

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. CORNU

De la réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 1 (1872), p. 231-272

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1872_2_1_231_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

DE LA

RÉFRACTION À TRAVERS UN PRISME

SUIVANT UNE LOI QUELCONQUE,

PAR M. A. CORNU,

PROFESSEUR À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

1. Le présent travail a pour objet l'étude géométrique de la marche des rayons lumineux dans un prisme réfractant la lumière suivant une loi quelconque; le but qu'il atteint est le développement d'une méthode générale permettant de déterminer expérimentalement les éléments géométriques d'un rayon lumineux traversant un milieu réfringent donné, indépendamment de toute connaissance sur la nature de la surface d'onde de ce milieu. L'importance de ce problème n'échappera point aux physiciens ni aux géomètres qui connaissent les *desiderata* de l'Optique relativement à la détermination théorique de la forme de la surface de l'onde lumineuse et qui comprennent que la grande probabilité en faveur des résultats d'Huyghens et de Fresnel n'exclut nullement la nécessité d'un contrôle expérimental indépendant de toute hypothèse.

Cette méthode d'observation a été déduite de la discussion des équations de la théorie élémentaire du prisme : les théorèmes géométriques qui s'en dégagent permettent de traiter avec facilité les cas les plus usuels et les plus utiles au point de vue expérimental, par exemple le cas du minimum de déviation et celui d'une légère inclinaison des rayons par rapport à la section droite du prisme; l'étude de cette dernière question a conduit, avec une simplicité inattendue, à la solution du problème général.

L'étude de la réfraction faite indépendamment de la forme de la surface de l'onde a été, comme la remarque en avait été faite dans des *Recherches sur la réflexion cristalline* (¹), une source de simplifications considérables : l'introduction, dès le début, de la nature spéciale de cette surface eût compliqué inutilement les calculs et empêché d'apercevoir les théorèmes généraux indépendants de la forme de l'onde.

2. Ce Mémoire est divisé en trois Parties :

La première contient l'étude géométrique de la marche des rayons parallèles à la section droite d'un prisme, particulièrement dans le cas du minimum de déviation.

La seconde comprend la même étude dans le cas de rayons légèrement obliques sur la section, ainsi que la solution générale du problème optique.

La troisième, plus spécialement expérimentale, renferme l'application des théorèmes démontrés précédemment à l'étude de la surface d'onde du cristal qui se prête le mieux à ce genre de vérifications, le spath d'Islande.

Observations préliminaires.

3. *Définitions des éléments d'un rayon lumineux.* — Avant d'entrer dans l'étude optique du prisme, rappelons la définition de ce qu'on nomme les *éléments géométriques d'un rayon lumineux* dans le système des ondulations.

On ne considère pas, à proprement parler, comme type le plus simple un *seul* rayon lumineux, mais un faisceau de rayons parallèles dus à la propagation d'une *onde plane*. Cette onde plane, dans le cas d'un milieu quelconque homogène, se propage parallèlement à elle-même avec une vitesse uniforme, mais variable suivant l'orientation de son plan par rapport à certaines directions caractéristiques de la constitution optique du milieu. On obtient une image représentative de cette variation de vitesse en considérant la surface enveloppe des positions qu'occuperait, au bout de l'unité de temps, une onde partie

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*; 1867.

d'un point fixe et se propageant successivement dans toutes les directions.

4. Cette enveloppe, nommée *surface de l'onde*, n'est pas seulement une conception géométrique simplificative, elle représente, comme on le démontre aisément, la forme même de l'onde que produirait, dans certaines conditions, un ébranlement produit au centre considéré.

Cette enveloppe définit en outre une direction importante : l'onde plane étant donnée, si l'on considère l'une des surfaces d'onde à laquelle elle est tangente, la direction qui joint le point de contact au centre de la surface est ce qu'on nomme la *direction lumineuse efficace*. On démontre en effet que le mouvement vibratoire d'une onde plane limitée ne se transmet pas d'une position à la suivante, selon la perpendiculaire à la direction commune, mais suivant la direction oblique qu'on vient de définir : c'est là réellement l'axe du faisceau lumineux.

5. En résumé, un rayon lumineux produit par la propagation d'une onde plane dans un milieu quelconque homogène est en général oblique sur le plan de l'onde; pour le définir complètement au point de vue optique, indépendamment de la nature de sa surface d'onde, il suffira de connaître trois éléments :

- 1° La vitesse suivant la normale à l'onde plane (¹);
- 2° L'angle de direction lumineuse efficace avec cette normale;
- 3° L'orientation du plan parallèle à cette normale et au rayon efficace.

Le problème à résoudre est la détermination expérimentale, mais exclusivement géométrique, de ces trois éléments d'un rayon, qui suit, comme on le voit, une loi de réfraction dite *extraordinaire*.

6. *Discussion des méthodes expérimentales utilisées pour la détermination des éléments géométriques des rayons lumineux.* — Il semble au premier abord que la méthode d'observation imaginée par Malus dans

(¹) A proprement parler, il faudrait connaître la vitesse normale en grandeur et en direction, ce qui ferait trois éléments et non pas un seul; mais, suivant la construction d'Huyghens, le raccordement des ondes le long de la surface de séparation impose deux conditions, de sorte que, dans les problèmes de réfraction, la connaissance de la grandeur de la vitesse normale définit la direction de l'onde plane.

son étude du spath d'Islande, et reproduite depuis sous bien des formes, soit la plus directe et la meilleure : elle donne en effet immédiatement la direction lumineuse efficace, c'est-à-dire la partie du rayon lumineux directement *accessible* à l'observation ; mais elle a le grand inconvénient de ne pas définir l'élément géométrique vraiment simple du problème, celui auquel s'applique la *loi des sinus*, à savoir le plan d'onde du rayon. Aussi cette méthode ne peut servir qu'à faire des *vérifications* et non pas des *déterminations* de surfaces d'onde; en effet, les données expérimentales qu'elle fournit pour chaque rayon sont au nombre de *deux* (le point d'incidence et le point d'émergence), tandis qu'il en faut trois pour la détermination complète du rayon. L'insuffisance de cette méthode s'aperçoit immédiatement en remarquant que la connaissance d'un rayon intérieur ne permet de calculer les rayons émergents correspondant à des faces d'incidence ou d'émergence données que si l'on connaît le troisième élément, la vitesse de l'onde plane correspondant au rayon, c'est-à-dire l'indice de réfraction de l'onde. On juge par là que, si la forme de l'ellipsoïde d'Huyghens représentant l'onde extraordinaire dans le spath d'Islande n'avait pas été connue d'avance, Malus n'aurait probablement rien tiré de ses observations.

7. On peut faire une autre objection toute pratique à cette méthode, c'est que sa précision est assez limitée; d'ailleurs fût-elle à la fois précise et complète, elle serait presque toujours en défaut, à cause de la dimension considérable de l'échantillon qu'elle exige : les cristaux naturels ou artificiels sur lesquels il est intéressant de faire ces études sont en général beaucoup trop petits pour se prêter utilement à de semblables mesures.

8. La méthode des déviations par un prisme taillé dans la substance à étudier offre les avantages pour ainsi dire complémentaires de la méthode de Malus; elle définit aisément l'onde plane et sa vitesse, mais elle ne paraît pas au premier abord susceptible de fournir les éléments du rayon lumineux efficace; en effet, on est réduit à n'observer les rayons qu'avant leur entrée ou après leur sortie du milieu réfringent, dans un milieu, l'atmosphère, où la normale à l'onde coïncide avec la direction efficace. On pourrait, il est vrai, suivre

chaque rayon lumineux dans l'intérieur du prisme, déterminer la position du point d'incidence et du point d'émergence, et en déduire les éléments du rayon réfracté; mais cette méthode mixte, déjà peu exacte, comme on vient de le dire, avec des épaisseurs considérables du milieu réfringent, serait tout à fait grossière appliquée à des prismes dont l'épaisseur maximum ne s'élève qu'à un petit nombre de millimètres.

9. L'étude des déviations angulaires par le prisme se prête, au contraire, à une grande exactitude de mesures, même avec des échantillons de dimensions si petites que la biréfringence y paraît au premier abord insensible. On va voir, par ce qui suit, qu'on peut réduire à des observations purement angulaires la détermination géométrique complète du rayon réfracté intérieur que la méthode de Malus résout d'une manière incomplète, même en apportant toutes les complications d'un véritable *levé trigonométrique*.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DE LA MARCHE DES RAYONS DANS UN PRISME RÉFRACTANT SUIVANT
UNE LOI QUELCONQUE. RAYONS PARALLÈLES A LA SECTION DROITE DU PRISME.

Application de la construction d'Huyghens.

10. Des lois de la réfraction des ondes planes dans les milieux homogènes quelconques on déduit les résultats suivants :

1° *Une onde plane réfractée par une ou plusieurs surfaces planes reste toujours plane*, c'est-à-dire un faisceau de rayons parallèles reste toujours un faisceau de rayons parallèles après un nombre quelconque de réfractions à travers des surfaces planes. En particulier, à la sortie d'un prisme à faces rigoureusement planes, les rayons émergents sont parallèles s'ils l'étaient à l'entrée.

2° La direction d'une onde plane après un nombre quelconque de réfractions ne dépend que de la valeur des différentes vitesses normales que possédait cette onde dans son passage aux différents milieux. Elle est absolument indépendante des deux autres éléments qui définissent la direction lumineuse efficace. En particulier, dans un prisme placé dans l'air, la direction du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné ne dépend que de la valeur de la vitesse normale de l'onde réfractée; mais si le rayon est déterminé comme direction, il ne l'est pas comme position absolue dans l'espace, car la direction lumineuse efficace subit deux brisures que la loi précédente ne définit pas.

11. La construction d'Huyghens résume et complète ces résultats : elle détermine non-seulement les ondes, mais aussi les rayons lumineux correspondants. Rappelons brièvement le principe de cette construction : autour de chaque point d'incidence du rayon lumineux efficace sur un plan réfringent comme centre, on trace les surfaces d'onde des deux milieux en présence; à l'aide de ces deux surfaces on exprime géométriquement que l'onde plane se brise en pénétrant dans le milieu suivant, de manière que ses deux segments, tangents respectivement aux surfaces d'onde qui représentent leur vitesse actuelle, se raccordent suivant une droite commune sur le plan de séparation des milieux : le rayon réfracté est défini par la droite joignant le point d'incidence au point de contact de l'onde. On répète cette construction à chaque nouveau plan de séparation des milieux.

