ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DE SÉGUIER

Les substitutions d'ordre 2 des groupes linéaires, hermitiens gauches et quadriques dans un champ de Galois

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 79-140

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__79_0>

LES

SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2

DES

GROUPES LINÉAIRE, HERMITIEN, GAUCHE ET QUADRATIQUE

DANS UN CHAMP DE GALOIS

PAR M. DE SÉGUIER [1]

CHAPITRE III.

GROUPE QUADRATIQUE.

38. Prenons l'invariante a sous la forme

$$a = \Sigma_1^\nu x_i y_i + \psi \qquad (\psi = bxy + cx^2 + c'y^2),$$

b, c, c' étant dans $\mathcal{C}$, et $b^2 - 4cc' = \delta$ étant supposé $\neq 0$, à moins que $b = cc' = 0$. Je désignerai par θ le caractère quadratique de δ ($\theta = 1$, si $\delta = 0$). Si ψ est irréductible ($\theta = -1$), on peut (I, 24) par un changement de variables à coefficients dans $\mathcal{C}'$, mettre ψ sous la forme $x_{\nu'} y_{\nu'} = x_{\nu'} \dot{x}_{\nu'}$, $[\nu' = \nu + 1;\, x_{\nu'} = x(x - \upsilon y),\, x\dot{x} = c,\, \psi(\upsilon, 1) = 0]$. La substitution réelle γ qui multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par ι et $x_{\nu'}$, par une racine ξ de $\xi^{\pi+1} = \iota$ (donc $y_{\nu'} = \dot{x}_{\nu'}$ par ξ^π) sans altérer les autres variables multiplie a par ι. Je désignerai par φ la substitution $\gamma^{\frac{\pi-1}{2}} m_{\nu'}, -\xi^{\frac{1-\pi}{2}}$. Cette substitution multiplie $x_1, \ldots, x_\nu$ par -1 sans altérer les y correspondants. Elle multiplie $x_{\nu'}$ par -1, et $y_{\nu'}$ par

$$-\xi^{(\pi+1)\frac{\pi-1}{2}} = -\iota^{\frac{\pi-1}{2}} = 1,$$

[1] Ce Mémoire fait suite à celui qui a été publié dans ces *Annales* (juillet et août 1933).

qui n'est pas conjugué de -1. Donc φ est dans $A'(n, \pi^2)$ hors de $A(n, \pi)$. Si ψ est réductible ($\theta = 1$), on peut encore par un changement de variables à coefficients réels mettre ψ sous la forme $x_{\nu'}y_{\nu'}$, $x_{\nu'}$ et $y_{\nu'}$ étant réels. On prendra alors $\varphi = \gamma^{\frac{\pi-1}{2}}$, γ étant la substitution réelle qui multiplie $x_1, \ldots, x_{\nu'}$ par ι, sans altérer les y.

§ I. $n \leqq 3$.

39. Si $n = 1$, et si $a = x^2$, $A = \{d\}$, $A' = I$, n'ont d'autre s_2 que d. Les groupes A^0, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}$ se réduisent à 1.

40. Soit $n = 2$. Alors (I, 25) on a $A = \{m_{1\sigma}, t_1\}$, où σ est d'ordre $\pi - \theta$ dans $\mathcal{C}'$, et $t_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}$, $A^0 = \{m_{1\sigma}\}$ (I, 34), $B = \{m_{1\sigma^2}\}$ (I, 39).

B, étant d'ordre $\frac{\pi - \theta}{2}$, n'a pas de s_2 si $\pi - \theta \not\equiv 2 \bmod 4$, et n'a pas d'autre s_2 que d si $\pi - \theta \equiv 0 \bmod 4$.

A^0, étant d'ordre $\pi - \theta$, n'a qu'une s_2, qui est d.

A, étant diédral d'ordre $2(\pi - \theta)$, a trois classes de s_2 représentées par d, t_1, $t_1 m_{1\sigma}$ (E, 20), le nombre des éléments de chacune des deux dernières classes étant $\frac{\pi - \theta}{2}$.

Les substitutions de A' sont (I, 25) de la forme $\gamma^\rho t_1^\varepsilon m_{1\sigma}^\beta$, ou, si ψ est irréductible, de la forme $\gamma^\rho t_1^\varepsilon$. Elles sont hors de A pour $\rho \not\equiv 0 \bmod \pi - 1$. A' est donc d'ordre $2(\pi - 1)(\pi - \theta)$. En faisant les deux hypothèses $\varepsilon = 0, 1$, on voit directement qu'une s_2 hors de A ne peut exister que si ψ est réductible, et *qu'elle a alors une des deux déterminations* φ, $d\varphi$, *que* t_1 *transforme l'une dans l'autre*.

Ainsi A' *n'a de* s_2 *hors de* A *que si* ψ *est réductible; et alors ces* s_2 *sont* φ *et* $d\varphi$, qui sont conjuguées. De plus, *quel que soit* ψ, *les deux classes de* s_2 *non normales de* A *se réunissent, dans* A', *en une seule classe*, car $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1\sigma_0}$ ($\sigma_0 = \iota$, si ψ est réductible, $\sigma_0 = \xi^{1-\pi}$, si ψ est irréductible; σ_0 est toujours d'ordre $\pi - \theta$).

41. Soient N, N', N^0, P les normalisants respectifs, dans A, A', A^0, B, d'une s_2 $s \neq d$.

Pour déterminer N, N^0, P dans les cas $s = t_1$ ou $s = t_1 m_{1\sigma}$, il suffit de rappeler que, dans un g_{2m} diédral défini par $a^m = b^2 = 1$, $ba.b = a^{-1}$, le normalisant d'une s_2 s de ce diédral est le $g_2\{s\}$ si m est impair, et le $g_4\{s, a^\mu\}$ si m pair $= 2\mu$. Ici, pour A, $m = \pi - \theta$ est pair.

Pour déterminer N', on peut supposer $s = t_1$ ou φ.

Si $s = t_1$, on a $N' = \{t_1, I\}$. En effet, ce groupe contient normalement t_1 et son ordre est bien $2(\pi - 1)$, quotient de l'ordre $2(\pi - 1)(\pi - \theta)$ par le nombre $\pi - \theta$ des conjugués de t_1 dans A'.

Si $s = \varphi$ (ψ est alors réductible). N' contient évidemment le produit direct $\{m_{1i}\}\{\gamma\}$. Donc, φ n'ayant que deux conjuguées, N' est d'indice 2 dans A' et coïncide avec ce produit direct. N' étant ici dans A, on a $N = N'$. On voit ensuite que $N^0 = A^0$ et que $P = B$.

42. Posons maintenant $\frac{x_1}{y_1} = z$, x_1 et y_1 étant les variables, réelles ou non, telles que $\psi = x_1 y_1$.

Alors $\mathfrak{A}^0 = \{(\sigma^2 z)\}$ est d'ordre $\frac{\pi - \theta}{2}$, n'a de s_2 que si $\pi - \theta \equiv 0 \pmod 4$; et alors, il n'en a qu'une, qui est $(-z)$.

$\mathfrak{B} = \{(\sigma^4 z)\}$ se confond avec $\mathfrak{A}^0$ si $\pi - \theta \equiv 2 \pmod 4$. Si $\pi - \theta \equiv 0 \pmod 4$, il est d'ordre $\frac{\pi - \theta}{4}$, et contient $(-z)$ toujours et seulement si $\pi - \theta \equiv 0 \pmod 8$.

$\mathfrak{A} = \{(\sigma^2 z), (z^{-1})\} = \{\mathfrak{A}^0, (z^{-1})\}$ est diédral d'ordre $\pi - \theta$, n'a hors de $\mathfrak{A}^0$, qu'une ou deux classes de s_2; si $\frac{\pi - \theta}{2}$ est pair; il en a deux, représentées par $(z^{-1}) = (t_1)$ et $(\sigma^2 z^{-1}) = (t_1 m_{1\sigma})$; si $\frac{\pi - \theta}{2}$ est impair, il n'en a qu'une, représentée par $(z^{-1}) = (t_1)$.

$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}, (\sigma z)\}$ $[(\gamma) = (\sigma z)$ quel que soit $\psi] = \{(\sigma z), (z^{-1})\}$, diédral d'ordre $2(\pi - \theta)$ a trois classes de s_2 représentées par $(z^{-1}) = (t_1)$, $(\sigma z^{-1}) = (t, \gamma)$ et $(-z) = \left(\gamma^{\frac{\pi - \theta}{2}}\right)$. (La substitution réelle $\gamma^{\frac{\pi - \theta}{2}}$ coïncide avec φ si ψ est réductible, avec $\left[-\xi^{\frac{\pi + 1}{2}}\right]\varphi$ si ψ est irréductible.) La première est toujours dans $\mathfrak{A}$ hors de $\mathfrak{A}^0$. La seconde est toujours hors de $\mathfrak{A}$ [c'est le produit de (z^{-1}), qui est dans $\mathfrak{A}$, par (σz), qui est hors de $\mathfrak{A}$]. La troisième est dans $\mathfrak{A}$ toujours et seulement si $-z$ est de la forme $\sigma^{2r} z$, c'est-à-dire si $\frac{\pi - \theta}{2}$ est pair; et elle est alors dans $\mathfrak{A}^0$.

Les groupes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}$ étant diédraux ou cycliques, les normalisants des s_2 obtenues se déterminent d'après les principes généraux rappelés au nº 41.

43. Soit $n=3$. Alors $\mathrm{B} \equiv \mathfrak{U}(2, \pi)$ (I, 40). Or on a vu (12) que $\mathfrak{U}(2, \pi)$ n'a qu'une classe de s_2. On peut la représenter par une s_2 quelconque de B, par exemple par $s_1 = t_{01} m_{1k}$, $-ck$ étant un carré (¹).

$\mathrm{A}^0 \equiv \mathfrak{L}(2, \pi)$ (I, 40) $\equiv \mathfrak{H}(2, \pi)$ (I, 5) a deux classes de s_2 (12), dont une peut être représentée par $s_1 = t_{01} m_{1k}$ ($-kc$ étant carré) et l'autre par $s_2 = s_1 m_{1\mathrm{N}}$, qui est hors de B, donc non conjuguée de s_1, ou, ce qui revient au même, par t_{01} et $t_{01} m_{1\mathrm{N}}$.

Toute s_2 de $\mathrm{A} = \mathrm{A}^0 \mathrm{D}$ hors de A^0 a la forme ds, s étant une s_2 de A^0; et deux s_2 ds et ds' sont conjuguées dans A toujours et seulement si s et s' le sont dans A^0. De même s et s' sont conjuguées dans A toujours et seulement si elles le sont dans A^0. Donc les classes de s_2 de A sont représentées par s_1, s_2, d, ds_1, ds_2.

En changeant k en $-k$, ce qui revient à remplacer s_1 par $s'_1 = d_1 s_1$ et s_2 par $s'_2 = d_1 s_2$, on peut représenter les deux dernières classes de A par $ds'_1 = t_0 s_1$, $ds'_2 = t_0 s_2$. Donc *les classes de s_2 de* A *peuvent être représentées par*

$$s_1 = t_{01} m_{1k}, \quad s_1 m_{1\mathrm{N}}, \quad t_0 s_1, \quad t_0 s_1 m_{1\mathrm{N}}, \quad d.$$

On peut encore remplacer s_1 et s_2 par $t_{01} d_1$ et $t_{01} m_{1,-\mathrm{N}}$. Les classes de A hors de A^0 sont alors représentées par t_1 et $t_1 m_{1\mathrm{N}}$ (²).

(¹) On a (I, 32),

$$t_{01} m_{1,-c\lambda^2} = \mathrm{U}_{01\lambda} \mathrm{V}_{0,1,(c\lambda)^{-1}} \mathrm{U}_{0,1\lambda},$$

où (I, 28),

$$\mathrm{V}_{0,1,\lambda} = \begin{vmatrix} x & x + \lambda x_1 \\ x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 - 2c\lambda x - c\lambda^2 x_1 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{U}_{0,1,\lambda} = t_1 \mathrm{V}_{01\lambda} t_1, \qquad t_{01} = t_0 t_1, \qquad t_0 = | x, -x |.$$

(²) Les substitutions $dt_{01} = t_1 m_{1,-1}$. et $dt_{01} m_{1\mathrm{N}} = t_1 m_{1,-\mathrm{N}}$ sont, dans le diédral $\{ t_1, m_{1,\iota} \}$, conjuguées l'une de t_1, l'autre de $t_1 m_{1\iota}$. Donc t_0 est conjugué de t_1 ou de $t_1 m_{1\iota}$. Or, pour que t_0 soit conjugué de $t_1 m_{1h}$, il faut, d'après la correspondance indiquée (I, 40) entre $\mathrm{A}^0 \equiv \mathrm{A} \mid \mathrm{D}$ et $\mathfrak{L}(2, \pi)$ que $-\dfrac{ch}{z}$ qui répond à $(t_1 m_{1h})$, soit conjugué de $-z$ qui répond à t_0, donc que $-\dfrac{ch}{z}$ et $-z$ soient toutes deux dans $\mathfrak{U}(2, \pi)$ ou toutes deux hors de $\mathfrak{U}(2, \pi)$, donc, que leurs déterminants, ch et -1, aient le même caractère quadratique, donc que h ait la forme $-c\lambda^2$. Cette condition suffit; car, si elle est remplie, Enfin $A' = AI = A^0 I$ (I, 24), A^0 étant premier à I. Donc toute substitution de A' hors de A a la forme $[\iota^h]\alpha = \alpha'$, α étant dans A_0 et $[\iota^h]$ hors de D, donc $\iota^{2h} \neq 1$. Pour que $\alpha'^2 = 1$, il faut donc que $\alpha^2 = [\iota^{-h}]^2$; d'où A^0 étant premier à I, $\iota^{2h} = 1$ contre l'hypothèse. Donc A' *n'a pas de s_2 hors de* A. Il est clair d'ailleurs que deux substitutions de A, conjuguées dans A', le sont dans A. Donc les classes de s_2 de A sont aussi les classes de s_2 de A'.

On a $\mathcal{B} \equiv B$, et (I, 24, 39), $\mathcal{A}' = \mathcal{A} = \mathcal{A}^0 \equiv A^0$. Donc $\mathcal{B}$ *n'a qu'une classe de s_2 représentée par $(s_1) = (t_{01} m_{1k})$, et $\mathcal{A}' = \mathcal{A} = \mathcal{A}^0\, a$, hors de $\mathcal{B}$ une seule classe de s_2 représentée par $(t_{01} m_{1kN})$.*

---

t_0 est conjuguée de celle des deux substitutions $d^\varepsilon t_1 m_{1h}$ ($\varepsilon = 0, 1$) qui a pour déterminant -1, c'est-à-dire de $t_1 m_{1h}$.

On peut d'ailleurs trouver directement ce résultat en cherchant une substitution α de A telle que $t_0 \alpha = \alpha t_1 m_{1h}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} x_1 + \alpha'_{11} y_1 - \alpha_{10} x &= h(\beta_{11} x_1 + \beta'_{11} y_1 + \beta_{10} x),\\
\beta_{11} x_1 + \beta'_{11} y_1 - \beta_{10} x &= h^{-1}(\alpha_{11} x_1 + \alpha'_{11} y_1 + \alpha_{10} x),\\
\alpha_{01} x_1 + \alpha'_{01} y_1 - \alpha_{00} x &= \alpha_{01} x_1 + \alpha'_{01} y_1 + \alpha_{00} x.
\end{aligned}$$

D'où

$$\beta_{11} = h^{-1}\alpha_{11}, \qquad \beta'_{11} = h^{-1}\alpha'_{11}, \qquad \beta_{10} = -h^{-1}\alpha_{10}, \qquad \alpha_{00} = 0.$$

Donc

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{10} \\ \dfrac{\alpha_{11}}{h} & \dfrac{\alpha'_{11}}{h} & -\dfrac{\alpha_{10}}{h} \\ \alpha_{01} & \alpha'_{01} & 0 \end{matrix} \right\}.$$

Pour que α soit dans A il faut et suffit que l'on ait (*cf.* I, 26)

$$\frac{\alpha_{11}^2}{h} + c\alpha_{01}^2 = 0, \qquad \frac{\alpha'^2_{11}}{h} + c\alpha'^2_{01} = 0, \qquad -\frac{\alpha_{10}^2}{h} = c, \qquad \frac{2}{h}\alpha_{11}\alpha'_{11} + 2c\,\alpha_{01}\alpha'_{01} = 1.$$

Les trois premières donnent

$$ch = -\alpha_{10}^2, \qquad \alpha_{11} = \varepsilon\alpha_{10}\alpha_{01}, \qquad \alpha'_{11} = \varepsilon'\alpha_{10}\alpha'_{01}, \qquad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1.$$

La dernière donne alors, en éliminant h,

$$2\alpha_{01}\alpha'_{01}(1 - \varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{c}.$$

Donc en prenant $\varepsilon\varepsilon' = -1$, on peut construire α dès que $-ch$ est carré.

Ainsi t_0 est conjuguée de $t_1 m_{1h}$ toujours et seulement si $-ch$ est carré. En particulier *t_0 est toujours conjugué de $t_1 m_{1,-c}$.*

Si d'ailleurs $t_0 \alpha = \alpha t_1 m_{1h}$, en posant (I, 34, 39) $\alpha = t_1^\varepsilon m_{1\mu}\beta$, β étant dans B, on a $t_0 \beta = \beta t_1 m_{1h}$, c'est-à-dire que t_0 peut être transformé en $t_1 m_{1h}$ par une substitution de B.

Le normalisant d'une s_2 quelconque de A' ou de $\mathfrak{A}'$ dans un des groupes considérés pour $n=3$ résulte de l'étude faite de $\mathfrak{L}$ et de $\mathfrak{U}$, et de la notion de produit direct (A' et A sont les produits directs de A^0 par I et D respectivement).

§ II. $n=4$.

44. Soit $n=4$, et supposons $\psi \neq 0$, il est avantageux ici de commencer par les groupes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$.

Soit d'abord ψ irréductible [d est ici dans A_0, hors de B (I, 39)]. Alors $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{U}(2, \pi^2)$ (I, 40) n'a qu'une classe de s_2, qu'on peut représenter par (t_{12}).

Considérons $[\mathfrak{A}]=\{\mathfrak{U}(2, \pi^2), \dot{z}\} \equiv \mathfrak{A}$ (I, 40), z étant la variable de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$. Soit $\dot{z}\alpha_z$ une s_2 de $[\mathfrak{A}]$ hors de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, $\alpha_z = \dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$. Je supposerai $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$. La condition $\dot{z}\alpha_z = (\dot{z}\alpha_z)^{-1}$ donne, en désignant par τ un facteur de proportionnalité,

$$\alpha = \tau\dot{\beta}', \qquad \alpha' = -\tau\dot{\alpha}', \qquad \beta = -\tau\dot{\beta}, \qquad \beta' = \tau\dot{\alpha}, \tag{1}$$

ces relations sont compatibles avec $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$ toujours et seulement si $\tau^2 = 1$. τ sera dit le *caractère* de la s_2 $\dot{z}\alpha_z$

45. Je dis que, *dans* $[\mathfrak{A}]$, $\dot{z}\alpha_z$ *est conjuguée de* $-\dot{z}^{-1}$ *ou de* $\dot{z}$ *suivant que* $\tau = -1$, *ou* $\tau = 1$ [d'après la correspondance établie (I, 40) entre $\mathfrak{A}$ et $[\mathfrak{A}]$, $-\dot{z}^{-1}$ répond à t_1; d'après la correspondance entre $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, $-z^{-1}$ répond à dt_{12}; donc $(-\dot{z}^{-1})(-z^{-1}) = \dot{z}$ de $[\mathfrak{A}]$ répond à $t_1 dt_{12} = dt_2 = dm_{2q}t_0$ de $\{B, t_1\} \equiv \mathfrak{A}]$ et que $-\dot{z}^{-1}$ et $\dot{z}$ *ne sont pas conjuguées*. On verra, en même temps, que *deux* s_2 *conjuguées peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre par une substitution de* $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$.

