusivement du polynome X_m (si $m < 2n-2$), ou bien ils sont de degré supérieur à $2n-2$.

D'autre part des relations (29) et de la relation (23) on déduit

$$\operatorname{tang} u_0 = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - r^{n-2}\frac{\sin\beta\, P'_v(\cos\beta, \sin\beta) - \cos\beta\, P'_w(\cos\beta, \sin\beta)}{\sqrt{2^n}\, a \sin^2\beta} + \ldots,$$

d'où, en tenant compte de (28),

$$u_0 = \beta - \frac{\pi}{2} - \mu^{n-2}\frac{\sin\beta\, P'_v - \cos\beta\, P'_w}{2a} + \ldots.$$

Mais nous connaissons l'expression du polynome P (elle est donnée à la fin du paragraphe 12, à une puissance de $v^2 + w^2$ près si n est pair), ce qui nous permet de calculer P'_v et P'_w. On trouve

$$P'_v(\cos\beta, \sin\beta) = n[A\cos(n-1)\beta + B\sin(n-1)\beta]$$
$$P'_w(\cos\beta, \sin\beta) = n[-A\sin(n-1)\beta + B\cos(n-1)\beta] \quad (^1);$$

(1) On peut obtenir ces formules en utilisant les propriétés des polynomes harmoniques $(A - iB)(v + iw)^n$.

les termes provenant de la puissance de v^2+w^2 qui doit être ajoutée, dans le cas où P est de degré pair, ne modifient pas le calcul ultérieur.

Nous pouvons donc déterminer le développement de u_0 en fonction de μ et de β en faisant intervenir les constantes arbitraires A et B du polynome P

$$u_0 = \beta - \frac{\pi}{2} - \mu^{n-2}\frac{n[\mathrm{A}\sin n\beta - \mathrm{B}\cos n\beta]}{2a} + \ldots \tag{31}$$

14. Nous devons maintenant prolonger les développements donnés précédemment pour obtenir le volume V. Le produit de ce volume par $k^{-1}\sin\varphi\cos\varphi$ est égal à l'intégrale suivante (nous désignons toujours par la lettre S l'expression $\sin u \cos\alpha \sin\varphi - \cos u \sin\alpha\cos\varphi$):

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi}\left\{\frac{\lambda \mathrm{S}\rho^3}{3\sqrt{2}} - \frac{a\rho^4}{8} + \ldots - \frac{\rho^{n+2}\,\mathrm{P}(\cos u, \sin u)}{(n+2)\sqrt{2^n}} - \sum \frac{\rho^{q+2}\,\mathrm{X}_q(\cos u, \sin u)}{(q+2)\sqrt{2^q}}\right\} du,$$

où l'on doit remplacer ρ par la fonction de u qui représente l'intersection de la surface avec le plan sécant défini par (2). Cette fonction $\rho(u)$ est déterminée par

$$\frac{\lambda \mathrm{S}}{\sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{a}{2}\rho + \ldots + \rho^{n-1}2^{-\frac{n}{2}}\mathrm{P}(\cos u, \sin u) + \sum \rho^{q-1}2^{-\frac{q}{2}}\mathrm{X}_q(\cos u, \sin u);$$

et l'on obtient, par la méthode des coefficients indéterminés,

$$\begin{aligned}\rho = {} & \frac{\sqrt{2}\lambda \mathrm{S}}{a\sin\varphi\cos\varphi} - \ldots - \frac{\lambda^{n-1}\mathrm{S}^{n-1}\sqrt{2}\,\mathrm{P}(\cos u, \sin u)}{a^n \sin^{n-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi} + \ldots \\ & + \frac{\lambda^{2n-3}\mathrm{S}^{2n-3}}{\sin^{2n-3}\varphi\cos^{2n-3}\varphi}\left[\frac{(n-1)\sqrt{2}\,\mathrm{P}^2}{a^{2n-1}} - \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{X}_{2n-2}}{a^{2n-2}} - \ldots\right] + \ldots,\end{aligned} \tag{32}$$

où les termes non écrits sont tels que le coefficient de $\lambda^m \mathrm{S}^m$ est indépendant de u et m est alors supérieur à 2, ou bien ce coefficient est identique à un polynome de Fourier d'ordre $m+1$ et m est supérieur à n (les seuls termes d'ordre $m+1$ dans le coefficient en question proviennent du polynome X d'indice égal à $m+1$) ou enfin les termes non écrits sont de degré supérieur à $2n-3$.