Cas des rayons parallèles à la section droite du prisme.

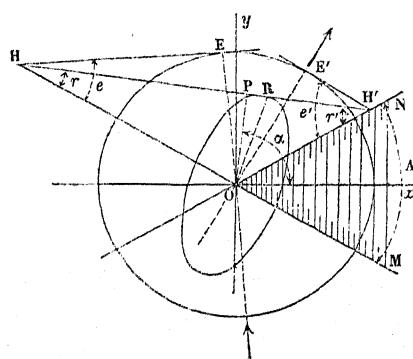
12. Considérons d'abord le cas de rayons incidents parallèles à la section droite du prisme. Le problème de la marche des rayons se ramène alors à la Géométrie plane : l'onde incidente étant parallèle à l'arête du prisme, l'onde réfractée et l'onde émergente le sont également et sont par conséquent entièrement définies par leurs traces sur le plan de la section droite.

Quant à la surface d'onde, il n'est pas nécessaire de la définir complètement, il suffit de connaître l'enveloppe de toutes les ondes parallèles à l'arête du prisme, c'est-à-dire de connaître le *cylindre circonscrit*

à la surface d'onde parallèlement à cette direction; on peut appeler *ligne d'onde* la base de ce cylindre dont la considération suffit pour ce qui va suivre.

On simplifiera notablement la construction d'Huyghens, qu'il faut appliquer successivement à chaque face du prisme, en considérant exclusivement celui des rayons qui passe par l'arête, ce qui n'apporte aucune restriction, tous les autres lui étant parallèles. Le même cercle de rayon r (vitesse des ondes dans le milieu extérieur) et la même *ligne d'onde* peuvent alors servir à la fois pour les trois rayons incident, réfracté et émergent. Le rayon incident OE (*fig. 1*) étant donné,

Fig. 1.



on construira l'onde incidente en menant, par le point E où le rayon prolongé au delà de l'arête O coupe le cercle, une tangente à ce cercle; puis l'onde réfractée HRH' en menant, par l'intersection H de l'onde incidente et de la face d'entrée MO prolongée, une tangente à la ligne d'onde. Cette tangente, prolongée jusqu'à la trace de la face de sortie ON , fournit le point H' par lequel doit passer la tangente au cercle qui représente l'onde émergente $H'E'$; le rayon émergent sera $E'O$.

Il faut bien remarquer ici que la droite OR , qui joint le centre O au point de contact de la ligne d'onde, n'est pas la direction du rayon réfracté proprement dit, elle n'en est que la projection. Le point de contact de l'onde plane réfractée avec la surface d'onde est généralement en dehors du plan de la section droite à une distance qu'il est inutile actuellement de se donner pour définir l'onde plane réfractée parallèle à l'arête du prisme. Quant à la perpendiculaire OP , qui repré-

sente la vitesse normale de l'onde réfractée, il est superflu d'insister sur ce point qu'elle ne correspond à aucun rayon physique.

13. Traduite algébriquement, cette construction fournit les équations suivantes :

Soient :

A l'angle réfringent du prisme;

e l'angle que fait l'onde incidente avec la face d'entrée;

e' l'angle que fait l'onde émergente avec la face de sortie;

r, r' les angles que fait l'onde réfractée avec ces faces;

p la vitesse normale de l'onde réfractée.

On a évidemment

$$\frac{1}{\sin e} = \frac{p}{\sin r},$$

ou, posant $\frac{1}{p} = n$, n étant l'*indice de réfraction* de l'onde plane, l'inverse de la vitesse normale,

$$(1) \quad \sin e = n \sin r,$$

$$(2) \quad \sin e' = n \sin r',$$

$$(3) \quad r + r' = A.$$

Désignant par D l'angle que font entre elles les ondes incidente et émergente (égal à celui du rayon incident prolongé et du rayon émergent), on a évidemment

$$D = (e - r) + (e' - r') = e + e' - (r + r') = e + e' - A,$$

d'où

$$(4) \quad A + D = e + e'.$$

Calculons donc $e + e'$: des formules (1) et (2), on déduit évidemment

$$\sin e + \sin e' = n(\sin r + \sin r'),$$

$$\sin e - \sin e' = n(\sin r - \sin r'),$$

ou

$$(5) \quad \sin \frac{e + e'}{2} \cos \frac{e - e'}{2} = n \sin \frac{r + r'}{2} \cos \frac{r - r'}{2},$$

$$(6) \quad \sin \frac{e - e'}{2} \cos \frac{e + e'}{2} = n \sin \frac{r - r'}{2} \cos \frac{r + r'}{2},$$

d'où

$$(7) \quad \frac{\tan \frac{e+e'}{2}}{\tan \frac{e-e'}{2}} = \frac{\tan \frac{r+r'}{2}}{\tan \frac{r-r'}{2}},$$

formule qui permet de déduire r et r' de la connaissance de e , e' , A ; car elle donne la différence $r - r'$ de deux angles dont on connaît la somme $r + r' = A$; on peut dès lors calculer n par les formules (1) et (2), ou mieux par l'une des combinaisons (5), (6), qui ont l'avantage d'être plus symétriques pour l'ensemble du calcul par logarithmes. En utilisant l'une et l'autre, on a une vérification utile des calculs; on obtient encore une autre expression de n en multipliant membre à membre les équations (5) et (6) :

$$(8) \quad \frac{\sin(e+e') \sin(e-e')}{\sin(r+r') \sin(r-r')} = n^2.$$

14. Détermination d'une ligne d'onde par une série de tangentes. — Ces formules n'apportent aucune restriction à la nature de la surface de l'onde; elles s'appliquent aussi bien aux milieux monoréfringents qu'aux milieux quelconques et ne s'appuient que sur la loi dite de *Descartes*, à savoir qu'une *onde plane reste plane après réfraction, et que le changement de direction de ces ondes, passant d'un milieu à un autre, ne dépend que du rapport des vitesses dans les deux milieux*.

On pourra donc appliquer ces formules à des milieux quelconques; on déterminera les valeurs de r , r' , n d'après celles de A , e , e' , ce qui définit autant de droites HH' tangentes à la ligne d'onde de la section droite du prisme qu'on aura de couples d'observations; mais les points de contact de chacune de ces tangentes ne seront pas déterminés directement. Toutefois ces opérations pourraient, à la rigueur, servir à la détermination graphique de la ligne d'onde, et, par suite, de la direction des rayons lumineux correspondant à chaque onde plane réfractée, de sorte que le problème général qu'on s'est proposé serait résolu dans le cas où il se réduit à une construction plane. Il est inutile d'insister plus longtemps sur ce mode d'observations. On verra dans la seconde Partie comment on peut utiliser les rayons légèrement inclinés sur la

section droite pour déterminer le point de contact, et, par suite, obtenir une méthode notablement plus précise.

15. Revenons aux équations (5) et (6). Si l'on pose

$$(9) \quad \mu = \frac{\cos \frac{A+D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad \nu = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

elles prennent la forme

$$(10) \quad \begin{cases} n \cos \frac{r-r'}{2} = \nu \cos \frac{e-e'}{2}, \\ n \sin \frac{r-r'}{2} = \mu \sin \frac{e-e'}{2}. \end{cases}$$

Éliminant $\frac{r-r'}{2}$, on a évidemment

$$(11) \quad n^2 = \mu^2 \sin^2 \frac{e-e'}{2} + \nu^2 \cos^2 \frac{e-e'}{2},$$

expression qui fournit n , l'indice de réfraction de l'onde plane en fonction des angles d'émergence et de l'angle du prisme, c'est-à-dire en fonction des données mêmes de l'observation. Cette formule n'est pas calculable par logarithmes, et si l'on essaye de la transformer pour la rendre calculable à l'aide d'un angle auxiliaire simple, on retombe sur les deux équations précédentes.

L'élimination de $\frac{e-e'}{2}$ conduit à une relation importante,

$$(12) \quad \frac{I}{n^2} = \frac{I}{\mu^2} \sin^2 \frac{r-r'}{2} + \frac{I}{\nu^2} \cos^2 \frac{r-r'}{2}$$

de même forme que l'équation

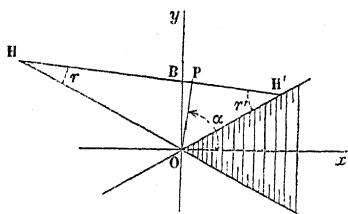
$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha,$$

qui donne la distance p du centre d'une ellipse de demi-axes a, b à une tangente dont la normale fait l'angle α avec la direction de l'axe 2α .

Or $\frac{I}{n}$ représente la perpendiculaire abaissée de la trace de l'arête du

prisme sur la trace de l'onde plane réfractée : cette droite peut donc être considérée comme la tangente à une certaine ellipse que nous allons déterminer. La normale à l'onde plane réfractée étant OP (fig. 2),

Fig. 2.



calculons l'angle $\text{PO}x$ qu'elle fait avec l'axe des x sur lequel doit être compté l'axe 2α : ce sera la valeur de α

$$\text{PO}x = \text{POH}' + \text{H}'Ox = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - r' + \frac{r + r'}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2};$$

on aura donc

$$\frac{I}{n^2} = \frac{I}{\mu^2} \cos^2 \alpha + \frac{I}{\nu^2} \sin^2 \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2},$$

par suite

$$(13) \quad a = \frac{I}{\mu}, \quad b = \frac{I}{\nu},$$

d'où l'on conclut cette propriété :

L'onde plane réfractée, tangente par définition à sa ligne d'onde, est également tangente à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant les bissectrices de la section droite du prisme et dont les valeurs sont

$$\frac{I}{\mu} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A+D}{2}}, \quad \text{suivant la bissectrice intérieure,}$$

$$\frac{I}{\nu} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A+D}{2}}, \quad \text{suivant la bissectrice extérieure.}$$

16. Les paramètres de cette ellipse, qui joue absolument le rôle de *ligne d'onde*, ne dépendent que de l'angle du prisme A et de la déviation D des rayons émergents (¹) : l'ellipse est donc complètement définie quand on se donne A et D . Elle permet de résoudre très-simplement le problème suivant :

Etant donné un prisme qui dévie d'un angle D des rayons parallèles à la section droite sans qu'on définisse ni le pouvoir réfringent du prisme, ni sous quelle incidence a lieu la réfraction, quelle est la série des indices possibles pour l'onde réfractée dans l'intérieur du prisme?