Soit $\dot{z}\lambda_z$ une substitution de $\mathfrak{A}$, $\lambda_z = \dfrac{\lambda z + \lambda'}{\mu z + \mu'}$ $(\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1)$ étant dans $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$.

Pour qu'elle transforme $\dot{z}\alpha_z$ soit en $\dot{z}$, soit en $-\dot{z}^{-1}$, il faut et suffit, $\dot{z}$ étant permutable à chacune de ces deux substitutions, que λ_z opère la même transformation.

Si $\lambda_z\dot{z}\alpha_z = (-\dot{z}^{-1})\lambda_z$, on a, f désignant un facteur de proportionnalité,

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha\dot{\lambda} + \alpha'\dot{\mu} = \ \ f\lambda', & \beta\dot{\lambda} + \beta'\dot{\mu} = \ \ f\mu', \\ \alpha\dot{\lambda}' + \alpha'\dot{\mu}' = -f\lambda, & \beta\dot{\lambda}' + \beta'\dot{\mu}' = -f\mu. \end{array}\right. \tag{2}$$

joint à

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1. \tag{3}$$

En tirant λ' et μ' des deux premières et en les portant dans les deux dernières de (2), on obtient d'après (1), λ et μ n'étant pas simultanément nuls,

$$\tau + f\dot{f} = 0. \tag{4}$$

En les portant dans (3), on obtient

$$\beta\lambda\dot{\lambda} + \beta'\lambda\dot{\mu} - \alpha\mu\dot{\lambda} - \alpha'\mu\dot{\mu} = f. \tag{5}$$

Si les conditions (4) et (5) sont remplies, les équations (2) et (3) détermineront complètement λ' et μ'.

Si $\tau = 1$, (1) et (5) donne $\dot{f} = -f$, d'où, d'après (4), $f^2 = 1$, ce qui est contradictoire.

Si $\tau = -1$, (1) montre que α' et β sont réels, et que $\beta' = -\dot{\alpha}$. Le premier membre de (5) est alors une forme hermitienne; on a ici $\dot{f} = f$, d'où, d'après (4), $f^2 = 1$. Alors (5) a des solutions en λ, μ comme le montrent, par exemple, les formes canoniques rappelées au n° 16. Donc $\dot{z}\alpha_z$ *est conjuguée de* $-\dot{z}^{-1}$ *toujours et seulement si* $\tau = -1$. Donc $\dot{z}$ *n'est pas conjuguée de* $-\dot{z}^{-1}$.

46. Si $\lambda_z\dot{z}\alpha_z = \dot{z}\lambda_z$, on a, f désignant un facteur de proportionnalité,

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha\dot{\lambda} + \alpha'\dot{\mu} = f\lambda, & \beta\dot{\lambda} + \beta'\dot{\mu} = f\mu, \\ \alpha\dot{\lambda}' + \alpha'\dot{\mu}' = f\lambda', & \beta\dot{\lambda}' + \beta'\dot{\mu}' = f\mu', \end{array}\right. \tag{6}$$

joint à

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1. \tag{7}$$

En éliminant $\dot{\lambda}$, $\dot{\mu}$, $\dot{\lambda}'$, $\dot{\mu}'$ entre (6) et les équations conjuguées, on obtient, d'après (1), λ, μ, λ', μ' n'étant pas simultanément nuls,

$$\tau - f\dot{f} = 0. \tag{8}$$

D'ailleurs (6) donne, en tenant compte de $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda')f^2 = (\dot{\lambda}\dot{\mu}' - \dot{\mu}\dot{\lambda}'). \tag{9}$$

Donc, d'après (7) et (8),

$$f^2 = 1, \qquad \tau = 1. \tag{10}$$

Si (10) est vérifiée, il résulte de (6) que $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ est réel.

Prenons alors, comme élément définissant de $\mathcal{C}$, $\omega = \upsilon - \dot{\upsilon}$, au lieu de $\upsilon = -\frac{b}{2c} + \frac{\omega}{2}$ on aura

$$\begin{array}{llll} \lambda = \lambda_0 + \omega\lambda_1, & \lambda' = \lambda'_0 + \omega\lambda'_1, & \alpha = \alpha_0 + \omega\alpha_1, & \alpha' = \alpha'_0 + \omega\alpha'_1, \\ \mu = \mu_0 + \omega\mu_1, & \mu' = \mu'_0 + \omega\mu'_1, & \beta = \beta_0 + \omega\beta_1, & \beta' = \beta'_0 + \omega\beta'_1, \end{array}$$

λ_i, λ'_i, μ_i, μ'_i, α_i, α'_i, β_i, β'_i ($i = 0, 1$) étant tous réels, et $\omega^2 = \frac{\partial}{c^2}$ étant un non carré de $\mathcal{C}$. Faisons de plus $f = 1$. Alors (1) donne

$$\alpha'_0 = \beta_0 = 0, \qquad \beta'_0 = \alpha_0, \qquad \beta'_1 = -\alpha_1, \tag{11}$$

et $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ devient

$$\alpha_0^2 - \omega^2(\alpha_1^2 + \alpha'_1\beta_1) = 1. \tag{12}$$

Les deux premières équations (6) donnent, en termes réels,

$$\left\{\begin{array}{lllll} (\alpha_0 - 1)\lambda_0 - \omega^2\alpha_1\lambda_1 & & & -\omega^2\alpha'_1\mu_1 & = 0, \\ \alpha_1\lambda_0 - (\alpha_0 + 1)\lambda_1 + \alpha'_1\mu_0 & & & & = 0, \\ & -\omega^2\beta_1\lambda_1 & + (\alpha_0 - 1)\mu_0 & + \omega^2\alpha_1\mu_1 & = 0, \\ \beta_1\lambda_0 & & -\alpha_1\mu_0 & -(\alpha_0 + 1)\mu_1 & = 0, \end{array}\right. \tag{13}$$

λ'_0, λ'_1, μ'_0, μ'_1 vérifient les mêmes équations.

Les équations (13) se réduisent à deux. On peut le voir en vérifiant que tous les mineurs à 9 éléments du déterminant sont nuls, ou, plus simplement, comme suit.

Si $\alpha'_1 = \beta_1 = 0$, les deux premières équations se réduisent à une, et, de même les deux dernières.

Si l'un des coefficients β_1, α'_1 est $\neq 1$, on peut résoudre deux des équations (13) par rapport à l'un des couples λ_0, λ_1 ou μ_0, μ_1. Les deux autres s'évanouissent en vertu de (12) quand on y substitue les valeurs trouvées.

Ainsi on peut exprimer $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$, à l'aide de deux solutions particulières (g_0, g_1, h_0, h_1) et (g'_0, g'_1, h'_0, h'_1) du système (13) et de deux paramètres réels x, y, ce qui, en posant

$$g_0 + \nu g_1 = g, \qquad h_0 + \nu h_1 = h, \qquad g'_0 + \nu g'_1 = g', \qquad h'_0 + \nu h'_1 = h,$$

peut s'écrire

$$\lambda = gx + g'y, \qquad \mu = hx + h'y.$$

On aura de même, x', y' étant d'autres paramètres réels,

$$\lambda' = gx' + g'y', \qquad \mu' = hx' + h'y'.$$

La condition (7) s'écrit alors

$$(gh' - hg')(xy' - yx') = 1,$$

et il suffit de déterminer les paramètres réels x, y, x', y' de manière à vérifier cette équation. Comme $f = 1$, $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ est réel en vertu de (9), qui résulte de (6). Il en est donc de même de $gh' - hg'$.

Ainsi $\mathfrak{A}$ *a trois classes de* s_2 *représentées par* (t_{01}) (44) *qui est dans* $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{B}$, *et par* (t_1) *et* (t_2) *qui sont hors de* $\mathfrak{A}^0$.

47. Le groupe $\mathfrak{A}' = \mathrm{A}'/\mathrm{I}$ est isomorphe au groupe $[\mathfrak{A}'] = [\mathfrak{A}] + \mathcal{G}[\mathfrak{A}]$, où $g = (\xi z)$, $\xi^{\pi+1} = \iota$, en sorte que $[\mathfrak{A}'] = \{\mathfrak{L}(2, \pi^2), \dot{z}\}$. En effet g transforme les éléments de $[\mathfrak{A}]$ comme γ transforme ceux de $\mathfrak{A}$. On le voit en prenant comme générateurs de $\mathfrak{A} = \mathrm{AI}/\mathrm{I}$ les complexes $\mathrm{IP}_{1,\rho}$, $\mathrm{IO}_{1,-\rho}$ (ρ parcourant $\mathcal{C}'$) et $\mathrm{I}t_1$, et, comme générateurs de $[\mathfrak{A}]$, les substitutions correspondantes (I, 40) $z + \dot{\rho}$, $\dfrac{z}{1 - \rho z}$, $-\dot{z}^{-1}$, et en observant que g^2, qui est dans $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$ correspond de même à $\mathrm{I}\gamma^2$ de BI/I.

Toute substitution σ de $[\mathfrak{A}']$ hors de $[\mathfrak{A}]$ a la forme

$$\sigma = (\xi z)(\dot{z})^{\varepsilon}\left(\frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right) \qquad (\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1).$$

Si $\varepsilon = 1$, les conditions pour que $\sigma = \sigma^{-1}$ sont, en désignant par ρ un facteur de proportionnalité,

$$\begin{aligned} \alpha\xi &= \rho\dot{\beta}', & \alpha' &= -\rho\dot{\alpha}', \\ \beta\xi &= -\rho\dot{\beta}\dot{\xi}, & \beta' &= \rho\dot{\alpha}\dot{\xi}. \end{aligned}$$

En égalant le déterminant des premiers membres à celui des seconds, on a $\xi = \rho^2 \xi$ ou $\xi^{1-\pi} = \rho^2$. D'ailleurs, la deuxième équation donne

$$-\rho = \alpha'^{(1-\pi)}, \qquad \text{d'où} \quad \alpha'^{2(1-\pi)} = \xi^{1-\pi+\lambda(1-\pi^2)}, \qquad \text{d'où} \quad \alpha'^2 = \xi^{1+\lambda(\pi+1)},$$

ce qui est impossible, le second membre n'étant pas carré.

Donc $\varepsilon = 0$ et toute $s_2\,\sigma$ est dans $\mathfrak{L}(2, \pi^2)$. Or on sait (12), que ce groupe n'a hors de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$ *qu'une classe de s_2*. Cette classe contient (45) $\left(-\frac{\xi}{z}\right) = \left(-\frac{1}{z}\right)(\xi z)$ qui correspond à $(t_{12}\gamma)$. *Cette substitution représente donc l'unique classe de s_2 de $\mathfrak{A}'$ hors de $\mathfrak{A}$*. Elle est d'ailleurs de seconde espèce, car $(t_{12}\gamma)^2 = [1]$.

Les deux classes de s_2 de $\mathfrak{A}$, dont les représentants indiqués (t_1) et (t_2) correspondent à $(-\dot{z}^{-1})$ et $(\dot{z})$ se réunissent en une dans $\mathfrak{A}$, car $\mathfrak{g}^{-1}(\dot{z})\,\mathfrak{g} = (\dot{z})(\xi^{\pi-1}z)$ a le caractère -1, donc (45) est conjuguée de $(-\dot{z}^{-1})$. Ces substitutions sont évidemment de première espèce.

La troisième classe de s_2 de $\mathfrak{A}$ est l'unique classe de s_2 de $\mathfrak{A}^0$, représentée par (t_{01}) (45), correspondant à l'unique classe de s_2 de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$ représentée par $(-z^{-1})$ (12). Cette substitution est évidemment de première espèce.

48. Supposons maintenant ψ réductible [1]. On a (I, 40) $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_u$ $\left(z = \frac{x_1}{x_2},\ u = \frac{x_1}{y_2}\right)$, et toute $s_2\sigma$ de $\mathfrak{U}_z\mathfrak{U}_u$ est de la forme $\alpha_z\beta_u$, α_z étant dans $\mathfrak{U}_z$ et β_u dans $\mathfrak{U}_u$; de plus $\alpha_z^2 = \beta_u^2 = 1$, l'une au moins des substitutions α_z, β_u étant d'ordre 2. Comme $\mathfrak{U}_z$ n'a qu'une classe de s_2, σ est nécessairement conjuguée de l'une des trois substitutions $\left(-\frac{1}{z}\right)$, $\left(-\frac{1}{u}\right)$, $\left(-\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)$, auxquelles répondent respectivement dans $\mathfrak{B}$, $(R_{121}) = (d_1 T_{12})$, $(S_{12,-1}) = (d_1 T_{12} t_{12})$, $(R_{121} S_{1,2,-1}) = (t_{12})$ (I, 28, 29) [2].

---

(1) On peut supposer (I, 24), ou bien que $\nu' = \nu = 2$ et que $\psi = 0$, ou bien que $\nu = 1$, $\nu' = 2$, et que ψ est $\neq 0$. Dans (I, 40), on a pris la première hypothèse; on adopte ici la seconde; les résultats sont identiques.

(2) On a vu (44) que, si ψ est irréductible, $\overline{\mathfrak{B}}(4, \pi)$ n'a qu'une classe de s_2 représentée par (t_{12}). D'après les résultats du texte, $\mathfrak{B}(4, \pi^2)$, qui contient $\mathfrak{B}(4, \pi)$, a deux autres classes de s_2, mais qui sont hors de $\overline{\mathfrak{B}}(4, \pi)$.

Si -1 est carré, on peut représenter respectivement ces trois classes par $(-z)$, $(-u)$ et $(-z)(-u)$ ou, en posant $\varepsilon^2=-1$, par $\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon^{-1}}\right)$, $\left(\frac{\varepsilon u}{\varepsilon^{-1}}\right)$ et $\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon^{-1}}\right)\left(\frac{\varepsilon u}{\varepsilon^{-1}}\right)$: leurs correspondantes respectives dans $\mathcal{B}$, sont $(m_{1,\varepsilon}m_{2,\varepsilon^{-1}})$, $(m_{1,\varepsilon}m_{2,\varepsilon})$, (d_1).

Comme $\overline{d_1 T_{12}}^2 = \overline{d_1 T_{12} t_{12}}^2 = d$, $(d_1 T_{12})$ et $(d_1 T_{12} t_{12})$ sont de première ou de seconde espèce suivant que -1 est carré ou non (5, 6); (t_{12}) est évidemment toujours de première espèce.

49. En faisant correspondre $\mathfrak{m}_\lambda = \begin{vmatrix} z & \lambda z \\ u & \lambda u \end{vmatrix}$ à $m_{1\lambda}$), on voit que $\mathcal{A}^0 = \{\mathfrak{U}_z\mathfrak{U}_u, \mathfrak{m}_N\} = [\mathcal{A}^0]$. Toute substitution σ de $[\mathcal{A}^0]$ hors de $\mathfrak{U}_z\mathfrak{U}_u$ a la forme $(Nz)\alpha_z(Nu)\beta_u$, α_z étant dans $\mathfrak{U}_z$ et β_u dans $\mathfrak{U}_u$, c'est-à-dire la forme $\alpha'_z\beta'_u$, α'_z étant dans $\mathcal{L}_z$ hors de $\mathfrak{U}_z$, et β'_u dans $\mathcal{L}_u$ hors de $\mathfrak{U}_u$. Pour que σ soit d'ordre 2, il faut et suffit que les deux substitutions α'_z et β'_u soient d'ordre 2. Comme $\mathcal{L}_z$ n'a, hors de $\mathfrak{U}_z$, qu'une classe de s_2 (12), représentée par $\frac{-N}{z}$, et que toute cette classe s'obtient en transformant $\frac{-N}{z}$ par $\mathfrak{U}_z$ (15), *σ est toujours conjuguée de*

$$\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-N}{u}\right)=\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)\mathfrak{m}_N,$$

qui répond à $(t_{12}m_{1N})$ de $\mathcal{A}^0$; comme $\overline{t_{12}m_{1N}}^2 = 1$, *cette s_2 est de première espèce*.

Comme $\mathfrak{U}_z$ et $\mathfrak{U}_u$ sont normaux dans $[\mathcal{A}^0]$, aucune substitution de ce groupe ne peut transformer l'une dans l'autre deux des substitutions $\left(\frac{-1}{z}\right)$, $\left(\frac{-1}{u}\right)$, $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$. Ainsi *les trois classes de $\mathcal{B}$ restent distinctes dans $\mathcal{A}^0$*.

50. En faisant correspondre $\iota = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$ à t_2, on voit (I, 40) que $\mathcal{A} \equiv \{\mathfrak{U}_z\mathfrak{U}_u, \mathfrak{M}_N, \iota\} = [\mathcal{A}]$. Toute substitution σ de $[\mathcal{A}]$ hors de $[\mathcal{A}^0]$ a la forme $\iota\mathfrak{m}_N^\varepsilon\alpha_z\beta_u$ ($\varepsilon = 0, 1$; α_z dans $\mathfrak{U}_z$, β_u dans $\mathfrak{U}_u$) ou $\iota\alpha'_z\beta'_u$, en posant $(N^\varepsilon z)\alpha_z = \alpha'_z$, $(N^\varepsilon u)\beta_u = \beta'_u$. La condition $\sigma^2 = 1$ donne

$$1 = \iota\alpha'_z\beta'_u\iota\alpha'_z\beta'_u = \alpha'_u\beta'_z\alpha'_z\beta'_u,$$

d'où $\beta'_z = \alpha'^{-1}_z$. Donc σ a la forme $\iota\alpha'_z\alpha'^{-1}_z = \alpha'_u\iota\alpha'^{-1}_u = (N^\varepsilon u)\alpha_u\iota\alpha_u^{-1}(N^{-\varepsilon}u)$.

En posant $\gamma_u = (N^\varepsilon u)\alpha_u^{-1}(N^{-\varepsilon} u)$, qui est dans $[\mathcal{B}]$, on voit

$$\sigma = \gamma_u^{-1}(N^\varepsilon u)\iota(N^{-\varepsilon} u)\gamma u.$$

Donc σ est conjuguée dans $[\mathfrak{A}]$, de $(N^\varepsilon u)\iota(N^{-\varepsilon} u) = \iota(N^\varepsilon z)(N^\varepsilon u)$. D'ailleurs $\iota(Nz)(N^{-1}u)$ n'est pas conjuguée dans $\mathfrak{A}$, de ι, car elle devrait être transformée de ι par une substitution de la forme $\iota^\eta \mathfrak{m}_N^\varepsilon \alpha_z \beta_u (\eta, \varepsilon = 0, 1)$, en sorte que

$$\iota(Nz)(N^{-1}u) = \beta_u^{-1}\alpha_z^{-1}\mathfrak{m}_N^{-\varepsilon}\iota\mathfrak{m}_N^\varepsilon\alpha_z\beta_u = \iota\beta_u^{-1}\alpha_u^{-1}\alpha_z\beta_u,$$

et $(Nz)(N^{-1}u)$ serait dans $\mathfrak{U}_z\mathfrak{U}_u$. On verrait de même que $\iota(Nz)(N^{-1})$ ne peut être conjugué de $\iota(kNz)(k^{-1}N^{-1}u)$ que si k est carré.

Donc $[\mathfrak{A}]$ *a, hors de* $[\mathfrak{A}^0]$, *deux classes de* s_2, *représentées par* ι *et* $\iota(Nz)(N^{-1}u)$ ou, plus généralement, par

$$\iota(kz)(k^{-1}u) \qquad \text{et} \qquad \iota(kNz)(k^{-1}N^{-1}u).$$

auxquelles répondent dans $\mathfrak{A}$, (t_2) et $(t_2 m_{2N})$, ou, plus généralement, $(t_2 m_{2k})$ et $(t_2 m_{2,kN})$, toutes deux de première espèce. [On verra au n° 51 que (ιu) correspond à (γ), donc (ιz) à $(t_2\gamma t_2)$.]

Il est clair que ι transforme l'une dans l'autre les deux classes de s_2 de $[\mathfrak{A}^0]$ représentées par $\left(\frac{-1}{z}\right)$ et $\left(\frac{-1}{u}\right)$, et transforme en elle-même chacune des classes représentée par $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ et $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)\mathfrak{m}_N$. Donc *les* s_2 *de* $\mathfrak{A}$ *qui sont dans* $\mathfrak{A}^0$ *forment trois classes représentées par* $(d_1 T_{12})$ [*ou par* $(d_1 T_{12} t_{12})$], (t_{12}), *et* $(t_{12} m_{1N})$, *la dernière seule étant hors de* $\mathcal{B}$.