Après remplacement de ρ par (32) dans l'intégrale donnant le volume, nous sommes conduit à intégrer des expressions ayant la forme $\int_{u_0}^{u_0+\pi} S^m f(u)\,du$ où $f(u)$ est un polynome de Fourier d'ordre $m-2$, lorsque m est inférieur à $2n$ et supérieur à $n+2$, et les seuls termes d'ordre $m-2$ proviennent du polynome X_{m-2}. Les intégrales définies calculées précédemment nous montrent que

$$\int_{u_0}^{u_0+\pi} S^m f(u)\,du = L^m g(u_0),$$

où la fonction $g(u_0)$ est un polynome de Fourier dont l'ordre est égal à $m-2$ et les seuls termes d'ordre $m-2$ proviennent du polynome X_{m-2}.

Les remarques faites sur les ordres des polynomes de Fourier figurant dans les coefficients des différents développements que nous avons calculés et le calcul du paragraphe 12 nous montrent que les remplacements de L par sa valeur tirée de (30) et de u_0 par sa valeur (31) donneront un développement suivant les puissances de μ tel que le coefficient de μ^m soit un polynome de Fourier en β d'ordre $m-4$; par suite il sera possible de déterminer de proche en proche les coefficients des polynomes de Fourier identiques aux X_q (et ces polynomes dépendront de deux ou trois arbitraires suivant que q est impair ou pair) et nous calculerons le développement de z tant que nous ne considérons dans V que des termes de degré, en μ, inférieur à $2n$.

15. Qu'arrive-t-il si nous étudions maintenant le terme de degré $2n$ du développement de V/k? Ce terme a pour coefficient un polynome de Fourier qui ne contient comme inconnus que des coefficients d'ordre inférieur ou égal à $2n-4$ et nous allons voir qu'il y figure des termes d'ordre $2n$. Pour que ce coefficient soit indépendant de β il faudra donc annuler les coefficients de ces termes d'ordre $2n$.

Nous distinguons deux cas suivant la parité de n pour tenir compte des changements d'expression de certaines intégrales. Supposons d'abord n pair. Soit $n = 2m$, nous trouvons alors

$$(33)\quad \frac{V\sin\varphi\cos\varphi}{k} = \frac{\pi\lambda^4 L^4}{32a^3} - \ldots - \lambda^{n+2}L^{n+2}\pi(-1)^m \frac{A\cos nu_0 + B\sin nu_0}{2^{n+2}a^{n+2}} + \ldots$$
$$+ \lambda^{2n}L^{2n}\int_{u}^{u_0+\pi} \frac{P^2(\cos u,\ \sin u)\sin^{2n}(u-u_0)\,du}{a^{2n+1}} + \ldots;$$

les termes non écrits ne peuvent, d'après ce que nous avons dit, donner aucun élément d'ordre $2n$ dans le coefficient de μ^{2n}. Nous avons conservé, pour simplifier l'écriture, l'expression P^2 mais les seuls termes de ce polynome qui nous intéressent sont ceux d'ordre $2n$; ils ont pour valeur

$$\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2nu + AB \sin 2nu.$$

Il faut maintenant remplacer dans (33) L par son expression tirée de (30) et u_0 par (31). Les seuls éléments d'ordre $2n$ que nous obtenons dans le coefficient de μ^{2n} sont :

$$\frac{\pi}{4a}(3 - n^2) P^2(\cos\beta, \sin\beta),$$

provenant de $\frac{\pi\lambda^4 L^4}{32 a^3}$;

$$-\frac{\pi}{2a}(n+2) P^2(\cos\beta, \sin\beta) - \frac{\pi}{2a} n^2 [A \sin n\beta - B \cos n\beta]^2,$$

provenant du terme en $L^{n+2}\lambda^{n+2}$ dans (30);

$$\frac{\pi}{a}\left[\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2n\beta + AB \sin 2n\beta\right],$$

provenant du terme en L^{2n} de (30); par suite, lorsque n est pair le coefficient de μ^{2n} dans le développement de V contient les termes d'ordre $2n$ suivants :

$$\frac{\pi}{4a}(n^2 - 2n + 3)\left[\frac{A^2 - B^2}{2} \cos 2n\beta + AB \sin 2n\beta\right],$$

et ils ne peuvent disparaître de l'expression de V qu'à la condition que A et B soient tous deux nuls, si bien que le polynome P doit se réduire au produit d'une constante par une puissance de $x^2 \sin^2\varphi + y^2 \cos^2\varphi$.

Si nous supposons que n est impair, soit $n = 2m + 1$, le coefficient de λ^{n+2} dans la formule (33) est seul modifié et l'on a alors

$$\begin{aligned}\frac{V \sin\varphi \cos\varphi}{k} = \frac{\pi\lambda^4 L^4}{32 a^3} + \ldots - \lambda^{n+2} L^{n+2} \pi (-1)^m \frac{-A \sin nu_0 + B \cos nu_0}{2^{n+2} a^{n+2}} + \ldots \\ + \lambda^{2n} L^{2n} a^{-2n-1} \int_{u_0}^{u_0+\pi} P^2(\cos u, \sin u) \sin^{2n}(u - u_0)\, du + \ldots;\end{aligned}$$

les seuls termes d'ordre $2n$ figurant dans le coefficient de μ^{2n} du développement de V/k sont encore

$$\frac{\pi}{4a}(n^2-2n+3)\left[\frac{A^2-B^2}{2}\cos 2n\beta+AB\sin 2n\beta\right],$$

ce qui exige A et B nuls.