Ces indices sont donnés par l'inverse des perpendiculaires abaissées des centres sur les tangentes à l'ellipse dont les axes viennent d'être définis.

17. La forme de cette ellipse ne dépend donc, pour un même prisme d'angle A , que d'un seul paramètre, la déviation D ; en cher-

(¹) L'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ peut-elle être ligne d'onde ? Évidemment oui, mais dans le cas très-particulier où certaines nappes de la surface d'onde d'un milieu cristallisé offrent la propriété de pouvoir être inscrites dans un cylindre à base elliptique. L'équation de la section droite étant

$$M^2 x^2 + N^2 y^2 = 1,$$

l'identification

$$M = \frac{\cos \frac{A+D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad N = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

permet de calculer l'angle du prisme et même la déviation qu'il produira. En effet, on aura

$$M^2 \cos^2 \frac{A}{2} + N^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad (M^2 - 1) \cos^2 \frac{A}{2} + (N^2 - 1) \sin^2 \frac{A}{2} = 0,$$

d'où

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{M^2 - 1}{1 - N^2}.$$

On aurait de même

$$\tan^2 \frac{A+D}{2} = \frac{\frac{1}{M^2} - 1}{\frac{1}{1-N^2}} = \frac{N^2}{M^2} \tan^2 \frac{A}{2}.$$

Numériquement ces valeurs seraient imaginaires si l'on essayait d'y substituer les valeurs M , N des indices des cristaux usuels, lesquelles sont toujours plus grandes que l'unité, parce qu'elles expriment les indices de réfraction rapportés à l'air ou au vide, qui est le milieu

chant son mode de déformation quand on fait varier ce paramètre, on arrive à cette conclusion simple :

L'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ passe constamment par quatre points fixes donnés par l'intersection du cercle de rayon décrit autour de la trace de l'arête comme centre, avec les traces des faces du prisme.

En effet, l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}$ est

$$(14) \quad \mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = 1,$$

ou bien

$$\frac{\cos^2 \frac{A+D}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} x^2 + \frac{\sin^2 \frac{A+D}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} y^2 = 1,$$

extérieur ordinaire. Mais si l'on suppose que le milieu extérieur est un liquide dont l'indice soit k , les valeurs de M et de N deviendront $\frac{M}{k}$ et $\frac{N}{k}$, d'où

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{M^2 - k^2}{k^2 - N^2};$$

or, comme on peut dans la plupart des cas trouver des liquides ou composer des mélanges d'indice donné k , en choisissant cet indice par la seule condition $M > k > N$, on aura une infinité de cas dans lesquels la ligne d'onde elliptique coïncide avec la ligne d'onde en question.

A chaque valeur de k comprise entre M et N correspond un angle du prisme variant depuis 0 jusqu'à 180° , les déviations correspondantes, depuis 0 jusqu'à un maximum, revenant à 0 .

Le maximum de D se déduit par différentiation de la formule

$$\tan \frac{A+D}{2} = \frac{N}{M} \tan \frac{A}{2};$$

on trouve

$$\tan \frac{D}{2} = \frac{N-M}{2\sqrt{MN}} \begin{cases} \text{correspondant à } \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{M}{N}}, \\ \text{c'est-à-dire à } k = \sqrt{MN}. \end{cases}$$

Ainsi l'indice du liquide auxiliaire qui donne le maximum de la déviation constante est la moyenne géométrique des indices principaux.

Il est à peine utile de remarquer que le prisme doit avoir son arête parallèle aux génératrices du cylindre elliptique et les plans bissecteurs de ses faces parallèles aux plans principaux de cette surface.

La propriété caractéristique de ce prisme est d'offrir une déviation des rayons complètement indépendante de l'incidence des rayons dans le plan de la section droite.

ou, en remplaçant l'unité par la somme des carrés du sinus et du cosinus de $\frac{A+D}{2}$,

$$\left(\frac{x^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 1 \right) \cos^2 \frac{A+D}{2} + \left(\frac{y^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} - 1 \right) \sin^2 \frac{A+D}{2} = 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{x^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 1 \right) + \left(\frac{y^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} - 1 \right) \tan^2 \frac{A+D}{2} = 0.$$

Le paramètre variable se trouve réduit à un seul coefficient $\tan^2 \frac{A+D}{2}$; l'équation de l'ellipse est satisfaite identiquement par les systèmes de valeurs

$$(15) \quad x^2 = \cos^2 \frac{A}{2}, \quad y^2 = \sin^2 \frac{A}{2};$$

L'ellipse passe donc par les quatre points fixes, intersection du cercle $x^2 + y^2 = 1$ avec les faces du prisme

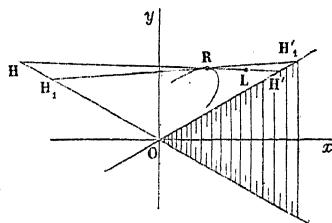
$$\frac{y}{x} = \pm \tan \frac{A}{2}.$$

Minimum de déviation.

18. D'après la propriété précédente, il résulte que toute variation de la déviation D des rayons entraîne une variation de forme de l'ellipse, et comme tout changement d'incidence produit un changement dans la déviation, on peut dire qu'en général à chaque incidence correspondra pour l'ellipse une forme différente. Mais il est un cas très-important où une variation très-petite d'incidence n'altère pas sensiblement la déviation : c'est celui du *minimum de déviation*. Alors $dD = 0$ et l'ellipse peut être considérée comme fixe pour les incidences e et $e + de$. Il est facile de voir que ce cas ne peut se présenter que si l'ellipse est tangente à l'onde réfractée, au point même où celle-ci touche la ligne d'onde; en effet, deux positions infiniment

voisines de l'onde réfractée HH' , $H_1H'_1$ (*fig. 3*) passent par le point de contact R de leur surface d'onde, suivant le langage de la Géométrie

Fig. 3.



infinitésimale; or, comme dans chacune de ses positions l'onde plane est assujettie à toucher l'ellipse, il faut qu'elle passe aussi par le point de contact de l'ellipse et que ces deux points de contact coïncident; les deux courbes sont donc tangentes entre elles et à l'onde plane. On arrive ainsi au théorème suivant :

L'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$, dans le cas du minimum de déviation des rayons d'un prisme, est tangente à la ligne d'onde d'Huyghens au même point que l'onde plane, de telle sorte que, dans ce cas, l'ellipse jouit de toutes les propriétés de la ligne d'onde, et définit à la fois la vitesse normale et la direction lumineuse efficace, réelle ou projetée sur la section droite du prisme.

Dans tout autre cas, on voit aisément que le point de contact R de la ligne d'onde avec l'onde plane HH' est en deçà ou au delà du point de contact L de la ligne d'onde avec l'ellipse.

19. Ce théorème permet de simplifier considérablement la plupart des calculs relatifs au minimum de déviation, c'est-à-dire du cas qui, au point de vue expérimental, est peut-être le plus important; en effet, on ramène la ligne d'onde la plus complexe à la considération d'une ellipse orientée symétriquement par rapport aux faces du prisme, et dont les axes ont une relation très-simple avec l'angle du prisme et la déviation.

Les deux principaux problèmes qu'il est utile de résoudre sont les suivants :

PROBLÈME I. — *Étant donné un prisme dont la ligne d'onde suivant*

la section droite est une ligne quelconque définie par son équation, calculer les angles d'incidence et d'émergence correspondant au minimum de déviation.

PROBLÈME II (question inverse). — *On connaît pour le minimum de déviation d'un prisme les angles d'incidence et d'émergence; calculer les éléments du rayon réfracté correspondant (c'est-à-dire déterminer le point correspondant de la ligne d'onde et la tangente en ce point).*

20. SOLUTION DU PREMIER PROBLÈME. — *Pour déterminer tous les éléments correspondant au minimum de déviation des rayons parallèles à la section droite d'un prisme d'angle A, on détermine le point de contact de l'ellipse*

$$\mu^2 x^2 + \nu^2 y^2 = 1,$$

dont les coefficients μ et ν sont assujettis à la condition

$$(16) \quad \mu^2 \cos^2 \frac{A}{2} + \nu^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1,$$

avec la ligne d'onde du milieu relativement à la section droite. (Les équations précédentes supposent que les axes de coordonnées sont rectangulaires : l'axe des x coïncide avec la bissectrice intérieure et l'axe des y avec la bissectrice extérieure de la section droite.)

Lorsque les coefficients μ , ν , ainsi que le point de contact (x', y') , sont déterminés, on obtient immédiatement l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point,

$$(17) \quad \mu^2 xx' + \nu^2 yy' = 1,$$

qui représente la trace de l'onde plane du rayon réfracté correspondant au minimum de déviation des rayons émergents.

Il en résulte que, pour obtenir l'angle de déviation D, il n'y a pas d'autre calcul à faire qu'à résoudre l'une ou l'autre des deux équations

$$\mu = \frac{\cos \frac{A+D}{2}}{\cos \frac{A}{2}}, \quad \nu = \frac{\sin \frac{A+D}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Pour obtenir les autres éléments n , r , r' , e , e' , il suffit d'employer les

formules (8) et (10) qui se prêtent immédiatement au calcul par logarithmes. On commence par calculer r et r' ; on a déjà

$$r + r' = A,$$

de plus

$$\frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2} = \alpha,$$

α étant l'angle que la normale à l'onde plane réfractée fait avec la bissectrice intérieure du prisme [équation (13)] considérée comme axe des x . Identifiant l'équation (17) de la tangente à l'ellipse avec la forme

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha},$$

on trouve

$$(18) \quad \frac{\cos \alpha}{p} = \mu^2 x', \quad \frac{\sin \alpha}{p} = \nu^2 y',$$

d'où

$$(19) \quad \cot \alpha = -\tan \frac{r - r'}{2} = \frac{\mu^2}{\nu^2} \frac{x'}{y'}.$$

On connaît ainsi $\frac{r + r'}{2}$ et $\frac{r - r'}{2}$.

