

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN FAVARD

Essai sur la notion de bord d'une surface

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 52 (1935), p. 269-316

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__269_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESSAI
SUR LA
NOTION DE BORD D'UNE SURFACE

PAR M. J. FAVARD.



Introduction.

Grâce aux résultats acquis dans la théorie de la dimension, on a pu définir avec précision les ensembles de points qui méritent d'être appelés courbes, surfaces, etc. Mais si, comme en témoigne le livre de M. K. Menger (*Kurventheorie*), la théorie des courbes a pu s'enrichir considérablement, la théorie des surfaces n'a pas eu un développement comparable.

La contribution que nous apporterons ici à cette dernière est bien modeste, car nos considérations ne débordent pas l'espace euclidien à trois dimensions et, si elles peuvent être étendues à des espaces euclidiens d'ordre supérieur, elles ne sauraient l'être aux espaces métriques compacts, car je ne fais pas uniquement appel à la notion de distance; cependant on jugera peut-être que les problèmes traités ou posés ici, quoique particuliers, présentent quelque intérêt.

Un problème de mesure m'ayant conduit à l'étude de la notion de bord d'une surface et de surface dont le bord est donné, je me suis appliqué à définir les ensembles de points qui méritent l'un de ces noms.

Pour ce faire, j'ai employé une notion d'enlacement, due à MM. Mazurkiewicz et Straszewicz⁽¹⁾, qui semble généraliser le mieux possible celle de couple de points séparés par un ensemble fermé (c'est-à-dire ne pouvant être joints par un chemin sans rencontrer l'ensemble).

Un ensemble E borné et fermé de l'espace euclidien R_3 à trois dimensions et une courbe fermée de Jordan C sans point commun avec E , étant donnés, cette courbe est dite libre par rapport à E si, par une déformation continue, on peut, sans rencontrer E , la réduire à un point non situé sur E ; dans le cas contraire, elle est dite enlacée avec E .

Soient C une courbe et E un ensemble enlacé avec elle, on démontre facilement qu'il existe au moins un ensemble fermé I_c , enlacé avec C , contenu dans E et irréductible. Un ensemble I_c est parfait et sans point intérieur; il peut arriver qu'il soit punctiforme, mais alors il présente au moins la complexité de l'ensemble défini par M. Antoine.

Soient E_c un ensemble enlacé avec une courbe C , C' une courbe que l'on peut déduire de C , sans rencontrer E_c , par une déformation continue, le degré de la correspondance entre C et la nouvelle courbe étant l'unité; un ensemble fermé sera dit $K(E_c)$: 1° s'il contient E_c ; 2° s'il a au moins un point commun avec toute courbe C' (exemple: un cube suffisamment grand).

Un ensemble $K(E_c)$ contient toujours un ensemble irréductible $S(E_c)$ relativement aux propriétés 1° et 2°, l'ensemble $S(E_c) - E_c$ n'a aucun point intérieur et l'ensemble de ses points de dimension 2 est dense sur lui; de plus l'ensemble

$$\overline{S(E_c) - E_c}$$

est un continu qui ne contient pas toujours E_c .

Nous nous autorisons de ces résultats pour dire que, quand

$$\overline{S(E_c) - E_c} \supset E_c,$$

l'ensemble $S(E_c)$ est une surface ayant E_c pour bord. Il en est ainsi pour des ensembles E_c que j'appelle asymptotiquement simplement accessibles en chacun de leurs points.

(1) Voir les références dans le texte.

Les exemples que nous donnons montrent que notre notion satisfait aux conditions les plus simples que l'on était en droit d'exiger d'elle.

D'ailleurs il ne faudrait pas croire que la notion de bord présente un intérêt seulement dans le cas où E_c est un I_c , et nous démontrons l'existence d'un bord irréductible.

Une remarque simple nous a permis de classer les ensembles $S(E_c)$ en deux catégories : les ensembles bilatères (ou orientables) et les unilatères (ou non orientables), mais nous n'avons pas essayé de démontrer que notre classification est complète.

Enfin, dans le Chapitre III, nous avons abordé, par notre méthode, l'étude de la notion de genre dans le cas le plus simple, en introduisant les ensembles que nous avons appelé feuilles : une feuille est un ensemble $K(E_c)$ qui, pour tout ensemble Γ situé sur lui et enlaçable avec une courbe C' , contient un $K(\Gamma_c)$.

CHAPITRE I.

ENSEMBLES ENLAÇABLES.

1. Suivant MM. S. Mazurkiewicz et S. Straszewicz (¹), nous appellerons, dans l'espace euclidien R_3 à trois dimensions, courbe continue tout espace péanien, c'est-à-dire un ensemble de points obtenu en faisant correspondre, d'une façon continue, à tout point t de l'intervalle : $a \leq t \leq b$, un point $M(t)$ de cet espace; cette courbe sera dite fermée si $M(a)$ coïncide avec $M(b)$. Nous appellerons ligne continue tout espace péanien, c'est-à-dire l'image géométrique dans l'espace R_3 d'un segment de droite sans que soit précisée la correspondance entre un point du segment de droite et un point de cette image.

Une ligne sera dite un arc simple s'il existe une correspondance entre le segment de droite et cette ligne qui soit une homéomorphie;

(¹) S. MAZURKIEWICZ et S. STRASZEWICZ, *Sur les coupures de l'espace* (*Fund. Math.*, t. 9, p. 205 et 211). La notion d'enlacement développée au n° 2 est également due à ces auteurs; elle est voisine de celle donnée par M. Lebesgue (*C. R. Acad. Sc.*, t. 152, 1911, p. 841) pour les courbes de Jordan. Deux courbes de Jordan enlacées suivant la définition de M. Lebesgue le sont aussi suivant notre définition.

une ligne sera dite une ligne simple fermée s'il existe une correspondance entre le segment de droite et la ligne telle que la courbe correspondante soit fermée et que la relation $M(t) = M(t')$ entraîne soit $t = t'$, soit $t = a$ et $t' = b$ ou l'inverse.

2. Soient E un ensemble borné fermé et C une courbe continue fermée $M(t)$ sans point commun avec E ; on dit que cette courbe est libre par rapport à E , si, par une déformation continue, on peut, sans rencontrer E , la réduire à un point non situé sur E . Cela veut dire que, dans ce cas, on peut trouver une fonction de deux variables $M(t, r)$ continue dans $a \leq t \leq b$, $0 \leq r \leq 1$ et telle que

$$\begin{aligned} M(t, r) &\in R_n - E, \\ M(a, r) &= M(b, r), \\ M(t, 1) &= M(t), \quad M(t, 0) = M_0 \text{ (point indépendant de } t). \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, la courbe C est dite enlacée avec E ⁽¹⁾.

Une ligne sera dite libre par rapport à E si toutes les courbes continues fermées dont elle est l'image sont libres par rapport à E ; dans le cas contraire, elle sera dite enlacée avec E .

Un ensemble E fermé est dit enlaçable s'il existe une courbe continue fermée enlacée avec lui.

Une courbe continue fermée C' [définie par la fonction $M'(t)$] sera dite déduite de C [définie par $M(t)$] par déformation continue sans rencontrer E , s'il est possible de déterminer une fonction $M(t, r)$ continue et définie pour $a \leq t \leq b$, $0 \leq r \leq 1$ et telle que

$$\begin{aligned} M(t, r) &\in R_n - E, \\ M(a, r) &= M(b, r), \\ M(t, 1) &= M(t), \quad M(t, 0) = M'(t); \end{aligned}$$

il est évident qu'alors C et C' sont en même temps libres par rapport à E ou enlacées avec E .

Soit C une courbe continue fermée, sans point commun avec E ; on peut toujours, sans rencontrer E , la déformer en une courbe polygonale fermée π : il suffit pour cela de prendre pour π un polygone inscrit

(1) Nous prendrons en général $a = 0$, $b = 2\pi$, de sorte que l'image d'une surface $M(t, r)$ dans le plan de coordonnées polaires (t, r) sera le cercle $0 \leq r \leq 1$.

dans C dont les sommets correspondent à des points du segment $a \leq t \leq b$ suffisamment rapprochés; la correspondance entre un côté de π et le segment dont il est l'image étant une homothétie et les trajectoires des différents points de C étant un segment de droite. De cette remarque suit, qu'au point de vue de l'enlacement, avec un ensemble E , on pourra se contenter d'examiner les polygones.

3. Structure des ensembles enlaçables. — Soient E un ensemble enlaçable et C une courbe continue fermée avec laquelle il est enlacé. Trois axes de coordonnées rectangulaires ayant été choisis, pavons l'espace au moyen d'un réseau de cubes de côtés a donné et d'arêtes parallèles aux axes.

Considérons l'ensemble fermé Q_a formé des cubes et de leurs frontières qui contiennent au moins un point de E à leur intérieur ou sur leur frontière; cet ensemble est constitué par un nombre fini de cubes si, comme nous le supposons, l'ensemble E est borné et il peut, éventuellement, se décomposer en un nombre fini de domaines fermés disjoints. On peut prendre a assez petit pour que Q_a n'ait aucun point commun avec C ; si d désigne en effet la distance de C à E , il suffira de prendre $a < \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Dans ces conditions, je dis que, lorsque C est extérieur à toutes les surfaces polyédrales extérieures qui limitent les divers domaines déterminés par Q_a , parmi ces surfaces, il y en a au moins une de genre supérieur à zéro.

Soit Σ une quelconque de ces surfaces; deux surfaces Σ peuvent avoir des points communs qui peuvent être soit des sommets isolés des cubes du réseau, soit des arêtes qui forment des lignes polygonales.

Pour éviter cela nous enlèverons autour de chaque arête commune à deux cubes seulement sans face commune un petit parallélépipède rectangle à base carrée d'arêtes et de faces parallèles à celles des cubes de Q_a ; autour de chaque sommet commun à deux cubes seulement sans arête commune, un petit cube centré en ce point et d'arêtes parallèles à celles des cubes Q_a .

Les nouvelles surfaces Σ ainsi obtenues sont sans point commun.

Pour arriver à notre résultat il suffit de considérer le cas où C est un polygone. Construisons alors une surface polyédrale $M(t, r)$ de base C dont les points communs avec les surfaces Σ ne sont pas des sommets de ces surfaces ni des sommets de la surface $M(t, r)$; nous supposons de plus que les points communs d'une arête avec une surface Σ , s'ils existent, sont intérieurs aux faces des cubes Q_a et qu'aucune face n'est parallèle aux directions des arêtes des surfaces Σ . Prenons sur C $a = 0$ et $b = 2\pi$, et considérons à présent le cercle ($0 \leq r \leq 1$) du plan (t, r) image de la surface $M(t, r)$ et, dans ce cercle, la frontière du domaine contenant les points voisins du cercle $r = 1$ et les images de points extérieurs aux surfaces Σ . Cette frontière comprend, outre le cercle $r = 1$, des courbes fermées de Jordan C_i images de polygones situés sur les surfaces Σ . Joignons un point a intérieur au domaine précédent à chacune de ces diverses courbes au moyen de chemins aa_i , deux à deux sans autre point commun que a . Par déformation continue on peut, sans rencontrer E , réduire la courbe C à la courbe qui a pour image

$$\dots + aa_i + C_i + a_i a + \dots,$$

qui, au point de vue géométrique, se compose de polygones fermés, ayant les C_i pour images, situés sur les surfaces Σ , et de lignes joignant ces divers polygones entre eux (on peut d'ailleurs faire en sorte que les lignes précédentes soient polygonales).

Supposons alors que toutes les surfaces Σ soient de genre zéro; on pourrait alors, sur chacune d'elles, réduire chaque polygone ayant pour image une courbe C_i au point ayant pour image le point a_i tout en laissant ce dernier fixe au cours de la déformation; puis on pourrait réduire l'arc ayant pour image aa_i au point ayant pour image a .

En définitive on pourrait réduire la courbe C à un point sans rencontrer E , contrairement à l'hypothèse.

Dans le cas où C est à l'intérieur d'une surface formée avec les cubes Q_a , le raisonnement précédent est encore valable à condition d'appeler Σ les surfaces qui limitent le domaine de $R_3 - Q_a$ où C est contenue.

4. Soient $C[M(t)]$ et $C'[M'(t)]$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) deux courbes qui ont un point commun correspondant aux valeurs $t = 0$ et $t = 2\pi$ du para-

mètre; nous appellerons produit

$$C'' = CC'$$

de ces deux courbes la courbe $C''[M''(t)]$ définie par

$$M''(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq \pi, & M''(t) = M(2t), \\ \pi \leq t \leq 2\pi, & M''(t) = M'(2t - 2\pi). \end{cases}$$

Si les deux courbes C et C' sont libres par rapport à un ensemble E , il en est de même de C'' . Il suffit, pour le voir, de réduire simultanément les deux courbes à leur point commun en laissant celui-ci fixe.

Considérons alors un ensemble E borné et fermé quelconque et cherchons à voir si E est enlacable ou non.

Soient a une longueur quelconque, Q_a l'ensemble des cubes construits comme précédemment, puis les ensembles de cubes $Q_{\frac{a}{2}}, Q_{\frac{a}{4}}, \dots, Q_{\frac{a}{2^n}}$; on a évidemment

$$Q_{\frac{a}{2^n}} \subset Q_{\frac{a}{2^{n-1}}}$$

et

$$E = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_{\frac{a}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\frac{a}{2^n}}.$$

D'après le numéro précédent, si E est enlacable, le même fait a lieu pour $Q_{\frac{a}{2^n}}$ à partir d'une certaine valeur de n et l'on peut trouver une courbe continue fermée C enlacée avec tous les $Q_{\frac{a}{2^n}}$ à partir de cette valeur.