En résumé : *S'il existe une droite* D, *passant par un point régulier* O *convexe d'une surface analytique, telle que le volume compris entre un plan sécant passant par* O *et la calotte qu'il découpe ne dépende que de la distance du point* O *au point d'intersection de* D *et du plan tangent parallèle au plan sécant, la surface est de révolution affine autour de* D *parallèlement au plan tangent en* O. Si la droite D est normale à la surface, le point O est un point (R') ou un point (R).

REMARQUES.

16. Pour déterminer le polynome $P(x, y)$ tel que l'intégrale (9) ou l'intégrale (9') soit indépendante de α nous pouvions utiliser le procédé indiqué au paragraphe 5 en vue d'obtenir les coefficients de ce polynome P.

Soit en effet

$$P(x, y)=\sum_{p=0}^{n} a_p x^p y^{n-p}, \tag{34}$$

l'expression du polynome P; les intégrales (9) et (9') deviennent respectivement

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned} I&=\sum_{j=0}^{n+2}\left\{(-1)^{n-j}C_{n+2}^{j}\cos^j\alpha\sin^{n+2-j}\alpha\sum_{p=0}^{n}a_p\int_\alpha^{\alpha+\pi}\sin^{n-p+j}u\cos^{n-j+p+2}u\,du\right\},\\ J&=\sum_{j=0}^{n}\left\{(-1)^{n-j}C_{n}^{j}\cos^j\alpha\sin^{n-j}\alpha\sum_{p=0}^{n}a_p\int_\alpha^{\alpha+\pi}\sin^{n-p+j}u\cos^{n-j+p}u\,du\right\},\end{aligned}\right.$$

les intégrales qui figurent dans les expressions ci-dessus sont indépendantes de α et elles peuvent être calculées par des procédés élémentaires, en utilisant les formules

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin^{2m-2k} u \cos^{2k} u \, du = \frac{\pi}{2^{2m-1}} C_{2m-1}^{m-1} \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_{2m-1}^{2k-1}} \qquad (m \geqq k > 0).$$

Les expressions (35) sont donc des polynomes homogènes en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, ayant pour degré $n+2$ ou n, dont on connaît tous les coefficients en fonction linéaire des a_p. Or, pour qu'un polynome homogène en $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ soit indépendant de α, il est nécessaire que le polynome soit identiquement nul si son degré est impair ou qu'il soit identique au produit d'une constante par une puissance de $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ si son degré est pair. Nous connaissons donc la forme que doivent avoir les expressions (35) pour que (9) ou (9′) soit indépendant de α et par suite nous avons $n+3$ ou $n+1$ équations linéaires pour déterminer les $n+1$ coefficients inconnus de (34). Ces équations sont homogènes si n est impair, leurs seconds membres sont alternativement nuls ou égaux au produit des coefficients du binome par une même constante arbitraire si n est pair.

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, la difficulté que présente ce procédé provient de la complication des déterminants des systèmes linéaires trouvés. Dans le cas de l'expression J (nous avons alors autant d'équations que d'inconnues) le système se décompose en deux autres comprenant chacun seulement des coefficients a_p d'une même parité; nous obtenons ainsi, en examinant les deux hypothèses sur la parité de n, quatre déterminants symétriques dont les éléments situés sur une parallèle à la diagonale principale sont égaux. Si l'on écrit $n = 2m+1$ ou $n = 2m$ suivant la parité de n, trois des déterminants sont d'ordre $m+1$, le quatrième s'obtient en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne du troisième (les deux premiers correspondent au cas où n est impair). Il suffit donc de connaître les éléments de la première ligne des trois premiers déterminants pour pouvoir les écrire; on trouve que l'élément de la première ligne et de la colonne $j+1$ a pour expression dans les déterminants d'ordre $m+1$

$$\frac{C_{2m}^{m+j}}{C_{4m+4}^{2m+2j+1}}, \quad \frac{C_{2m}^{m+j}}{C_{4m+4}^{2m+2j}}, \quad \frac{C_{2m-1}^{m+j-1}}{C_{4m-4}^{2m+2j-1}}.$$

Nous n'avons pas pu montrer directement que ces déterminants ne sont pas nuls, mais la démonstration donnée plus haut de la forme nécessaire de la fonction P, nous prouve indirectement que les systèmes d'équations linéaires que nous venons de trouver n'admettent qu'une solution unique (la solution nulle ou bien une solution dépendant du paramètre par lequel peuvent être multipliés tous les seconds membres), par conséquent tous les déterminants rencontrés dans l'étude de l'expression J sont différents de o.