51. En faisant correspondre $\mathfrak{g}_u = (\iota u)$ à γ, on voit que

$$[\mathfrak{A}'] = [\mathfrak{A}] + \mathfrak{g}_u[\mathfrak{A}]$$

est isomorphe à $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + (\gamma)\mathfrak{A}$. On remarquera que $[\mathfrak{A}'] = \{\mathcal{L}_z\mathcal{L}_u, \iota\}$, et que les substitutions $\mathfrak{g}_u$ et $\mathfrak{g}_z = \iota\mathfrak{g}_u\iota$ correspondent respectivement à γ et $t_2\gamma t_2$ suivant la même loi que les substitutions β_u de $\mathfrak{U}_u$ et α_z de $\mathfrak{U}_z$ aux substitutions r de $\mathbf{W}$ et s de $\mathbf{V}$. En prenant $\{\mathbf{V}, s_2\gamma t_2\} = \mathbf{V}'$ et $\{\mathbf{W}, \gamma\} = \mathbf{W}'$, le produit direct $\mathcal{L}_z\mathcal{L}_u$ correspond à $\mathbf{V}'\mathbf{W}'$; mais γ n'est pas permutable a toute substitution de $\mathbf{V}$, ni donc $t_2\gamma t_2$ à toute substitution de **W**. Toute substitution σ de $[\mathfrak{A}']$ hors de $[\mathfrak{A}]$ est de la forme $g_u \iota^\varepsilon \mathfrak{m}_N^\eta \alpha_z \beta_u$ $(\varepsilon, \eta = 0, 1;\ \alpha_z$ étant dans $\mathfrak{U}_z$, et β_u dans $\mathfrak{U}_u)$.

Si $\varepsilon = 1$, σ a la forme $g_u \iota \alpha'_z \beta'_u$, $\alpha'_z = (N^\eta z)\alpha_z$, $\beta'_u = (N^\eta u)\beta_u$. La condition $\sigma^2 = 1$ donne

$$1 = g_u \iota \alpha'_z \beta'_u g_u \iota \alpha'_z \beta'_u = \mathcal{G}_u \alpha'_u \beta'_z \mathcal{G}_z \alpha'_z \beta'_u.$$

D'où

$$g_u (N^\eta u)\alpha_u (N^\eta u)\beta_u = (N^\eta z)\beta_z g_z (N^\eta z)\alpha_z = 1.$$

Le premier membre est dans le complexe $g_u \mathfrak{U}_u$, il ne peut donc pas être égal à 1.

Soit donc $\varepsilon = 0$, alors σ a la forme $g_u \alpha'_z \beta'_u$. La condition $\sigma^2 = 1$ donne

$$\alpha'^2_z = (g_u \beta'_u)^2 = 1.$$

Si $\eta = 0$, $\alpha'_z = \alpha_z$ est conjuguée, dans $\mathfrak{U}_z$, de 1 ou de $\frac{-1}{z}$; $g_u \beta'_u = g_u \beta_u$ qui est hors de $\mathfrak{U}_u$ est conjuguée par $\mathfrak{U}_u$ de $\frac{-N}{u}$. Donc σ est conjuguée de $\frac{-N}{u}$ ou de $\left(\frac{-N}{u}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)$.

Si $\eta = 1$, on voit de même que σ est conjuguée de $\frac{-N}{z}$ ou de $\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$.

ι transforme les deux dernières substitutions en les deux premières. Comme $\{\mathfrak{U}_u \mathfrak{U}_z, \mathfrak{m}_N, g_u\} = \mathcal{L}_z \mathcal{L}_u$, d'où $[\mathfrak{A}'] = \{\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, \iota\}$, $\left(\frac{-N}{u}\right)$ n'est pas conjuguée de $\left(\frac{-N}{u}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)$. Donc $[\mathfrak{A}']$ *n'a hors de* $[\mathfrak{A}]$ *que deux classes de* s_2 *représentées par* $\frac{-N}{u} = \left(\frac{-1}{u}\right)(Nu)$ *et* $\left(\frac{-N}{u}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)$ *auxquelles répondent respectivement, dans* $\mathfrak{A}'$, *si* $N = \iota^k$ *(k impair)* [en sorte que $(Nu) = g_u^k$], $(d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k) = (d_2 T_{12} t_{12} \gamma^k)$ et $(t_{12}\gamma^k)$.

Les relations $\overline{d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k}^2 = [-\iota^k]$ et $\overline{t_{12}\gamma^k}^2 = [\iota^k]$ montrent que $(t_{12}\gamma^k)$ est toujours de seconde espèce et que $(d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k)$ est de seconde ou de première espèce suivant que -1 est carré ou non.

Les quatre classes de s_2 de $[\mathfrak{A}]$ représentées par $\left(-\frac{1}{z}\right)$ et $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$, qui sont dans $[\mathcal{B}]$, $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)\mathfrak{m}_N$ qui est dans $[\mathfrak{A}^0]$

hors de $[\mathcal{B}]$, ι qui est dans $[\mathcal{A}]$ hors de $[\mathcal{A}^0]$ restent évidemment distinctes dans $[\mathcal{A}']$; mais $(N^{-1}u)$ transforme ι en $\iota\ (Nz)(N^{-1}u)$. Les deux classes correspondantes de $[\mathcal{A}]$ se réunissent donc en une seule dans $[\mathcal{A}']$.

52. Cherchons maintenant les normalisants respectifs $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}^0$, $\mathfrak{T}$ dans $[\mathcal{A}]$, $[\mathcal{A}']$, $[\mathcal{A}^0]$, $[\mathcal{B}]$ d'une s_2 quelconque σ de $[\mathcal{A}']$.

Soit d'abord ψ irréductible. Alors (47) $[\mathcal{A}'] = \{\mathcal{L}(2, \pi^2), \dot{z}\}$. Désignons par $\mathfrak{M}$ le normalisant de σ dans $\mathcal{L}(2, \pi^2)$ et par α_z la substitution générale $\left(\dfrac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}\right)$ de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, en supposant $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$.

Soit d'abord σ dans $[\mathcal{B}] = \mathfrak{U}(2, \pi^2)$. On peut supposer que $\sigma = -z$. D'après ce qu'on a vu (13), on a ici $\mathfrak{M} = \left\{\iota' z, \dfrac{-1}{z}\right\}$, $\mathfrak{T} = \left\{\iota'^2 z, \dfrac{-1}{z}\right\}$. Comme $\dot{z}$ est permutable à $-z$, on a $\mathcal{N} = \{\mathfrak{T}, \dot{z}\} = \mathfrak{T} + \mathfrak{T}\dot{z}$, $\mathcal{N}' = \{\mathfrak{M}, \dot{z}\} = \{\mathcal{N}, \iota' z\}$; $\mathfrak{T}$ est normal et d'indice 4 dans $\mathcal{N}'$.

53. Soit σ dans $[\mathcal{A}]$ hors de $\mathcal{B}$. On peut d'abord supposer (45) que $\sigma = \dot{z}$. Pour qu'une substitution α_z vérifie $\alpha_z\sigma = \sigma\alpha_z$, il faut et suffit que l'on ait; ρ désignant un facteur de proportionnalité,

$$\dot{\alpha} = \rho\alpha, \quad \dot{\alpha}' = \rho\alpha', \qquad \text{d'où} \quad \rho^2 = 1.$$
$$\dot{\beta} = \rho\beta, \quad \dot{\beta}' = \rho\beta',$$

Si $\rho = 1$, α_z est une substitution quelconque de $\mathfrak{U}(2, \pi)$. Si $\rho = -1$, en introduisant $\omega = \dot{\upsilon} - \upsilon$ au lieu de $\upsilon = -\dfrac{b}{2c} + \dfrac{\omega}{2}$, α, β, α', β' ont respectivement les formes $\omega\alpha_1$, $\omega\alpha'_1$, $\omega\beta_1$, $\omega\beta'_1$, d'où $\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1 = \dfrac{1}{\omega^2}$, $\omega^2 = \dfrac{\partial}{c_2}$ étant non carré dans $\mathcal{C}$. Donc $(\omega^{-2}z)\left(\dfrac{\alpha_1 z + \alpha'_1}{\beta_1 z + \beta'_1}\right)$ est dans $\mathfrak{U}(2, \pi)$, donc α_z est une substitution quelconque de $(\omega^2 z)\mathfrak{U}(2, \pi)$. Donc $\mathfrak{T} = \mathcal{N}^0 = \mathfrak{U}(2, \pi) + (\omega^2 z)\mathfrak{U}(2, \pi) = \mathcal{L}(2, \pi)$. Donc $\mathcal{N} = \{\mathfrak{T}, \dot{z}\}$, et $\dot{z}$ étant permutable à $\mathcal{L}(2, \pi)$, $\mathcal{N} = \mathfrak{T} + \mathfrak{T}\dot{z}$.

Comme $\left(\dfrac{-1}{\dot{z}}\right)$ est conjuguée de $\dot{z}$ dans $[\mathcal{A}']$ (47), on obtiendra le normalisant dans $[\mathcal{A}]$ de $\left(\dfrac{-1}{\dot{z}}\right)$ en transformant celui de $\dot{z}$ par une substitution s de $[\mathfrak{A}']$, transformant $(\dot{z})$ en $\left(\frac{-1}{\dot{z}}\right)$. La forme générale de s est $\left[\frac{(\alpha z+\alpha')}{\rho(\dot{\alpha} z+\dot{\alpha}')}\right]$, $\rho\dot{\rho}=-1$.

De plus, le nombre des conjuguées de $\dot{z}$ dans $[\mathfrak{A}']$ étant double du nombre de ses conjuguées dans $[\mathfrak{A}]$, on a $\mathfrak{N}'=\mathfrak{N}$.

54. Soit σ dans $[\mathfrak{A}']$ hors de $[\mathfrak{A}]$. On peut supposer (48) que $\sigma=\left(\frac{-\xi}{z}\right)$. Comme au n° 52, on connait (13) ses normalisants $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{L}(2, \pi^2)$ et $\mathfrak{T}=\mathfrak{N}^0$ dans $\mathfrak{U}(2, \pi^2)\equiv\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^0$. Pour déterminer $\mathfrak{N}$, il suffit donc de chercher une substitution $\tau=\dot{z}\alpha_z$, de $\dot{z}\mathfrak{U}(2, \pi^2)$, permutable à σ. Or, si l'on pose

$$\alpha_z=\frac{\alpha z+\alpha'}{\beta z+\beta'}, \qquad \alpha\beta'-\beta\alpha'=1,$$

la condition $\sigma\dot{z}\alpha_z=\dot{z}\alpha_z\sigma$ donne, en désignant par ρ un facteur de proportionnalité,

$$\alpha\xi=\rho\dot{\xi}\beta', \qquad \beta\xi=-\rho\alpha',$$
$$\beta'=\rho\alpha, \qquad \alpha'=-\rho\dot{\xi}\beta.$$

La condition de compatibilité est $\rho^2=\xi^{1-\pi}$. La condition $\alpha\beta'-\beta\alpha'\equiv 1$ donne $\rho\alpha^2+\rho\dot{\xi}\beta^2=1$. Si $\pi\equiv 1 \pmod 4$, on peut faire $\beta=0$, $\alpha=\xi^{\frac{\pi-1}{4}}$; alors $\alpha_z=\frac{z}{\rho}=\xi^{\frac{\pi-1}{2}}$. Si $\pi\equiv 3 \pmod 4$, on peut faire $\alpha=0$, $\alpha=\xi^{-\frac{\pi+1}{2}}$; alors $\alpha_z=-\frac{\rho\dot{\xi}}{z}=-\frac{\xi^{\frac{\pi+1}{2}}}{z}$. Alors $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^0+\mathfrak{N}^0\tau$. Enfin

$$\mathfrak{N}'=\mathfrak{N}+\mathfrak{N}\sigma=\mathfrak{M}+\mathfrak{M}\tau;$$

et l'on peut ici, quel que soit π, prendre une quelconque des deux formes de τ.

55. Supposons maintenant ψ réductible. Désignons ici par $\mathfrak{M}_z k$ et $\mathfrak{N}_{zk}$ les normalisants respectifs de $\left(\frac{-k}{z}\right)$ dans $\mathfrak{L}_z(2,\pi)$ et $\mathfrak{U}_z(2, \pi)$. On a vu (13), pour $-k$ carré et (13-15) pour $-k$ non carré, que $\mathfrak{M}_z k$ et $\mathfrak{N}_z k$ sont diédraux et que, si $\mathfrak{D}_z k$ et $\mathfrak{D}^0_{zk}$ sont leurs diviseurs

cycliques d'indice 2, on peut déterminer une même substitution τ_{zk} telle que

$$\mathfrak{M}_{zk} = \{ \mathfrak{O}_{zk}, \tau_{zk} \}, \qquad \mathfrak{N}_{zk} = \{ \mathfrak{O}^0_{zk}, \tau_{zk} \}.$$

Je supprimerai l'indice k pour $k = 1$.

Soit d'abord $\sigma = \frac{-1}{z}$. Alors, comme $[\mathfrak{B}] = \mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_u$, on a $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{U}_u$; et comme $[\mathfrak{A}^0] = \{[\mathfrak{B}], \mathfrak{m}_N\}$ (49) $= \{[\mathfrak{B}], \alpha_z\alpha_u\}$, α_z étant dans $\mathfrak{L}_z$ hors de $\mathfrak{U}_z$, on a $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \beta_z\alpha_u\}$, β_z étant dans $\mathfrak{M}_z$ hors de $\mathfrak{N}_z$. Comme $[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}^0] + [\mathfrak{A}^0]\,\mathfrak{t}$ (50) et comme aucune substitution de $[\mathfrak{A}^0]\,\mathfrak{t}$ n'est permutable à σ, on a $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$; cela correspond au fait que, dans $[\mathfrak{A}]$, $\left(\frac{-1}{z}\right)$ est conjugué de $\left(\frac{-1}{u}\right)$. Enfin, comme

$$[\mathfrak{A}'] = \{ [\mathfrak{A}], \mathfrak{g}_u \} = \{ \mathfrak{L}_z \mathfrak{L}_u, \mathfrak{t} \},$$

on a $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_z \mathfrak{L}_u$.

Pour traiter le cas $\sigma = \left(\frac{-1}{u}\right)$, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{-1}{u}\right) = \mathfrak{t}\left(\frac{-1}{z}\right)\mathfrak{t}.$$

Soit

$$\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right).$$

Alors

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{N}_u, \qquad \mathfrak{N}^0 = \{ \mathfrak{T}, \beta_z\beta_u \}, \qquad \mathfrak{N} = \{ \mathfrak{N}_0, \mathfrak{t} \},$$

et, comme

$$[\mathfrak{A}'] = \{ \mathfrak{L}_z \mathfrak{L}_u, \mathfrak{t} \}, \qquad \mathfrak{N}' = \{ \mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_u, \mathfrak{t} \}.$$

Soit

$$\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)\mathfrak{m}_N = \left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-N}{u}\right).$$

Alors

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_{zN} \mathfrak{N}_{uN}, \qquad \mathfrak{N}^0 = \{ \mathfrak{T}, \sigma \}, \qquad \mathfrak{N} = \{ \mathfrak{N}_0, \mathfrak{t} \},$$

$$\mathfrak{N}' = \left\{ \mathfrak{N}, \left(\frac{-N}{z}\right) \right\} = \{ \mathfrak{M}_{zN} \mathfrak{M}_{uN}, \mathfrak{t} \}.$$

Soit $\sigma = \mathfrak{t}$. Désignons par $\mathfrak{U}_{zu}$ le groupe formé des substitutions $\alpha_z\alpha_u$ où α_z parcourt $\mathfrak{U}_z$ et soit $\mathfrak{L}_{zu} = \{ \mathfrak{U}_{zu}, (N_z)(N_u) \}$. Il est clair que $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}_{zu}$, $\mathfrak{N}^0 = \{ \mathfrak{T}, \mathfrak{m}_N \} = \mathfrak{L}_{zu}$; puis $\mathfrak{N} = \{ \mathfrak{N}^0, \mathfrak{t} \}$. Comme

$$\mathfrak{A}' = \{ \mathfrak{L}_z \mathfrak{L}_u, \mathfrak{t} \},$$

on a $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$.

Soit $\sigma = \left(\frac{-N}{u}\right)$, on a $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_{uN}\mathfrak{U}_z$, $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \beta_{uN}\alpha_z\}$ α_z étant dans $\mathfrak{L}_z$ hors de $\mathfrak{U}_z$ et β_{uN} dans $\mathfrak{M}_{uN}$ hors de $\mathfrak{N}_{uN}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_{uN}\mathfrak{L}_z$.

Soit $\sigma = \left(\frac{-N}{u}\right)\left(\frac{-1}{z}\right)$. On a $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_{uN}\mathfrak{N}_z$. Soient β_{uN} une substitution de $\mathfrak{M}_{uN}$ hors de $\mathfrak{N}_{uN}$, et β_z une substitution de $\mathfrak{M}_z$ hors de $\mathfrak{N}_z$. Comme on peut écrire $[\mathfrak{A}^0] = \{[\mathfrak{B}], \beta_{uN}\beta_z\}$, on a $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \beta_{uN}\beta_z\}$. Comme ι transforme σ en $\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ et qu'aucune substitution de $[\mathfrak{A}_0]$ ne peut transformer $\left(\frac{-1}{u}\right)$ en $\left(\frac{-N}{u}\right)$, qui est hors de $\mathfrak{U}_u$, donc hors de $[\mathfrak{A}_0]$, on a $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$. On a de même, aucune substitution de $\iota\mathfrak{L}_z\mathfrak{L}_u$ n'étant permutable à σ, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_{uN}\mathfrak{M}_z$.

56. Passons aux groupes B, A^0 A, A'.

Tout d'abord, si (s) est une s_2 de première espèce de $\mathfrak{A}'$, c'est-à-dire si $s^2 = [\iota^{2h}]$, Is contient exactement deux s_2 qui sont $[\iota^{-h}]s$ et $d[\iota^{-h}]s$. Si au contraire (s) est de seconde espèce, c'est-à-dire si $s^2 = [\iota^{2h+1}]$, Is ne contient évidemment aucune s_2. Ainsi I*s contient ou non des* s_2 *suivant que* (s) *est de première ou de seconde espèce*. On a vu d'ailleurs (5) que, si s et s' sont deux s_2 de A', (s') est conjuguée de (s) dans $\mathfrak{A}'$ toujours et seulement si s' l'est, dans A', de s ou de ds.

Si donc (s) parcourt un système de représentants (s_1), (s_2), ... des classes de première espèce de A', s_i étant choisi de manière que $s_i^2 = 1$, l'ensemble des substitutions s_i, ds_i et d contient un système de représentants des classes de s_2 de A', s_i ne pouvant être conjuguée de s_k, ni de ds_k, si $k \neq i$. Si d'ailleurs s_i est conjuguée de ds_i dans A', le normalisant de s_i (qui est toujours aussi celui de ds_i) est d'indice 2 dans le normalisant S_i de Ds_i dans A' qui correspond à celui de (s_i) dans $\mathfrak{A}'$. Si au contraire s_i n'est pas conjuguée de ds_i, S_i est à la fois le normalisant de s_i et de Ds_i.

Les mêmes considérations s'appliquent à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}$, en observant que les s_i tels que $s_i^2 = 1$ ne sont pas nécessairement tous dans A, A^0, qui ne contiennent pas I, mais seulement D, ni dans B qui peut ne pas contenir D (I, 39).

57. Supposons d'abord ψ irréductible.

$\mathfrak{B}$ n'ayant ici qu'une classe de s_2 (44) et d étant ici hors de B(I, 39), B n'a qu'une classe de s_2, que l'on peut représenter par $t_{01}m_{1k}$, k étant tel que cette substitution soit dans B (I, 32).