D'ailleurs il n'y a pas besoin de prendre une courbe C quelconque et de regarder si elle est enlacée avec E . Nous venons de voir en effet que si une courbe C est enlacée avec E , il en est de même d'une courbe au moins située sur l'une des surfaces Σ_n qui limitent les domaines de $R_3 - Q_{\frac{a}{2^n}}$.

Or, toutes les courbes fermées situées sur une surface Σ_n peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles (les courbes fondamentales) par l'opération produit exposée ci-dessus; donc, si une courbe située sur une surface Σ_n est enlacée avec E , il en est de même d'une courbe fondamentale, au moins de cette surface, d'après le résultat précédent

relatif au produit de deux courbes libres. Pour chacune des valeurs de n , il suffira donc d'essayer un nombre fini de courbes; par suite, si E est enlaçable, on le décèlera en essayant un nombre fini mais non borné de courbes; si E n'est pas enlaçable, il faudra, pour le voir, essayer, en plus, une infinité dénombrable de courbes.

Les raisonnements précédents rendent vraisemblable le résultat suivant : si deux ensembles fermés disjoints ne sont pas enlaçables, leur somme ne l'est pas non plus.

Remarquons enfin que, pour qu'un ensemble E enlaçable contienne un continu, il faut et il suffit que le maximum des diamètres des surfaces Σ_n ne tende pas vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; si, au contraire, ce nombre tend vers zéro, l'ensemble est discontinu.

Un ensemble plan enlaçable ne peut d'ailleurs pas être discontinu, car on pourrait prendre pour surfaces Σ_n des surfaces de genre zéro à partir d'une valeur de n suffisamment grande.

5. Il y aurait lieu maintenant de donner une méthode générale pour résoudre le problème suivant : un ensemble E et une courbe C étant donnés, reconnaître si la courbe C est enlacée avec E ou non.

Comme C est également enlacé avec $Q_{\frac{a}{2^n}}$, à partir d'une certaine valeur de n , si elle l'est avec E et que cette condition est nécessaire et suffisante pour que C soit enlacée avec E , ainsi qu'il ressort d'un résultat que nous établirons au numéro suivant, alors que si C n'est pas enlacé avec E , elle ne l'est pas non plus avec un $Q_{\frac{a}{2^n}}$, il n'y aurait lieu de donner une solution du problème proposé que dans le cas où E est un ensemble de cubes.

Mais cette simplification du problème est purement apparente, semble-t-il, et le problème de la recherche du groupe des courbes libres par rapport à un ensemble E reste entier (¹).

Nous nous bornerons à démontrer le résultat suivant :

Soit E un ensemble borné situé dans un plan π et qui coupe celui-ci

(¹) Le problème réduit que nous venons de poser semble d'ailleurs assez difficile, ainsi qu'en témoigne la théorie du jeu mathématique appelé *bagnenaudier* : chaque fois qu'on ajoute un anneau au bagnenaudier, le nombre des opérations à faire pour libérer la tige est approximativement doublé.

entre les deux points P et Q, je dis que le cercle de diamètre PQ et situé dans un plan perpendiculaire à π est enlacé avec E. Soit en effet une surface définie par une fonction $M(t, r)$ continue et définie $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, telle que $M(t, 1)$ représente le cercle en question avec

$$M(0, 1) = P, \quad M(\pi, 1) = Q, \quad M(0, r) = M(2\pi, r),$$

le point $M(t, 1)$ étant celui dont l'abscisse curviligne comptée à partir de P, et dans un sens choisi, est $t \frac{[PQ]}{2}$; nous supposons de plus que

$$M(t, 0) = M_0,$$

le point M_0 n'étant pas situé dans le plan π , ce qu'on peut toujours réaliser.

Notre résultat revient à la démonstration du fait que l'intersection de la surface $M(t, r)$ avec le plan π a un point sur E, et pour cela il suffit de montrer que l'intersection en question contient un continu auquel appartiennent les points P et Q.

Pour prouver cela nous allons suivre une méthode due à MM. Mazurkiewicz et Straszewicz (*loc. cit.*). Ayant repéré les points d'un plan auxiliaire \mathcal{E} au moyen de coordonnées polaires ρ, ω ($0 \leq \omega \leq 2\pi$), nous ferons correspondre à tout point m de coordonnées ρ, ω de ce plan un point $f(m)$ de R_3 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(m) &= M(\omega, \rho) && \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1, \\ f(m) &= M\left(\omega, \frac{1}{\rho}\right) && \text{pour } \rho > 1; \end{aligned}$$

la fonction $f(m)$ est continue. Le cercle $M(t, 1)$ est l'image du cercle $r = 1$ du plan \mathcal{E} et les points P et Q sont les images des points $p(\omega = 0, r = 1)$ et $q(\omega = \pi, r = 1)$ de ce cercle; les points $M(t, r)$ avec $r \neq 1$ sont les images de deux points m du plan. Les points communs à $M(t, r)$ et à π forment un ensemble fermé qui contient P et Q; ils sont donc l'image d'un ensemble F fermé et borné de points de \mathcal{E} qui contient p et q .

Soient a et b deux points du cercle $r = 1$ séparés sur ce cercle par les points p et q , je dis que F coupe le plan entre a et b ; s'il n'en était

pas ainsi, en effet, on pourrait trouver un continu contenant a et b et sans point commun avec F .

L'image de ce continu serait un continu de la surface $M(t, r)$ contenant les images A et B , de a et de b et ne rencontrant pas π ; mais cela est impossible puisque les deux points A et B sont situés de part et d'autre de π .

De là suit que l'ensemble F contient une coupure irréductible $S(a, b)$ entre les points a et b , et $S(a, b)$ est un continu qui contient à la fois p et q (car, si cela n'était pas, on pourrait joindre a et b par un arc du cercle $r=1$).

Alors, puisque la fonction $f(m)$ est continue, l'image de $S(a, b)$ est un continu qui contient P et Q : c'est ce que nous voulions établir.

6. Soit C une courbe fermée; un ensemble fermé avec lequel elle est enlacée sera désigné par E_c ; un E_c sera dit *irréductible* si aucun de ses vrais sous-ensembles fermés n'est enlacé avec C et, dans ce cas, sera désigné par I_c .

Nous allons montrer que *tout ensemble E_c contient au moins un I_c* .

La méthode que nous emploierons, et qui a déjà servi à maints auteurs, est celle exposée par Janiszewski ⁽¹⁾ dans sa Thèse; nous établirons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — Soient C une courbe fermée et $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ une suite d'ensembles fermés E_c tels que

$$E_n \supset E_{n+1};$$

l'ensemble

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$$

est un E_c .

On sait, tout d'abord, que l'ensemble E est fermé; ensuite si C était libre par rapport à E , on pourrait trouver une surface $M(t, r)$, définie

⁽¹⁾ S. JANISZEWSKI, *Sur les continus irréductibles entre deux points* (Journal École Polyt., 2^e série, 16^e cahier, 1912, p. 109 et suiv.). La démonstration est d'ailleurs due à M. Mazurkiewicz, ainsi que Janiszewski l'annonce en note. Un énoncé général se trouve dans K. MENGER, *Dimensionstheorie*, p. 69.

comme au n° 2, et qui n'aurait aucun point commun avec E . Or cette surface, constituant un ensemble fermé de points, serait à une distance positive φ de E .

Mais on sait, d'autre part, que, quel que soit le nombre ε positif, tous les points de E_n sont à une distance de E moindre que ε , à partir d'une certaine valeur de n . En choisissant $\varepsilon < \varphi$ nous concluons de là que $M(t, r)$ est à une distance positive de E_n lorsque n est suffisamment grand, ce qui veut dire que C est libre par rapport à E_n contrairement à l'hypothèse.

Définissons à présent l'opération $f_n(\mathcal{E})$, où \mathcal{E} désigne un E_c . Soit \mathcal{Q} un cube de côtés parallèle à des axes rectangulaires bien choisis de R_3 et contenant \mathcal{E} à son intérieur, désignons par a son arête; soit $\mathcal{Q}_{\frac{a}{n}}$ l'ensemble des 8^n cubes obtenus en divisant \mathcal{Q} par des plans équidistants parallèles aux plans de coordonnées; numérotions-les de 1 à 8^n suivant une loi quelconque et désignons par $\mathcal{E}_n^{(i)}$ l'ensemble des points de \mathcal{E} situés à l'intérieur du cube d'indice i .

Nous posons

$$\mathcal{E}^0 = \mathcal{E},$$

puis

$$\mathcal{E}^{(l+1)} = \mathcal{E}^{(l)} - \mathcal{E}_n^{(l+1)} \quad \text{si} \quad \mathcal{E}^{(l)} - \mathcal{E}_n^{(l+1)} \text{ est un } E_c$$

et

$$\mathcal{E}^{(l+1)} = \mathcal{E}^{(l)} \text{ dans le cas contraire;}$$

enfin nous définissons

$$f_n(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{(8^n)}.$$

Soit alors E_1 un E_c quelconque, formons la suite d'ensembles E_n en posant

$$E_n = f_n(E_{n-1}),$$

les opérations f_n étant faites dans un même cube \mathcal{Q} contenant E_1 .

Tout E_n est un E_c et de plus $E_n \supset E_{n+1}$; donc, d'après le lemme précédent, l'ensemble

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$$

est un E_c ; je dis que c'est, de plus, un I_c . En effet, si cela n'était pas, on pourrait supprimer de l'ensemble E , en choisissant convenablement n ,

tout un ensemble non vide comprenant les points de E intérieurs à un cube de l'ensemble \mathfrak{Q}_a , et l'ensemble restant serait encore un E_c . Mais alors, de l'ensemble E_n , qui contient E , on pourrait aussi supprimer les points intérieurs à ce cube, ce qui est contraire à la définition de E_n .

7. Structure des ensembles I_c . — A ce sujet nous démontrerons d'abord le résultat suivant : *tout ensemble fermé enlaçable irréductible par rapport à une courbe fermée est parfait.*

Cela revient à montrer qu'un ensemble I_c ne comprend pas de point isolé.

Supposons au contraire qu'un ensemble enlaçable I_c , irréductible par rapport à une courbe C , contienne un point P isolé; la courbe C ne serait pas enlacée avec l'ensemble fermé $I_c - P$, de sorte que l'on pourrait trouver une surface $M(t, r)$, définie comme au n° 2, et telle que

$$(1) \quad M(t, r) \cdot (I_c - P) = 0,$$

mais, d'autre part, la courbe C étant enlacée avec I_c , on a

$$M(t, r) \cdot I_c \neq 0;$$

de là

$$M(t, r) \cdot I_c = P.$$

Le continu péanien $M(t, r)$ peut contenir le point P comme point intérieur, mais il existe, en vertu de (1), une sphère Σ de centre P , sans point commun avec $I_c - P$, et dont les points n'appartiennent pas tous à $M(t, r)$.

Soit O un tel point : tous les points intérieurs à une sphère σ de centre ce point n'appartiennent également pas à $M(t, r)$. Prenons pour axe des z le diamètre de Σ passant par O et dirigé de O vers P , soient R le rayon de Σ et θ l'angle que fait un vecteur \overrightarrow{OM} , M désignant un point courant de l'espace, avec Oz ($0 \leq \theta \leq \pi$).

A partir de $M(t, r)$ nous allons définir une autre surface $N(t, r)$.

Supposons d'abord qu'aucun point de C ne soit à l'intérieur de Σ ;

au point $M(t, r)$ nous faisons correspondre le point $N(t, r)$ par la règle suivante :

1° Si $M(t, r)$ n'est pas à l'intérieur de Σ on posera

$$N(t, r) = M(t, r);$$

2° Si $M(t, r)$ est intérieur à Σ nous lui ferons correspondre le point $N(t, r)$ de Σ tel que les trois points O, M, N soient alignés ; c'est-à-dire que N sera défini par

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} 2R \cos \theta.$$

La fonction $N(t, r)$ est définie dans le même domaine que $M(t, r)$ et, comme on le voit sans peine, l'existence de la sphère σ assure sa continuité. On a, de plus,

$$N(a, r) = N(b, r),$$

$$N(t, 0) = N_0 \quad (\text{image de } M_0).$$

Si C a des points à l'intérieur de Σ , nous ferons d'abord remarquer que si un ensemble est un I_c , il est également un I_c relativement à toute courbe C' déduite de C par déformation continue sans le rencontrer, et cela nous permet, comme nous l'avons déjà montré, de nous borner au cas où C est une courbe polygonale. Cela étant, on choisira d'abord le point O tel que les demi-droites qui portent les vecteurs joignant O aux points de C ne passent pas par P , ce qui est toujours possible car l'ensemble des points qui jouissent de la propriété précédente est dense partout sur la sphère.

Dans la construction de $N(t, r)$, pour simplifier l'exposition, nous ferons cette fois-ci varier r de 0 à 2.

1° Pour $1 \leq r \leq 2$ et à un point de C , soit $M(t, 1)$, non intérieur à Σ , on fera correspondre le point $N(t, r) = M(t, r)$; à un point $M(t, 1)$ intérieur à Σ , on fera correspondre le point $N(t, r)$ aligné avec lui et défini par

$$\overrightarrow{ON} = (r - 1) \overrightarrow{OM} + (2 - r) \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} 2R \cos \theta;$$

2° Pour $0 \leq r \leq 1$, nous procéderons comme ci-dessus.

La fonction $N(t, r)$ est définie et continue ici pour $(a \leq t \leq b; 0 \leq r \leq 2)$ et l'on a

$$\begin{aligned} N(a, r) &= N(b, r), \\ N(t, 0) &= N_0 \quad (\text{image de } M_0). \end{aligned}$$

Dans les deux cas la surface $N(t, r)$ que nous venons de définir à partir de C n'a aucun point intérieur à Σ et n'a pas non plus de point commun avec $I_c - P$; il suit de là que la courbe C n'est pas enlacée avec I_c contrairement à l'hypothèse.