De plus, la connaissance de la solution unique nous permet d'écrire, lorsque n est pair (et égal à $2m$), $m+1$ relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients du développement de $(1+x)^m$ en considérant le système provenant de J et $m+2$ relations en considérant le système provenant de I.

Ces relations sont

$$\frac{C_{2m}^{2j}}{C_m^j} \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{C_{2m-1}^{m-j+p-1}}{C_{4m-1}^{2m-2j+2p-1}} = 2^{2m} \frac{C_{2m-1}^{m-1}}{C_{4m-1}^{2m-1}} \qquad (0 \leqq j < m), \tag{36}$$

$$\frac{C_{2m+2}^{2j}}{C_{m+1}^j} \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{C_{2m}^{m+p-j}}{C_{4m+1}^{2m+2p-2j+1}} = 2^{2m} \frac{C_{2m+1}^{m}}{C_{4m+1}^{2m}} \qquad (0 \leqq j < m+1). \tag{37}$$

Lorsque l'on donne à j la valeur m la relation (36) est encore vraie à condition de remplacer par 1 le terme qui correspond à $p=0$, de même la relation (37) subsiste lorsqu'on donne à j la valeur $m+1$ à condition de remplacer par 1 le terme du premier membre qui correspond à $p=0$.

Le même procédé pourrait aussi être utilisé pour déterminer le polynome P dans l'étude faite au paragraphe 12. Il faut alors que l'expression

$$\pi P(\cos\beta, \sin\beta) - \frac{2^{n+2}}{n+2}\int_{\beta-\frac{\pi}{2}}^{\beta+\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}\left(u-\beta+\frac{\pi}{2}\right) P(\cos u, \sin u)\, du \tag{38}$$

soit indépendante de β. Or, si l'on écrit P sous la forme

$$P(\cos\beta, \sin\beta) = \Sigma a_q \sin^q\beta \cos^{n-q}\beta,$$

cette expression (38) devient

$$\pi \sum_{q=0}^{n} a_q \sin^q \beta \cos^{n-q} \beta$$

$$- \frac{2^{n+2}}{n+2} \sum_{j=0}^{n+2} \left\{ \sin^j \beta \cos^{n+2-j} \beta \, C_{n+2}^j \sum_{q=0}^{n} a_q \int_{\beta-\frac{\pi}{2}}^{\beta+\frac{\pi}{2}} \sin^{q+j} u \cos^{2n+2-q-j} u \, du \right\},$$

Nous savons d'autre part que P vérifie la condition imposée à (38) lorsqu'il est une puissance de x^2+y^2 et (38) a alors une valeur constante non nulle, ou bien lorsque le polynome P correspond à la forme indiquée à la fin du paragraphe 12 et (38) est alors identiquement nulle quelle que soit la parité de n. Ceci nous permet d'obtenir de nouvelles relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients du binome.

Nous aurons par exemple

$$(39) \qquad (-1)^j (C_n^{2j} - C_n^{2j-2}) = \frac{C_{n+2}^{2j} C_{2n+1}^{n}}{2^{n-1}(n+2)} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^q C_n^{2q} \frac{C_n^{q+j}}{C_{2n+1}^{2q+2j}},$$

quand on donne à j une valeur quelconque comprise entre o et $E(n/2)$, cette limite comprise. De même

$$(40) \qquad (-1)^j (C_n^{2j+1} - C_n^{2j-1}) = \frac{C_{n+2}^{2j+1} C_{2n+1}^{n}}{2^{n-1}(n+2)} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^q C_n^{2q+1} \frac{C_n^{q+j+1}}{C_{2n+1}^{2q+2j+2}},$$

lorsque l'on a $0 < j \leqq E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Si l'on donne à j la valeur o dans l'une ou l'autre de ces relations, leur forme est légèrement modifiée; on obtient

$$n+2 = \frac{C_{2n+1}^{n}}{2^{n-1}} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^q C_n^{2q} \frac{C_n^q}{C_{2n+1}^{2q}} = 2^{1-n} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^q C_n^q C_{2n+1-2q}^{n+1}$$

qui correspond à (39), et

$$n = \frac{C_{2n+1}^{n}}{2^{n-1}} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^{q} C_{n}^{2q+1} \frac{C_{n}^{q+1}}{C_{2n+1}^{2q+2}}.$$

qui correspond à (40).

Nous avons signalé ces relations qui peuvent se rencontrer dans d'autres études où l'utilisation des polynomes de Fourier ne serait pas possible. Il serait intéressant de démontrer directement les relations (39) et (40).