Le calcul de $e + e'$, $e - e'$ s'en déduit aisément, car $e + e' = A + D$, et l'on a

$$\cos \frac{e + e'}{2} = \mu \cos \frac{A}{2}, \quad \sin \frac{e + e'}{2} = \nu \sin \frac{A}{2}.$$

La valeur $\frac{e + e'}{2}$ s'obtient en divisant membre à membre les équations (10), ce qui donne

$$(20) \quad \tan \frac{e - e'}{2} = \frac{\nu}{\mu} \tan \frac{r - r'}{2}.$$

Enfin l'indice de réfraction n de l'onde plane, c'est-à-dire l'inverse de la vitesse normale (rapportée à la vitesse dans l'air ou mieux dans le vide), est fourni par l'équation (8)

$$\frac{\sin(e + e')}{\sin(r + r')} \frac{\sin(e - e')}{\sin(r - r')} = n^2.$$

21. En résumé, le calcul d'un minimum de déviation est réduit à une extrême simplicité dès qu'on a déterminé le point de contact de l'ellipse avec la ligne d'onde. La difficulté de ce problème préliminaire dépend de la nature de cette ligne. Dans le cas très-important en Optique où la ligne d'onde est elle-même une ellipse, le calcul est simple et élégant : on retrouve ainsi les formules que de Sénaumont a obtenues par une voie beaucoup plus complexe. Ce cas particulier renferme tous les milieux à un axe optique et aussi les milieux à deux axes avec la restriction que leurs plans de symétrie coïncident avec ceux du prisme. Nous allons l'étudier rapidement.

Cas où la ligne d'onde est elliptique.

22. L'équation de la tangente à l'ellipse $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ peut être prise sous la forme

$$(21) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\nu^2} \sin^2 \alpha} = p,$$

α désignant, comme précédemment, l'angle que fait la normale correspondant avec l'axe des x , dans le sens ordinaire, c'est-à-dire compté en tournant vers l'axe des y .

La ligne d'onde étant une ellipse d'axe $2a$, $2b$, telle que son axe $2a$ fasse l'angle σ avec l'axe des x compté dans le même sens, aura pour tangente parallèle à la précédente

$$(22) \quad x \cos(\alpha - \sigma) + y \sin(\alpha - \sigma) = \sqrt{a^2 \cos^2(\alpha - \sigma) + b^2 \sin^2(\alpha - \sigma)} = p'.$$

Il s'agit de déterminer les axes $\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\nu}$ de la première ellipse, déjà assujettis à la relation (16)

$$\mu^2 \cos^2 \frac{A}{2} + \nu^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1,$$

par la condition que dans une certaine direction α les deux courbes ont la même tangente et le même point de contact : l'identité de la tangente correspond à $p = p'$; l'identité du point de contact revient, en considérant chacune des courbes comme l'enveloppe de sa tangente,

à écrire que les deux tangentes, identiques pour la valeur α , le sont encore après un déplacement infiniment petit $\alpha + d\alpha$, d'où

$$p + \frac{dp}{d\alpha} d\alpha = p' + \frac{dp'}{d\alpha} d\alpha.$$

Les équations qui déterminent μ , ν , α sont donc, outre l'équation (16),

$$p = p', \quad \frac{dp}{d\alpha} = \frac{dp'}{d\alpha},$$

ou bien

$$(23) \quad p - p' = 0, \quad \frac{d}{d\alpha} (p - p') = 0.$$

Développant $p - p' = 0$, après avoir chassé les radicaux,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\nu^2} \sin^2 \alpha - a^2 (\cos \alpha \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma)^2 \\ + b^2 (\sin \alpha \cos \sigma - \sin \sigma \cos \alpha)^2 = 0, \end{aligned}$$

et ordonnant par rapport à α , il vient finalement

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot^2 \alpha \left(\frac{1}{\mu^2} - a^2 \cos^2 \sigma - b^2 \sin^2 \sigma \right) - 2 \cot \alpha (a^2 - b^2) \sin \sigma \cos \sigma \\ + \left(\frac{1}{\nu^2} - a^2 \sin^2 \sigma - b^2 \cos^2 \sigma \right) = 0, \end{array} \right.$$

équation de la forme

$$(25) \quad P u^2 + 2Qu + R = 0;$$

en posant $u = \cot \alpha$,

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = a^2 \cos^2 \sigma + b^2 \sin^2 \sigma - \frac{1}{\mu^2}, \\ Q = (a^2 - b^2) \sin \sigma \cos \sigma, \\ R = a^2 \sin^2 \sigma + b^2 \cos^2 \sigma - \frac{1}{\nu^2}. \end{array} \right.$$

La troisième équation est la dérivée de celle-ci par rapport à α ; il est évident qu'en prenant $u = \cot \alpha$ comme variable, on simplifie le calcul; on obtient alors

$$Pu + Q = 0,$$

d'où

$$(27) \quad u = -\frac{Q}{P}.$$

Telles sont avec (16) les équations qui déterminent μ , ν et α .

Éliminant α , c'est-à-dire u par substitution dans l'équation (25), il vient

$$(28) \quad Q^2 = PR,$$

$$(29) \quad (a^2 - b^2) \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma = \left(a^2 \cos^2 \sigma + b^2 \sin^2 \sigma - \frac{1}{\mu^2} \right) \left(a^2 \sin^2 \sigma + b^2 \cos^2 \sigma - \frac{1}{\nu^2} \right).$$

Cette équation, jointe à la relation (16),

$$\mu^2 \cos^2 \frac{A}{2} + \nu^2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1,$$

permet de calculer les axes $\left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu}\right)$ de l'ellipse tangente à la ligne d'onde.

La direction α de la normale à l'onde plane réfractée est donnée par l'équation (27) sous deux formes équivalentes d'après (28)

$$(30) \quad \begin{cases} \cot \alpha = -\frac{Q}{P} = -\frac{(a^2 - b^2) \sin \sigma \cos \sigma}{a^2 \cos^2 \sigma + b^2 \sin^2 \sigma - \frac{1}{\mu^2}} \\ = -\frac{R}{Q} = \frac{a^2 \sin^2 \sigma + b^2 \cos^2 \sigma - \frac{1}{\nu^2}}{(a^2 - b^2) \sin \sigma \cos \sigma}. \end{cases}$$

Quant aux coordonnées x' , y' du point de contact commun, on les obtient en les considérant comme celles du point de contact de la droite (21) et de son enveloppe, c'est-à-dire comme les solutions de x et y communes à cette équation et à la dérivée par rapport à α

$$(31) \quad -x \sin \alpha + y \cos \alpha = \left(-\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} \right) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{P};$$

ces valeurs sont

$$x' = \frac{\cos \alpha}{\mu^2 P}, \quad y' = \frac{\sin \alpha}{\nu^2 P},$$

d'où

$$(32) \quad \frac{x'}{y'} = \frac{\nu^2}{\mu^2} \cot \alpha.$$

Le rapport $\frac{x'}{y'}$, qui seul entre dans les calculs du n° 20 (équation 19), est ainsi déterminé : l'identité des formules (32) et (19) est une vérification dans le cas d'une ligne d'onde elliptique du théorème général qui sert de base à cette étude du minimum de déviation.

23. Solution du problème inverse. — Il reste peu de chose à ajouter pour montrer comment, de l'observation des angles d'incidence et d'émergence correspondant au minimum de déviation, on peut déduire la vitesse normale de l'onde réfractée et la direction du rayon lumineux efficace, réelle ou projetée sur le plan de la section droite du prisme. Les calculs se font en sens inverse et sont beaucoup plus simples. On observe directement A, e, e', on a donc immédiatement D = e + e', par suite μ et ν : on en déduit r et r' par la condition A = r + r' et l'équation (20)

$$\tang \frac{r - r'}{2} = \frac{\mu}{\nu} \tang \frac{e - e'}{2},$$

l'indice n , inverse de la vitesse normale, par l'équation (8)

$$\frac{\sin(e + e')}{\sin(r + r')} \frac{\sin(e - e')}{\sin(r - r')} = x^2.$$

La normale à l'onde réfractée fait avec la bissectrice intérieure du prisme un angle α (compté positivement dans le sens allant de la face d'incidence à la face d'émergence) qui est égal à $\frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2}$.

Le rayon lumineux projeté sur le plan de la section droite, qui passe par le point de contact x', y' de l'onde plane et de la ligne d'onde, est défini par l'équation (19)

$$(33) \quad \tang \frac{r - r'}{2} = - \frac{\mu^2}{\nu^2} \frac{x'}{y'}.$$

Posant $\tang \alpha' = \frac{y'}{x'}$, on aura, pour l'angle α' que fait le rayon lumi-

neux avec la bissectrice intérieure du prisme,

$$(34) \quad \tan \alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2} \tan \alpha.$$

Remarque. — Il n'y a dans la solution de ce problème *aucune restriction* sur la nature de la surface d'onde du milieu réfringent; on verra plus loin comment on achève la détermination complète du rayon réfracté par le calcul de la troisième coordonnée z' , du point de contact de l'onde plane avec la surface d'onde, en dehors de la section droite.

24. Dans les milieux monoréfringents, le minimum de déviation est caractérisé par l'égalité des angles d'incidence et d'émergence $e = e'$. Dans les milieux de constitution différente, cette condition n'est remplie qu'accidentellement; en effet, l'équation (20), mise sous la forme

$$\tan \frac{e - e'}{2} = - \frac{\mu}{\nu} \cot \alpha,$$

montre que $e - e'$ ne peut être nul que dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire comme on le verrait aisément quand l'onde plane réfractée correspondant au minimum de déviation est perpendiculaire à la bissectrice intérieure du prisme, ce qui exige que la section droite du prisme ait les mêmes axes de symétrie que la ligne d'onde.

L'expression $\frac{e - e'}{2}$ est elle-même susceptible d'une interprétation géométrique très-simple. Si l'on pose

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{e - e'}{2},$$

β est l'angle que fait la bissectrice des rayons incidents et réfringents; en effet, si l'on se reporte à la construction d'Huyghens, les traces HE, H'E' des ondes incidente et réfringente sont tangentes au cercle de rayon égal à l'unité et se coupent en K; la ligne OK est évidemment la bissectrice des rayons OE, OE'.