Un ensemble I_c ne comprend pas non plus de points intérieurs. En effet, si un point P est intérieur à un E_c , on peut trouver une sphère Σ de centre P et dont tous les points, intérieurs et frontières appartiennent à E_c . Soit \mathcal{E} l'ensemble des points intérieurs à Σ , l'ensemble fermé $E_c - \mathcal{E}$ est un E_c car, dans le cas contraire, on pourrait trouver une surface $M(t, r)$ telle que

$$(2) \quad M(t, r) [E_c - \mathcal{E}] = 0,$$

avec, par hypothèse,

$$M(t, r) E_c \neq 0;$$

de là,

$$M(t, r) E_c = M(t, r) \mathcal{E}.$$

Donc le continu $M(t, r)$ aurait donc des points extérieurs à Σ et des points intérieurs à Σ ; il en aurait aussi sur Σ contrairement à (2).

Ce raisonnement nous montre aussi que si un I_c contient une coupure de l'espace, tous les points de I_c qui ne font pas partie de cette coupure sont situés dans le domaine qui contient C (il suffit de désigner par \mathcal{E} l'ensemble des points de E_c situés dans des domaines autres que le précédent).

8. Comme nous l'avons fait précédemment, enfermons un I_c dans un ensemble de cubes Q_a et prenons a assez petit pour que Q_a soit étranger à C . Soit Σ l'ensemble des surfaces qui limitent le domaine de $R_3 - Q_a$ où se trouve la courbe C : toutes ces surfaces sont de genre au moins égal à un. En effet, le raisonnement effectué pour établir qu'un I_c est parfait nous montre également que toute sphère contenant des points de I_c à son intérieur et à son extérieur en possède

également sur sa frontière. Or, d'après un résultat de M. Alexander⁽¹⁾, l'intérieur de toute surface polyédrale fermée sans point double du genre zéro est homéomorphe à l'intérieur d'une sphère. D'ailleurs, si l'on évite les surfaces qui ont des points intérieurs, on peut utiliser le raisonnement du n° 3 et l'on a ainsi une nouvelle démonstration du fait que I_c est parfait.

Un ensemble I_c discontinu au voisinage de l'un de ses points, et, par suite, localement homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor, est donc tel que l'homéomorphie ne peut s'étendre à aucun voisinage de l'espace; les surfaces qui servent à définir cet ensemble étant de genre au moins égal à 1, au voisinage de ce point, cet ensemble présente donc, au moins, la complexité de celui défini par M. Antoine⁽²⁾ (d'ailleurs l'ensemble de M. Antoine est enlaçable par rapport à un parallèle du premier tore de définition).

Pour donner un exemple, cherchons quels sont les ensembles I_c situés dans un plan π , C désignant un cercle coupant π en P et Q et dont le plan est perpendiculaire à π (voir n° 5). Il est immédiat que si un ensemble fermé ne coupe pas π entre P et Q , C n'est pas enlacée avec cet ensemble; mais, au contraire, si cet ensemble coupe π entre P et Q , nous avons montré au n° 5 que cet ensemble est enlacé avec C . I_c doit donc être une coupure de π entre P et Q et, d'après la définition de I_c , ce doit être une coupure irréductible entre P et Q ; cette condition est également suffisante.

Ainsi une coupure de π sera un I_c pour tous les cercles C qui coupent π en deux points P et Q qui appartiennent à deux domaines principaux différents déterminés par cette coupure. Lorsque cette coupure détermine plus de deux domaines principaux, alors elle est un I_c relativement à des cercles C qui ne peuvent pas tous se déduire de l'un d'eux pour déformation continue sans rencontrer cette coupure.

9. Accessibilité. — Soient maintenant P un point quelconque d'un ensemble I_c et Δ un domaine entourant P ; on peut trouver, puisque I_c

(1) J. W. ALEXANDER, *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, t. 10, 1924, p. 6-8.

(2) L. ANTOINE, *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages* (*Journal de Math.*, t. 4, 1921, p. 311 et suiv.).

est irréductible, une surface $M_{\Delta}(t, r)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$; $0 \leq r \leq 1$) de base C et telle que

$$M_{\Delta}(t, r) \cdot I_c \subset \Delta,$$

et ceci si faible que soit le diamètre du domaine Δ .

Il semble normal, à première vue, de dire que le point P est accessible s'il est possible de trouver une surface $M_p(t, r)$ telle que

$$M_p(t, r) \cdot I_c = P,$$

mais, au vu de certains exemples, il est plus avantageux d'employer la définition suivante :

Un point P sera dit simplement accessible si, parmi les surfaces $M_p(t, r)$, on peut en trouver d'autres telles que le point P soit l'image d'un seul point p du plan (t, r) , tandis qu'il y a homéomorphie entre un voisinage contenant le point P de la surface $M_p(t, r)$ et un voisinage contenant le point p du plan des (t, r) . Un point P sera dit asymptotiquement simplement accessible si, quel que soit le domaine Δ contenant P , on peut trouver une surface $M_{\Delta}(t, r)$ telle que les images des points communs à M_{Δ} et à I_c dans le plan (t, r) puissent être mis dans un domaine limité par un seul cercle, domaine qui est l'image dans l'espace d'un ensemble de points intérieurs à Δ .

On peut définir de même des accessibilités (ou des accessibilités asymptotiques) d'ordre supérieur : par exemple au point P sera dit accessible d'ordre n au plus si, parmi les surfaces $M_p(t, r)$, on peut en trouver d'autres telles que le point P soit l'image de n points p_i ($i = 1, 2, \dots$) au plus du plan (t, r) , tandis qu'il y a homéomorphie entre un voisinage contenant le point p_i et son image dans $M_p(t, r)$; P sera dit accessible d'ordre n s'il est accessible d'ordre n au plus sans l'être d'ordre $n - k$ ($k \geq 1$) au plus.

10. Exemples. — 1° Soit G la frontière commune à deux domaines non vides D_1 et D_2 , M_1 un point intérieur à D_1 , M_2 un point intérieur à D_2 , P_1 et P_2 deux points de G . Nous allons d'abord montrer que G est un continu en établissant qu'il existe sur G un continu passant par P_1 et P_2 , ce qui fournira un complément connu à un résultat de

L. E. J. Brouwer ⁽¹⁾ en même temps qu'une démonstration nouvelle du résultat obtenu par cet auteur.

De P_1 et de P_2 comme centres traçons deux sphères σ_1 et σ_2 suffisamment petites pour être extérieures l'une à l'autre et pour ne comprendre à leur intérieur ni M_1 ni M_2 . Traçons deux chemins (polygonaux par exemple) partant de M_1 (de M_2) et allant respectivement à l'intérieur de σ_1 et de σ_2 sans rencontrer G : soient $M_1N_1^1$ et $M_1N_2^1$ ($M_2N_1^2$ et $M_2N_2^2$). Joignons N_1^1 et N_1^2 à l'intérieur de σ_1 par un chemin polygonal et de même N_2^1 et N_2^2 à l'intérieur de σ_2 .

Soit C la courbe

$$M_1N_1^1 + N_1^1N_1^2 + N_1^2M_2 + M_2N_2^2 + N_2^2N_2^1$$

et $M(t, r)$ une surface ayant C pour base. Soient ($r=1, t=0$) et ($r=1, t=\pi$) les images respectives des points M_1 et M_2 dans le plan (t, r) .

En procédant comme au n° 5 on voit que, dans le plan (t, r) , les images des points communs à G et à $M(t, r)$ contiennent un continu séparant les points images de M_1 et de M_2 et ayant, par suite, des points sur chacune des demi-circonférences joignant ces images. Il suit de là que cet ensemble est l'image d'un continu, situé sur G , et ayant des points sur les arcs $N_1^1N_1^2$ et $N_2^2N_2^1$, car ce sont les seuls arcs de C qui ont des points communs avec G .

Il existe donc sur G un continu Γ allant d'un point intérieur à σ_1 , à un point intérieur à σ_2 . Pour arriver au résultat que nous avons en vue, considérons une suite de sphères $\sigma_1^{(n)}$ et $\sigma_2^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots$), centrées respectivement en P_1 et en P_2 , et dont les rayons tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. A chaque couple de sphères correspond un continu $\Gamma^{(n)}$ qui a des points dans $\sigma_1^{(n)}$ et $\sigma_2^{(n)}$; d'après le lemme de Zoratti, l'ensemble d'accumulation des continus $\Gamma^{(n)}$ est donc un continu passant par P_1 et P_2 et situé sur G puisqu'il en est ainsi de tous les $\Gamma^{(n)}$ et que G est fermé ⁽²⁾.

Considérons d'autre part l'ensemble E des points communs à G et à σ_1 ,

⁽¹⁾ L. E. J. BROUWER, *Beweis der Invarianz des n -dimensionalen Gebiets* (*Math. Ann.*, t. 71, 1911, p. 305 à 313).

⁽²⁾ Remarquons que cette démonstration est également valable dans un espace euclidien d'ordre $n(>3)$ et démontrons, en passant, que si la frontière commune G à deux domaines non vides est un continu péanien (ou de Jordan) elle est un continu cyclique.

je dis que cet ensemble est enlacé avec C . En effet le continu Γ , situé sur G , a des points intérieurs à σ_1 et des points extérieurs à σ_1 (ceux qui sont intérieurs à σ_2); il a donc au moins un point sur la surface de σ_1 , c'est-à-dire au moins un point commun avec E , ce que nous voulions démontrer. Le même raisonnement prouve que toute coupure de G entre les points P_1 et P_2 et leurs voisinages est un E_c . On montre aussi que les courbes C'' ($n \geq 1$) sont enlacées avec ce même ensemble (voir à ce sujet le raisonnement fait au Chapitre II, n° 6 *bis*).

2° Soient A_1 et A_2 deux continus, leur somme $A_1 + A_2$ est enlacable si l'ensemble $A_1 A_2$ n'est pas connexe [c'est la généralisation d'un théorème de Janiszewski ⁽¹⁾ sur les coupures du plan].

D'après l'hypothèse relative à $A_1 A_2$ on peut déterminer une surface polyédrale S ne contenant aucun point de $A_1 A_2$ mais séparant les points de cet ensemble. Soient alors p un point de $A_1 A_2$ d'ordre impair par rapport à S et q un point d'ordre pair. Les deux ensembles SA_1 et SA_2 n'ayant aucun point commun sont à une distance positive l'un de l'autre, on peut donc déterminer sur S un nombre fini de courbes C (des polygones) qui séparent sur S les points de ces deux ensembles.

Je dis que l'une au moins des courbes C est enlacée avec l'ensemble $A_1 + A_2$. Si cela n'était pas on pourrait en effet réduire chacune de ces courbes à un point sans rencontrer $A_1 + A_2$; en remplaçant alors chaque domaine de S contenant des points de SA_1 par les surfaces (ou la surface) ayant pour bases les courbes qui le limitent, on obtiendrait une nouvelle surface de Jordan orientable S' .

c'est-à-dire que, quel que soit le point P de G (différent de P_1 et de P_2) il existe sur G un continu allant de P_1 à P_2 sans passer par P .

Les notations étant les mêmes que précédemment, et P étant extérieur aux sphères σ_1 et σ_2 , on peut, d'après ce que nous avons vu précédemment, trouver une surface $M(t, r)$ ne passant pas par P . Le continu Γ ne contient donc pas le point P mais deux points intérieurs à σ_1 et à σ_2 ; ces deux points peuvent être joints respectivement à P_1 et à P_2 par des continus situés dans des sphères Σ_1 et Σ_2 centrées en P_1 et P_2 et dont les rayons tendent vers zéro avec ceux de σ_1 et de σ_2 puisque, G étant péanien, est localement connexe en chaque point.

Pour obtenir notre résultat il suffit donc de choisir les sphères σ_1 et σ_2 assez petites pour qu'aucune des sphères Σ_1 et Σ_2 ne contienne le point P .

⁽¹⁾ S. JANISZEWSKI, *Sur les coupures faites par les continus* (*Prace. Mat. Fiz. Warszowie*, t. 26, 1915).

Les ordres des points p et q par rapport à S' sont égaux puisque le continu A_1 qui les contient n'a pas de point commun avec S' ; mais d'autre part en allant de p à q selon une ligne suffisamment voisine de A_2 pour ne rencontrer ni les surfaces ayant pour bases les courbes C , ni les domaines de S déterminés par ces courbes et qui contiennent SA_1 , on trouve un nombre impair de croisements avec S puisque les ordres de p et q par rapport à S ne sont pas de même parité. De là on conclut que les ordres de p et de q par rapport à S' ne sont pas de même parité et nous obtenons une contradiction : l'une des courbes C est donc enlacée avec $A_1 + A_2$.

3° Donnons à présent un exemple d'un ensemble enlaçable irréductible I_c qui contient une coupure de l'espace.

Considérons une sphère S de centre O et soit π l'un de ses plans équatoriaux. A partir de O traçons un arc de courbe analytique dont tous les points, sauf O , sont intérieurs à l'un des hémisphères déterminés par π , admettant la surface de cet hémisphère comme continu de condensation, mais n'admettant pas d'autre continu de condensation ni d'autre point d'accumulation et ayant pour tangente en O la normale à π . Complétons par symétrie par rapport à π ; l'ensemble I_c sera constitué par la surface de la sphère et les deux arcs analytiques symétriques par rapport à π que nous venons de construire si l'on prend pour courbe C une circonférence située dans π , centrée en O et de rayon plus petit que celui de la sphère.