Il est clair que $A_0 = BD$ *a exactement trois classes de* s_2 *représentées par* $s = t_{01}m_{1k}$, d, *et* ds. On peut remplacer ds par une s_2 quelconque $\neq d$ hors de B, par exemple par sm_{1N}.

Dans A, les trois classes de s_2 de A^0 restent distinctes, puisque $t_{01}m_{1k}$ est dans B, et $dt_{01}m_{1k}$ hors de B. Comme $\mathfrak{A}$ a, hors de $\mathfrak{A}^0$ les deux classes (t_1) et (t_2) (46), l'ensemble des quatre substitutions t_1, t_2, dt_1, dt_2 contient (56) un système de représentants des classes de s_2 de $\mathfrak{A}$ hors de $\mathfrak{A}^0$, t_i ne pouvant être conjugué ni de t_k, ni de dt_k, si $k \neq i$. D'ailleurs t_i, ayant un multiplicateur égal à -1 et trois égaux à 1, ne peut être conjugué de dt_i. Donc A a exactement, hors de A^0, quatre classes de s_2, représentées par t_1, t_2, dt_1, dt_2.

On remarquera que t_2 est conjugué de $t_1 m_{1N}$. En effet les substitutions de $[\mathfrak{A}']$ qui correspondent respectivement à $\mathrm{I}t_1$, $\mathrm{I}t_2$, $\mathrm{I}m_{1h}$ (puissance de $\mathrm{I}\gamma$) sont (45, 47) $\left(\frac{-1}{\dot{z}}\right)$, $\dot{z}$, (hz). Donc à $\mathrm{I}t_1 m_{1h}$ correspond $\left(\frac{-1}{\dot{z}}\right)(hz) = \dot{z}\left(\frac{-h}{z}\right)$. Si $h = r^2$, on a $\left(\frac{-h}{z}\right) = \left(\frac{-r}{r^{-1}z}\right)$; et le caractère (44) de $(\dot{z})\left(\frac{-r}{r^{-1}z}\right)$ est $\frac{-r}{\dot{r}} = -r^{1-\pi} = -h^{\frac{1-\pi}{2}}$. Selon que h est carré ou non, ce caractère est -1 ou $+1$; donc, (45) $\dot{z}\left(\frac{-h}{z}\right)$ est conjuguée de $\left(\frac{-1}{\dot{z}}\right)$; ou de $(\dot{z})$; donc $(t_1 m_{1h})$ est conjuguée de (t_1) ou (t_2). Donc $t_1 m_{1h}$ est conjuguée de t_1 ou t_2, puisqu'elle n'a comme eux qu'un seul multiplicateur égal à -1 [1]. On peut donc remplacer t_1 et t_2 par $t_1 m_{1,k}$, $t_1 m_{1,kN}$. Donc *les classes de* A *peuvent être représentées par* $t_{01}m_{1k} = s$, sm_{1N} *et* d, *qui sont dans* A^0, *puis* st_0, $sm_{1N}t_0$, dst_0, $dsm_{1N}t_0$, *qui sont hors de* A^0, *où l'on voit qu'il n'est plus nécessaire de préciser le caractère quadratique de* k.

A toute s_2 de A' hors de A correspond une s_2 de première espèce de $\mathfrak{A}'$ hors de $\mathfrak{A}$. Or $\mathfrak{A}'$ n'a hors de $\mathfrak{A}$ qu'une classe de s_2 représentée

---

[1] De même $t_2 m_{2\sigma}$, σ étant de la forme $\xi^{k(n-1)}$ est conjuguée de t_2 ou de t_1 suivant que k est pair ou impair. Car $t_2 m_{2\sigma}$ répond à $(\dot{z})(\sigma z)$, dont le caractère est $(-1)^k$, et ne peut être conjuguée de dt_2 ni de dt_1, qui ont trois multiplicateurs égaux à -1.

par $(t_{12}\gamma)$ (47). Comme $(t_{12}\gamma)^2 = [\iota]$ cette classe est de seconde espèce. Donc A' n'a aucune s_2 hors de A.

On voit de suite que les classes de s_2 de A^0 restent distinctes dans A', comme dans A. Mais les classes de A représentées par t_1 et t_2 se réunissent dans A', et de même celles représentées par dt_1 et dt_2. Cela résulte de ce que les deux classes de s_2 de $\mathfrak{A}$ hors de $\mathfrak{A}_0$, représentées par (t_1) et (t_2), se réunissent en une seule dans $\mathfrak{A}'$ (47) (1).

58. Supposons maintenant ψ réductible, B contient ici d (I, 39). Les trois classes de s_2 de $\mathfrak{B}$ sont $(d_1 T_{12})$, $(d_1 T_{12} t_{12})$, (t_{12}); et $\overline{d_1 T_{12}}^2 = \overline{d_1 T_{12} t_{12}}^2 = d$ (48). Donc pour que $[\iota^h] d_1 T_{12}$ et $[\iota^h] d_1 T_{12} t_{12}$ soit d'ordre 2, il faut que $\pi - 1$ soit $\equiv 0 \pmod 4$ et que $h = \frac{\pi - 1}{4}$; mais alors ces substitutions sont dans A' hors de A. A la classe (t_{12}) de $\mathfrak{B}$ correspondent au plus, dans B, deux classes représentées par t_{12} et dt_{12}. Mais dt_{12} est conjuguée de t_{12}. En effet, on a $t_{12} = R_{1,2,1} S_{1,2,-1}$ (I, 28), R_{121} étant dans $\mathbf{V} \equiv U_{x_1, x_2}$ et $S_{1,2,-1}$ dans $\mathbf{W} \equiv U_{x_1, y_2}$ (I, 28, 40). Or R_{121} par exemple répond à $|x_2 \quad -x_1| = \alpha$ de U_{x_1, x_2}; et toute substitution de U_{x_1, x_2} de la forme $\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda^2 + \mu^2 = -1$ transforme α en $\alpha . \alpha^2$, $\alpha^2 = |-x_1, \quad -x_2|$ (S., p. 115). Donc la substitution de $\mathbf{V}$ qui répond à β transforme R_{121} en dR_{121}, et, par suite t_{12} en dt_{12}. Cette substitution, qui est

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_1 & & +\mu x_2 & \\ y_1 & & -\lambda y_1 & & -\mu y_2 \\ x_2 & \mu x_1 & & -\lambda x_2 & \\ y_2 & & -\mu y_1 & & +\lambda y_2 \end{vmatrix}$$

est égale à $m_{1\lambda} m_{2\lambda}^{-1} V_{1,2,\lambda,\mu} V_{2,1,\mu/\lambda}$, si $\lambda \neq 0$, et à $m_{1\mu} m_{2\mu} T_{12}$ si $\lambda = 0$ $(\lambda^2 + \mu^2 = -1)$. Donc B *a exactement deux classes de s_2 représentées par d et t_{12}.*

D'après l'étude de $\mathfrak{A}^0$ (49), A^0 a, hors de B, au plus deux classes

(1) On pourrait dire aussi que $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1\iota}$ est, comme on vient de le voir, conjuguée de t_2. Mais c'est au fond la même démonstration.

de s_2, représentées par $t_{12}m_{1N}$ et $dt_{12}m_{1N}$. Mais ces deux substitutions sont conjuguées dans A^0, car si -1 est carré, la substitution $m_{1\lambda}m_{2\lambda}$ où $\lambda^2 = -1$ transforme $t_{12}m_{1N}$ en $dt_{12}m_{1N}$; et, si (-1) est non carré, la substitution $m_{1\mu}T_{12}m_{1\mu}^{-1}$, où $\mu^2 = -N$, transforme encore $t_{12}m_{1N}$ en $dt_{12}m_{1N}$. On peut remplacer t_{12} par $s = t_{01}m_{1k}$ (k étant tel que cette substitution soit dans B). Alors, comme dans le cas de ψ irréductible, *les trois classes de s_2 de A^0 peuvent être représentés par s, sm_{1N}, et d; où l'on voit qu'il n'est plus nécessaire de préciser le caractère quadratique de k.*

D'après l'étude de $\mathfrak{A}$ (50), A a, outre les classes de s_2 de A^0 (qui restent évidemment distinctes dans A), exactement quatre classes de s_2, représentées par t_2m_{2k} et dt_2m_{2k}, $t_2m_{2,kN}$ et $dt_2m_{2,kN}$ (t_2m_{2k} et $t_2m_{2,kN}$ ont un seul multiplicateur -1; leurs produits par d en ont trois), ou, en transformant par T_{12}, par t_1m_{1k} et dt_1m_{1k}, $t_1m_{1,kN}$ et $dt_1m_{1,kN}$. Donc A *a exactement, comme pour ψ irréductible, sept classes de s_2, que l'on peut représenter par s, sm_{1N} et d, qui sont dans A^0, et st_0, dst_0, st_0m_{1N}, dst_0m_{1N}, qui sont hors de A^0.*

On a vu que les classes de s_2 de $\mathfrak{B}$ réprésentées par (d_1T_{12}) et $(d_1T_{12}t_{12})$ (48) se réunissent en une dans $\mathfrak{A}$ (50). D'autre part (58) il ne leur correspond de s_2 que dans A' hors de A, et seulement si -1 est carré. De plus la seule classe de s_2 de $\mathfrak{A}'$ hors de $\mathfrak{A}$ qui puisse fournir des s_2 de A' est $(d_1T_{12}t_{12}\gamma^k)$ (k impair) (51, 56), et seulement si -1 est non carré.

Si -1 est carré, et si $-1 = \varepsilon^2$, les s_2 de Id_1T_{12} sont (56) $[\varepsilon]d_1T_{12}$ et $[\varepsilon]d_2T_{12}$, que T_{12} transforme l'une dans l'autre. Si -1 est non carré, et si $g^2 = -1$, les s_2 de $Id_1T_{12}t_{12}\gamma^k$ sont $[g^{-k}]d_1T_{12}t_{12}\gamma^k$ et $[g^{-k}]d_2T_{12}t_{12}\gamma^k$, que T_{12} transforme encore l'une dans l'autre.

Donc, quel que soit π, A' a, hors de A, une seule classe de s_2 que l'on peut, par exemple, représenter par $\varphi = \gamma^{(\pi-1)/2}$ (38).

D'après l'étude de $\mathfrak{A}'$ (51), les quatre classes, de s_2 de A hors de A^0 se réunissent, dans A', en deux classes, que l'on peut représenter par t_2m_{2k} et dt_2m_{2k}. Les autres classes de s_2 de A restent évidemment distinctes dans A'.

59. D'après le n° 12, si $-k$ est carré $\left(\frac{-k}{z}\right)$ est conjugué de $(-z)$

dans $\mathcal{L}_z$; les substitutions qui transforment $\left(\frac{-k}{z}\right)$ en $(-z)$ forment le complexe $\mathfrak{M}_{zk}e_{zk}$, e_{zk} étant la substitution unimodulaire ξ du n° 13 et $\mathfrak{M}_{zk}$ le normalisant de $\left(\frac{-k}{z}\right)$ dans $\mathcal{L}_z$. Soient $e=k$ une des deux correspondantes de e_{zk} dans B (48) et $\varepsilon^2=-k$.

Soit -1 carré, et $k=1$, les transformées de $[\varepsilon]d_1T_{12}$ et de $[\varepsilon]d_2T_{12}$ par e_{z1} sont les s_2 du complexe $\mathrm{I}m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon}^{-1}$ qui correspond à $(-z)$ (¹). Ces s_2 sont les substitutions du complexe $\mathrm{D}[\varepsilon]m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon}^{-1}$ dont l'une fixe 1000.

Soit -1 non carré; si k est non carré et $=\iota^h$ (h impair), les transformées de $[g^{-h}]d_1T_{12}t_{12}\gamma^h$ et de $[g^{-h}]d_2T_{12}t_{12}\gamma^h$ par $e_{u\iota^h}$ sont les deux s_2 du complexe qui correspond à $(-u)=g_u^{\frac{\pi-1}{2}}$. Ces deux s_2 sont φ et $d\varphi$, dont la seconde fixe 1000.

60. Cherchons les normalisants respectifs N, N′, N⁰, P dans A, A′, A⁰, B d'une s_2 $s\neq d$ de A′. Au complexe Is (dont les seules s_2 sont s et ds) répond dans $[\mathcal{A}']$ une $s_2\sigma$. Soient $\mathrm{N_D}$, $\mathrm{N'_D}$, $\mathrm{N^0_D}$, $\mathrm{P_D}$ les diviseurs de A, A′, A⁰, B qui répondent respectivement a $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}^0$, $\mathfrak{P}$ (52) dans les homomorphismes de $[\mathcal{A}]$, $[\mathcal{A}']$, $[\mathcal{A}^0]$, $\mathcal{B}$ à A, A′, A⁰, B. Ce sont les normalisants respectifs de Is, donc de Ds dans A, A′, A⁰, B. L'indice $(\mathrm{N_D}, \mathrm{N})$ est 2 ou 1 suivant que s et ds sont conjuguées ou non dans A (toute substitution de A transformant s en ds est dans $\mathrm{N_D}$ hors de N). Si d'ailleurs s et ds sont conjugués dans A, le diviseur $\mathrm{N_D}$ correspond à un diviseur d'indice 2 dans $\mathfrak{N}$. Il suffira d'un petit nombre d'essais pour déterminer celui de ces diviseurs auquel correspond N.

61. Si ψ est irréductible, on a vu (57) que s n'est jamais conjuguée de ds. Les normalisants N, N′, N⁰, P sont donc complètement déterminés par $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}^0$, $\mathcal{B}$.

62. Soit ψ réductible. Comme précédemment on connait déjà ici (50, 55) le normalisant de t_2 et de dt_2. Il reste donc seulement à

(¹) On voit directement que $(m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon}^{-1})$ de $\mathcal{B}$ correspond à $(-z)$.

considérer les cas

$$s = [\varepsilon]\, d_1 T_{12} \qquad (-\text{1 carré}; \ \varepsilon^2 = -1),$$
$$s = [g^{-1}]\, d_1 T_{12} t_{12} \gamma \qquad (-\text{1 non carré}; \ g^2 = -\iota) \qquad (58),$$
$$s = t_{12} m_{1\mathrm{N}} \quad (49), \qquad s = t_{12} \quad (48).$$

63. Au lieu de $s = [\varepsilon] d_1 T_{12}$, $\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)$ (48, 58), il est avantageux de prendre (59) $s = [\varepsilon] m_{1z} m_{2z-1}$, $\sigma = (-z)$. En désignant ici par $\mathfrak{M}_z$ et $\mathfrak{N}_z$ les normalisants $\left\{(\iota z), \frac{-1}{z}\right\}$ et $\left\{(\iota^2 z), \left(\frac{-1}{z}\right)\right\}$ (13) de $(-z)$ dans $\mathfrak{L}_z$ et $\mathfrak{U}_z$, et par $\mathfrak{T}$ celui de $(-z)$ dans $[\mathfrak{B}]$, on a $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{U}_u$ (55). $\mathfrak{N}_z$ a trois diviseurs d'indice 2, qui sont

$$\{\iota^2 z\} = \mathfrak{D}_z^0, \qquad \left\{(\iota^4 z), \left(\frac{-1}{z}\right)\right\} \quad \text{et} \quad \left\{(\iota^4 z), (\iota^2 z)\left(\frac{-1}{z}\right)\right\}.$$

Or les correspondants de $\left(\frac{-1}{z}\right)$ sont hors de A, et ceux de $(\iota^2 z)$ étant dans B, ceux de $(\iota^2 z)\left(\frac{-1}{z}\right)$ sont hors de B. D'ailleurs (I, 40) toute substitution du groupe **W** qui répond à $\mathfrak{U}_u$ est permutable à s, qui est dans **V**. Donc P répond à $\mathfrak{D}_z^0 \mathfrak{U}_u$. De même N^0 répond à un diviseur d'indice 2 de $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \beta_z \alpha_u\}$ (55), où l'on peut supposer $\beta_z = (\iota z)$ (13) et $\alpha_u = (\iota u)$. Comme $\mathfrak{T} = \left\{(\iota^2 z), \left(\frac{-1}{z}\right), \mathfrak{U}_u\right\}$, on a

$$\mathfrak{N}^0 = \left\{m_2, \left(\frac{-1}{z}\right), \mathfrak{U}_u\right\}.$$

Comme précédemment, le seul diviseur d'indice 2 dont le correspondant soit dans A^0 est $\{m_\iota, \mathfrak{U}_u\}$.

Comme $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$, et que ce diviseur est aussi le seul dont le correspondant soit dans A (55), on a $\mathrm{N} = \mathrm{N}^0$. Enfin $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_z \mathfrak{L}_u$ (55) n'a qu'un diviseur d'indice 2 contenant σ, qui est $\left\{\mathfrak{D}_z^0, \frac{-1}{z}, \mathfrak{L}_u\right\}$, donc N', qui contient évidemment s, correspond à ce diviseur.

64. Soient

$$s = [g^{-1}]\, d_1 T_{12} \gamma \quad (-\text{1 non carré}; \ g^2 = -\iota), \qquad \sigma = \left(\frac{-\iota}{u}\right), \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{N}_{u\iota} \mathfrak{U}_z.$$

Le diédral $\mathfrak{N}_{u\iota}$ a trois diviseurs d'indice 2. Une vérification directe montre que $\mathfrak{D}^0_{u\iota}$ (13) est le seul auquel corresponde un diviseur de P. Donc P répond à $\mathfrak{D}^0_{u\iota}\mathfrak{U}_z$. De même N^0 répond à un diviseur d'indice 2 de $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \beta_{u\iota}\alpha_z\}$ (55) où l'on peut supposer que $\beta_{u\iota}$ est un générateur de $\mathfrak{D}_{u\iota}$ (13) et que $\alpha_z = (\iota z)$. Comme $\mathfrak{T} = \{\beta^2_{u\iota}, \tau_{u\iota}, \mathfrak{U}_z\}$, $\tau_{u\iota}$ étant, comme τ_k au n° 55, la substitution σ du n° 15 où l'on change z en u et k en ι, on a $\mathfrak{N}^0 = \{\beta_{u\iota}(\iota z), \tau_{u\iota}, \mathfrak{U}_z\}$. Le diédral $\{\beta_{ui}(iz), \tau_{u\iota}\}$ a trois diviseurs d'indice 2. Une vérification directe, opérée sur les correspondantes (51) de $\beta_{u\iota}$ et (ιz) montre que $\{\beta_{u\iota}(\iota z)\}$ est le seul auquel corresponde un diviseur de N^0. Donc N^0 répond à $\{\beta_{u\iota}(\iota z), \mathfrak{U}_z\}$. Comme $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$ (55) on a $N = N^0$. Enfin on voit, comme dans le cas de P, que N' répond à $\mathfrak{D}_{u\iota}\mathfrak{L}_z$.

65. Soient

$$s = t_{12}m_{1\iota}, \qquad \sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)m_\iota (49) = \left(\frac{-\iota}{z}\right)\left(\frac{-\iota}{u}\right).$$

On a $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_{z\iota}\mathfrak{N}_{u\iota}$. $\mathfrak{T}$ a plusieurs diviseurs d'indice 2. Le diviseur de B répondant à $\mathfrak{T}_1 = \{\mathfrak{D}^0_{z\iota}\mathfrak{D}^0_{u\iota}, \tau_{z\iota}\tau_{u\iota}\}$ est P. En effet, soit $s = s's''$, s' et s'' étant deux s_2 de A' répondent respectivement à $\left(\frac{-\iota}{z}\right)$ et $\left(\frac{-\iota}{u}\right)$. D'après le cas précédent, les substitutions de B correspondant à celles de $\mathfrak{D}^0_{z\iota}\mathfrak{D}^0_{u\iota}$ sont permutables à s' et s''; celles qui répondent à $\tau_{z\iota}$ transforment s' en ds' en sont permutables à s''; celles qui répondent à $\tau_{u\iota}$ transforment s'' en ds'', et sont permutables à s'. Donc celles qui répondent à $\tau_{z\iota}\tau_{u\iota}$ sont permutables à s, et P répond à $\mathfrak{T}_1$. Comme $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{T}, \sigma\}$ (55) et que s est ici dans A^0, N^0 correspond à $\{\mathfrak{T}_1, \sigma\} = \mathfrak{N}^0_1$. Comme $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}^0_\alpha, \iota\}$ (55) et que t_2 est permutable à s, N répond à $\{\mathfrak{N}^0_1, \iota\} = \mathfrak{N}_1$, et N' à $\left\{\mathfrak{N}_1, \left(\frac{-1}{u}\right)\right\}$.