On a

$$\widehat{E'OE} = \frac{A}{2} + \frac{\pi}{2} - e', \quad \widehat{KOE'} = \frac{D}{2} = \frac{e + e'}{2} - \frac{A}{2},$$

d'où

$$\text{KO}x = \frac{\pi}{2} + \frac{e - e'}{2} = \beta.$$

Si l'on rapproche alors l'équation (20), mise sous la forme

$$\tan \beta = \frac{\mu}{\nu} \tan \alpha,$$

de l'équation (34)

$$\tan \alpha' = \frac{\mu^2}{\nu^2} \tan \alpha,$$

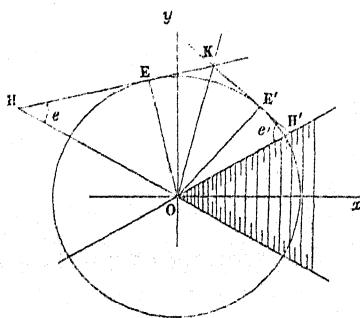
on en déduit, par élimination de μ et ν ,

$$\tan^2 \beta = \tan \alpha \tan \alpha',$$

relation très-simple qu'on peut énoncer ainsi :

Au minimum de déviation, la bissectrice de l'angle du rayon incident prolongé et du rayon émergent est toujours comprise, comme direction, entre la normale à l'onde réfractée et la projection du rayon lumineux sur la section droite du prisme; la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette bissectrice avec la bissectrice intérieure du prisme est la moyenne géométrique des tangentes des angles que font, avec la même droite, les deux autres directions.

Fig. 4.



25. *Remarque.* — Cette propriété permet de construire géométriquement l'ellipse $(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\nu})$ dont on connaît toujours quatre points et une tangente (onde plane réfractée); en effet, il est facile, connaissant deux quelconques de ces directions, de construire la troisième sans avoir be-

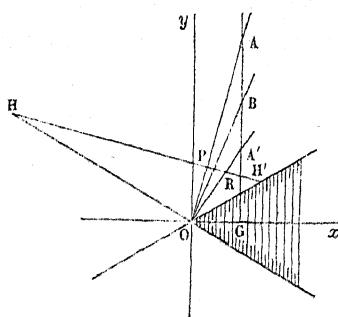
soin de tracer l'ellipse; il suffit de mener une parallèle quelconque GA à l'axe des y (fig. 5) et de considérer les trois segments GA , GB , GA' ; ils sont évidemment liés par la relation

$$\overline{GB}^2 = GA \cdot GA',$$

qui n'offre aucune difficulté de construction.

Il en résulte que, si l'on connaît l'onde plane réfractée HH' , on connaît la direction OA , c'est-à-dire OP , qui lui est perpendiculaire; on connaît également la direction OB qui passe par l'intersection des ondes incidente et émergente, d'où l'on conclut OA' , c'est-à-dire la projection du rayon lumineux OR sur la section droite.

Fig. 5.



Comme vérification, on peut, après avoir tracé l'ellipse et déterminé les axes $\frac{l}{\mu}$, $\frac{l}{v}$, se reporter à la construction bien connue de l'ellipse comme projection d'un cercle; on verra sans difficulté que la direction β est le rayon vecteur du point du cercle décrit sur l'un des axes comme diamètre, qui a pour projection le point où l'ellipse touche la tangente définie par l'angle α ; l'angle α' correspond au point de contact.

Ces remarques suffisent pour résoudre graphiquement les problèmes traités ci-dessus : ces tracés graphiques ne sont point à dédaigner, ils peuvent servir à contrôler ou au moins à préparer les calculs.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉFRACCIÓN DES RAYONS OBLIQUES SUR LA SECTION DROITE DU PRISME.

Théorèmes préliminaires.

26. Pour définir la position des ondes de direction quelconque, il suffit de se donner leurs traces sur la section droite et leur angle avec la normale à ce plan, qui n'est autre que l'arête du prisme.

Les traces de ces ondes jouissent de deux propriétés géométriques connues :

1° *L'onde émergente fait, avec l'arête du prisme, le même angle que l'onde incidente;*

2° *La loi des sinus s'applique aux traces des ondes sur la section droite, à la condition de prendre pour indice de réfraction (inverse de la vitesse normale) non pas la valeur véritable n , mais la valeur m définie par l'équation*

$$m = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1) \tan^2 \theta},$$

θ étant l'angle que fait l'onde incidente et l'onde émergente avec l'arête du prisme, compté positivement lorsque le rayon incident est au-dessus du plan de la section droite avant l'incidence.

27. La démonstration de la première proposition est en quelque sorte intuitive, si l'on a soin de simplifier la construction d'Huygens, comme précédemment, en considérant les rayons réfractés par l'arête même du prisme. Construisons, en un point de cette arête, comme centre, la sphère de rayon 1 (vitesse dans le milieu extérieur), l'onde incidente y sera tangente, et comme elle est supposée n'être pas parallèle à l'arête, mais faire avec elle un angle θ , elle coupera cette droite à une distance égale à $\frac{1}{\sin \theta}$. L'onde réfractée sera donnée par le plan passant par la trace de l'onde incidente sur la face d'entrée, et tangent à la surface d'onde concentrique à la sphère; l'onde émergente s'ob-

tiendra en prolongeant le plan d'onde réfractée jusqu'à la face de sortie, et en menant par cette trace un plan tangent à la sphère de rayon r . Ces trois ondes planes se coupent évidemment au même point de l'arête du prisme et, comme l'onde émergente et l'onde incidente sont tangentes à la même sphère, elles sont également inclinées sur l'arête du prisme, qui joint au centre un point commun à ces deux plans. La première propriété est donc démontrée.

Remarque I. — Si le rayon incident est au-dessus du plan de la section droite avant l'incidence, le rayon émergent sera au-dessous; dans ce qui suit, on considérera toujours l'un de ces deux rayons comme prolongé, soit du côté de l'incidence, soit du côté de l'émergence, de sorte qu'ils paraîtront toujours faire le même angle du même côté de la section droite.

Remarque II. — On verra aisément que la bissectrice de ces rayons dans leur position effective est toujours dans ce plan et coïncide avec celle de leurs projections.

28. La deuxième proposition se démontre en calculant le rapport des vitesses normales des traces des trois ondes, qui n'est autre que l'inverse du rapport des perpendiculaires abaissées du point origine sur ces droites.

Soit n l'indice de réfraction vrai de l'onde plane réfractée KHH' (fig. 6), mesuré par l'inverse de la distance OQ de ce plan au centre O de la surface d'onde, et prenons pour section droite le plan OHH' normal à l'arête Oz passant par ce point; d'après le théorème des trois perpendiculaires, il faudra, pour obtenir la distance OP du centre à la trace HH' d'un plan d'onde, abaisser une perpendiculaire OQ sur le plan, puis du pied Q de cette perpendiculaire en abaisser une autre QP sur la trace HH' ; joignant P au centre O , la longueur $OP = V'$ sera la distance cherchée.

Dans le triangle rectangle PQO des trois perpendiculaires, l'angle O est évidemment égal à l'angle QKO que fait le plan d'onde avec l'arête qu'on désignera par θ' . Soit

$$OQ = p = \frac{I}{n},$$

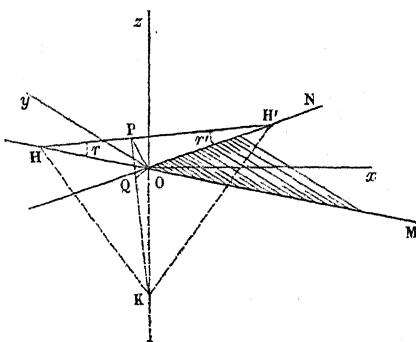
on aura

$$V' \cos \theta' = p.$$

Pour les ondes incidente et émergente, on aura de même

$$V \cos \theta = i;$$

Fig. 6.



mais la condition que ces trois ondes se coupent à un même point de l'arête donne

$$z = \frac{i}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin \theta'},$$

d'où

$$\sin \theta' = \frac{i}{n} \sin \theta;$$

donc

$$m = \frac{V}{V'} = \frac{\cos \theta'}{p \cos \theta} = n \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} = \frac{n}{\cos \theta} \sqrt{1 - \frac{i}{n^2} \sin^2 \theta},$$

et finalement

$$(35) \quad m = \sqrt{n^2 + (n^2 - i) \tan^2 \theta}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Calcul de la déformation des images vues à travers un prisme.

29. Imaginons une ligne lumineuse de forme quelconque (rectiligne, circulaire, elliptique) située à l'infini, mais sous-tendant un angle

très-petit, vue d'un point de l'arête du prisme (¹). On se propose de calculer l'image de cette ligne lumineuse, après la réfraction des rayons émanés d'elle, à travers un point de l'arête du prisme, c'est-à-dire le cône des rayons réfractés (²).

Ce cône des rayons réfractés, aussi bien que celui des rayons incidents, étant supposé d'ouverture très-petite, peut se rapporter à une ligne moyenne ayant pour sommet le point de l'arête où se fait la réfraction.

Soit e l'angle d'incidence de la projection de ce rayon moyen sur la section droite, et θ son inclinaison sur le plan (données évidemment corrélatives de celles des ondes correspondantes); après réfraction, ce rayon fera le même angle θ avec la section droite, et sa projection aura pour angle d'émergence e' défini par les équations

$$\begin{aligned}\sin e &= m \sin r, \\ \sin e' &= m \sin r', \\ r + r' &= A,\end{aligned}$$

dans lesquelles r , r' représentent les angles que fait la trace de l'onde réfractée moyenne avec les faces du prisme.

La direction de chaque génératrice du cône sera définie par l'incidence $e + \Delta e$ de la projection, et par son angle avec la section droite $\theta + \Delta \theta$. On sait qu'après réfraction ce dernier angle conserve la même valeur; il suffit donc de calculer l'angle d'émergence $e' + \Delta e'$ de la projection.

30. Cette relation entre Δe , $\Delta e'$ et $\Delta \theta$ s'obtiendra évidemment en différentiant les formules précédentes, après avoir éliminé r et r' .