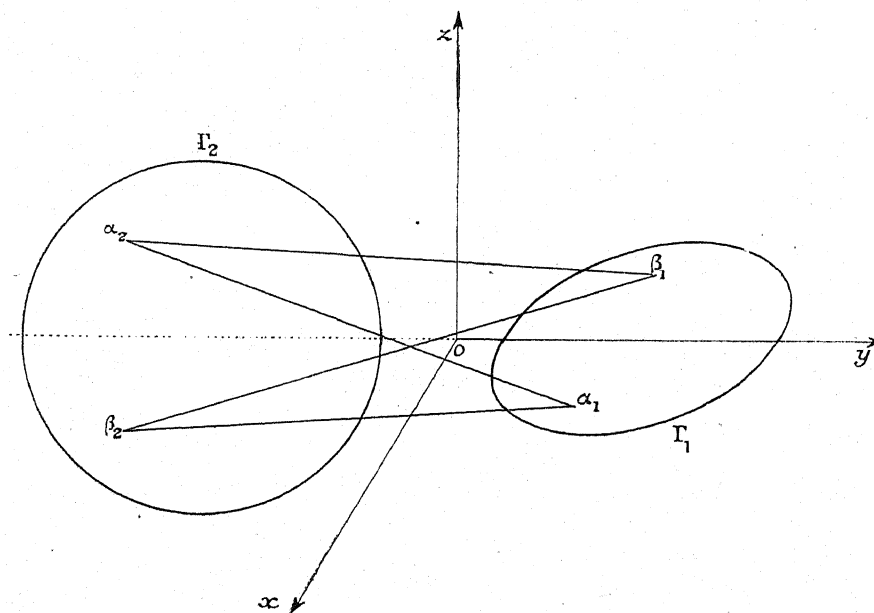
4° Soient, dans R_3 , $Oxyz$ trois axes de coordonnées rectangulaires, Γ_1 une circonférence du plan xy centrée sur Oy , et dont tous les points appartiennent au demi-plan $y \geq 0$, Γ_2 une circonférence du plan des yz , centrée sur Oy , et dont tous les points appartiennent au demi-plan $y \leq 0$. Soient α_1 et β_1 deux points du plan xy intérieurs à Γ_1 , α_1 d'abscisse positive, β_1 d'abscisse négative; α_2 et β_2 deux points du plan yz intérieurs à Γ_2 , α_2 de cote positive, β_2 de cote négative. En joignant α_1 et β_1 à α_2 et à β_2 par des segments de droites, nous obtenons un quadrilatère $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\alpha_1$ que nous prendrons pour courbe C en le paramétrant suivant un ordre cyclique naturel.

Je dis que l'ensemble $\Gamma_1 + \Gamma_2$ est un I_c . Il est d'abord facile de voir que si l'on supprime une partie de Γ_1 , ou de Γ_2 , la courbe C ne sera

plus enlacée avec l'ensemble restant; pour compléter notre démonstration il suffit donc de prouver que, pour toute surface $M(t, r)$ ayant C pour base, on a

$$M(t, r) [\Gamma_1 + \Gamma_2] \neq 0.$$

Supposons en effet que le contraire ait lieu pour une surface $M(t, r)$ bien choisie; les points α_1 et β_1 étant séparés par le plan yz il existe, d'après ce que nous venons de montrer (premier exemple), un continu commun à la surface $M(t, r)$ et au plan yz passant par les points α_2 et β_2 . Les points α_2 et β_2 étant intérieurs à Γ_2 ce continu serait tout entier intérieur à Γ_2 , d'après l'hypothèse faite sur $M(t, r)$, et il aurait pour image dans le plan (t, r) un continu passant par les images de α_2 et de β_2 et séparant les images de α_1 et de β_1 . Cela voudrait dire que



tout continu, situé sur $M(t, r)$ et allant de α_1 à β_1 , devrait rencontrer le continu précédent; il devrait donc en être ainsi du continu situé dans le plan des xy , mais ce dernier est intérieur à Γ_1 et nous arrivons à une contradiction.

Nous ne nous arrêtons pas aux généralisations faciles de cet exemple que nous avons donné afin de montrer qu'un ensemble I_c peut

être la somme de plusieurs continus enlaçables; de plus, ces deux continus sont ici des courbes de Jordan non enlacées.

5° Nous avons déjà fait remarquer que deux courbes fermées de Jordan enlacées au sens de M. Lebesgue le sont aussi à notre sens. Le résultat de M. Brouwer relatif au coefficient d'enlacement nous permet de dire plus généralement que deux courbes de Jordan sont enlacées, selon notre définition, si leur coefficient d'enlacement n'est pas nul et, dans ces conditions, il y a réciprocité, c'est-à-dire que si C_1 est enlacée avec C_2 , alors C_2 est enlacée avec C_1 .

Soient deux lignes fermées simples de Jordan J_1 et J_2 , nous dirons que J_1 est enlacée avec J_2 (ou non enlacée) si la courbe obtenue en paramétrant J_1 suivant un ordre naturel est enlacée avec J_2 suivant notre définition: mais alors nous allons voir que la réciprocité n'est plus ici une règle.

Reprenons pour cela l'ensemble parfait discontinu P de M. Antoine, ensemble dont nous donnerons une définition succincte, renvoyant pour plus de précisions au n° 78 de la Thèse de M. Antoine. P est l'ensemble des points communs à une infinité de tores: tout l'ensemble est intérieur à un seul tore que nous appellerons tore d'ordre 1; les tores d'ordre supérieur sont définis comme suit: un tore d'ordre $\lambda (\geq 1)$ contient à son intérieur k tores égaux d'ordre $\lambda + 1$ enlacés comme les anneaux d'une chaîne fermée entourant l'axe du tore d'ordre λ considéré.

Un méridien M du tore d'ordre 1 est enlacé avec P suivant notre définition. Il suffit, pour le voir, d'apporter quelques modifications au raisonnement que M. Antoine emploie pour montrer que si une surface ayant M pour base ne coupe pas les tores d'ordre λ , on peut en déduire une autre de même base ne coupant pas les tores d'ordre $\lambda - 1$. Supposons k pair et considérons un tore d'ordre $\lambda - 1$, numérotions les tores d'ordre λ qu'il contient de 1 à k de façon que deux tores consécutifs soient enlacés, ce qui veut dire que les cercles lieux des centres de leurs méridiens sont enlacés. Soit L_{2i} le cercle limité par la circonférence C_{2i} lieu des centres des méridiens du tore de numéro $2i$, A_{2i-1} et A_{2i} les points d'intersection de L_{2i} avec C_{2i-1} et C_{2i+1} ; je dis que si l'on peut construire une surface S de base M ne rencontrant

pas les tores d'ordre λ , donc ne rencontrant pas les cercles C , on peut en construire une autre Σ_{2i} de même base et telle que les deux points A_{2i-1} et A_{2i} puissent être joints dans L_{2i} sans rencontrer Σ_{2i} .

Remplaçons d'abord la surface S par une surface polyédrale suffisamment voisine L' ne rencontrant aucun tore d'ordre λ et n'ayant aucun sommet dans le plan de L_{2i} .

Soit π un polygone fermé, intersection de S' avec le plan L_{2i} qui, dans le cercle du plan (t, r) image de S' , a pour image une courbe de Jordan simple : toute l'intersection de S' et de l'intérieur de L_{2i} se compose de tels polygones. L'ordre de chacun des points A_{2i-1} et A_{2i} par rapport à π est nul, car π peut se déduire de Γ par déformation sans rencontrer ni C_{2i-1} , ni C_{2i} , et l'ordre de chacun de ces points par rapport à π est le coefficient d'enlacement de M avec C_{2i-1} ou C_{2i+1} ; or chacun de ces coefficients est nul. On peut réduire π à zéro dans L_{2i} sans rencontrer ni A_{2i-1} ni A_{2i} en construisant une surface polyédrale de base π et dont tous les points sont dans L_{2i} . Les points voisins de l'image de π dans le plan (t, r) et situés à l'intérieur de cette image sont tous du même côté de L_{2i} .

Coupons de ce côté S' par un plan parallèle à celui de L_{2i} , suffisamment voisin de celui-ci pour que la section de S' voisine de π puisse se réduire à zéro sans rencontrer les cercles C_{2i-1} et C_{2i+1} : c'est possible en vertu des remarques faites sur π .

En procédant de la même façon pour tous les polygones π nous obtenons une surface Σ_{2i} qui n'a aucun point commun avec L_{2i} : à partir de là on peut reprendre la démonstration de M. Antoine.

Venons maintenant à l'exemple annoncé. Comme ligne J_1 nous prendrons un cercle extérieur du tore d'ordre 1 et enlacé avec lui. Quant à la ligne J_2 , elle sera la somme de deux arcs ayant leurs extrémités sur le tore d'ordre 1, l'un contenant P , l'autre tracé sur la surface du tore.

Par déformation on peut réduire le premier arc à une ligne polygonale dont tous les points, sauf les extrémités, sont intérieurs au tore; le deuxième arc constituant J_2 sera alors choisi de façon que J_2 puisse se réduire à zéro sans sortir du tore. Ainsi la ligne J_2 n'est pas enlacée avec l'ensemble J_1 , tandis qu'au contraire la ligne J_1 est enlacée avec J_2 .

CHAPITRE II.

LES SURFACES.

1. **Ensembles $K(E_c)$.** — Soit C une courbe de Jordan enlacée avec un ensemble E_c fermé et borné; nous avons déjà remarqué que toute courbe C' déduite de C sans rencontrer E_c est enlacée avec E_c .

Ceci rappelé, un ensemble fermé sera dit $K(E_c)$ quand il possédera les deux propriétés suivantes :

1° Il contiendra E_c :

$$K(E_c) \supset E_c;$$

2° Il aura au moins un point commun avec toute courbe C' :

$$C' \cdot K(E_c) \neq 0.$$

Il existe des ensembles $K(E_c)$; des exemples en sont fournis par des cubes ou des sphères suffisamment grands pour contenir l'ensemble E_c , en vertu du raisonnement fait au n° 7 (Chap. I).

2. Dès à présent, je fais remarquer l'analogie entre la définition des ensembles $K(E_c)$ et celle des continus : un continu plan, par exemple, est tel que toute courbe fermée simple de Jordan, contenant des points du continu à son intérieur et à son extérieur, a au moins un point commun avec le continu.

Cette analogie n'est pas purement formelle comme on le voit tout de suite et elle est susceptible de fournir des résultats relatifs aux $K(E_c)$. Démontrons, par exemple, un théorème analogue à celui de Zoratti⁽¹⁾ relatif aux continus.

THÉORÈME. — *Soient C une courbe de Jordan fermée et $\{K\}$ une famille infinie d'ensembles fermés uniformément bornés (c'est-à-dire tous contenus dans un même cube). Supposons que sur une infinité d'ensembles K*

(1) L. ZORATTI, *Un théorème de la théorie des ensembles* (Bull. Soc. math., t. 37, 1909, p. 116-119).

de la famille existe un ensemble E_c tel que l'ensemble K correspondant soit un $K(E_c)$; si la borne inférieure des distances de la courbe C aux ensembles de la famille $\{E_c\}$ est positive, alors :

1° L'ensemble d'accumulation des ensembles de la famille $\{E_c\}$ est un \mathcal{E}_c ;

2° L'ensemble d'accumulation des ensembles de la famille $\{K\}$ est un $K(\mathcal{E}_c)$.

Tout d'abord les ensembles dont il est question dans l'énoncé sont évidemment bornés et fermés. Ensuite, nous remarquerons que l'ensemble \mathcal{E} n'a pas de point commun avec C en vertu de nos hypothèses; c'est de plus un \mathcal{E}_c , car toute surface ayant C pour base a , au moins, un point commun avec tout ensemble de la famille $\{E_c\}$. Puisqu'il y a une infinité d'ensembles E_c , ces points admettent au moins un point d'accumulation situé, par suite, sur \mathcal{E}_c , et aussi sur la surface en question, puisque celle-ci est un ensemble fermé.

En second lieu, toute courbe C' déduite de C par déformation continue sans rencontrer \mathcal{E}_c peut également se déduire de C sans rencontrer presque tous les ensembles de la famille $\{E_c\}$; la courbe C' a donc des points communs avec une infinité d'ensembles de la famille $\{K\}$, elle en a donc également au moins un avec leur ensemble d'accumulation.

Une conséquence immédiate du résultat précédent est le lemme suivant, que l'on peut également établir par les considérations développées au n° 6 (Chap. I) :

LEMME. — Soient C une courbe de Jordan enlacée avec un ensemble E_c et $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ une suite infinie d'ensembles fermés et bornés qui sont tous des $K(E_c)$; si l'on a

$$K_n \supset K_{n+1},$$

l'ensemble

$$K = \prod_{n=1}^{\infty} K_n$$

est également un $K(E_c)$.

3. Pour préciser la structure des ensembles $K(E_c)$, montrons que sur tout ensemble de cette sorte existe un continu.

Soit en effet $M(t, r)$ une surface ayant C pour base ($0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$):

$$M(t, 1) = C, \quad M(0, r) = M(2\pi, r), \quad M(t, 0) = M_0;$$

faisons alors correspondre à tout point m de coordonnées polaires ρ et ω situé dans un plan \mathcal{R} et tel que $0 \leq \rho \leq 1$, un point $f(m)$ de R_s par la formule

$$f(m) = M(\omega, \rho).$$

Désignons par \mathcal{F} l'ensemble des points m dont les images appartiennent à $K(E_c)$; cet ensemble est fermé et contient l'ensemble f , fermé et non vide, des points dont les images appartiennent à E_c .