66. Soient $s = t_{12}$, $\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}_z\mathfrak{N}_u$ a plusieurs diviseurs d'indice 2. Soit d'abord -1 non carré. Une vérification directe montre que toute substitution de B correspondant à la substitution générale de $\mathfrak{D}^0_z$ (14) ou de $\mathfrak{D}^0_u$ est permutable à t_{12} [1]. Au contraire,

---

[1] Ce calcul ne fait pas intervenir le caractère quadratique du déterminant de la substitution générale considérée. Il montre donc aussi que toute substitution de A^0 correspondant à la substitution générale de $\mathfrak{D}_z$ ou de $\mathfrak{D}_u$ est permutable à t_{12}.

toute substitution de B correspondant à τ_z (qui est ici la substitution σ du n° 15 pour $k = 1$) transforme t_{12} en dt_{12}. Donc toute substitution correspondant à $\tau_z\tau_u$ est permutable à t_{12}. Donc P répond à

$$\{\mathcal{O}_z^0\mathcal{O}_u^0, \tau_z\tau_u\} = \mathfrak{T}_1.$$

Soit -1 carré, il est alors avantageux de prendre (59) $s = d_1$, $\sigma = (-z)(-u)$. D'après les résultats obtenus pour les normalisants de $[\varepsilon]m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon-1}$ correspondant à $(-z)$, le normalisant de d_1 dans B répond à

$$\left\{\{\iota^2 z\}\{\iota^2 u\}, \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)\right\} = \mathfrak{T}'_1.$$

Si l'on transforme par la substitution $e_{z1}^{-1}e_{u1}^{-1} = f(59)$, on voit que le normalisant P de t_{12} dans B répond au transformé de $\mathfrak{T}'_1$ par $e_{z1}^{-1}e_{u1}^{-1} = \mathfrak{f}$, qui est précisément $\mathfrak{T}_1$, les notations ayant toujours les significations indiquées au début du n° 55.

Si (-1) est carré, le normalisant de d_1 dans A^0 répond à $\{\mathfrak{T}'_1, \mathfrak{m}_t\}$, car $\mathfrak{T}'_1$ est d'indice 2 dans ce dernier groupe, et m_{1t}, qui correspond à $\mathfrak{m}_t$ (49) est évidemment permutable à d_1. Le normalisant N^0 de t_{12} dans A^0 s'obtient en transformant celui de d_1 par f. Donc N^0 répond à $\{\mathfrak{T}_1, \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{m}_t\mathfrak{f}\} = \mathfrak{N}_1^0$. On remarquera que $\mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{m}_t\mathfrak{f}$ est le produit de deux générateurs respectifs $\mathfrak{d}_z$ et $\mathfrak{d}_u$ de $\mathcal{O}_z$ et $\mathcal{O}_u$.

Il en est de même si (-1) est non carré, comme le montrent les observations faites à l'occasion du calcul de P.

N répond évidemment à $\{\mathfrak{N}_1^0, \mathfrak{t}\} = \mathfrak{N}_1$, en sorte que $N = \{N^0, t_2\}$. N' répond à $\{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{d}_z\} = \{\mathcal{O}_z\mathcal{O}_u, \tau_z\tau_u\}$, car, d'après les calculs précédents, toute substitution de A' répondant à $\mathfrak{d}_z$ est permutable à t_{12}.

§ III. $n > 4$.

67. Les résultats précédents s'étendent comme il suit au cas où n est > 4. *Supposons* $\psi \neq 0$, *réductible ou irréductible. Les classes de* s_2 *de* $A(n, \pi)$ *peuvent être représentées, si* n *impair* $= 2\nu + 1$, *par les substitutions* $s_i = t_{01}m_{1k_i}d_{1\ldots i}$, s_im_{1N}, *qui ont chacune* $2i$ *multiplicateurs* $-1 (i = 1, \ldots, \nu)$; s_it_0, $s_im_{1N}t_0$, *qui ont chacune* $2i-1$ *multiplicateurs* -1 $(i = 1, \ldots, \nu)$; d, qui a $2\nu + 1$ multiplicateurs (-1) $(i = 1, \ldots, \nu)$; k_i *étant assujetti à la condition que* s_i *soit dans* B (k_i *ne dépend que de* a,

et, si -1 *est non carré, de* i*; en prenant au besoin* $m_{1r}^{-1} s_i m_{1r}$ *pour* s_i*, on peut remplacer* k_i *par* $k_i r^2$*);*

si n *pair* $= 2\nu$*, par les mêmes substitutions auxquelles on adjoint* $ds_1 t_0$ *et* $ds_1 m_{1N} t_0$*, qui ont chacune* $2\nu + 1$ *multiplicateurs* -1*, et qu'on peut désigner, pour plus de symétrie, par* $s_{\nu'} t_0$*,* $s_{\nu'} m_{1N} t_0$*, en posant* $s_{\nu'} = t_{01} m_{1k_{\nu'}} d$ *et en faisant* $k_{\nu'} = -k_1$ *(*[1]*).*

68. Montrons d'abord que les classes indiquées dans l'énoncé sont distinctes. Cela est clair pour celles qui n'ont pas le même nombre de multiplicateurs. Il reste seulement à établir, la distinction de deux classes de s_2, représentées, l'une par s, l'autre par sm_{1N}.

Si s est une s_i, cela résulte de ce que s_i est dans B, et $s_i m_{1N}$ dans A^0 hors de B.

Si s est une $s_j t_0$, $j = 1, \ldots, \nu'$, s et sm_{1N} sont toutes deux dans A hors de A^0. Or on a $A = A^0 + A^0 t_1$ (I, 34) et $A^0 = B + Bm_{1N}$ (I, 39), donc $A = B + Bm_{1N} - Bt_1 + Bt_1 m_{1N}$; et les deux groupes $B^1 = \{B, t_1\}$, $B^2 = \{B, t_1 m_{1N}\}$ sont d'indice 2 et normaux dans A. Il est clair que s et sm_{1N} sont toujours l'une dans B^1, l'autre dans B^2; elles ne sont donc pas conjuguées dans A.

On a évidemment aussi

$$B^1 = \{B, t_i\}, \qquad B^2 = \{B, t_i m_{1N}\} \qquad (i = 1, \ldots, \nu).$$

De même si n est pair, et $m_{\nu'\rho}$ dans A^0 hors de B, les groupes B^1 et B^2 coïncident avec $\{B, t_{\nu'}\}$ et $\{B, t_{\nu'} m_{\nu'\rho}\}$; pour préciser B^1 coïncide avec $\{B, t_{\nu'}\}$ toujours et seulement si $t_{1\nu'}$ est dans B, c'est-à-dire toujours et seulement si ψ est réductible ([2]). De même B^1 et B^2 coïncident

---

([1]) Si n est impair, les $ds_i t_0$ et $ds_i m_{1N} t_0$ sont conjugués des s_i et $s_i m_{1N}$; car on a alors $dt_0 = d_{1,\ldots,\nu}$ ($t_0 = d_0$ pour n impair) et la s_2 $ds_i t_0 = t_{01} m_{1k_i} d_{i+1,\ldots,\nu}$ est transformée par $T_{i+1,2} T_{i+2,3} \ldots T_{\nu,\nu-i+1}$ (qui se réduit à 1 pour $i = 1$) en

$$t_{01} m_{1k_i} d_{2,\ldots,\nu-i+1} = t_{01} m_{1,-k_i} d_{1,2,\ldots,\nu-1+i},$$

qui, suivant le caractère quadratique de $-k_i$, est conjuguée de $s_{\nu-i+1}$ ou de $s_{\nu-i+1} m_{1N}$. Comme ici d n'a que 2ν multiplicateurs -1 (d_0 n'en a qu'un), $ds_1 t_0$ et $ds_1 m_{1N} t_0$ n'en ont que 2ν, comme s_ν et $s_\nu m_{1N}$.

([2]) t_{0i} est dans B toujours et seulement si δc est carré (I, p. 348).

Soit d'abord ψ irréductible. On a $t_0 = t_{\nu'} m_{\nu' q}$ ($q = \dot{x} x^{-1}$, $\dot{x} x = c$) (I, p. 322). Si l'on pose $c = \iota'^{k(\pi+1)}$, on peut prendre $x = \iota'^{k}$, $\dot{x} = \iota'^{k\pi}$; donc $q = \iota'^{(1-\pi)k}$. Donc pour avec $\{B, t_0\}$ et $\{B, t_0 m_{j\rho}\}$, j étant l'un des nombres $1, \ldots, \nu'$, et $m_{j\rho}$ étant dans A^0 hors de B. Pour préciser, B^1 coïncide avec $\{B, t_0\}$ toujours si t_{01} est dans B, c'est-à-dire que si δc est carré (I, p. 348).

On remarquera, pour la suite, que, si une certaine substitution τ est dans l'un des groupes B^1 ou B^2, la substitution $\tau_k = \tau m_{\nu', \sigma^k}$, σ étant d'ordre $\pi + 1$, est dans ce même groupe ou dans l'autre, suivant que m_{ν', σ^k} est ou non dans B, c'est-à-dire suivant que k est pair ou impair.

Si n est impair, et $\psi = cx^2$, $t_{01} m_{1, -c\lambda^2}$ est toujours dans B (I, p. 336). Donc $\{B, t_0\}$ coïncide avec B^1 toujours et seulement si $-c$ est carré. D'autre part comme $dt_1 = t_{01} m_{1,-c} m_{1,c^{-1}} d_{2\ldots\nu}$, $\{B, d\}$ coïncide avec B^1 toujours et seulement si c est carré avec -1 carré ou ν impair, ou si c est non carré avec -1 non carré et ν pair.

69. Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autres classes que celles indiquées dans l'énoncé. On l'a vu pour $n = 3$ (43) et pour $n = 4$ (57, 58). Admettons-le pour les valeurs de n inférieures à la valeur considérée. Soit s une $s_2 \neq d$ de A. Si s déplace tous les points du champ, sa forme canonique est d, et, comme d est normale dans L, s coïncide avec d. Donc s fixe au moins un point.

70. Soit d'abord $n = 2\nu + 1$. On a vu (II, 1) que A a π systèmes d'intransitivité $q_{\lambda a} = q_\lambda$, $q_{\lambda a}$ désignant l'ensemble des points vérifiant $a = \lambda$, λ parcourant $\mathcal{C}$, et le point $(0, \ldots, 0)$ étant exclu de q_0.

Si s fixe un point de q_0, on peut supposer que s est dans le diviseur X_0 de A qui fixe le point $(1, 0, \ldots, 0)$. On voit alors, comme dans l'étude du groupe hermitien (17), que s est conjuguée d'une s_2 du groupe A_1 de la forme $a - x_1 y_1$. Ce groupe fixant tous les points $(x_1, y_1, 0, \ldots, 0)$, on est ramené au cas où s fixe des points q_λ $(\lambda \neq 0)$.

---

que $m_{\nu' q}$ soit dans B, il faut et il suffit (I, p. 347) que k soit pair, donc que c soit carré. Alors t_{0i}, et, par suite, $t_{i\nu'}$ ne sont pas dans B.

Soit maintenant ψ réductible. En posant $q = xx'^{-1}$, $xx' = c$, on a encore (I, p. 333-334) $t_0 = t_{\nu'} m_{\nu' q}$. Pour que $m_{\nu' q}$ soit dans B, il faut et il suffit que q soit carré (I, p. 347; σ est ici réel), ou, ce qui revient au même, que c soit carré. Alors t_{0i}, et par suite $t_{i\nu}$, sont dans B.

Supposons donc que s fixe un point de $q_{\lambda a}(\lambda \neq 0)$ on peut supposer que s est dans le diviseur X_λ de A qui fixe le point $(1, \lambda, 0, \ldots, 0)$ [II, p. 48, note (1)]. Or ce groupe est isomorphe (I, 21) au groupe $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ de la forme

$$a_{\lambda 0} = \Sigma_1^{\nu-1} x_i y_i + c x^2 - \frac{y^2}{4\lambda},$$

dont les classes de s_2 sont représentées par

$$s_i, \quad s_i m_{1N}, \quad s_i t_0, \quad s_i m_{1N} t_0 \qquad (i = 1, \ldots, \nu - 1;$$
$$d_{1, \ldots, \nu-1, 0} s_1 t_0, \quad d_{1, \ldots, \nu-1, 0} s_1 m_{1N} t_0, \quad \text{et} \quad d_{1, \ldots, \nu-1, 0}.$$

D'après la correspondance indiquée [I, p. 48, note (1)] entre $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ et X_λ (1), leurs correspondantes sont

$$s_{i\lambda} = m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_{2, \ldots, i+1}, \qquad s_{i\lambda} m_{2N},$$
$$s_{i\lambda} m_{1\lambda} t_1 = t_2 m_{2k_i} d_{2, \ldots, i+1},$$
$$s_{i\lambda} m_{2N} m_{1\lambda} t_1 = t_2 m_{2, k_i N} d_{2, \ldots, i+1},$$
$$d_{2, \ldots, \nu} m_{1\lambda} t_{01} t_2 m_{2k_1} d_2 = d m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_1} d_{12}, \qquad d m_{1\lambda} t_{12} m_{2, k_1 N} d_{12},$$
$$d_{2 \ldots \nu} m_{1\lambda} t_{01} = t_{01} m_{1\lambda^{-1}} d_{2 \ldots \nu}.$$

Désignons maintenant par $A_{j_1, j_2, \ldots, j_r}$, $A^0_{j_1, \ldots, j_r}$, $B_{j_1, \ldots, j_r}$ $(r \geqq 2)$ les diviseurs de A, A^0, B, qui agissent sur les seules variables d'indice $j_1, \ldots, j_r$ (l'un de ces indices pouvant être nul). La s_2 $m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_2 = s_{i\lambda} d_{3, \ldots, i+1}$ ($d_{3, \ldots, i+1}$ est à supprimer si $i = 1$) de A^0_{12} est conjuguée, dans A_{012} d'une s_2 de la forme $t_{01} m_{1\mu}$. En effet, A^0_{12} n'a, d'après le cas $n = 4$ et en négligeant d, qu'une classe de s_2 dans B_{12} et une hors de B_{12} (58). Comme $t_{12} m_{1\mu} m_{2,-c}$ est une s_2 dans B_{12} ou hors de B_{12} suivant le caractère quadratique de μ, on peut toujours déterminer μ de manière que $t_{12} m_{1\mu} m_{2,-c}$ soit conjuguée de $s_{i\lambda} d_{3, \ldots, i+1}$. Ensuite, d'après le cas $n = 3$ (43, note) $t_2 m_{2,-c}$ est conjuguée de t_0 dans A_{02}. Donc, dans A_{012}, $t_{01} m_{1\mu}$ est conjuguée de $s_{i\lambda} d_{3, \ldots, i+1}$. Donc $s_{i\lambda}$ est conjuguée de $t_{01} m_{1\mu} d_{3, \ldots, i+1}$, que $T_{32}, \ldots, T_{i+1, i}$ transforme en s_i ou $s_i m_{1N}$ ($i = 1, \ldots, \nu - 1$). On voit de même que $s_i m_{2N}$ est conjuguée de s_i ou de $s_i m_{1N}$ ($i = 1, \ldots, \nu - 1$). Les substitutions $t_2 m_{2k_i} d_{2, \ldots, i+1}$ et $t_2 m_{2, k_i N} d_{2, \ldots, i+1}$ sont transformées par $T_{12}, T_{23}, \ldots, T_{i, i+1}$ en $s_i t_0$ et $s_i m_{1N} t_0$ ($i = 1, \ldots,$

(1) D'après cette correspondance, aux substitutions t_0, d_0, t_k, d_k, $m_{k\mu}$ ($k = 1, \ldots, \nu - 1$) de $A(2\nu, \pi, a_{\lambda 0})$ correspondent les substitutions $m_{1\lambda} t_1$, $m_{1\lambda} t_{01}$, t_{k+1}, d_{k+1}, $m_{k+1, \mu}$.

$\nu - 1$). On voit encore, comme pour $m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_2$, que les substitutions

$$dm_{1\lambda} t_{12} m_{2k_1} d_{12} \quad \text{et} \quad dm_{1\lambda} t_{12} m_{2,k_1 N} d_{12}$$

sont conjuguées de dt_{01} et $dt_{01} m_{1N}$, conjuguées elles-mêmes ($d_0 = t_0$) de $s_\nu t_0$ et $s_\nu m_{1N} t_0$.

Enfin $t_{01} m_{1\lambda-1} d_{2,\ldots,\nu} = t_{01} m_{1,-\lambda-1} d_{1,2,\ldots,\nu}$ est évidemment conjuguée, suivant le caractère quadratique de λ, de s_ν ou de $s_\nu m_{1N}$.

On n'a donc obtenu ainsi que les classes indiquées dans l'énoncé.

71. Soit $n = 2\nu + 2$. Si s fixe un point de q_0, on peut, ici encore, supposer que s est dans le diviseur X_0 de A qui fixe le point $(1, 0, \ldots, 0)$. On voit alors, comme dans le cas de n impair, que l'on est ramené au cas où s fixe un point de q_λ ($\lambda \neq 0$).

Si s fixe un point de q_λ ($\lambda \neq 0$), on peut d'abord supposer que $\lambda = c'$, et que s est dans le diviseur $X_{c'}$ de A qui fixe le point de coordonnées

$$x_1 = \ldots = x_\nu = x = 0, \qquad y_1 = \ldots = y_\nu = 0, \qquad y = 1.$$

Ce groupe est isomorphe au groupe $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ de la forme

$$a_1 = \Sigma_1^\nu x_i y_i + c_1 x^2 \quad \left(c_1 = \frac{-\delta}{4c'},\ \delta = b^2 - 4cc'\right) \quad (\text{II}, 22),$$

dont les classes de s_2 sont représentées par

$$s_i, \quad s_i m_{1N}, \quad s_i t_0, \quad s_i m_{1N} t_0 \qquad (i = 1, \ldots, \nu),$$
$$d_{12\ldots\nu 0} \qquad (\text{ici } d_0 = | x, -x |).$$

D'après la correspondance indiquée [II, p. 50, note (1)] (1) entre $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ et $X_{c'}$ leurs correspondantes dans $X_{c'}$ sont

$$s_{ic'} = u_0 t_1 m_{1k_i} d_{1\ldots i}, \qquad s_{ic'} m_{1N}, \quad s_{ic'} u_0, \quad s_{ic'} m_{1N} u_0, \quad u_0 d_{1\ldots\nu}.$$

---

(1) D'après cette correspondance, à $t_0 = d_0$ de $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ correspond

$$u_0 = t_0 m_{0,-1,-b/c'} = \begin{vmatrix} x, & -x \\ y, & y + \frac{b}{c'} x \end{vmatrix} \quad (\text{I}, 25),$$

de $X_{c'}$; aux substitutions d_k, t_k, $m_{k\mu}$ de $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$ correspondent respectivement ces mêmes substitutions dans $X_{c'}$.

Or, d'après le cas $n = 4$ (57), les substitutions

$$u_0 t_1 m_{1k_i} d_1 \quad \text{et} \quad u_0 t_1 m_{1,k_i\mathrm{N}} d_1$$

sont conjuguées, dans A_{01}^0 de substitutions de la forme $t_{01} m_{1\mu}$ et $u_0 d_1$, qui est dans A_{01} hors de A_{01}^0 et a trois multiplicateurs -1, est conjuguée de l'une des deux s_2 : $d_{01} s_1 t_0$ ou $d_{01} s_1 m_{1\mathrm{N}} t_0$. Donc $s_{ic'}$ et $s_{ic'} m_{1\mathrm{N}}$ sont conjuguées de s_i et $s_i m_{1\mathrm{N}}$; ou $u_0 d_{1,2,\ldots,\nu}$ est conjuguée de l'une des s_2 : $ds_1 t_0$ ou $ds_1 m_{1\mathrm{N}} t_0$. D'ailleurs $s_{ic'} u_0$ et $s_{ic'} m_{1\mathrm{N}} u_0$, sont, d'après leur forme, conjuguées de $s_i t_0$ et $s_i m_{1\mathrm{N}} t_0$.