(¹) On réalise très-aisément dans la pratique ces conditions, en plaçant au foyer principal d'un objectif un diaphragme percé d'une ouverture rectiligne ou curviligne, ou mieux, une lame de verre recouverte d'une couche mince d'argent, sur laquelle on trace à la pointe les lignes dont il est question; on éclaire en arrière à l'aide d'une large source de lumière. Ce système, composé d'une ligne lumineuse au foyer d'un objectif, se nomme *collimateur*.

(²) Si l'on reçoit un pareil cône de rayons sur un objectif, on obtient au foyer principal l'image réelle de la ligne lumineuse réfractée. L'instrument désigné sous le nom de *lanette astronomique* est le dispositif pratique destiné à de semblables observations; il est formé d'un objectif et d'un oculaire, c'est-à-dire d'une loupe composée destinée à grossir l'image focale en question.

Cette élimination s'obtient en substituant leurs valeurs dans l'équation évidente

$$\cos A = \cos(r + r').$$

Après avoir chassé les radicaux introduits par la substitution, il vient

$$(36) \quad m^2 \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A;$$

substituant la valeur de m ,

$$(37) \quad [n^2 + (n^2 - 1) \tan^2 \theta] \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A.$$

Telle est l'équation qu'il faudrait différentier en considérant non-seulement e , e' , θ , mais aussi n comme variable, car la vitesse $\frac{1}{n}$ de l'onde plane réfractée varie avec sa direction.

La variation de n paraît, au premier abord, nécessiter la connaissance de la surface de l'onde; mais, si l'on se borne à des variations infiniment petites de tous les éléments, il suffit de connaître le point de contact de l'onde moyenne avec cette surface : on sait en effet, d'après les principes de la Géométrie infinitésimale, que toute variation infiniment petite d'un plan équivaut à un pivotement autour du point de contact avec son enveloppe.

Donc, pour exprimer dn , il suffit de déterminer l'équation du plan de l'onde réfractée, de calculer la distance à l'origine, et de différentier cette valeur.

31. Les axes des x et des y seront, comme précédemment, les bissectrices intérieure et extérieure de la section droite; l'axe des z sera l'arête du prisme.

On connaît trois points de ce plan :

1° Le point de l'arête où se coupent les trois plans d'onde (le point K, fig. 5); ses coordonnées sont évidemment

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{\sin \theta},$$

si l'on veut compter θ positif, de manière que le rayon incident soit au-dessus de la section droite avant l'incidence;

2° Le point d'intersection de la trace de l'onde incidente avec la trace

de la face d'entrée (construction d'Huygens); ce point (point H, *fig. 5*), distant de l'origine de $\frac{1}{\cos \theta \sin e}$, a pour coordonnées

$$(38) \quad x' = -\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \theta \sin e}, \quad y' = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \theta \sin e}, \quad z' = 0;$$

3° Le point analogue pour l'onde émergente (point H', *fig. 5*)

$$(39) \quad x'' = +\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \theta \sin e'}, \quad y'' = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \theta \sin e'}, \quad z'' = 0.$$

L'équation du plan défini par ces trois points est, tout calcul fait,

$$(40) \quad \sin \frac{A}{2} (\sin e - \sin e') x - \cos \frac{A}{2} (\sin e + \sin e') y + \tan \theta \sin A \cdot z + \frac{\sin A}{\cos \theta} = 0.$$

Il faut exprimer que ce plan est assujetti, dans ses déplacements infiniment petits, à pivoter autour de son point de contact avec la surface de l'onde dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 .

Analytiquement, il suffit de différentier l'équation précédente en considérant $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ comme des constantes

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} de \left(x_0 \sin \frac{A}{2} - y_0 \cos \frac{A}{2} \right) \cos e - de' \left(x_0 \sin \frac{A}{2} + y_0 \cos \frac{A}{2} \right) \cos e' \\ \qquad \qquad \qquad + d\theta (z_0 - \sin \theta) \frac{\sin A}{\cos^2 \theta} = 0. \end{array} \right.$$

Il est évident maintenant qu'on n'a pas besoin de faire d'autre calcul, et que c'est là l'équation cherchée, puisqu'elle définit une relation entre $d\theta, de$ et de' (¹).

(¹) On peut vérifier que l'équation de l'onde réfractée a bien pour distance p à l'origine la valeur $\frac{1}{n}$: on a, en effet, d'après une formule bien connue,

$$p^2 = \frac{\frac{\sin^2 A}{\cos^2 \theta}}{\sin^2 \frac{A}{2} (\sin e - \sin e')^2 + \cos^2 \frac{A}{2} (\sin e + \sin e')^2 + \sin^2 A \tan^2 \theta}.$$

Réduisant, il vient

$$\left[\frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) \tan^2 \theta \right] \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A,$$

Image d'une droite lumineuse très-petite.

32. Le cas le plus intéressant est celui où le milieu E de la droite E_1E_2 (supposée à l'infini) (*fig. 6*) est dans le plan de la section droite (ou des xy); l'inclinaison du plan OEE₁, qui la contient et qui passe par le point d'incidence O faisant avec l'arête du prisme un angle φ , compté dans un sens convenable (¹), comme l'indique la figure. Il est aisé de

expression qui coïncide avec le résultat de l'élimination de r et r' (37), si l'on suppose $\frac{1}{P} = n$.

Cette vérification est en même temps une démonstration analytique du deuxième théorème sur les rayons obliques à la section droite.

Il reste encore à montrer que, malgré la différence de méthode, on retombe, en faisant $z = 0$ et $\theta = 0$, sur les équations étudiées dans la première Partie de ce Mémoire : par exemple, la valeur de n devient

$$n^2 \sin^2 A = \sin^2 e + \sin^2 e' + 2 \sin e \sin e' \cos A,$$

laquelle provenait de la réduction de l'équation

$$n^2 \sin^2 A = \sin^2 \frac{A}{2} (\sin e - \sin e')^2 + \cos^2 \frac{A}{2} (\sin e + \sin e');$$

changeant les sommes de sinus en produits,

$$n^2 \sin^2 A = 4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{e + e'}{2} \sin^2 \frac{e - e'}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \cos \frac{e - e'}{2} \sin^2 \frac{e + e'}{2}.$$

Rappelant que $e + e' = A + D$, on retrouve la valeur

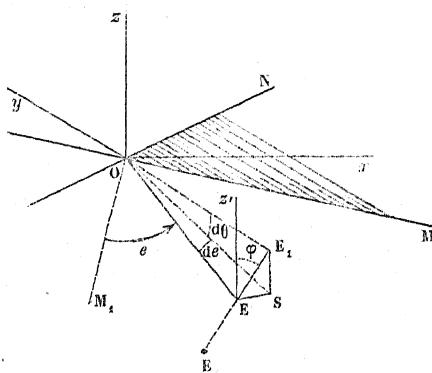
$$n^2 = \mu^2 \sin^2 \frac{e - e'}{2} + \nu^2 \cos^2 \frac{e - e'}{2}.$$

(¹) Ce qu'il y a de plus commode, c'est de considérer un observateur dont l'œil serait placé au niveau de la section droite, en arrière de la lumière, et regardant dans le sens de la propagation du rayon incident. On comptera φ de manière qu'au-dessus du plan de la section droite (z positifs) cet angle croisse dans le sens positif (sens du mouvement des aiguilles d'une montre). Quant au rayon émergent, on garde la même convention : l'observateur regarde toujours dans le sens de la propagation de la lumière et définit ainsi le sens positif de θ' .

Si l'on trouvait plus commode de supposer que l'observateur reçoive les rayons, c'est-à-dire regarde en sens inverse de la propagation, il suffirait de changer le signe de θ . Mais ce qu'il est important de conserver pour éviter les erreurs, c'est la convention du sens de la propagation de la lumière pour les deux rayons.

voir que $\tan \varphi = \frac{de}{d\theta}$; en effet, si l'on élève dans le plan de la section droite la perpendiculaire OM_1 à la face d'entrée $z_0 OM$, l'angle $EOM_1 = e$ (le signe + correspond au sens de la flèche, c'est-à-dire de la normale OM_1 à la face OM), la projection S de l'extrémité E_1 de la ligne lumineuse définit l'angle $SOE = de$: quant à $d\theta$, il est égal à $E_1 OS$.

Fig. 7.



L'image émergente sera définie de la même manière; il y aura une série de rayons réfractés qui, supposés prolongés en arrière, feront, avec la section droite et du même côté que les rayons correspondants, des angles égaux; on aura de même pour l'inclinaison φ'

$$\tan \varphi' = - \frac{de'}{d\theta}.$$

(Le signe — provient de ce que, pour le rayon émergent prolongé, la variation de e' est inverse de celle de e , tandis que celle de θ reste de même signe.)

Substituant les valeurs de ces dérivées dans l'équation différenciée (41), après y avoir fait $\theta = 0$,

$$(42) \quad \begin{cases} \cos e \left(x_0 \sin \frac{A}{2} - y_0 \cos \frac{A}{2} \right) \tan \varphi \\ + \cos e' \left(x_0 \sin \frac{A}{2} + y_0 \cos \frac{A}{2} \right) \tan \varphi' + z_0 \sin A = 0. \end{cases}$$

33. Cette formule (¹) permet de prévoir que l'image vue à travers un prisme de la ligne lumineuse d'un collimateur, réglée parallèlement à l'arête, apparaît inclinée lorsque l'onde réfractée intérieure touche sa surface d'onde en dehors du plan d'incidence.

En effet, si l'on suppose $\varphi = 0$, la valeur correspondante φ'_0 sera

$$(43) \quad \tan \varphi'_0 = - \frac{z_0}{x_0 \sin \frac{\Lambda}{2} + y_0 \cos \frac{\Lambda}{2}} \frac{\sin \Lambda}{\cos e'}$$

Pour que l'image réfractée paraisse verticale, il faut lui donner l'inclinaison φ_0

$$(44) \quad \tan \varphi_0 = - \frac{z_0}{x_0 \sin \frac{\Lambda}{2} - y_0 \cos \frac{\Lambda}{2}} \frac{\sin \Lambda}{\cos e'}$$

Comme on le voit, les valeurs $\tan \varphi_0$ et $\tan \varphi'_0$ sont proportionnelles à z_0 , c'est-à-dire à la distance du point de contact de la surface d'onde avec le plan de la section droite qui est ici le plan d'incidence. Ces angles φ_0 , φ'_0 sont donc les caractéristiques de la déviation du rayon par rapport à la section droite.