Nous allons montrer qu'il existe un continu \mathcal{K} , ayant des points communs avec le cercle $\rho = 1$, et tel que l'une ou l'autre des conditions suivantes soit réalisée :

- (a) $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{K} \cdot f \neq \emptyset$;
- (b) \mathcal{K} coupe le cercle entre deux points de f .

Si aucune des hypothèses (a) ou (b) n'était réalisée, l'ensemble f et l'ensemble des points de \mathcal{F} situés sur le cercle $r = 1$ ne pourraient pas être bien enchaînés au moyen de points appartenant à un sous-ensemble de \mathcal{F} . En divisant le plan \mathcal{R} en carrés de côtés suffisamment petits, on pourrait alors déterminer un polygone fermé simple j contenant à son intérieur tous les points de f et à son extérieur les points de \mathcal{F} qui présentent avec l'ensemble des points de \mathcal{F} situés sur le cercle $r = 1$, un défaut d'enchaînement moindre que celui qu'ils ont avec f , puisqu'on ne peut pas trouver non plus de coupure du cercle entre les points de f . Dans le plan \mathcal{R} , on pourrait passer par déformation continue du cercle $\rho = 1$ au polygone j sans rencontrer f ; j serait, par suite, l'image d'une courbe C' déduite de C par déformation continue sans rencontrer E_c et n'aurait pas de point commun avec $K(E_c)$, contrairement à la définition de ce dernier ensemble.

Le continu \mathcal{K} existe donc et est l'image d'un continu k (qui peut d'ailleurs se réduire à un point unique) situé à la fois sur $K(E_c)$ et sur la surface $M(t, r)$. Si le continu \mathcal{K} satisfait à la condition (a), alors le continu k ne se réduit pas à un point et contient des points de C et de E_c ; dans le cas (b) le continu k peut se réduire à un point

situé sur C , mais alors, dans ce cas, le continu \mathcal{K} étant une coupure du cercle, C a au moins un point double situé sur $K(E_c)$.

Or, nous avons vu que l'on peut toujours déduire de C un polygone sans rencontrer E_c et l'on peut aussi faire en sorte que ce polygone soit sans point double.

Donc, de toute façon, tout ensemble $K(E_c)$ contient des continus qui ne se réduisent pas à des points et qui ne sont pas entièrement contenus dans E_c .

En apportant quelques modifications simples au raisonnement précédent, on voit aussi qu'il existe sur tout $K(E_c)$ un continu (pouvant se réduire à un point) et ayant des points communs avec C et avec toute courbe C' déduite de celle-ci par déformation continue sans rencontrer E_c .

4. Pour préciser le résultat établi au numéro précédent, nous démontrerons maintenant le résultat suivant :

Si un $K(E_c)$ peut être décomposé en deux ensembles fermés disjoints dont l'un contient E_c , alors celui-ci est également un $K(E_c)$ lorsque E_c est un continu.

Soit, en effet, la décomposition

$$K(E_c) = \mathcal{M} + \mathcal{N} \quad (\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}, \overline{\mathcal{N}} = \mathcal{N}),$$

avec par exemple

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{N} = 0, \quad \mathcal{M} \supset E_c \quad (\text{ou } \mathcal{N} \cdot E_c = 0).$$

Si \mathcal{M} n'était pas un $K(E_c)$ on pourrait déduire de C une courbe C' sans point commun avec \mathcal{M} et rencontrant par suite seulement \mathcal{N} ; on pourrait également supposer que les points de C' ne sont pas tous sur \mathcal{N} car, si cela n'était pas, on pourrait déduire de C' une autre courbe présentant cette propriété; enfin on pourrait également supposer que C' est un polygone.

Soit alors d la plus petite des deux distances suivantes : celle de \mathcal{M} à \mathcal{N} et le maximum des distances des points de C' à \mathcal{N} ; pavons l'espace au moyen de cubes de côtés inférieurs à $\frac{d}{\sqrt{3}}$ et soit Q l'ensemble des cubes qui contiennent au moins un point de \mathcal{N} à leur intérieur

ou sur leur frontière. Soient Σ les surfaces qui limitent le domaine extérieur à tous les cubes Q et contenant E_c , nous pouvons aussi supposer que C' a des points dans ce domaine. Choisissons alors sur C' une origine O dans ce domaine et, à partir de là, parcourons cette courbe dans un sens également choisi. Soient M le premier point d'entrée de C' dans le domaine limité par une surface Σ et ne contenant pas E_c , N le premier point de sortie; nous pouvons remplacer l'arc polygonal MN de C' par une ligne polygonale située sur Σ et passer de l'une à l'autre de ces lignes sans sortir du domaine contenant MN et limité par Σ . Nous obtenons ainsi une nouvelle courbe qui rentre une fois de moins que la précédente dans la surface Σ considérée; en continuant de cette façon la description de la courbe C' on arrive ainsi, au bout d'un nombre fini d'opérations (en vertu de nos hypothèses), à une courbe C'' déduite de C' par déformation continue sans rencontrer E_c et qui n'a plus aucun point commun avec \mathcal{R} ni avec \mathcal{M} . La somme de ces deux ensembles n'est donc pas un $K(E_c)$ contrairement à notre hypothèse.

D'une façon un peu plus générale, on a le résultat suivant :

Les relations

$$\begin{aligned} K(E_c) &= \mathcal{M} + \mathcal{R} & (\overline{\mathcal{M}} &= \mathcal{M} \quad \overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}), \\ \mathcal{M} \cdot \mathcal{R} &= 0, & \mathcal{M} &\supset E_c, \end{aligned}$$

entraînent que \mathcal{M} est un $K(E_c)$ lorsque E_c est contenu dans un seul domaine de l'ensemble $R_3 - \mathcal{R}$.

Nous donnerons plus loin un exemple d'un $K(E_c)$ tel que $K(E_c) - E_c$ est fermé; la dernière hypothèse est donc nécessaire à la validité du résultat.

5. Ensembles $S(E_c)$. — Un ensemble $K(E_c)$ contient toujours un ensemble $S(E_c)$ fermé et irréductible relativement aux propriétés de définition de $K(E_c)$, savoir : contenir E_c et avoir au moins un point commun avec toute courbe C' .

Pour démontrer ce résultat il suffit de s'appuyer sur le lemme établi à la fin du paragraphe 2 du présent chapitre et de procéder ensuite comme au n° 6 du Chapitre I : la modification à apporter à la définition de l'opération f est tout à fait visible.

Il est facile de voir *qu'un ensemble* $S(E_c) - E_c$ *ne présente ni point intérieur ni point isolé*, c'est une conséquence du résultat précédent (n° 4), mais une démonstration directe est facile. Si, en effet, $S(E_c) - E_c$ avait un point intérieur, il existerait une sphère dont la frontière ainsi que les points intérieurs appartiendraient à l'ensemble; mais une courbe enlacée avec E_c ne peut être entièrement située à l'intérieur de cette sphère, car on pourrait alors la réduire à un point sans rencontrer E_c . De là suit que toute courbe enlacée avec E_c qui a des points intérieurs à la sphère en question en a aussi à l'extérieur; elle a donc aussi des points communs avec la frontière de cette sphère. L'ensemble $S(E_c)$ ne serait donc pas irréductible puisqu'en lui retranchant l'intérieur de la sphère, l'ensemble restant serait encore un $K(E_c)$.

D'autre part, soit M un point de l'ensemble $S(E_c) - E_c$; si nous supprimons de l'ensemble $S(E_c)$ les points de cet ensemble intérieurs à une sphère de centre M et son point commun avec E_c , l'ensemble restant n'est plus un $K(E_c)$; il existe donc une courbe C' dont tous les points communs avec $S(E_c)$ sont à l'intérieur de cette sphère, si faible soit le rayon de celle-ci.

Si donc M était isolé, il existerait une courbe polygonale C' n'ayant que ce point en commun avec $S(E_c)$, mais alors on pourrait, par une déformation continue locale effectuée au voisinage du point M , passer de C' à une autre courbe polygonale sans point commun avec $S(E_c)$ et enlacée avec E_c , ce qui est en contradiction avec la définition de $S(E_c)$.

Le résultat établi à la fin du numéro précédent nous montre aussi que si une coupure de l'espace est telle que tous les points de E_c sont intérieurs à l'un des domaines déterminés par cette coupure et si l'ensemble $S(E_c)$ a des points intérieurs à un domaine différent de celui qui contient E_c , alors $S(E_c)$ a aussi des points sur la coupure considérée; de là, suit également que si l'ensemble $S(E_c) - E_c$ est fermé (et par suite situé à une distance positive de E_c), cet ensemble est une coupure de l'espace qui sépare les points de E_c . Lorsque E_c est un continu, tout ensemble $S(E_c)$ est donc un continu.

Lorsque l'ensemble E_c est un I_c nous avons, en vertu des résultats déjà obtenus relativement à ces derniers ensembles :

Un ensemble $S(I_c)$ *est parfait et sans point intérieur.*

6. Nous avons vu qu'on peut déduire de C une courbe polygonale C' sans point double et dont tous les points communs avec $S(E_c)$ sont à l'intérieur d'une sphère Σ de rayon aussi faible que l'on veut, centrée en un point M de $S(E_c) - E_c$. Nous supposons que le rayon de Σ est assez petit pour que E_c soit à son extérieur.

Parcourons alors C' à partir d'un point extérieur à la sphère et dans un certain sens, puis remplaçons le parcours situé entre le premier point d'entrée de C' dans Σ et le premier point de sortie par la corde de la sphère joignant ces deux points et opérons de même avec les autres couples de points, nous obtenons ainsi une nouvelle courbe polygonale C'' jouissant des mêmes propriétés que C' et qui peut être déduite de celle-ci par une déformation continue opérée uniquement sur les parties de C' intérieures à Σ . Nous pouvons aussi supposer que la courbe C'' n'a pas de point double (pour obtenir cela il suffit, éventuellement, de modifier très peu la courbe C').

Autour de chacun des côtés de C'' intérieurs à Σ , qui ont au moins un point commun avec $S(E_c)$, construisons un petit cylindre de révolution limité par deux plans contenant entre eux les points où ce côté rencontre $S(E_c)$, et de rayon suffisamment petit pour n'avoir que des points intérieurs à Σ et pour ne contenir, à son intérieur ou sur sa frontière, aucun point de la frontière des autres cylindres construits de la même manière avec les autres côtés de C'' intérieurs à Σ . Soient m' et m'' les deux points d'une même corde situés sur les bases du cylindre correspondant, je dis que, pour un couple de points m', m'' au moins, il n'est pas possible de joindre ces deux points par un continu dont aucun point n'est extérieur au cylindre correspondant sans rencontrer $S(E_c)$. En effet, si cela est possible pour un couple, le continu joignant m' et m'' reste à distance positive de $S(E_c)$: on peut donc trouver une ligne polygonale intérieure à Σ et joignant m' et m'' sans rencontrer $S(E_c)$ (il suffit d'approcher le continu suffisamment près). Donc, si cela était possible pour tous les couples m' et m'' , on obtiendrait, en remplaçant le segment $m'm''$ par la ligne polygonale correspondante, une courbe C''' déduite de C par déformation continue sans rencontrer E_c et ne rencontrant pas $S(E_c)$, ce qui est une contradiction.

Soit alors m' et m'' un couple de points tel que tout continu

joignant ces deux points et qui n'a aucun point extérieur au cylindre correspondant a , au moins, un point commun avec $S(E_c)$. Soit $I-I$ l'ensemble commun à $S(E_c)$ et à la surface du cylindre, la courbe C'' est enlacée avec cet ensemble. Pour le voir il suffit d'opérer comme nous l'avons fait au Chapitre I (n° 5) pour montrer qu'une coupure du plan séparant deux points P et Q est enlacée avec le cercle de diamètre PQ dont le plan est perpendiculaire au plan donné; nos considérations nous montrent, en effet, que $I-I$ contient une coupure de la frontière du cylindre séparant m' de m'' .

Soit maintenant C_1 une courbe déduite de C'' sans rencontrer $I-I$, je dis qu'elle a au moins un point commun avec l'ensemble $S(E_c)$ et intérieur au cylindre considéré. Cela est vrai si C_1 peut être déduite de C'' sans rencontrer E_c ni l'ensemble des points de $S(E_c)$ extérieur au cylindre. Dans le cas général représentons dans un plan la courbe C'' par un cercle de rayon $r=1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Lorsque θ varie de 0 à π , l'arc correspondant de C'' sera le segment $m'm''$, pour θ entre π et 2π , ce sera l'arc de C'' extérieur au cylindre; de sorte que m' a pour image le point $\theta=0$ et m'' le point $\theta=\pi$.

Pour image de la surface permettant de passer de C'' à C_1 , nous prendrons la couronne : $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, l'image de C_1 étant la circonférence $r=\frac{1}{2}$.

Cela posé, je dis que l'ensemble fermé des images des points communs à cette surface et à la surface du cylindre comprend des continus qui vont des points ($r=1$, $\theta=0$ ou π) à la circonférence $r=\frac{1}{2}$ et qui n'ont aucun point commun.

Pavons, en effet, le plan image avec des carrés de côtés suffisamment petits. Si un tel continu n'existait pas pour l'un des points précédents, on pourrait séparer ce point de la circonférence $r=\frac{1}{2}$, au moyen d'un arc simple formé de morceaux de côtés des carrés précédents, arc tout entier intérieur à la couronne, sauf ses extrémités qui seraient sur le cercle $r=1$.

Cet arc ne peut pas joindre un point de l'arc $(0, \pi)$ à un point de l'arc $(\pi, 2\pi)$, car il serait l'image d'un arc allant d'un point intérieur au cylindre à un point extérieur.