Comme γ permute circulairement les q_λ où $\lambda \neq 0$ (II, 15), si s fixe un point de q_λ $(\lambda \neq c')$, on peut supposer que s est dans $\gamma^{-k} \mathrm{X}_{c'} \gamma^k$. Les classes de s_2 de ce groupe sont représentées, en supposant d'abord ψ irréductible, par

$$\begin{aligned}
&\sigma_i = \gamma^{-k} s_{ic'} \gamma^k = u_0 t_1 m_{1,k_i} \iota^k m_{\nu'}, \qquad \rho^k d_{12\ldots i}, \qquad \sigma_i m_{1\mathrm{N}},\\
&\sigma'_i = \gamma^{-k} s_{ic'} u_0 \gamma^k = t_1 m_{1,k_i} \iota^k d_{12\ldots i}, \qquad \sigma'_i m_{1\mathrm{N}},\\
&\tau_k = \gamma^{-k} u_0 d_{1,\ldots,\nu} \gamma^k = u_0 m_{\nu'}, \qquad \rho^k d_{1\ldots\nu}, \qquad \rho = \xi\dot{\xi}^{-1} \quad [1].
\end{aligned}$$

Or, d'après le cas $n = 4$, toute s_2 réelle de la forme $u_0 t_1 m_{1h} m_{\nu'\mathrm{X}}$ est conjuguée, dans A_{01}^0, d'une $t_{01} m_{1\mu}$; et toute s_2 réelle de la forme $u_0 m_{\nu'\mathrm{X}} d_1$ (qui a trois multiplicateurs -1) est conjuguée, dans A_{01} d'une $d_{01} t_1 m_{1\mu}$. Donc σ_i et $\sigma_i m_{1\mathrm{N}}$ sont conjuguées de s_i et $s_i m_{1\mathrm{N}}$, τ_k est, suivant la parité

---

[1] Pour justifier les formules ou textes il convient d'abord de rappeler les définitions suivantes :

Soient d'abord ψ irréductible, et $\psi = cx^2 + bxy + c'y^2 = x_{\nu'} y_{\nu'}$ en posant (I, 24) :

$$x_{\nu'} = \varkappa(x - \upsilon y), \qquad y_{\nu'} = \dot{\varkappa}(x - \dot{\upsilon} y), \qquad \varkappa\dot{\varkappa} = c, \qquad \psi(\upsilon, 1) = 0.$$

Si $s = s_0 + us_1$, s_0 et s_1 étant réels, on désignera par $m_{0s_0s_1}$ l'action, sur x et y, de

$$m_{\nu's} = \begin{vmatrix} x_{\nu'}, & s x_{\nu'} \\ y_{\nu'}, & s^{-1} y_{\nu'} \end{vmatrix} \quad \text{(I, 25)};$$

cette substitution est réelle toujours et seulement si $s^{-1} = \dot{s}$, c'est-à-dire $s^{\pi+1} = 1$. On vérifie alors les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&t_0 = t_{\nu'} m_{\nu' q}, \qquad q = x\dot{x}^{-1}, \qquad u_0 = t_0 m_{0,-1,-b/c'} = t_{\nu'} m_{\nu', qr}, \qquad r = -1 - \frac{b}{c'}\upsilon.\\
&\gamma^{-1} t_i \gamma = t_i m_{i\iota}, \qquad \gamma^{-1} m_{i\lambda} \gamma = m_{i\lambda} \qquad (i = 1, \ldots, \nu),\\
&\gamma^{-1} t_{\nu'} \gamma = t_{\nu'} m_{\nu'\rho}, \qquad \rho \equiv \xi\dot{\xi}^{-1}, \qquad \gamma^{-1} m_{\nu'\xi} \gamma = m_{\nu'\xi}, \qquad \gamma^{-1} u_0 \gamma = u_0 m_{\nu'\rho}.
\end{aligned}$$

de k (68), conjuguée de $ds_1 t_0$ ou de $ds_1 m_{1N} t_0$; enfin σ'_i et $\sigma'_i m_{1N}$ sont évidemment conjuguées de $s_i t_0$ et $s_i m_{1N} t_0$.

Soit maintenant ψ réductible. On peut encore poser

$$x_{\upsilon'} = \varkappa(x - \upsilon y), \qquad y_{\upsilon'} = \varkappa'(x - \upsilon' y), \qquad \varkappa\varkappa' = c, \qquad \psi(u, 1) = \psi(u', 1) = 0.$$

Les formules précédentes subsistent alors, en remplaçant s, $\dot{s}$, ξ, ξ' respectivement par des quantités réelles s, s', ξ, ξ' vérifient $ss' = 1$, $\xi\xi' = \iota$; alors $s_0 + \upsilon s_1 = s$, $s_0 + \upsilon' s_1 = s^{-1}$, $r_0 + \upsilon r_1 = r_0 + \upsilon' r_1 = 1$; il faut, bien entendu, supposer que, dans le cas de ψ irréductible, on a toujours désigné les conjuguées de υ, s, ξ par $\dot{\upsilon}$, $\dot{s}$, $\dot{\xi}$, et non par υ^π, s^π, ξ^π.

72. *Pour* $n > 4$ (comme pour $n \leqq 4$), A$'$ *n'a de* s_2 *hors de* A *que si* n *est pair et* ψ *réductible : alors toute* s_2 *de* A$'$ *hors de* A *est conjuguée de* φ.

En effet, soit s une s_2 de A$'$ hors de A. On voit d'abord, comme dans le cas de A, que s, nécessairement distincte de d, fixe au moins un point. Mais s ne peut fixer hors de q_0. Car le diviseur de A$'$ fixant ce point est aussi le diviseur de A fixant ce même point (II, 21, 22), et alors s serait dans A. Donc s fixe un point de q_0 ; et l'on peut supposer que s est dans le diviseur $X' = \{X, m_{1\iota}^{-1}\gamma\}$ de A$'$ qui fixe le point (1, 0, ..., 0) (II, 18). Donc s a la forme $(m_{1\iota}^{-1}\gamma)^\rho \alpha_1 \varpi$, α_1 étant dans A_1 et ϖ dans P ($m_{1\iota}$ et γ sont permutables à P et à A_1). On voit alors, comme dans le cas du groupe hermitien (17), que s est conjuguée de $s' = (m_{1\iota}^{-1}\gamma)^\rho \alpha_1$. En considérant l'action de cette substitution sur les variables x_1, y_1, on voit que la condition $s^2 = 1$ exige que $\rho = \dfrac{k(\pi - 1)}{2}$, et que, en désignant par γ_1 l'action de γ sur les variables de A_1, $(\gamma_1^\rho \alpha_1)^2 = 1$. Or ρ ne peut être égal à $\pi - 1$, sans quoi s', qui multiplie a par ι^ρ ou $\iota^{2\rho}$, serait dans A. Donc $\rho = \dfrac{\pi - 1}{2}$, et la substitution $\gamma_1^{\frac{\pi-1}{2}} \alpha_1$ multiplie a_1 par -1. En admettant le théorème pour les valeurs de n inférieures à la valeur considérée, on voit que s n'existe que si n est pair et ψ réductible, et qu'alors, $\gamma_1^{\frac{\pi-1}{2}} \alpha_1$ étant conjuguée de $\gamma_1^{\frac{\pi-1}{2}}$, s est conjuguée de $d_1 \varphi$, que t_1 transforme en φ.

Si n est pair, les classes de s_2 de A ne sont pas toutes distinctes dans A$'$, car, γ transformant B^1 en B^2 ($\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1\iota}$), *les deux classes représentées par* $s_j t_0$ *et* $s_j m_{1N} t_0$, j *étant l'un des nombres* 1, ..., ν^ι *se* *réunissent en une seule dans* A′. *Les classes représentées par* s_i *et* $s_i m_{1N}$ étant, l'une dans B, l'autre dans A^0 hors de B, *restent distinctes dans* A′.

Si n est impair, on a $A' = AI$ (I, p. 320); et *les classes de* A *restent* évidemment *distinctes dans* A′.

73. Cherchons les normalisants N, N′, N^0, P dans A, A′, A^0, B d'une $s_2 s \neq d$. Je supposerai, dans ce qui suit, que $\psi = x^2 + c' y^2$, c' étant nul si n est impair. Il est clair que chacun des groupes P, N^0, N, N′ est normal dans tous ceux des autres qui le contiennent.

Soit d'abord s dans A^0, et par suite de la forme $t_{01} m_{1l} d_{1,\ldots,r}$, l étant carré ou non. L'action de s sur x_1 et y_1 est $\begin{vmatrix} x_1, & -l y_1 \\ y_1, & -l^{-1} x_1 \end{vmatrix}$. Prenons, au lieu de x_1 et y_1 les variables $x'_1 = x_1 + l y_1$, $y'_1 = x_1 - l y_1$ qui canonisent cette action $\left(x_1 = \frac{x'_1 + y'_1}{2},\ y_1 = \frac{x'_1 - y'_1}{2l}\right)$. Alors s multiplie par -1 les variables $x'_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r, y$, et les autres par 1. Posons

$$a_1 = \Sigma_2^r x_i y_i + \frac{x_1'^2}{4l} + c' y^2, \qquad a_2 = \Sigma_{r+1}^{\nu} x_i y_i + x^2 - \frac{y_1'^2}{4l},$$

d'où $a = a_1 + a_2$. Soient A_i le groupe de a_i, A_i^0 son groupe unimodulaire, B_i son groupe réduit (I, 39). Le normalisant de s dans $L_{x'_1, y'_1, x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu, x, y}$ est le produit direct de $L_{x'_1, x_2, y_2, \ldots, x_r, y_r, y}$ par $L_{y', x_{r+1}, y_{r+1}, \ldots, x_\nu, y_\nu, x}$ (3). On a donc $N = A_1 A_2$, $N' = \{A_1 A_2, \gamma_1 \gamma_2\}$, γ_i étant une substitution qui multiplie a_i par ι ou ι^2, suivant que c' est $\neq 0$ ou $= 0$, $N^0 = \{A_1^0 A_2^0, \tau_1 \tau_2\}$, τ_i étant une substitution quelconque de A_i hors de A_i^0, $P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, \tau_1 \tau_2\}$, car, τ_1 et τ_2 étant dans A hors de B, et A|B étant un g_4 non cyclique (68), $\tau_1 \tau_2$ est dans B.

Il est clair que l'on a $N^0 = \{P, \mu_1\}$, $N = \{N_0, \tau_1\}$; et, comme

$$(N', N) = (A', A)\,(N', P) = (A', B) \qquad \text{et} \qquad A' = BN'.$$

Donc (E, 67) tout système de restes de B mod P est un système de restes de A′ mod N′, *et toutes les conjuguées de s dans* A′ *s'obtiennent en la transformant par* B.

Remarque. — Comme il n'y a, dans A^0, que deux classes à $2r$ multiplicateurs -1, représentées par s et $s m_{1N}$, l'une de ces substitutions est conjuguée de $d_{1,\ldots,r}$. Soient en posant $a_1 = \Sigma_1^r x_i, y_i$, $a - a_1 = a_2$,

A_i le groupe de a_i, A_i^0 son groupe unimodulaire, B_i son groupe réduit. On aura évidemment

$$N = A_1 A_2, \qquad N' = \{N, \gamma\}, \qquad N^0 = \{A_1^0 A_2^0, t_{01}\}, \qquad P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, t_{01}\},$$

μ_i étant une substitution quelconque de A_i^0 hors de B.

74. Supposons maintenant s dans A hors de A^0. Comme $s_i t_0$ et $s_i t_0 m_{1N}$ sont conjuguées dans A', on peut prendre, pour s, une s_2 quelconque de A ayant $2i-1$ multiplicateurs -1. Soit $s = t_0 d_{1,\ldots,\rho}$, $\rho = i-1$, $d_{1,\ldots,\rho} = 1$ si $\rho = 0$, et posons $a_1 = \Sigma_1^\rho x_i y_i + c' y^2$ si $c' \neq 0$ $\left(\text{alors } t_0 = \left|\begin{matrix} x, & x \\ y, & -y \end{matrix}\right|\right)$, $a_1 = \Sigma_1^\rho x_i y_i + x^2$, si $c' = 0$ (alors $t_0 = d_0 = |x, -x|$) en convenant que $\Sigma_1^\rho x_i y_i = 0$ pour $\rho \equiv 0$, et $a_2 = a - a_1$. Soient A_i le groupe de la forme a_i, A_i^0 son groupe unimodulaire, B_i son groupe réduit. On aura

$$N = A_1 A_2, \qquad N' = \{A_1 A_2, \gamma\}, \qquad N^0 = \{A_1^0 A_2^0, \tau_1 \tau_2\},$$

τ_i étant une substitution quelconque de A_i hors de A^0, $P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, \tau_1 \tau_2\}$, μ_i étant une substitution quelconque de A^{i0} hors de B_i.

On a, comme précédemment,

$$N' = \{N, \gamma\} = \{N^0, \tau_1, \gamma\} = \{P, \mu_1, \tau_1, \gamma\},$$

d'où

$$(N', P) = (A', B) \qquad \text{et} \qquad A' = BN'.$$

Donc tout système de restes de B(modP) est un système de restes de A(modN'), et toutes les conjuguées de s dans A' s'obtiennent en transformant s par B.

Le normalisant de $t_1 m_{1l} d$, qu'il n'y a d'ailleurs lieu de considérer que pour n pair (67) est le même que celui de $t_1 m_{1l}$.

75. Soit enfin s dans A' hors de A, en supposant n pair et ψ réductible. On peut prendre $s = \varphi$ (72). Soit $\psi = x_\nu, y_\nu$. Comme φ multiplie les x par -1 sans altérer les y, son normalisant dans $L_{x_1 y_1 \ldots x_\nu y_\nu}$, est (3) le produit direct de $L_{x_1 \ldots x_\nu}$ par $L_{y_1 \ldots y_\nu}$. Soient α une substitution linéaire, β une substitution linéaire des y_i; pour que $\alpha\beta$ conserve a, il faut et il suffit, on le vérifie aisément, que $\beta = \bar{\alpha}^{-1}$ (*cf.* E, 188).

Comme

$$L_{x_1\ldots x_{\nu'}} = \{\{U_{x_1\ldots x_{\nu'}} | x_1, \iota x_1 |\},$$

on a

$$N = \{\mathbf{V}_{1\ldots\nu'}(\pi), m_{1\iota}\} \quad (\mathrm{I}, 40, 41),$$

que l'on peut désigner par $\mathbf{V}_{1,\ldots,\nu';\iota}(\pi)$. Comme $\mathbf{V}_{1\ldots\nu'}(\pi)$ est dans B (I, 41), N est dans A^0 ; donc $N^0 = N$. Il est clair que

$$P = \{\mathbf{V}_{1\ldots\nu'}(\pi), m_{1\iota^2}\} = \mathbf{V}_{1,\ldots,\nu';\iota^2}(\pi),$$

Enfin N', contenant évidemment γ, coïncide avec $\{N, \gamma\}$.

Comme précédemment, on a

$$N' = \{N, \gamma\} = \{N^0, \gamma\} = \{P, m_{1\iota}, \gamma\}, \qquad \text{d'où} \quad A' = AN',$$

Donc tout système de restes de A (mod N) est un système de restes de A' (mod N'), et l'on obtient toutes les conjuguées de φ dans A' en la transformant par A. Mais ici A' est $> A^0 N'$. On a bien $A^0 = BN^0$; et, par suite, tout système de restes de B (mod P) est un système de restes de A^0 (mod N^0). Il en résulte qu'on obtient toutes les transformations de φ par A^0 en la transformant par B.

76. Considérons $\mathfrak{A}'$ (ici n pourrait *a priori* être impair). Soit s une substitution de A' telle que (s) soit une s^2 de $\mathfrak{A}'$, c'est-à-dire telle que s^2 soit dans I.

Si s^2 a la forme $[\iota^{2h}]$, $s[\iota^{-h}]$ est une s^2 de A'. Je dirai alors que (s) et sa classe sont de première espèce. *Les s_2 de première espèce ne sont donc autres que les s_2 de A' où l'on regarde les variables comme homogènes.* Il reste à étudier leur distribution en classes.

Il est clair d'abord que, si σ et σ' sont conjuguées dans A', (σ) et (σ') le sont dans $\mathfrak{A}'$. Si σ et σ' sont deux s_2 non conjuguées de A', (σ) et (σ') ne peuvent être conjuguées dans $\mathfrak{A}'$ que si σ' est conjuguée dans A' d'une s_2 de la forme $\sigma[\iota^k]$, qui ne peut être que σd, et que, par suite, σ' ait autant de multiplicateurs -1 que σ a de multiplicateurs $+1$. Si alors σ' et σd sont toutes deux dans B, ou toutes deux dans A^0 hors de B, ou toutes deux dans A hors de A^0, ou toutes deux hors de A, elles sont conjuguées dans A' (67, 72).

77. Supposons d'abord n pair (et $\psi \neq 0$). Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{1N}$,

et $\sigma' = s_k$ ou $s_k m_{1\,\mathrm{N}}$ (i, $k = 1, \ldots, \nu$); pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ' (donc aussi $d\sigma'$ de σ'), il faut d'abord que σ' ait $n - 2i$ multiplicateurs -1; d'où $2k = n - 2i$, ou $k = \nu' - i$. Si alors d est dans B, ds_i et $ds_i m_{1\,\mathrm{N}}$ sont respectivement conjuguées de s_k et $s_k m_{1\,\mathrm{N}}$. Si d est hors de B, ds_i et $ds_i m_{1\,\mathrm{N}}$ sont respectivement conjuguées de $s_k m_{1\,\mathrm{N}}$ et s_k; et si alors $n = 4h$, donc ψ irréductible (I, p. 348), ds_h est conjuguée de $s_h m_{1\,\mathrm{N}}$ et $ds_h m_{1\,\mathrm{N}}$ de s_h, donc (s_h) de $(s_h m_{1\,\mathrm{N}})$.

Soient $\sigma = s_i t_0$ et $\sigma' = s_k t_0$ (i, $k = 1, \ldots, \nu'$). Pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ', il faut d'abord que σ' ait $n = 2i + 1$ multiplicateurs -1. donc $2k - 1 = n - 2i + 1$ ou $k = \nu' - i + 1$.

Donc, *pour n pair, on aura des représentants, non conjugués, de toutes les classes de s_2 de première espèce de $\mathfrak{A}'$ en prenant les (s_i) et les $(s_i m_{1\,\mathrm{N}})$ où $i \leqq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$, en supprimant pour $n = 4h$ et ψ irréductible, (s_h) ou $(s_h m_{1\,\mathrm{N}})$; puis les $(s_i t_0)$ où $i \leqq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n+2}{4}$; et enfin (φ), si ψ est réductible.*

78. Supposons n impair. Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{1\,\mathrm{N}}$ et $\sigma' = s_k t_0$ ou $s_k m_{1\,\mathrm{N}} t_0$. Pour que $d\sigma$ (qui est ici hors de A_0) soit conjuguée de σ' (donc aussi $d\sigma'$ de σ), il faut d'abord que σ' ait $n - 2i$ multiplicateurs -1; d'où $2k - 1 = n - 2i$ ou $k = \nu - i + 1$.

Alors ds_i est conjuguée de $s_k t_0$ ou de $s_k m_{1\,\mathrm{N}} t_0$ qui sont, l'une dans un des B^i, l'autre dans l'autre (68). Pour préciser, ds_i, qui est dans $\{B, d\}$, est conjuguée de $s_k t_0$, qui est dans $\{B, t_0\}$, toujours et seulement si $dt_0 = d_{1\ldots\nu}$ est dans B, c'est-à-dire si -1 est carré ou si ν est pair.