34. Ce phénomène optique est très-important, car il permet de déduire de l'observation de φ_0 et de φ'_0 deux nouvelles équations entre les trois coordonnées x_0 , y_0 , z_0 du point de contact de l'onde réfractée avec la surface d'onde.

Pour déterminer les valeurs de φ_0 et φ'_0 , on se servira soit de l'observation directe (ce qui est très-facile pour φ'_0), soit de l'observation de certaines valeurs particulières, substituées dans l'équation (42), mise sous la forme

$$(45) \quad \tan \varphi \cot \varphi_0 + \tan \varphi' \cot \varphi'_0 = 1.$$

En particulier, les valeurs de $\varphi = \pm 45^\circ = \pm \frac{\pi}{4}$ sont très-commodes (²);

(¹) Voir à la fin de la seconde Partie (Note du n° 32) une démonstration entièrement géométrique de cette formule.

(²) En pratique, on détermine aisément les trois valeurs φ'_0 , φ_{-1} , φ_{+1} , en substituant à la fente du collimateur une lame de verre argentée, sur laquelle on a tracé à l'aide d'une ma-

désignant par φ'_1 , φ'_{-1} les valeurs correspondantes de φ' , on a

$$(46) \quad \cot\varphi_0 + \tan\varphi'_1 \cot\varphi'_0 = 1, \quad -\cot\varphi_0 + \tan\varphi'_{-1} \cot\varphi'_0 = 1,$$

d'où

$$(47) \quad \tan\varphi_0 = -\frac{\tan\varphi'_1 + \tan\varphi'_{-1}}{\tan\varphi'_1 - \tan\varphi'_{-1}}, \quad \tan\varphi'_0 = \frac{\tan\varphi'_1 - \tan\varphi'_{-1}}{2}.$$

On pourrait aussi choisir pour φ des couples de valeurs rectangulaires, ou d'autres couples satisfaisant à d'autres relations; mais il est inutile d'insister sur ces déterminations qui n'offrent aucune difficulté (').

Détermination complète d'un rayon réfracté.

35. La considération de l'image d'une ligne droite lumineuse très-petite, située à l'infini, et dont le point milieu est dans le plan de la

chine à diviser un quadrillage carré de 2 millimètres environ de côté : les côtés du carré permettent de mesurer φ'_0 , les diagonales fictives φ'_{-1} et φ'_{+1} . On a ainsi une donnée de trop qui peut servir de vérification.

(') L'équation (45), jointe à la condition déduite de la première proposition relative aux rayons obliques sur le plan de la section droite, réduit à une transformation de coordonnées des plus simples le calcul de l'image d'une ligne lumineuse. (On a surtout en vue le cas expérimental de la ligne lumineuse placée au plan focal d'un collimateur et observée à travers un prisme au plan focal d'une lunette.) En prenant dans ces deux plans des axes de coordonnées rectangulaires, la trace de la section droite comme abscisse et une parallèle à l'arête du prisme comme ordonnée, les points de la ligne (x, z) et de son image (x', z') se correspondent deux à deux. On a d'abord $z = z'$. De plus, les directions φ , φ' , telles que

$\tan\varphi = \frac{x}{z}$, $\tan\varphi' = \frac{x'}{z'}$, étant liées par la relation (45), on en déduit

$$x \cot\varphi_0 + x' \cot\varphi'_0 = z$$

comme seconde équation de transformation; d'où

$$x = (z' - x' \cot\varphi'_0) \tan\varphi_0.$$

EXEMPLE. — Quelle est l'image d'un cercle $x^2 + y^2 = R^2$?

Substituant les formules de changement de variable,

$$(z' - x' \cot\varphi'_0)^2 + z'^2 \cot^2\varphi_0 = R^2 \cot^2\varphi'_0,$$

$$z'^2 (1 + \cot^2\varphi_0) + x'^2 \cot^2\varphi'_0 - 2x'z' \cot\varphi'_0 = R^2 \cot^2\varphi'_0,$$

équation d'une ellipse.

section droite, permet de résoudre le problème de la détermination complète du rayon qui correspond à l'onde réfractée intérieurement au prisme et parallèle à l'arête.

En effet, il suffit de connaître :

1° La trace de ce plan d'onde sur la section droite du prisme, laquelle est définie par l'indice de réfraction de l'onde qu'on déduit de l'incidence et de l'émergence;

2° Les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact de cette onde avec son enveloppe ou surface d'onde.

L'équation (40) représente le plan de l'onde réfractée; en y faisant $\theta = 0$, elle devient

$$(48) \quad \sin \frac{A}{2} (\sin e - \sin e') x - \cos \frac{A}{2} (\sin e + \sin e') y + \sin A = 0,$$

ou, par une transformation facile,

$$(49) \quad \sin \frac{e - e'}{2} \frac{\cos \frac{e + e'}{2}}{\cos \frac{A}{2}} x - \cos \frac{e - e'}{2} \frac{\sin \frac{e + e'}{2}}{\sin \frac{A}{2}} y + 1 = 0;$$

substituant les valeurs de μ et ν ,

$$(50) \quad -x\mu \sin \frac{e - e'}{2} + y\nu \cos \frac{e - e'}{2} = 1.$$

La direction que la normale à l'onde fait avec l'axe des x est

$$\tan \alpha = -\frac{\nu}{\mu} \cot \frac{e - e'}{2}.$$

L'indice de réfraction se déduirait de la distance de ce plan à l'origine; la formule à laquelle on arriverait ne serait pas calculable par logarithmes : si l'on cherchait à la rendre calculable, les variables auxiliaires les plus simples seraient r et r' , et l'on retomberait sur les équations du n° 13

$$(51) \quad n_2 = \frac{\sin(e + e') \sin(e - e')}{\sin(r + r') \sin(r - r')} = \mu \nu \frac{\sin(e - e')}{\sin(r - r')},$$

avec

$$\tan \frac{r - r'}{2} = \frac{\mu}{\nu} \tan \frac{e - e'}{2},$$

car

$$\frac{\pi}{2} + \frac{r - r'}{2} = \alpha.$$

Les coordonnées x_0, y_0 du point de contact doivent satisfaire à l'équation (50); en y adjoignant les équations (43) et (44), on a le système

$$(52) \quad \begin{cases} x_0 \mu \sin \frac{e - e'}{2} - y_0 \nu \cos \frac{e - e'}{2} = -1, \\ x_0 \sin \frac{A}{2} + y_0 \cos \frac{A}{2} = -z_0 \frac{\sin A}{\cos e'} \cot \varphi'_0, \\ x_0 \sin \frac{A}{2} - y_0 \cos \frac{A}{2} = -z_0 \frac{\sin A}{\cos e} \cot \varphi_0. \end{cases}$$

Les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact sont donc déterminées par trois équations linéaires à coefficients très-simples.

On pourra donc, étant donné un prisme, déterminer autant de points qu'on le voudra du cylindre circonscrit à la surface d'onde dont les génératrices sont parallèles à l'arête du prisme. Pour chaque incidence, on calculera les coordonnées x_0, y_0 d'un point de la ligne d'onde, base du cylindre et la tangente en ce point, et la hauteur z_0 du point de contact de la génératrice, $x = x_0, y = y_0$, avec la surface d'onde. En résumé, on définit par points la courbe de contact de ces deux surfaces.

36. Il est facile de montrer maintenant que le problème suivant est complètement résolu.

Étant donné un milieu transparent quelconque, on demande de déterminer les éléments géométriques du rayon lumineux correspondant à une onde plane se propageant dans ce milieu parallèlement à un plan donné; ce plan étant rapporté aux directions caractéristiques de la constitution du milieu.

Il suffira de tailler dans cette substance un prisme dont l'arête soit parallèle au plan de l'onde demandée, et d'observer la réfraction d'une série de rayons parallèles à la section droite du prisme, en utilisant, comme on l'a vu plus haut, les rayons légèrement inclinés sur cette

section; dans les circonstances ordinaires que présentent les milieux cristallisés naturels ou artificiels, on est assuré de rencontrer l'onde plane demandée parmi les ondes réfractées parallèles à l'arête, en prenant le plan de cette onde comme plan bissecteur intérieur des faces du prisme. A part le parallélisme de l'arête et de l'onde donnée qui doit être rigoureux, toutes les conditions de construction du prisme comportent beaucoup d'arbitraire; il n'est pas besoin d'insister sur la nécessité d'un examen préliminaire de la substance pour choisir les conditions les plus avantageuses à la précision des mesures.

Simplification dans le cas du minimum de déviation.

37. Il est évident que, si le rayon moyen du faisceau considéré supposé parallèle à la section droite est au minimum de déviation, les rayons infiniment voisins y seront aussi. Cette considération suppose $dD = 0$, $de + de' = 0$.

L'équation (50), dans laquelle on substitue $x = x_0$, $y = y_0$,

$$-x_0\mu \sin \frac{e - e'}{2} + y_0\nu \cos \frac{e - e'}{2} = 1,$$

donne, par différentiation (x_0 , y_0 , μ , ν étant constants),

$$\left(x_0\mu \cos \frac{e - e'}{2} + y_0\nu \sin \frac{e - e'}{2} \right) (de - de') = 0,$$

d'où l'on tire

$$(53) \quad \frac{y_0}{x_0} = -\frac{\mu}{\nu} \cot \frac{e - e'}{2}.$$

Les coordonnées x_0 , y_0 du point de contact de la trace de l'onde plane avec la ligne d'onde s'expriment alors très-simplement

$$(54) \quad x_0 = -\frac{1}{\mu} \sin \frac{e - e'}{2}, \quad y_0 = +\frac{1}{\nu} \cos \frac{e - e'}{2}.$$

La relation (42) en φ et φ' devient, par la substitution de x_0 , y_0 ,

$$(55) \quad \tan \varphi - \tan \varphi' - z_0 \frac{\sin(e + e')}{\cos e \cos e'} = 0,$$

expression extrêmement simple, qui permet de calculer directement, lors du minimum de déviation, la coordonnée z_0 , c'est-à-dire la distance du point de contact de l'onde plane réfractée avec la section droite prise comme plan d'incidence.