Il existe donc un continu allant du point $\theta = 0$ au point $\theta = \pi$; mais ce continu emprunte forcément un arc du cercle $r = \frac{1}{2}$ car, dans le cas contraire, il serait l'image d'un continu allant de m' à m'' sur le cylindre, continu qui aurait un point commun avec I-I; mais, par hypothèse, aucun point de la couronne considérée n'est l'image d'un point de I-I. Notre résultat est donc établi.

Considérons à présent, dans la couronne, le domaine dont une partie de la frontière est constituée par l'arc $(0, \pi)$ et dont les points sont les images des points intérieurs au cylindre; d'autre part, l'ensemble des images des points appartenant à $S(E_c)$: cet ensemble est à une distance positive de l'ensemble des points de la surface du cylindre.

Supposons alors que cet ensemble puisse être séparé de la circonférence $r = \frac{1}{2}$, on pourrait trouver un arc de Jordan simple allant du point $\theta = 0$ au point $\theta = \pi$ en empruntant un nombre fini d'arcs de la circonférence $r = 1$, qui serait l'image d'un arc de courbe allant de m' à m'' et sans point commun avec $S(E_c)$ et dont tous les points seraient intérieurs au domaine précédent sauf les arcs précédents. Cette ligne pourrait être obtenue par pavage du plan et, avec l'arc $(0, \pi)$ du cercle $r = 1$, elle limiterait un nombre fini de domaines simples; la frontière de chacun de ces domaines étant constituée par un arc du cercle $r = 1$ et un arc simple joignant les extrémités de l'arc précédent.

Un tel domaine peut contenir des images de points non intérieurs au cylindre, mais cependant on peut déformer à l'intérieur du cylindre un segment de droite suivant un arc de courbe quelconque intérieure au cylindre et de mêmes extrémités: c'est une conséquence de la convexité du cylindre. Après un nombre fini de telles déformations, on obtiendrait une courbe joignant m' à m'' à l'intérieur du cylindre et sans point commun avec $S(E_c)$. Ainsi, en supposant que l'ensemble image des points de $S(E_c)$ ne comprend pas un continu allant du cercle $r = 1$ au cercle $r = \frac{1}{2}$, on arrive à une contradiction d'où l'on tire que la courbe C_1 a un point commun avec $S(E_c)$, c'est-à-dire

que l'ensemble des points de $S(E_c)$ non extérieurs au cylindre est un $K(I-I_c)$; ainsi :

Tout $S(E_c)$ contient, au voisinage de tout point de $S(E_c) - E_c$, un sous-ensemble de diamètre aussi petit que l'on veut et qui est un S relativement à une courbe C' .

6 bis. Pour compléter le résultat précédent, nous allons montrer que l'ensemble commun à $S(E_c)$ et au cylindre a des points communs avec toute courbe déduite de $(C'')^n$ sans rencontrer $I-I$. Appelons encore C_1 une telle courbe et représentons dans un plan la courbe $(C'')^n$ par un cercle de rayon $r=1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) divisé en $2n$ parties égales :

$$\frac{k\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{(k+1)\pi}{n} \quad (k=0, 1, \dots, 2n-1).$$

Lorsque k est pair l'arc correspondant de $(C'')^n$ sera le segment $m'm''$; lorsque k est impair, ce sera l'arc de C'' extérieur au cylindre; de sorte que le point m' , par exemple, a pour images les points $\theta = \frac{k\pi}{n}$ avec k pair et m'' les points $\theta = \frac{k\pi}{n}$ avec k impair. Pour image de la surface permettant de passer de $(C'')^n$ à C_1 nous prendrons la couronne $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$, l'image de C_1 étant la circonférence $r = \frac{1}{2}$.

Si nous démontrons que l'ensemble fermé des images des points communs à cette surface et à la surface du cylindre comprend des continus qui vont des points $(r=1, \theta = \frac{k\pi}{n})$ à la circonférence $r = \frac{1}{2}$ et qui n'ont aucun point commun, il suffira de procéder comme précédemment pour arriver au résultat.

Comme ci-dessus, on démontre que si les continus précédents n'existaient pas, il y aurait cependant des continus joignant deux points $\theta = \frac{k\pi}{n}$ de la circonférence $r=1$ et, puisque C_1 peut se déduire de $(C'')^n$ sans rencontrer $I-I$, les valeurs de k correspondantes devraient être de même parité. Mais alors l'un de ces continus séparerait un nombre impair de points $\frac{k\pi}{n}$ des autres et l'on obtient une contradiction.

Suivant la terminologie que nous introduisons plus loin, nous pouvons dire : au voisinage de tout point de $S(E_c) - E_c$, il existe un sous-ensemble de diamètre aussi petit que l'on veut et qui est un S bilatère relativement à une courbe C .

7. Soient à présent M' et M'' deux points de $\overline{S(E_c) - E_c}$; on peut déduire de C deux courbes C' et C'' dont les points communs avec $S(E_c) - E_c$ sont tous respectivement aussi voisins que l'on veut de M' et de M'' .

On peut passer de C' à C'' par déformation et prendre pour image de la surface permettant cette opération une couronne circulaire $\left(\frac{1}{2} \leq r \leq 1\right.$ par exemple).

On démontre alors facilement que l'ensemble des images des points communs à $S(E_c) - E_c$ et à cette surface comprend au moins un continu ayant des points communs avec les cercles $r = \frac{1}{2}$ et $r = 1$. Ce continu est l'image d'un continu composé de $S(E_c) - E_c$ et contenant deux points M_1 et M_2 aussi voisins que l'on veut de M' et de M'' respectivement.

Soit alors $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$ une suite décroissante de nombres positifs qui tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. D'après ce qui précède on peut, quel que soit n , déterminer sur $S(E_c) - E_c$ un continu Γ_n contenant deux points $M_1^{(n)}$ et $M_2^{(n)}$ tels que

$$|M'M_1^{(n)}| < \rho_n, \quad |M''M_2^{(n)}| < \rho_n.$$

L'ensemble limite de la suite de continus Γ_n contient donc les deux points M' et M'' ; leur ensemble d'accumulation est donc, d'après le lemme de Zoratti, un continu Γ contenu dans $\overline{S(E_c) - E_c}$ et contenant M' et M'' ; en définitive nous avons :

L'ensemble $\overline{S(E_c) - E_c}$ est un continu.

8. Outre l'intérêt que les résultats précédents présentent en eux-mêmes, ils nous permettent de faire l'étude dimensionnelle de l'ensemble $S(E_c) - E_c$.

Puisque cet ensemble n'a pas de point intérieur, sa dimension en l'un quelconque de ses points ne dépasse pas 2. Mais, puisque $\overline{S(E_c) - E_c}$ est un continu, tout point de cet ensemble est de dimension au moins égale à 1. D'autre part, nous avons vu que, dans tout voisinage d'un point de $S(E_c) - E_c$, il existe un cylindre dont l'intérieur est coupé par l'ensemble commun à $S(E_c) - E_c$ et à l'intérieur du cylindre. Tous les points de ce dernier ensemble ne peuvent donc pas être de dimension 1 en vertu d'un résultat connu (¹). Il y a donc dans le cylindre un point au moins de dimension 2; mais ce cylindre a été construit à l'intérieur d'une sphère, de rayon aussi faible que l'on veut, ayant pour centre un point arbitraire de $S(E_c) - E_c$, donc :

L'ensemble des points de dimension 2 est dense sur $\overline{S(E_c) - E_c}$.

Un tel ensemble est dit, d'après P. Urysohn (¹), dimensionnellement homogène de dimension 2 ou surface cantorienne généralisée.

Nous nous autorisons des résultats précédents pour dire, *quand l'ensemble $\overline{S(E_c) - E_c}$ contient E_c* [c'est-à-dire quand tous les points de E_c sont des points d'accumulation de l'ensemble $S(E_c) - E_c$] *que $S(E_c)$ est une surface ayant E_c pour bord* (ou passant par E_c).

9. Il devient donc important de donner des exemples d'ensemble E_c et de courbes C pour lesquels tout $S(E_c)$ est identique à $\overline{S(E_c) - E_c}$.

Prenons d'abord le cas d'une coupure plane I_c irréductible entre deux points a et b , soit C un cercle dont a et b sont deux points diamétralement opposés et dont le plan est perpendiculaire à celui de I_c . Le domaine déterminé par I_c situé à distance finie et contenant l'un des points a ou b est un $S(I_c) - I_c$ et l'on a

$$\overline{S(I_c) - I_c} = S(I_c),$$

de sorte que les fermetures des domaines plans font partie de nos ensembles S , ce qui tend à justifier les considérations précédentes, car toute définition de la surface passant par une courbe qui ne

(¹) Voir K. MENGER. *Dimensionstheorie* (Teubner); ou P. URYSOHN, *Sur les lignes cantoriennes* (*Fund Math.*, t. 7, 1925).

contiendrait pas les ensembles précédents serait, à mon avis, insuffisante.

Considérons à présent une surface fermée de Jordan, sans point double, et formée d'un nombre fini de triangles (elle est, par suite, orientable). Soit J_1 un sous-ensemble fermé de J dont le complémentaire est ouvert, non vide, et entièrement compris dans un des triangles qui forment J , soit F la frontière de J_1 . Nous allons montrer que toute image topologique j de J_1 est un S relativement à l'image f de F et à une courbe enlaçable avec f .

Soient M un point de j n'appartenant pas à f , t_0 un élément de j contenant M à son intérieur, homéomorphe à un triangle plan, et n'ayant pas de point commun avec la frontière f de j . Des travaux de M. Brouwer ⁽¹⁾ il résulte que l'on peut construire un domaine fermé $\Delta_\varepsilon(t_0)$, contenant à son intérieur les points intérieurs à t_0 , n'ayant en commun avec j que les points de t_0 ou de sa frontière, qui est de plus divisé par t_0 en deux domaines $\Delta_\varepsilon^{(1)}(t_0)$ et $\Delta_\varepsilon^{(2)}(t_0)$, et dont aucun point n'est distant de t_0 de plus d'une quantité fixe ε , donnée à l'avance, mais aussi petite que l'on veut.

Soient $M_0^{(1)}$ et $M_0^{(2)}$ deux points intérieurs aux domaines $\Delta_\varepsilon^{(1)}$ et $\Delta_\varepsilon^{(2)}$ respectivement. Puisque j ne divise pas l'espace en régions, joignons ces deux points par une ligne de Jordan γ_0 ne rencontrant pas j . Soit à présent t_n ($n = 1, 2, \dots$) une suite d'éléments de j contenus dans t mais contenant tous M à leur intérieur, emboîtés et tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; soit aussi ε_n une suite décroissante vers zéro de nombres positifs telle que les éléments $\Delta_{\varepsilon_n}(t_n)$ soient emboîtés. Dans chacun des couples de domaines $\Delta_{\varepsilon_n}^{(1)}(t_n)$ et $\Delta_{\varepsilon_n}^{(2)}(t_n)$, contenus respectivement dans $\Delta_{\varepsilon_{n-1}}^{(1)}(t_{n-1})$ et $\Delta_{\varepsilon_{n-1}}^{(2)}(t_{n-1})$, choisissons deux points intérieurs $M_n^{(1)}$ et $M_n^{(2)}$ que nous joignons respectivement à $M_{n-1}^{(1)}$ et $M_{n-1}^{(2)}$ par des lignes polygonales $\gamma_n^{(1)}$ et $\gamma_n^{(2)}$ intérieures aux domaines $\Delta_{\varepsilon_{n-1}}^{(1)}(t_{n-1})$ et $\Delta_{\varepsilon_{n-1}}^{(2)}(t_{n-1})$.

Si, à la somme des lignes $\gamma_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$), on ajoute le point M et la ligne γ_0 , on obtient une courbe de Jordan C , n'ayant que le point M en commun avec j , et qui est enlacée avec toute courbe simple fermée tracée

⁽¹⁾ L. BROUWER. *Über Jordansche Mannigfaltigkeiten* (Math. Annalen, t. 71, 1911, p. 320-327).

sur j servant de bord à une variété contenue dans j et contenant M .

En particulier la frontière f est la limite d'une suite de courbes de Jordan simples C_n qui limitent sur j des variétés j_n telles que tout point intérieur à j soit intérieur à j_n pour n suffisamment grand.

Or toute surface ayant C pour base a au moins un point commun avec toute courbe C_n ; elle en a donc au moins un avec f . Inversement d'ailleurs, toute courbe déduite de C (et plus généralement de C''), sans rencontrer f , peut se déduire de cette même courbe sans rencontrer les C_n , à partir d'une certaine valeur de n , elle est donc enlacée avec ces courbes et, par suite, avec f .

Il suit de là que j est un $K(f_c)$.

Pour démontrer que c'est un $S(f_c)$, observons que le résultat de M. Brouwer nous indique aussi que la variété j est uniformément non sinueuse des deux côtés sur tout ensemble fermé ne contenant que des points intérieurs de j ; cela veut dire qu'à tout nombre δ , suffisamment petit, on peut faire correspondre un nombre η , tendant vers zéro avec δ , tel que tout couple de points de l'ensemble en question, et dont la distance ne dépasse pas δ , peut servir d'extrémités à deux arcs de Jordan, situés dans des domaines tels que $\Delta_1^{(e)}$ et $\Delta_2^{(e)}$, n'ayant en commun avec j que ces extrémités, tandis que leurs diamètres ne dépassent pas η .

Soit alors M' un point intérieur de j , l'une des variétés j_n précédentes contient M et M' à son intérieur; nous désignerons par δ et η les nombres dont nous venons de parler pour l'ensemble j_n . Choisissons une suite finie de points M_i ($i=0, \dots, p$) (avec $M_0 = M$; $M_p = M'$) telle que la distance $M_{i-1}M_i$ ne dépasse pas δ .