Donc, *pour n impair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 de première espèce de $\mathfrak{A}'$ en prenant les (s_i) et $(s_i m_{1\,\mathrm{N}})$ pour $i = 1, \ldots, \nu$.*

79. Si s^2 a la forme $[\iota^{2h+1}]$, je dirai que (s) et sa classe sont de deuxième espèce. Il est clair qu'une $s_2(s)$ de seconde espèce ne peut être conjuguée d'une $s_2(s')$ de première espèce, car s' le serait d'une substitution de la forme $[\iota^k]s$ et, leurs carrés étant dans I, on aurait $s'^2 = [\iota^{2k}]s^2$, ce qui est impossible. Dans $\mathfrak{A}'(n, \pi^2)$, (s) est évidemment de première espèce. Donc (s) est conjuguée d'un et d'un seul

des représentants obtenus des classes de première espèce de $\mathfrak{A}'(n, \pi^2)$. Soit (σ) ce représentant.

Il y aura, dans $A'(n, \pi^2)$, une substitution ζ telle que, pour une valeur convenable de k, $[\iota'^k]\zeta^{-1}\sigma\zeta$ soit réelle et égale à s. Alors $s^2 = [\iota'^{2k}]$ et k doit être $\not\equiv 0 \pmod{\pi + 1}$, sans quoi (s) serait de première espèce dans $\mathfrak{A}'(n, \pi)$. Les multiplicateurs de s sont, comme ceux de $[\iota'^k]\sigma$, de la forme $\pm \iota'^k$; d'ailleurs, s étant réelle, ces multiplicateurs sont conjugués deux à deux. Donc il y a autant de multiplicateurs $-\iota'^k$ que de multiplicateurs ι'^k, et $-\iota'^k = \iota'^{\pi k}$. Donc n est pair et :

1° σ a autant de multiplicateurs -1 que de multiplicateurs $+1$;

2° k a la forme $(2\lambda + 1)\dfrac{\pi + 1}{2}$, donc $\iota'^k = \iota^\lambda \iota_0$, et, en remplaçant au besoin s par $[\iota^\lambda]s$, ce qui ne change pas (s), on peut supposer que $\lambda = 0$.

80. A chaque détermination de σ répond une seule classe de (s) dans $A'(n, \pi)$. Soient, en effet, $\zeta^{-1}\sigma\zeta = s[\iota_0^{-1}]$ et $\zeta^{-1}\sigma\zeta' = s'[\iota_0^{-1}]$. D'après ce qu'on a vu (73-75), $s'[\iota_0^{-1}]$ est une transformée de $s[\iota_0^{-1}]$ par $A(n, \pi^2)$ et non pas seulement par $A'(n, \pi^2)$. Il y a donc, dans $A(n, \pi^2)$, une substitution α telle que $s\alpha = \alpha s'$. Donc, avec les variables $x_1, y_1, \ldots\ldots x_\nu, y_\nu, x, y$, les coefficients de s et s' étant réels, ceux de α sont proportionnels à des nombres réels. Soit $\alpha = [\rho]\alpha'$, α' étant dans $\mathcal{C}$, et ρ étant un facteur de proportionnalité. Comme ρ multiplie a par ρ^2, α' la multiplie par ρ^{-2} et ρ^2 est réel. Donc α' est dans $A'(n, \pi)$, et, puisque $s\alpha = \alpha s'$, on a aussi $s\alpha' = \alpha' s'$, en sorte que s' est conjuguée de s dans $A'(n, \pi)$.

81. Tenant compte de la condition qui porte sur les multiplicateurs, et remarquant que ψ est réductible dans le champ $\mathcal{C}'$ de $A'(n, \pi^2)$, on voit, d'après le n° 77, que la $s_2\,\sigma$ de $A'(n, \pi^2)$ ne peut avoir que les déterminations φ, s_h et $s_h m_{1\iota'}$ si $n = 4h$, $s_h t_0$ si $n = 4h - 2$. On peut d'ailleurs, si $n = 4h$, remplacer s_h par $t_{1\ldots\nu'}$, qui a les mêmes multiplicateurs et est dans $B(n, \pi^2)$, et $s_h m_{1\iota'}$ par $t_{1\ldots\nu'} m_{1\iota'}^{\pi} m_{2\iota'}^{\pi} \ldots m_{\nu\iota'}^{\pi}$, qui a les mêmes multiplicateurs et est dans $A_0(n, \pi^2)$ hors de $B(n, \pi^2)$. On peut aussi, si $n = 4h - 2$, remplacer

$s_h t_0$ par $t_{1\ldots\nu'}$, ou encore par $t_{1\ldots\nu'} m_{1\iota'}^{\pi} m_{2\iota'}^{\pi}\ldots m_{\nu\iota'}^{\pi}$, qui ont les mêmes multiplicateurs et sont dans $A(n, \pi^2)$ hors de $A^0(n, \pi^2)$.

82. *Soit* $n = 2\nu' = 4h$. *La détermination* $s_h m_{1\iota'}$ *est à rejeter si* ψ *est réductible, et la détermination* s_h *est à rejeter si* ψ *est irréductible.*

Soit, en effet, $\zeta^{-1}\sigma[\iota_0]\zeta = s$, σ étant dans $A^0(n, \pi^2)$. Comme $\sigma[\iota_0]$, et de même s, multiplient a par ι, s, qui est dans $A'(n, \pi)$, est de la forme $\alpha\gamma$, α étant dans $A(n, \pi)$ et $\zeta^{-1}\sigma\zeta = \alpha\gamma[\iota_0^{-1}]$.

Soit d'abord ψ réductible; on a $\gamma[\iota_0^{-1}] = \Pi_1^{\nu'} m_{i,\iota_0}$; je désignerai ce dernier produit par μ_{ι_0}. Donc tout d'abord, $|\alpha| = 1$; donc α est dans $A^0(n, \pi)$. Comme $A^0(n, \pi)$ et μ_{ι_0} sont dans $B(n, \pi^2)$, σ y est aussi, donc a nécessairement la forme s_h. On peut d'ailleurs remplacer s_h par $t_{1\ldots\nu}$, qui a les mêmes multiplicateurs, et est dans $B(n, \pi)$.

Soit maintenant ψ irréductible. Alors, en posant $\iota'^{\frac{\pi-1}{2}} = j_0$, on a

$$\gamma[\iota_0^{-1}] = m_{-1}^{\nu' j_0} \Pi_1^{\nu} m_{i\iota_0}.$$

Comme ν est impair, et que j_0 et ι_0, dont le produit est ι'^{π}, ont toujours des caractères quadratiques opposés, $\gamma[\iota_0^{-1}]$ est dans $A^0(n, \pi^2)$, donc $|\alpha| = |\sigma| = 1$ hors de $B(n, \pi^2)$. Donc α est dans $A^0(n, \pi)$, c'est-à-dire dans $B(n, \pi^2)$ et σ hors de $B(n, \pi^2)$; donc σ a la forme $s_h m_{1\iota'}$.

83. Je dis, de plus, que *la détermination* φ *n'est acceptable, pour* $n \equiv 0 \pmod 4$, *que si* ψ *est réductible, et, pour* $n \equiv 2 \pmod 4$, *que si* ψ *est irréductible.* En effet, $\varphi[\iota_0]$ multiplie a par $-\iota$, et a pour déterminant $(-1)^{\nu'}$. Sa conjuguée réelle $\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta$ a donc la forme $\gamma_0\alpha$, α étant dans A, en posant $\gamma_0 = \gamma^{\frac{\pi+1}{2}}$. Comme $|\gamma_0| = (-1)^{\nu'}$, on a $|\alpha| = 1$, donc α est dans A^0. La condition $(\gamma_0\alpha)^2 = [\iota]$ peut s'écrire

$$\gamma_0^{-1}\alpha\gamma_0\alpha^{-1} = [\iota]\gamma_0^{-2}\alpha^{-2}.$$

Or le premier membre est dans $B(n, \pi)$, car α et $\gamma_0^{-1}\alpha\gamma_0$ sont dans A^0 et toutes deux en même temps dans B ou hors de B. Comme α^2 es dans B, $[\iota]\gamma_0^{-2}$ est donc dans B.

Or, si ψ est réductible, $[\iota]\gamma_0^{-2} = \Pi_1^{\nu'} m_{i\iota}^{-1}$, et cette substitution ne peut être dans B que si ν est pair ou $n \equiv 0 \pmod 4$. Si ψ est irréductible $[\iota]\gamma_0^{-2} = \Pi_1^{\nu} m_{ii}^{-1}$, et cette substitution ne peut être dans B que si ν est pair, ou $n \equiv 2 \pmod 4$.

On remarquera que, si ψ est irréductible, l'action de $\varphi[\iota_0]$ sur $x_{\nu'}$ et $y_{\nu'}$, est réelle (les multiplicateurs $-\iota_0$ et ι_0 sont conjugués). Il suffit donc que l'on puisse trouver une substitution ζ, agissant sur x_1, $y_1, \ldots, x_\nu, y_\nu$ seuls, telle que $\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta$ soit réelle. Or ν étant ici paire, on saura former une telle substitution ζ si l'on sait la former dans le cas où ψ est réductible.

84. D'après les résultats obtenus, $\mathfrak{A}'(n, \pi)$ peut avoir seulement : une classe de s_2 de seconde espèce lorsque $n \equiv 0 \pmod 4$ et ψ irréductible, ou lorsque n est $\equiv 2 \pmod 4$ et ψ réductible; deux classes de s_2 de seconde espèce lorsque n est $\equiv 0 \pmod 4$ et ψ réductible ou lorsque n est $\equiv 2 \pmod 4$ et ψ irréductible.

Pour tous les cas, on a vu (42) que $\mathfrak{A}'(2, \pi)$ contient $(t_1\gamma)$, et l'on a $\overline{t_1\gamma}^2 = [\iota]$. Donc le carré de

$$\Pi_1^{\nu'} t_i\gamma_i = t_{1\ldots\nu'}\gamma$$

est $[\iota]$, et $(t_{1\ldots\nu'}\gamma)$ est une s_2 de seconde espèce. Donc $\mathfrak{A}'(n, \pi)$ *a toujours une classe de s_2 de seconde espèce que l'on peut représenter par* $(t_{1\ldots\nu'}\gamma)$. Elle est toujours hors de $\mathfrak{A}(n, \pi)$.

85. Pour les troisième et quatrième cas, il faut distinguer suivant que π est $\equiv 1$ ou $3 \pmod 4$.

Soit $\pi \equiv 3 \pmod 4$. $\mathfrak{A}'(4, \pi)$ si ψ est réductible contient $(d_1 T_{12} t_{12})$ et $\overline{d_1 T_{12} t_{12}}^2 = [d]$. Donc dans le troisième cas, le carré de

$$\Pi_1^{\nu'/2} d_{2i-1} T_{2i-1,\, 2i} t_{2i-1,\, 2i} = \Theta_{\nu'} = \Theta$$

est $[d]$ et (Θ) est une s_2 de seconde espèce de $\mathfrak{A}'(n, \pi)$. Comme (I, 28) $T_{12} = S_{121} d_2 t_{12}$, la substitution $T_{12} d_2 t_{12} = d_1 T_{12} t_{12}$ est dans B. Il en est donc de même de Θ.

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta\alpha' = [\mu] t_{1\ldots\nu'}\gamma,$$

α' et μ étant dans $A'(n, \pi)$, car la substitution du premier membre conserve la forme a, et la substitution du second membre la multiplie par $\mu^2\iota$, toujours $\neq 1$.

Dans le quatrième cas, si l'on pose

$$\Pi_1^{\nu/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} = \Theta_\nu,$$

on a toujours $(\Theta_\nu)^2 = \Pi_1^\nu d_i$. Or on a vu que si Ψ est irréductible $\mathfrak{A}'(2, \pi)$ contient $\left(\gamma^{\frac{\pi+1}{2}}\right) = ([\iota_0]\varphi)$ et que $\overline{[\iota_0]\varphi}^2 = [\iota]$. Désignons alors en général par s_i l'action de s sur les variables x_i et y_i. On aura

$$\overline{d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} [\iota]_{2i-1}^{\frac{\pi+1}{4}} [\iota]_{2i}^{\frac{\pi+1}{4}}}^2 = [\iota]_{2i-1}[\iota]_{2i}.$$

Donc

$$\overline{\Theta_\nu \Pi_1^\nu [\iota]_i^{\frac{\pi+1}{4}} [\iota_0]_{\nu'}\varphi_{\nu'}}^2 = [\iota].$$

Or on voit que

$$[\iota_0]_{\nu'}\varphi_{\nu'} = \left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right]_{\nu'} m_{\nu'\varepsilon};$$

donc on a

$$\Theta_\nu \Pi_1^\nu \left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right]_i . [\iota_0]_{\nu'}\varphi_{\nu'} = \Theta_\nu \left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right] m_{\nu'\varepsilon}$$

et, si $\Theta' = \Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$, on a $\Theta'^2 = [d]$. Et (Θ') est une s_2 de seconde espèce de $\mathfrak{A}'(n, \pi)$. Θ_ν est toujours dans B, donc Θ' toujours dans A^0 est dans B en même temps que $m_{\nu'\varepsilon}$, c'est-à-dire (I, 40) toujours et seulement si l'ordre 4 de ε divise $\frac{\pi+1}{2}$, c'est-à-dire si $\pi + 1$ est $\equiv 0 \pmod 8$.

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta'\alpha' = [\mu] t_{1\ldots\nu'}\gamma,$$

α' et $[\mu]$ étant dans $A'(n, \pi)$, car la substitution premier membre conserve la forme a et la substitution second membre la multiplie par $\mu^2\iota$, toujours $\neq 1$.

86. Soit $\pi \equiv 1 \pmod 4$. $\mathfrak{A}'(4, \pi)$, si Ψ *est réductible*, contient $d_1 T_{12} t_{12}\gamma$ et $\overline{d_1 T_{12} t_{12}\gamma}^2 = [-\iota]$. Donc, dans le troisième cas, le carré de

$$\Pi_1^{\nu/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} \gamma_{2i-1}\gamma_{2i} = \Theta\gamma$$

est $[-\iota]$ et $(\Theta\gamma)$ est une s_2 de seconde espèce de $\mathfrak{A}'(n, \pi)$.

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta\gamma\alpha' = [\mu]t_{1\ldots\nu'}\gamma,$$

α' et $[\mu]$ étant dans $A'(n, \pi)$, car, en élevant au carré on aurait

$$[-\iota] = [\mu^2][\iota],$$

d'autre part, les deux substitutions devant multiplier la forme a par une même quantité, il faudrait $\mu^2 = 1$.

Pour le quatrième cas, on voit que le carré de $\Theta_\nu \Pi_1^\nu \gamma_i [\iota]_i^{\frac{\pi-1}{4}}$ est $\Pi_1^\nu [\iota]_i$. Comme le carré de $[\iota_0]_{\nu'}\varphi_{\nu'}$ est $[\iota_{\nu'}]$, le carré de

$$\Theta_\nu \Pi_1^\nu \gamma_i [\iota]_i^{\frac{\pi-1}{4}} [\iota_0]_{\nu'}\varphi_{\nu'}$$

est $[\iota]$. Si l'on pose

$$[\iota_0]_{\nu'}\varphi_{\nu'} = \gamma_{\nu'}\left[\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\right]_{\nu'}\alpha_{\nu'},$$

on voit que $|\alpha_{\nu'}| = 1$, donc $\alpha_{\nu'} = m_{\nu'\rho}$, et l'on doit avoir, en comparant les multiplicateurs de $x_{\nu'}$,

$$-\iota_0 = \iota'\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\rho \qquad \text{ou} \qquad \rho = \iota'^{\frac{\pi^2-1}{2}+\frac{\pi+1}{2}-1-\frac{\pi^2-1}{4}} = \iota^{\frac{\pi-1}{4}}\iota'^{\frac{\pi-1}{2}},$$

et si $\Theta_\nu\gamma m_{\nu'\rho} = \Theta''$, on a $\Theta''^2 = d$, et (Θ'') est une ρ_2 de seconde espèce de $\mathcal{A}'(n, \pi)$. Comme Θ'' est dans $A''\gamma$, (Θ'') est hors de $\mathcal{A}$.

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1}\Theta''\alpha' = [\mu]t_{1\ldots\nu'}\gamma,$$

α' et $[\mu]$ étant dans $A'(n, \pi)$, car, en élevant au carré, on aurait $[d] = [\mu^2][\iota]$ ou $\mu^2 = -1$; d'autre part, les deux substitutions devant multiplier la forme a par une même quantité, il faudrait $\iota = \mu^2\iota$, ou $\mu^2 = -1$.

Ainsi à la classe représentée par $(t_{1\ldots\nu'}\gamma)$, s'ajoute comme classe distincte :

Si n est $\equiv 0 \pmod 4$ et ψ, réductible, la classe représentée par $(\Theta) = (\Pi_1^{\nu'/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i})$, si $\pi \equiv 3 \pmod 4$, et par $(\Theta\gamma)$ si $\pi \equiv 1 \pmod 4$;

Si $n \equiv 2 \pmod 4$ et ψ irréductible, la classe représentée par $\Theta' = \Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$, si $\pi \equiv 3 \pmod 4$, et par $(\Theta'') = \Theta_\nu\gamma m_{\nu'\rho}$, $\rho = \iota^{\frac{\pi-1}{4}}\iota'^{\frac{\pi-1}{2}}$, si $\pi \equiv 1 \pmod 4$.

87. D'après le n° 79, les substitutions de $A'(n, \pi)$ ainsi obtenues doivent être conjuguées, dans $A'(n, \pi^2)$, d'une des déterminations acceptables de $\sigma[\iota_0]$, à savoir $t_{1\ldots\nu'}[\iota_0]$, ou $t_{\nu'}[\iota_0]\Pi_1^{\nu'} t_i m_{ii'}^{\pi}$, (81, 82) ou $\varphi[\iota_0]$ (84).

Or si l'on pose $a_i = x_i y_i$, $a_{\nu'} = \psi$, le groupe $\mathfrak{A}'(2, \pi^2, a_i)$ (I, p. 284) contient pour $i = 1, \ldots, \nu'$ les substitutions (t_i), $(t_i m_{ii'}^{\pi})$, (γ'_i) que l'on peut écrire en posant $\dfrac{x_i}{y_i} = z$, $\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $\left(\dfrac{\iota'^{2\pi}}{z}\right)$, $(\iota' z)$. Le groupe $\mathfrak{A}(2, \pi^2, a_i)$ contient $(t_i\gamma_i)$, et l'on a

$$(t_i\gamma_i) = \left(\frac{\iota}{z}\right) \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

et

$$t_{\nu'}\gamma_{\nu'} = \left(\frac{\iota}{z}\right) \qquad \text{pour } \psi \text{ réductible,}$$

$$t_{\nu'}\gamma_{\nu'} = \left(\frac{1}{jz}\right) \qquad \text{pour } \psi \text{ irréductible.}$$

Les substitutions $\left(\gamma_i'^{\frac{\pi+1}{2}}\right) = (\iota_0 z)$ et $\left(\gamma_i'^{\frac{1-\pi}{2}}\right) = (j_0^{-1} z)$ transforment respectivement les pôles 1 et -1 de (t_i) et ceux ι'^{π} et $-\iota'^{\pi}$ de $(t_i m_{ii'}^{\pi})$ en ceux ι_0 et $-\iota_0$ de $(t_i\gamma_i)$. Si $\zeta_i = \gamma_i'^{\frac{\pi+1}{2}}$, et $\zeta'_i = \gamma_i'^{\frac{1-\pi}{2}}$, on vérifie que

$$\begin{aligned} \zeta_i^{-1} t_i[\iota_0]_i \zeta_i &= t_i\gamma_i \\ \zeta_i^{-1} t_i m_{ii'}^{\pi}[\iota_0]_i \zeta_i &= t_i\gamma_i \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, \nu).$$

Si ψ est réductible, on a aussi

$$\zeta_{\nu'}^{-1} t_{\nu'}[\iota_0]_{\nu'} \zeta_{\nu'} = t_{\nu'}\gamma_{\nu'}.$$

Si donc $\zeta = \gamma'^{\frac{\pi+1}{2}}$, on a

$$\zeta^{-1} t_{1\ldots\nu'}[\iota_0] = \zeta = t_{1\ldots\nu'}\gamma.$$

Si ψ est irréductible, on a

$$\zeta_{\nu'}'^{-1} t_{\nu'}[\iota_0]\, \zeta'_{\nu'} = t_{\nu'}\gamma_{\nu'}.$$

Si donc $\zeta' = \gamma'^{\frac{1-\pi}{2}}$, on a

$$\zeta'^{-1}[\iota_0] t_{\nu'} \Pi_1^{\nu'} t_i m_{ii'}^{\pi} \zeta' = t_{1\ldots\nu'}\gamma.$$

Si, en supposant $n \equiv 0 \pmod 4$ et ψ réductible (83), on pose

$$a_i = x_{2i-1}y_{2i-1} + x_{2i}y_{2i} \qquad (i = 1, \ldots, \nu^{1/2}),$$

le groupe $\mathfrak{A}'(4, \pi^2, a_i)$ contient les substitutions (φ)

$$(d_{2i-1}\mathrm{T}_{2i-1,2i}t_{2i-1,2i}) = (\theta_i) \qquad (\theta_i\gamma_{2i-1}\gamma_{2i})$$

qui, si l'on pose $\frac{x_{2i-1}}{y_{2i}} = u$, répondent respectivement aux substitutions $(-u)$, $\left(\frac{-1}{u}\right)$ et $\left(\frac{-\iota}{u}\right)$ de $[\mathfrak{A}'(4, \pi^2, a_i)]$ (48, 51). Leurs pôles respectifs sont 0 et ∞, ε et $-\varepsilon(\varepsilon^2 = -1)$, η et $-\eta(\eta^2 = -\iota)$.