Dans le cas où la ligne lumineuse est parallèle à l'arête $\varphi = 0$,

$$\tan \varphi_0' = - z_0 \frac{\sin(e + e')}{\cos e \cos e'};$$

la valeur φ est évidemment égale et de signe contraire.

Rapprochant cette équation des deux valeurs (54) de x_0 et y_0 , on voit combien la condition de minimum de déviation simplifie le calcul de la détermination complète d'un rayon réfracté.

Toutefois il est juste d'ajouter qu'au point de vue expérimental le minimum de déviation a l'inconvénient de définir avec moins de précision l'incidence; mais cet inconvénient, qui nécessite des mesures répétées et soignées, est loin de compenser les avantages de la simplicité du calcul.

APPENDICE.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME RELATIF A L'ELLIPSE SUBSTITUÉE A LA LIGNE D'ONDE;
ELLIPSOÏDE SUBSTITUÉ A LA SURFACE D'ONDE.

37. On a vu, dans le cas de la réfraction des ondes planes parallèles à l'arête du prisme, que la trace de l'onde réfractée est tangente à une certaine ellipse dont les axes ne dépendent que de la déviation et de l'angle du prisme. Dans le cas général de l'onde plane réfractée quelconque, une généralisation se présente immédiatement à l'esprit; son énoncé, qu'on prévoit sans peine, est le suivant :

Toute onde plane réfractée par un prisme donné A est tangente à un ellipsoïde à trois axes ayant pour sections circulaires les intersections de la sphère de rayon = 1 décrit d'un point de l'arête du prisme comme centre

avec les faces. Les axes extrêmes sont

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A+D}{2}}, \quad \frac{\nu}{\nu} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A+D}{2}},$$

et ne dépendent que de la déviation de la projection des rayons incident et émergent (¹), et de l'angle du prisme.

La démonstration est la suivante :

L'équation du plan de l'onde réfractée est de la forme

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p = \frac{1}{n};$$

elle doit coïncider avec l'équation (40)

$$x \sin \frac{A}{2} \sin e - \sin e' - y \cos \frac{A}{2} (\sin e + \sin e') + z \tan \theta \sin A = - \frac{\sin A}{\cos \theta},$$

d'où l'on conclut, par identification,

$$n \cos \alpha = - \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin A} (\sin e - \sin e') \cos \theta = - \mu \sin \frac{e - e'}{2} \cos \theta,$$

$$n \cos \beta = - \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin A} (\sin e + \sin e') \cos \theta = + \nu \cos \frac{e - e'}{2} \cos \theta,$$

$$n \cos \gamma = \sin \theta;$$

éliminant $e - e'$ et θ par addition, après avoir élevé au carré,

$$\frac{n^2}{\mu^2} \cos^2 \alpha + \frac{n^2 \cos^2 \beta}{\nu^2} + n^2 \cos^2 \gamma = 1$$

ou

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\mu^2} + \frac{\cos^2 \beta}{\nu^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{1},$$

(¹) Il est bon de ne pas oublier que les rayons incident et émergent *réels* font des angles égaux de part et d'autre du plan de la section droite, et que leur bissectrice coïncide avec la bissectrice de leur projection sur ce plan.

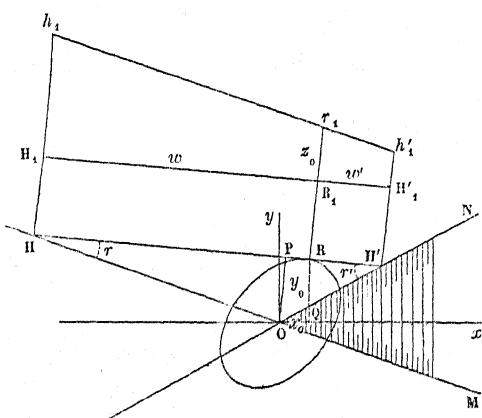
d'où il résulte que le plan donné est tangent à l'ellipsoïde ayant pour axes $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$ et 1.

NOTE DU N° 32.

On peut donner une démonstration géométrique assez simple de la relation entre les angles φ et φ' en procédant de la manière suivante :

Soit HH' (fig. 8) la trace du plan de l'onde réfractée parallèle à l'arête du prisme; rabattons ce plan d'onde sur le plan de la section droite en le faisant

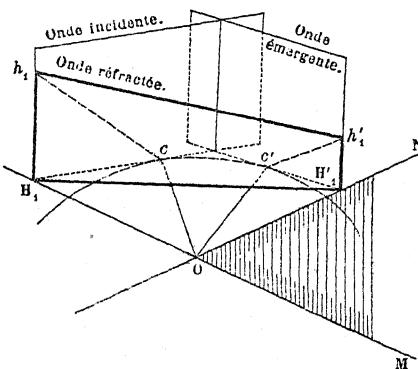
Fig. 8.



tourner autour de HH' : les droites communes aux faces du prisme et aux ondes incidentes et immégentes seront représentées par des perpendiculaires h_iH_i , $h'_iH'_i$; le point de contact de l'onde réfractée avec sa surface d'onde sera en r_i , distant de la projection R_i de la longueur z_0 . Tout déplacement infiniment petit du plan d'onde réfractée correspondant à un pivotement autour du point de contact r_i équivaudra à une rotation autour d'une droite quelconque h_i, r_i, h'_i : d'où il suit que les déplacements correspondants des ondes incidente et immégentes équivaudront eux-mêmes à une rotation infiniment petite autour d'une droite facile à définir: ce seront (fig. 8) les droites CH_i , $C'H'_i$, joignant respectivement les points de contact CC' de ces ondes planes avec la sphère du rayon i et le point h_i ou h'_i ; car, comme on l'a vu plus haut,

tout déplacement infiniment petit d'un plan tangent à la sphère équivaut à un pivotement autour du point de contact C'.

Fig. 9.



L'expression des angles φ et φ' se détermine aisément en fonction des données de la figure.

En effet, les ondes étant parallèles à l'arête, le plan $CH_1OH'_1C'$ est évidemment une section droite du prisme (O étant le centre de la sphère $R = 1$).

Les droites GC , OC' font les rayons incident et émergent. Les plans infiniment peu inclinés sur les ondes correspondantes et tournant autour des droites Ch_1 , $C'h_1$ sont les ondes de rayons infiniment peu inclinés sur les rayons OC , OC' , et situés respectivement dans un même plan dont les droites Ch_1 , $C'h_1$, sont les normales. Ce sont donc les plans qui contiennent les rayons incidents venant de ces droites infiniment petites situées à l'infini; il est évident alors que les angles φ et φ' , définis plus haut comme l'inclinaison de ces plans avec l'arête du prisme, sont égaux en valeur absolue à h_1CH_1 et $h'_1C'H'_1$; mais si l'on rappelle les conventions relatives au signe de θ , on doit mettre le signe à $h'_1C'H_1$ et écrire

$$\begin{aligned} H_1 h_1 &= CH_1 \tan \varphi = \text{cote} \tan \varphi, \\ H'_1 h'_1 &= -C'H'_1 \tan \varphi' = -\text{cote}' \tan \varphi'. \end{aligned}$$

Revenons à la fig. 8 et exprimons géométriquement que les trois points h_1 , r_1 , h'_1 sont en ligne droite : on obtient aisément deux triangles semblables qui donnent, en posant $H_1R_1 = \omega$, $H'_1R_1 = \omega'$, $R_1r_1 = z_0$,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{z_0 - H'_1h'_1}{H_1h_1 - z_0} = \frac{z_0 + \text{cote}' \tan \varphi'}{\text{cote} \tan \varphi - z_0}.$$

Il reste à exprimer ω et ω' en fonction des angles r , r' et des coordonnées $x_0 = OQ$, $y_0 = QR$ du point R rapporté aux axes Ox , Oy .

Projetant le contour OQRHO sur une perpendiculaire à OH, il vient en comp-
tant ω en valeur absolue, sans avoir égard aux signes

$$\omega \sin r = y_0 \cos \frac{A}{2} + x_0 \sin \frac{A}{2};$$

de même le contour OQRH'O projeté sur une perpendiculaire à OH' donne

$$\omega' \sin r' = y_0 \cos \frac{A}{2} - x_0 \sin \frac{A}{2},$$

d'où l'on tire le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Après substitution de $\frac{\sin e}{\sin e'} = \frac{\sin r}{\sin r'}$,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{z_0 + \text{cote}' \tan \varphi'}{\text{cote} \tan \varphi - z_0} \frac{\sin e}{\sin e'} \frac{y_0 \cos \frac{A}{2} - x_0 \sin \frac{A}{2}}{y_0 \cos \frac{A}{2} + x_0 \sin \frac{A}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} z_0 & \left[\sin e' \left(y_0 \cos \frac{A}{2} + x_0 \sin \frac{A}{2} \right) + \sin e \left(y_0 \cos \frac{A}{2} - x_0 \sin \frac{A}{2} \right) \right] \\ & - \tan \varphi \cos e \left(y_0 \cos \frac{A}{2} - x_0 \sin \frac{A}{2} \right) + \tan \varphi' \cos e' \left(y_0 \cos \frac{A}{2} + x_0 \sin \frac{A}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de z_0 est évidemment égal à

$$\omega' \sin r' \sin e + \omega \sin r \sin e' = \frac{\sin e \sin e'}{n} (\omega + \omega');$$

mais, dans le triangle HH'O, la relation entre les côtés $\omega + \omega'$, $\frac{I}{\sin e}$, $\frac{I}{\sin e'}$
et le sinus des angles opposés $\pi - A$, r , r' donne

$$\frac{\omega + \omega'}{\sin A} = \frac{I}{\sin e \sin r} = \frac{I}{\sin e' \sin r'}, \quad \omega + \omega' = \frac{\sin A}{\sin e \sin r'} = \frac{n \sin A}{\sin e \sin e'}.$$

Le coefficient de z_0 se réduit donc à $\sin A$.

Après substitution, il vient

$$\begin{aligned} & \tan \varphi \cos e \left(y_0 \cos \frac{A}{2} - x_0 \sin \frac{A}{2} \right) \\ & - \tan \varphi' \cos e' \left(y_0 \cos \frac{A}{2} + x_0 \sin \frac{A}{2} \right) - z_0 \sin A = 0, \end{aligned}$$

formule qui coïncide avec l'équation (42).