Cela fait joignons M_0 et M_1 par deux arcs $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$ allant de M_0 à M_1 , situés de chaque côté de j et de diamètre inférieur à η . Sur C prenons deux points $P_0^{(1)}$ et $P_0^{(2)}$ de part et d'autre de M_0 et suffisamment voisins de M_0 pour être joints respectivement à deux points $Q_0^{(1)}$ et $Q_0^{(2)}$ de $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$ par des chemins de diamètre plus petit que η et n'ayant aucun point commun avec j .

Remplaçons alors l'arc $P_0^{(1)}M_0P_0^{(2)}$ de C par l'arc $P_0^{(1)}Q_0^{(1)}M_1Q_0^{(2)}P_0^{(2)}$, nous obtenons une nouvelle courbe C_1 n'ayant en commun avec j que le point M_1 et pouvant se déduire de C par déformation continue sans rencontrer f , pourvu que η soit suffisamment petit.

En procédant ainsi de proche en proche on arrive, au bout de p opérations, à une courbe C' déduite de C par déformation continue sans rencontrer f et n'ayant en commun avec j que le point M' . Mais M' étant un point intérieur quelconque de j , cela démontre que j est un $S(f_c)$ et que l'on a

$$\overline{S(f_c) - f_c} = S(f_c).$$

L'hypothèse de l'orientabilité de J faite ci-dessus n'est pas essentielle, les résultats précédents sont tous valables, cependant il peut exister des courbes déduites de C^n ($n > 1$) sans rencontrer f et qui n'ont pas de point commun avec j : c'est, comme on le voit facilement, le cas pour le ruban de Moebius (n pair).

10. Ensembles S bilatères et unilatères. — Après ces exemples nous pouvons maintenant dire les raisons qui nous ont guidé dans le choix de notre définition des ensembles $K(E_c)$. Si nous n'avons pas défini un ensemble $K(E_c)$ [et, par suite, $S(E_c)$] en disant qu'il devait avoir au moins un point commun avec toute courbe enlacée avec E_c , c'est que notre modèle plan était le domaine borné dont la frontière est une coupure irréductible entre deux points; or, avec la définition ci-dessus, le modèle plan serait le complémentaire du domaine déterminé par cette coupure et contenant l'infini; il pourrait, par suite, comprendre plusieurs domaines, ce qui, à mon avis, heurte la conception intuitive de l'être que nous nous proposons de définir.

On aurait pu, partant du modèle plan, exiger que tout $K(E_c)$ ait un point commun avec toute courbe déduite de C^n , quel que soit n , sans rencontrer E_c , mais alors ce serait rejeter hors de nos considérations, parmi les surfaces de Jordan simples dont le bord est une courbe de Jordan simple, les surfaces unilatères, et je ne vois aucune raison qui puisse militer en faveur de cette élimination.

Mais cette remarque nous fournit une classification des ensembles $S(E_c)$: un tel ensemble sera dit *bilatère* ou *unilatère* suivant qu'il a des points communs avec toutes les courbes déduites de C^n ou non. Comme l'existence de courbes déduites de C^n sans point commun avec S , entraîne l'existence de courbes C^{np} possédant la même propriété, quel que soit l'entier p , on voit que si un ensemble $S(E_c)$ est

bilatère (ou unilatère) par rapport à C'' , elle l'est aussi par rapport à C et inversement.

Il n'y aurait pas lieu de pousser plus loin la classification des ensembles $S(E_c)$ et les dénominations précédentes seraient pleinement justifiées si la question suivante recevait une réponse négative :

Existe-t-il des ensembles $S(E_c)$ qui, ayant des points communs avec toutes les courbes déduites de C^2 sans rencontrer E_c , n'en ont pas avec certaines courbes déduites de C'' ($n > 2$).

10 bis. Remarques sur les généralisations. — Les généralisations de nos notions aux espaces d'ordre supérieur ne peuvent se faire sans précautions et sans tenir compte de faits que je voudrais signaler.

Voici comment, dans un plan, on peut définir un continu irréductible entre deux points A et B . Nous dirons d'abord que le couple de points (A, B) est enlacé avec une courbe C de ce plan s'il n'est pas possible, sans rencontrer A ou B , de réduire C à un point situé à distance finie ou à une courbe dont tous les points sont aussi loin que l'on veut de A et de B ; ceci revient à donner au plan la connexion de la sphère, et la courbe C' sera dite déduite de C sans rencontrer (A, B) si cela peut se faire sur une sphère image. Une courbe C enlacée avec (A, B) étant donnée, il est alors facile de démontrer que tout ensemble fermé ayant au moins un point commun avec toute courbe déduite de C , contient un continu contenant A et B et notre notion de continu irréductible entre deux points coïncide avec la notion habituelle.

Ici nous n'avons pas eu à nous préoccuper de ce qui se passait à l'infini car, étant donné un ensemble E borné et fermé, si l'on peut réduire une courbe C à une courbe très éloignée de E sans rencontrer cet ensemble, on peut aussi la réduire à un point sans rencontrer E .

Dans l'espace à trois dimensions nous pouvons transporter la notion sphère enlacée par rapport à deux points A et B , mais si l'on se donne une telle sphère S , il est facile de fournir des exemples d'ensembles fermés qui ont des points communs avec toute surface déduite de S sans rencontrer (A, B) et qui ne contiennent pas de continu passant par A et B . Pour obtenir un tel continu, il faut ajouter la condition suivante : l'ensemble doit avoir au moins un point commun avec toute

surface déduite d'une surface Σ qui, au point de vue ensemble de points, coïncide avec S , chaque point de Σ correspondant à un point de S , la correspondance étant continue et de degré 1.

Ici les choses se présentaient plus simplement, car il n'y a qu'un circuit de dimension 1 : le cercle.

11. Quant à la définition de la surface ayant pour bord un E_c , on pourrait être tenté de croire qu'elle n'est intéressante, dans le cas général, que lorsque E_c est un I_c . Or, dans le plan, un domaine et sa frontière constituent un $S(E_c)$ pour un cercle C convenablement choisi et pour la frontière E_c de ce domaine; de même, partant des surfaces de Jordan considérées au n° 9, il est facile de voir qu'un domaine et sa frontière détachée de ces surfaces constituent un $S(E_c)$, c désignant la courbe considérée précédemment, ou une courbe déduite de celle-ci, et E_c la frontière du domaine.

Dans ces deux exemples les ensembles E_c semblent mériter le nom de bord des ensembles $S(E_c)$ correspondants. Soient, d'autre part, une courbe c , un ensemble E_c et un $S(E_c)$ ayant E_c pour bord; si à E_c on ajoute un point de l'ensemble $S(E_c) - E_c$ pour obtenir un nouvel ensemble E_c , l'ensemble $S(E_c)$ est encore un S ayant ce nouvel ensemble comme bord; ainsi l'ensemble $\Sigma = S(E_c)$ étant donné *a priori* ainsi que la courbe C , l'ensemble E_c , à supposer qu'il existe, est indéterminé. Cependant on peut démontrer que tout E_c , bord d'un ensemble $\Sigma = S(E_c)$, contient au moins un *bord irréductible* e_c , en ce sens que Σ est un S relativement à l'ensemble e_c fermé, avec

$$\Sigma = S(e_c) = \overline{\Sigma - e_c},$$

tandis qu'aucun vrai sous-ensemble fermé de e_c ne donne lieu à une égalité analogue.

Soit en effet $E_c^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite infinie d'ensembles E_c tel que

$$E_c^{(1)} \supset E_c^{(2)} \supset \dots \supset E_c^{(n)} \supset \dots, \\ \Sigma = S(E_c^{(n)}) = \overline{\Sigma - E_c^{(n)}};$$

alors pour l'ensemble

$$E_c^{(\omega)} = \prod_{n=1}^{\infty} E_c^{(n)},$$

on a également

$$\Sigma = S(E_c^{(\omega)}) = \overline{\Sigma - E_c^{(\omega)}}.$$

En effet, tout d'abord l'ensemble $E_c^{(\omega)}$ est un E_c d'après les résultats du Chapitre I; ensuite une courbe déduite de C sans rencontrer $E_c^{(\omega)}$ peut l'être sans rencontrer non plus un $E_c^{(\omega')}$ à partir d'une certaine valeur de n ; Σ est donc un $K(E_c^{(\omega)})$; pour la même raison, si l'on retranche de Σ un point et un voisinage de ce point, situé à une distance positive de $E_c^{(\omega)}$, on peut déduire de C , sans rencontrer $E_c^{(\omega)}$, une courbe n'ayant pas de point commun avec l'ensemble restant; Σ est donc un $S(E_c^{(\omega)})$ qui a $E_c^{(\omega)}$ comme bord en vertu des relations

$$\Sigma \supset \overline{\Sigma - E_c^{(\omega)}} \supset \overline{\Sigma - E_c^{(\omega')}} = \Sigma.$$

Cela étant, il suffira, à partir d'un ensemble E_c bord d'un ensemble Σ , contenu, par exemple, dans un cube de côté 1, de diviser ce cube en 8 cubes de côtés $\frac{1}{2}$ par des plans parallèles aux faces, puis de numérotter ces cubes de 1 à 8 et de supprimer tous les points de E_c intérieurs au premier cube, si l'ensemble restant est un E_c bord de Σ ; dans le cas contraire on ne modifiera pas E_c . On procédera de même avec les autres cubes puis on recommencera l'opération en divisant le cube initial en 3^3 cubes égaux et ainsi de suite. De cette façon on définit une opération sur E_c qui, par sa répétition indéfinie fournit pour Σ un bord irréductible comme on le démontre sans peine par le procédé employé au n° 6 (Chap. I).

Un bord irréductible d'un ensemble Σ est parfait car, lorsqu'un bord comprend un point isolé, l'ensemble obtenu après la suppression de ce point est encore un bord, puisque ce point étant sur Σ , est limite de points n'appartenant pas au bord primitif; il existe donc, dans tout voisinage de ce point, des courbes déduites de C sans rencontrer le bord et qui n'ont pas d'autres points communs avec Σ que ceux situés dans ce voisinage.

Lorsque Σ consiste en un domaine plan et sa frontière, l'opération que nous venons de faire subir à la frontière consiste dans la suppression des points de celle-ci qui, dans leurs voisinages, ne contiennent pas de points extérieurs au domaine.

Un ensemble Σ peut d'ailleurs avoir plusieurs bords irréductibles comme on le voit facilement.

Si l'on donne seulement l'ensemble Σ et si l'on demande de trouver la courbe C , on voit, en considérant les domaines plans, qu'il peut y avoir une infinité de solutions différentes, c'est-à-dire non réductibles l'une à l'autre.

12. Enfin, quant aux ensembles E_c , tels que tout $S(E_c)$ admette E_c pour bord, nous indiquerons que c'est le cas pour les ensembles I_c asymptotiquement simplement accessibles en chacun de leur point. L'hypothèse faite revient en effet à dire que l'on peut, au voisinage de tout point d'un tel ensemble, trouver une courbe C' déduite de C sans rencontrer cet ensemble; or, sur cette courbe, il y a des points de tout $S(I_c)$, ce qui prouve notre assertion.

13. **Exemples.** — 1° Dans un plan considérons un axe Ox et soit \mathcal{C} un continu situé dans ce plan irréductible entre un point A situé en dehors de l'axe et le point O ; nous supposons que tous les points de \mathcal{C} sont dans le demi-plan fermé déterminé par Ox et le point A et que, s'il existe des points communs à \mathcal{C} et à la droite qui porte Ox autres que le point A , ces points forment un segment continu de condensation de \mathcal{C} .

Faisons tourner \mathcal{C} autour de Ox ; le point A engendre un cercle qui est un I_c par rapport à un cercle C du plan donné, centré en A et situé dans le demi-plan précédent. Il est facile de voir que \mathcal{C} engendre un $S(I_c)$ à deux côtés. Le premier de ces deux points provient de ce que \mathcal{C} est irréductible, le deuxième de ce que, dans ce continu, on peut inscrire une ligne polygonale allant de A à O et aussi voisine de \mathcal{C} qu'on le veut; une courbe déduite de C'' a des points communs avec la surface engendrée par une quelconque de ces lignes en tournant autour de Ox , puisque C'' est enlacée avec le cercle décrit par le point A , elle en a donc aussi avec $S(I_c)$.

Plus généralement, en faisant tourner un continu plan \mathcal{C} irréductible entre deux points A et B autour d'un axe de son plan ne le rencontrant pas, on obtient un ensemble $S(E_c)$ à deux côtés, en désignant par C un cercle centré en A et ne contenant pas B et par E_c l'ensemble des deux cercles engendrés par A et B .

En utilisant les continus irréductibles plans, ou les coupures irréductibles planes, on pourra également former des exemples d'ensembles S coniques ou cylindriques.

Considérons, par exemple, dans un plan de coordonnées rectangulaires x et y le continu défini par

$$y = \sin \frac{\pi}{x} \quad (\text{pour } 0 < x \leq \pi), \quad -1 \leq y \leq 1 \quad (\text{pour } x = 0).$$

En faisant tourner ce continu autour de l'axe des y , ou autour d'une droite n'ayant en commun avec le continu que le point $(x=0, y=1)$ ou le point $(x=0, y=-1)$, nous obtenons une surface ayant pour bord le cercle engendré par le point $(x=\pi, y=0)$; en le faisant tourner autour de la droite $x=\pi$, on obtient une surface ayant pour bord irréductible une coupure irréductible quelconque de la surface cylindrique de révolution engendrée par le segment $(-1, +1)$ de l'axe des y (irréductible entre deux points situés l'un sur le cercle engendré par le point -1 , l'autre sur le cercle engendré par le point $+1$).

Prenons maintenant un continu \mathcal{C} plan indécomposable et faisons-le tourner autour d'une droite de son plan ayant, au plus, un point commun avec \mathcal{C} . En utilisant le résultat de M. Yoneyama ⁽¹⁾ : A étant un point quelconque de \mathcal{C} , il existe un autre point B , distinct de A , tel que \mathcal{C} soit irréductible entre A et B ; nous voyons que notre surface a une infinité de bords irréductibles, relativement à des cercles C faciles à définir.

2° Reprenons l'ensemble discontinu P de M. Antoine (Chap. I, n° 10, 5°); nous avons vu que le méridien M du tore d'ordre 1 est enlacé avec lui.

Soit O un point de l'axe de ce tore, nous allons montrer que l'ensemble des segments de droite joignant O aux différents points de P est un $K(P_M)$; la démonstration de ce fait mettra de plus en évidence une propriété curieuse de l'ensemble P . Notre ensemble étant la limite de l'ensemble d'ordre λ obtenu en joignant O aux points qui appartiennent aux différents tores d'ordre λ , il nous suffit de démontrer que l'un

⁽¹⁾ K. YONEYAMA, *Theory of continuous sets of points* (Tohoku Math. Journal, 1917-1920).

quelconque de ces derniers est un $K(P_M)$. Pour cela prouvons que l'un de ces ensembles contient une surface conique ayant pour base une courbe enlacée avec M .

Considérons les k tores d'ordre $\lambda + 1$ intérieurs à un tore d'ordre λ ; soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ les circonférences lieux des centres des méridiens de ces tores numérotés de façon que Γ_i soit enlacée avec Γ_{i-1} et Γ_{i+1} ($\Gamma_0 = \Gamma_k$ et $\Gamma_{k+1} = \Gamma_1$).

Les deux cônes centrés en O et de bases Γ_i et Γ_{i+1} ont deux génératrices communes à cause de l'enlacement de leurs bases; c'est-à-dire que, vues du point O , les deux circonférences ont deux points communs apparents.

Choisissons un sens de parcours sur chacun des Γ et, partant d'un point quelconque de Γ_1 , parcourons cette courbe jusqu'au premier commun apparent avec la circonférence Γ_2 ; joignons ce point par un segment de droite passant par O au point correspondant de Γ_2 et continuons cette opération en retranchant, ou en ajoutant en dernier lieu, si besoin est, un arc de la circonférence Γ_1 .

Nous obtenons ainsi une courbe de Jordan fermée qui, par une déformation effectuée à l'intérieur du tore d'ordre λ considéré, peut se réduire à la circonférence lieu des centres des méridiens de ce tore et, par suite, deux courbes obtenues de cette façon dans deux tores consécutifs d'ordre λ ont des points apparents communs. On peut recommencer avec ces courbes l'opération faite sur les circonférences Γ pour obtenir, dans chaque tore d'ordre $\lambda - 1$, une courbe contenue dans l'ensemble d'ordre $\lambda + 1$ et qui, par déformation, peut se réduire au lieu des centres des méridiens de ce tore et ainsi de suite : de proche en proche nous obtenons ainsi notre résultat.

Nous voyons de plus, en appliquant le théorème de Zoretti, que, vu du point O , l'ensemble P présente l'apparence d'un continu. Ce résultat est établi, par le raisonnement précédent, quel que soit O extérieur au tore d'ordre 1; mais alors il est vrai également pour un point extérieur aux tores d'ordre 2, car les sous-ensembles de P intérieurs à deux tores d'ordre 2 enlacés présentent l'apparence de deux continus qui ont des points apparents communs; de proche en proche on voit que le résultat est vrai quel que soit O n'appartenant pas à P ; ainsi :

L'ensemble P vu d'un point O quelconque de l'espace ne lui appartenant pas présente l'apparence d'un continu.

3° Revenons à l'ensemble enlaçable I_c donné comme quatrième exemple au n° 10 du Chapitre I. Considérons une coupure partageant l'espace en régions; l'une de ces régions contenant la circonférence Γ_1 et les points de son plan qui lui sont intérieurs, une autre les points Γ_2 ainsi que les points du plan de cette courbe qui lui sont intérieurs; supposons que cette coupure soit irréductible entre ces deux régions, alors elle est un $S(I_c) - I_c$.

Tout d'abord elle est un $K(I_c) - I_c$, car toute courbe déduite de C sans rencontrer I_c a des points intérieurs à Γ_1 et des points intérieurs Γ_2 et de plus il est facile de voir que si l'on supprime de cette coupure tout un voisinage de l'un de ses points, l'ensemble restant n'est plus un $K(I_c) - I_c$.

Ainsi on a un exemple d'un ensemble

$$S(I_c) - I_c$$

fermé(et même continu) et n'ayant aucun point commun avec I_c .

Pour ensemble $S(I_c)$ on peut aussi prendre l'ensemble des points du plan de Γ_1 , intérieurs à cette courbe, augmenté de la circonférence Γ_2 , alors l'ensemble

$$\overline{S(I_c) - I_c}$$

ne contient pas tout I_c .

CHAPITRE III.

LES FEUILLES.

1. J'appelle feuille tout ensemble fermé borné F qui est un K relativement à tout ensemble enlaçable E_c situé sur lui et à toute courbe C enlacée avec cet ensemble.

Un ensemble fermé dont aucun sous-ensemble n'est enlaçable sera également considéré comme une feuille.

Un cube et sa frontière, une sphère et sa frontière, un cercle et sa circonférence, la surface d'une sphère sont des exemples de feuilles.

Au sujet de ces ensembles nous avons le résultat fondamental suivant :

Soit F_n ($n = 1, 2, \dots$) une suite infinie de feuilles telles que

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots,$$

alors le produit

$$F = \prod_{n=1}^{\infty} F_n$$

est également une feuille.

Soient en effet E_c un ensemble enlaçable de F et C une courbe enlacée avec lui; E_c faisant partie de F fait également partie de tout F_n , or chacun de ces ensembles est un $K(E_c)$; il en est donc de même de leur produit d'après le résultat obtenu au Chapitre II (n° 2).

Soit E un ensemble enlaçable, situé dans une feuille donnée; on démontre sans peine, en utilisant les procédés employés fréquemment déjà, qu'il existe une feuille irréductible $F(E)$ contenant E et contenue dans la feuille précédente, c'est-à-dire telle que tout vrai sous-ensemble fermé de $F(E)$ contenant E n'est plus une feuille.

L'ensemble enlaçable E_c étant donné, ainsi qu'une courbe C enlacée avec lui, il est également intéressant de considérer les feuilles relatives à E_c : ce seront les ensembles fermés, contenant E_c , et qui sont des $K(\Gamma_c)$ pour tout ensemble enlaçable Γ_c , enlacé avec une courbe C' déduite de c sans rencontrer E_c ; l'existence d'une feuille relative irréductible $F(E_c)$ se démontre facilement.

Tout ensemble $F(E_c)$ contient évidemment un $S(E_c)$.

2. Soit I un ensemble enlaçable irréductible relativement à une courbe C , une feuille relative $F(I_c)$ n'a pas toujours I_c pour bord, mais, par contre, il en est ainsi pour toute feuille $F(I)$; c'est-à-dire que l'on a

$$\overline{F(I)} - 1 = F(I).$$

Reprenons en effet le raisonnement fait au n° 3 du chapitre précédent et les mêmes notations. Soit P un point de I ; comme surface $M(t, r)$ nous pouvons prendre celle dont tous les points communs avec I sont situés dans une sphère de centre P et de rayon ε donné, aussi faible que l'on veut. En divisant le plan \mathcal{Q} en carrés de côtés suffisamment petits, on peut faire en sorte que l'image f de l'ensemble des points communs à $M(t, r)$ et à I , intérieure au cercle $\varphi = 1$, soit intérieure à

un nombre fini de polygones simples fermés j qui sont les images de courbes de la surface $M(t, r)$ toutes intérieures à la sphère de centre P et de rayon 2ε . L'image de l'un au moins de ces polygones j est enlacée avec I , car si aucune de ces courbes ne l'était, la courbe C ne le serait pas non plus, puisque chacune des courbes précédentes étant alors la base d'une surface, analogue à $M(t, r)$, et n'ayant aucun point commun avec I , il existerait une surface de base C sans point commun avec I , contrairement à l'hypothèse.

Il suit de là que, dans la sphère de centre P et de rayon 2ε , il y a, quel que soit ε , une courbe enlacée avec I et par suite, d'après la définition de $F(I)$, au moins de l'ensemble $F(I) - I$; ce qui démontre notre assertion.

Soit encore C une courbe enlacée avec un ensemble Γ situé sur une feuille, il existe un continu situé sur toute surface $M(t, r)$ de base C et ayant des points communs avec C et Γ car, si cela n'était pas, il existerait dans le plan \mathcal{E} des polygones j séparant les points du cercle $r=1$ des points dont les images sont sur Γ et qui n'auraient aucun point commun avec la feuille; mais l'un au moins de ces polygones étant l'image d'une courbe enlacée avec Γ , cela est en contradiction avec la définition de la feuille. De là suit que si, pour une feuille, on a une décomposition en une somme de deux ensembles fermés sans point commun; chacun d'eux est une feuille, car si cela n'était pas il existerait, dans l'un des deux ensembles, un ensemble enlaçable Γ et une courbe C enlacée avec lui qui n'aurait en commun avec la feuille que des points situés sur l'autre ensemble, et le continu dont nous venons de parler ne saurait exister.

Par conséquent, si un ensemble enlaçable E est un continu, toute feuille irréductible $F(E)$ est un continu qui a pour bord les divers ensembles enlaçables irréductibles que l'on peut déduire de E .

Plus généralement nous avons encore le résultat suivant : si une feuille est décomposée en une somme de deux ensembles fermés dont le produit n'est pas enlaçable, chacun de ces ensembles est une feuille; en reprenant les notations précédentes, il suffit, pour le voir, de considérer une surface $M(t, r)$ n'ayant aucun point commun avec l'ensemble non enlaçable produit des deux ensembles en lesquels la feuille a été décomposée.

3. Quant à l'étude locale des feuilles irréductibles $F(E)$, on voit sans peine que l'ensemble $F(E) - E$ ne contient ni point isolé ni point intérieur; de plus, le voisinage d'un point de l'ensemble $F(E) - E$ contient un voisinage d'un ensemble $K(\Gamma_\gamma)$ où Γ est un ensemble enlaçable situé sur $F(E)$ et γ une courbe enlacée avec lui; il s'ensuit, en vertu du résultat obtenu au Chapitre II, que les points de dimension 2 sont denses sur $F(E) - E$. Ces résultats sont également vrais pour les feuilles $F(E_c)$.

4. Nous dirons qu'un domaine est simplement connexe si pour toute courbe de Jordan C contenue dans ce domaine, on peut faire passer une surface $M(t, r)$ ayant C pour base également contenue dans ce domaine.

Soit alors F un ensemble fermé dont les domaines complémentaires sont simplement connexes, alors F est une feuille⁽¹⁾. Soient en effet E un ensemble enlaçable contenu dans F , et C une courbe enlacée avec cet ensemble; C ne peut être entièrement contenue dans un domaine complémentaire de F , car on pourrait alors la réduire à zéro sans rencontrer E , donc C a des points communs avec F .

Considérons en particulier le cas où F est la frontière commune à deux domaines D_1 et D_2 simplement convexes non vides et à ces deux-là seulement. Alors il est facile de voir que F contient des ensembles enlaçables. Il suffit en effet de décrire d'un point de F comme centre une sphère σ de rayon suffisamment petit pour ne contenir à son intérieur ni tout D_1 ni tout D_2 ; soit E l'ensemble commun à σ et à F . Il y a sur σ deux points K_1 et K_2 , l'un appartenant à D_1 , l'autre appartenant à D_2 ; joignons-les par deux arcs de Jordan, l'un ne comprenant que des points intérieurs à la sphère, à part K_1 et K_2 , l'autre ne comprenant que des points extérieurs à la sphère; soit C la courbe ainsi obtenue, je dis que C est enlacée avec E . En effet, une surface quelconque ayant C pour base a en commun avec σ un continu contenant K_1 et K_2 car, en faisant l'image de cette surface sur l'intérieur d'un cercle, l'image des points communs à cette surface et à σ contient en effet une coupure séparant l'image de l'arc de C intérieur à σ de l'image de l'arc extérieur

(¹) Ici on peut laisser tomber la condition que F doit être borné.

à σ , puisqu'on ne peut joindre un point intérieur à σ à un point extérieur sans rencontrer σ .

Cela étant, un tel continu allant d'un point de D_1 à un point de D_2 rencontre forcément E qui est la partie de F située sur σ . L'ensemble E qui vient d'être défini constitue une coupure entre un point de F intérieur à σ et un point extérieur; plus généralement il est facile de voir que toute coupure de F entre les points compris respectivement dans deux voisinages de deux points de F est enlaçable.

Enfin, comme exemple de feuille $F(E_c)$ qui est également un $S(E_c)$, nous citerons la surface de Jordan homéomorphe à un carré, lorsque, pour courbe C , on prend celle que nous avons définie, dans le cas général, au n° 8 (Chap. II) et pour ensemble E_c le bord de la surface. Soit e_c un ensemble enlaçable situé sur cette surface, nous pouvons supposer qu'il est enlacé avec C et il faut prouver qu'il existe sur l'ensemble considéré un $S(e_c)$. En utilisant, comme nous l'avons fait précédemment, la non-sinuosité de la surface, on voit que l'ensemble e_c doit être une coupure de la surface considérée et que l'image de cette coupure dans le carré image de la surface est également une coupure; l'ensemble homéomorphe au domaine déterminé par cette coupure et qui contient le point image du point commun à C et à la surface est un $S(e_c)$.