Or $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$ contient la substitution $\mathcal{L}_\rho = \left(\dfrac{-\rho u - \frac{1}{2}}{u - \frac{1}{2\rho}}\right)$ qui transforme 0 et ∞ en ρ et $-\rho$; et dans la correspondance de $\mathfrak{U}(2, \pi^2)$ à $\mathrm{B}(4, \pi^2, a_i)$ (48; I, 40) à $\mathcal{L}_\rho$ répond

$$\zeta_{i\rho} = \mathrm{U}_{2i-1,2i,1-1/2\rho}\mathrm{W}_{2i-1,2i,1}\mathrm{U}_{2i-1,2i,1-\rho}.$$

On vérifie alors que, si $\pi \equiv 3 \pmod 4$,

$$\zeta_{i\varepsilon}^{-1}\varphi_i[\iota_0]_i\zeta_{i\varepsilon} = \left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right]_i d_{2i-1,2i}\theta_i$$

et que, si $\pi \equiv 1 \pmod 4$,

$$\zeta_{i\eta}^{-1}\varphi_i[\iota_0]_i\zeta_{i\eta} = \left[\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\right]\theta_i\gamma_{2i-1}\gamma_{2i};$$

si donc on pose $\Theta = \Pi_1^{\nu/2}\theta_i$, et suivant les cas, $\zeta = \Pi_1^{\nu/2}\zeta_{i\varepsilon}$ ou $\Pi_2^{\nu/2}\zeta_{i\eta}$, on a

$$\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta = \left[\iota^{\frac{\pi+1}{4}}\right]d\Theta\ .$$

ou

$$\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta = \left[\iota^{\frac{\pi-1}{4}}\right]\Theta\gamma.$$

88. Cherchons maintenant les s_2 de $\mathfrak{A} = \frac{\mathrm{A}''}{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}$. Une substitution (s) de $\mathfrak{A}$ est une s_2 toujours et seulement si s^2 est dans D. Je dirai que (s) et sa classe sont propres si $s^2 = 1$, impropres si $s^2 = d$. Une s_2 propre est toujours de première espèce; une s_2 impropre est de première ou de seconde espèce suivant que $\pi \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$. Une s_2 propre (s) et une s_2 impropre (s') ne peuvent être conjuguées

dans $\mathfrak{A}$, car s', qui est d'ordre 4 devrait être conjuguée de $d^{\varepsilon}s$ qui est d'ordre 2.

89. D'après leur définition, *les s_2 propres de $\mathfrak{A}$ ne sont autres que les s_2 de* A *où l'on regarde les variables comme homogènes*. Il reste à étudier leur distribution en classes.

(σ') est conjuguée de (σ) dans $\mathfrak{A}$ toujours et seulement si σ' est conjuguée, dans A, de σ ou de $d\sigma$. Or pour que deux s_2 soient conjuguées dans A (67, 68) il faut et suffit qu'elles aient les mêmes multiplicateurs, et qu'elles soient toutes deux dans B, ou toutes deux dans A^0 hors de B, ou toutes deux dans B^1, ou toutes deux dans B^2.

90. Supposons d'abord n pair (et $\psi \neq 0$). Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{1N}$, et $\sigma' = s_k$ ou $s_k m_{1N}$. Comme au n° 77, pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ' (donc aussi $d\sigma'$ de σ), il faut d'abord que $k = \nu' - i$. Si alors d est dans B, ds_i et $ds_i m_{1N}$ sont respectivement conjuguées de s_k et $s_k m_{1N}$. Si d est hors de B, ds_i et $ds_i m_{1N}$ sont respectivement conjuguées de $s_k m_{1N}$ et s_k; et, si alors $n = 4h$, donc ψ irréductible (I, p. 348), ds_p est conjuguée de $s_h m_{1N}$, donc (s_h) de $(s_h m_{1N})$.

Soient $\sigma = s_i t_0$ ou $s_i m_{1N} t_0$, et $\sigma' = s_k t_0$ ou $s_k m_{1N} t_0$ $(i, k = 1, \ldots, \nu')$. Comme au n° 77, pour que $d\sigma$ soit conjuguée de σ', il faut d'abord que $k = \nu' - i + 1$. Si alors d est dans B, $ds_i t_0$ et $s_k t_0$, toutes deux dans $\{B, t_0\}$, sont conjuguées, $ds_i m_{1N} t_0$ et $s_k m_{1N} t_0$, toutes deux dans $\{B, t_0 m_{1N}\}$ sont conjuguées. Si d est hors de B, $ds_i t_0$ et $ds_i m_{1N} t_0$ sont respectivement conjuguées de $s_k m_{1N} t_0$ et $s_k t_0$; et, si alors $n = 4h - 2$, $ds_h t_0$ est conjuguée de $s_h m_{1N} t_0$, donc $(s_h t_0)$ de $(s_h m_{1N} t_0)$.

Donc, *pour n pair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 propres de $\mathfrak{A}$ en prenant : les (s_i) et $(s_i m_{1N})$ où $i \leqq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$, en supprimant, pour $n = 4h$ et ψ irréductible, (s_h) ou $(s_h m_{1N})$; puis les $(s_i t_0)$ et $(s_i m_{1N} t_0)$, où $i \leqq \frac{\nu'+1}{2} = \frac{n+2}{4}$, en supprimant, pour $n = 4h^{-2}$ et d hors de* B, *$(s_h t_0)$ ou $(s_h m_{1N} t_0)$*.

91. Supposons n impair. Soient $\sigma = s_i$ ou $s_i m_{1N}$, et $\sigma' = s_k t_0$ ou $s_k m_{1N} t_0$. Alors $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ (I, p. 320). Il suffit donc de répéter l'énoncé du n° 78. Pour que $d\sigma$ (qui est ici hors de A^0) soit conjuguée de σ' (donc aussi

$d\sigma'$ de σ), il faut d'abord (78) que $k = \nu - i + 1$. Alors ds_i est conjuguée de $s_k t_0$ ou de $s_k m_{1N} t_0$, qui sont, l'une dans un des B^i, l'autre dans l'autre (68). Pour préciser, ds_i, qui est dans $\{B, d\}$, est conjuguée de $s_k t_0$, qui est dans $\{B_1 t_0\}$ toujours et seulement si $dt_0 = d_{1,\ldots,\nu}$ est dans B, c'est-à-dire si $\pi \equiv 1 \pmod 4$, ou si ν est pair.

Donc, *pour n impair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 propres de $\mathfrak{A}$ en prenant les (s_i) et $(s_i m_{1N})$ pour $i = 1, \ldots, \nu$.*

92. Soit (s) une s_2 impropre de $\mathfrak{A}$.

Soit d'abord $\pi \equiv 1 \pmod 4$. Alors $[\varepsilon^{-1}]s = s_0$ est une s_2 de A′ hors de A. Elle n'existe (72) que *si n est pair et ψ réductible*, et elle est alors conjuguée de φ dans A′. Donc s est conjuguée, dans $A' = \{A, \gamma\}$ de $[\varepsilon]\varphi = d\Pi_1^\nu m_{i\varepsilon} = d\mu$. Comme γ est permutable à μ, s est conjuguée de $d\mu$ dans A, donc (s) de (μ) dans $\mathfrak{A}$. En ce cas, $\mathfrak{A}$ *contient* donc *une classe et une seule de s_2 impropres, que l'on peut représenter par* (μ).

Soit $\pi \equiv 3 \pmod 4$. Alors (s) est une s_2 de seconde espèce de $\mathfrak{A}'$. Elle n'existe (79) que pour n pair, et (86) est conjuguée, dans $\mathfrak{A}'$, de (Θ) si n est $\equiv 0 \pmod 4$ et ψ réductible, de $(\Theta') = (\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon})$, si n est $\equiv 2 \pmod 4$ et ψ irréductible. Or on vérifie directement que

$$\gamma_{2i}^{-1}\gamma_{2i-1}^{-1}\theta_i\gamma_{2i-1}\gamma_{2i} = m_{2i-1,\iota}^{-1}\theta_i m_{2i-1,\iota};$$

donc, si l'on pose $\mu = \Pi_1^{\nu'/2} m_{2i-1,\iota}$ pour $n \equiv 0 \pmod 4$ et $\mu' = \Pi_1^{\nu/2} m_{2i-1,\iota}$ pour $n \equiv 2 \pmod 4$, on a

$$\gamma^{-1}\Theta\gamma = \mu^{-1}\Theta\mu$$

et, γ comme μ' étant permutable à $m_{\nu'\varepsilon}$,

$$\gamma^{-1}\Theta'\gamma = \mu'^{-1}\Theta'\mu'.$$

Ainsi toutes les conjuguées de Θ ou Θ' dans $A' = \{A, \gamma\}$ s'obtiennent en transformant Θ ou Θ' par A. Donc *les s_2 impropres de $\mathfrak{A}$ forment une seule classe, que l'on peut représenter, suivant les cas, par* (Θ) *ou* (Θ').

93. Comme A^0 contient ou non D suivant que n est pair ou impair, si n est impair $\mathfrak{A}^0 = A^0$; et, si n est pair $\mathfrak{A}^0 = \frac{A^0}{D}$.

Soit donc n pair. Les s_2 propres de $\mathfrak{A}^0$ ne sont autres que les s_2 de A^0

où l'on regarde les variables comme homogènes; et l'on voit, comme pour $\mathfrak{A}$, que *l'on obtient des représentants non conjugés de toutes les classes de s_2 propres de $\mathfrak{A}^0$ en prenant les (s_i) et $(s_i m_{1N})$ où $i \leqq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$, en supprimant, pour $n = 4h$ et ψ irréductible (s_h) ou $(s_h m_{1N})$.*

94. Soit (s) une s_2 impropre de $\mathfrak{A}^0$.

Soit d'abord $\pi \equiv 1 \pmod 4$. Comme pour $\mathfrak{A}$ (92), (s) n'existe que si ψ est réductible, et ds est conjuguée de μ (92) dans $A = \{A^0, t_1\}$. Or t_1 transforme $m_{1\varepsilon}$ en $m_{1,-\varepsilon} = d_1 m_{1\varepsilon}$, donc μ en $d_1\mu$. Donc ds est conjuguée, dans A^0, de μ ou de $d_1\mu$ Or considérons en général les substitutions de A qui transforment μ en $d_{1\ldots k}\mu$ ou φ en $d_{1\ldots k}\varphi$. Elles sont de la forme $\sigma t_{1\ldots k}$, σ étant permutable à φ, donc de la forme $\alpha\beta$, α étant dans $\Gamma_{x_1\ldots x_{\nu'}}$ et β dans $\Gamma_{y_1\ldots y_{\nu'}}$. Pour que $\alpha\beta$ soit dans A, il faut et suffit que l'on ait

$$\sum_i^{\nu'}{}_1 \alpha_{ih}\beta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq h, \\ 1 & \text{si} \quad k = h, \end{cases}$$

en sorte que $|\sigma| = |\alpha||\beta| = 1$, et σ est dans A^0. Ainsi les substitutions de A qui transforment μ en $d_{1\ldots k}\mu$ sont dans A^0 ou hors de A^0, en même temps que $t_{1\ldots k}$, c'est-à-dire suivant que k est pair ou impair.

Si donc $n \equiv 0 \pmod 4$, ni $d_1\mu$, ni $dd_1\mu = d_{2\ldots\nu'}\mu$ ne sont conjuguées de μ dans A^0, donc (μ) *et* $(d_1\mu)$ *représentent deux classes distinctes de* $\mathfrak{A}^0$. Mais *si* $n \equiv 2 \pmod 4$, $dd_1\mu$ est conjuguée de μ dans A^0, donc (d, μ) de (μ) dans $\mathfrak{A}^0$.

95. *Soit maintenant* $\pi \equiv 3 \pmod 4$.

Alors (92), (s) est conjuguée, dans $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}^0, t_1\}$:

de (Θ), si n est $\equiv 0 \pmod 4$ et ψ réductible;

de $(\Theta, m_{\nu'\varepsilon})$, si n est $\equiv 2 \pmod 4$ et ψ irréductible.

Dans le premier cas, (s) est conjuguée dans $\mathfrak{A}^0$, dans (Θ) ou $(t_1\Theta t_1) = (\Theta t_{12})$. Or, dans ce cas, les s_2 impropres de

$$\mathfrak{A}^0(n, \pi^2) > \mathfrak{A}^0(n, \pi)$$

forment [d'après le n° 94, π^2 étant $\equiv 1 \pmod 4$] deux classes distinctes. Donc *les s_2 impropres de $\mathfrak{A}^0(n, \pi)$ forment deux classes distinctes, que l'on peut représenter par (Θ) et (Θt_{12}).*

Dans le deuxième cas, les s_2 impropres de $\mathcal{A}^0(n, \pi^2)$ ne forment qu'une classe (94). Il y a donc, dans $A^0(n, \pi^2)$, une substitution α_0 telle que $D\Theta_\nu t_{12} m_{\nu'\varepsilon}\alpha_0 = D\alpha_0 \Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$. Si l'on prend pour variables x et y au lieu de $x_{\nu'}$ et $y_{\nu'}$, il résulte de cette relation que les coefficients de α'_0 sont proportionnels à des nombres réels, en sorte que $\alpha^0 = [\rho]\alpha'$, α' étant dans $A'(n, \pi)$, et ρ désignant un facteur de proportionnalité. Comme α' multiplie la forme a par ρ^{-2}, ρ^2 est réel. Si ρ^2 est carré dans $\mathcal{C}$, ρ est réel, donc α'_0 dans $A^0(n, \pi)$ et $(\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon})$ est conjugué dans $\mathcal{A}^0(n, \pi)$ de $\Theta_\nu t_{12} m_{\nu'\varepsilon}$. Si ρ^2 n'est pas carré dans $\mathcal{C}$, remarquons que $m_{2i-1,\varepsilon} m_{2i,\varepsilon}^{-1}$ est permutable à $d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i}$, que, pour $k = t \pm 1$, et $j = 1, \ldots, \nu'$, $m_{j,\varepsilon}^k$ est dans $B(n, \pi^2)$ (ε est carré dans $\mathcal{C}'$) et que

$$[\varepsilon]_j^{-1} m_{j,\varepsilon}^k = \begin{vmatrix} x_j & \varepsilon^{-1+k} x_j \\ y_j & \varepsilon^{-1-k} y_j \end{vmatrix}$$

est toujours réel. Si donc on pose

$$\sigma_0 = \Pi_1^{\nu/2} m_{2i-1,\varepsilon} m_{2i,\varepsilon}^{-1} m_{\nu',\varepsilon},$$

σ_0 est permutable à $\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$ et dans $B(n, \pi^2)$, donc $\alpha_0\sigma_0$ est dans $A^0(n, \pi^2)$ et transforme $\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$ comme α_0. D'ailleurs $\sigma_0 = [\varepsilon]\sigma'$, σ' étant dans $A'(n, \pi)$; donc $\alpha_0\sigma_0 = [\varepsilon\rho]\alpha'\sigma'$. Ici $\overline{\varepsilon\rho}^2 = -\rho^2$ est carré dans $\mathcal{C}$; donc $\varepsilon\rho$ est réel, donc $\alpha_0\sigma_0$ dans $A^0(n, \pi)$, et $(\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon})$ est conjugué, dans $\mathcal{A}^0(n, \pi)$ de $(\Theta_\nu t_{12} m_{\nu'\varepsilon})$. Donc *les s_2 impropres de $\mathcal{A}^0(n, \pi$ forment une seule classe, que l'on peut représenter par* $(\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon})$.

96. Si d est hors de B [ce qui a toujours lieu pour n impair (I, 39)], on a $\mathcal{B} \equiv B$. Supposons donc d dans B, donc n pair et (I, 39) :

ou bien $n \equiv 0 \pmod 4$ et ψ réductibles;

ou bien $n \equiv 2 \pmod 4$, et soient $\pi \equiv 1 \pmod 4$ et ψ réductible, soient $\pi \equiv 3 \pmod 4$ et ψ irréductible.

Les s_2 propres de $\mathcal{B}$ ne sont autres que les s_2 de B *où l'on regarde les variables comme homogènes*, et l'on voit, comme pour $\mathcal{A}$, que *l'on obtient des représentants non conjugués de toutes les classes de s_2 propres de $\mathcal{B}$ en prenant les (s_i) où* $i \leqq \frac{\nu'}{2} = \frac{n}{4}$.

97. Soit (s) une s_2 impropre de $\mathcal{B}$.

Soit d'abord $\pi \equiv 1 \pmod 4$, Comme pour $\mathcal{A}$ (92), (s) n'existe que si ψ est réductible et, dans $A^0 = \{B, m_{1N}\}$, ds est conjuguée de μ si $n \equiv 2 \pmod 4$, de μ ou de $d_1\mu$ (92) (ni μ ni $d\mu$ n'étant conjuguées de $d_1\mu$) si $n \equiv 0 \pmod 4$ (94). Comme m_{1N} est permutable à μ et $d_1\mu$, ds sera conjuguée, par B, de μ, si $n \equiv 2 \pmod 4$, de μ ou de $d_1\mu$, si $n \equiv 0 \pmod 4$. *Si* donc $n \equiv 0$ (*mod* 4), μ et $d_1\mu$ sont dans B, *les* s_2 *impropres de* $\mathcal{B}$ *forment deux classes, que l'on peut représenter par* (μ) *et* $(d_1\mu)$. *Si* $n \equiv 2 \pmod 4$, comme $\varepsilon = \iota^{\frac{\pi-1}{4}}$ n'est carré que si $\pi \not\equiv 1 \pmod 8$, μ n'est pas de B, et $\mathcal{B}$ *n'a pas de* s_2 *impropres*. Mais *si* $\pi \equiv 1 \pmod 8$, μ est dans B, *les* s_2 *impropres de* $\mathcal{B}$ *forment une seule classe, que l'on peut représenter par* (μ).

98. *Soit maintenant* $\pi \equiv 3 \pmod 4$. Alors (s) est de deuxième espèce et n'existe, dans $\mathcal{A}^0 = \{\mathcal{B}, (d_1)\}$, que dans les deux cas suivants (95) :

si n est $\equiv 0 \pmod 4$ et ψ réductible; alors (s) est conjuguée de (Θ) ou de (Θt_{12}) représentant deux classes distinctes);

si n est $\equiv 2 \pmod 4$ et ψ irréductible; alors (s) est conjuguée de $(\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon})$.

Soient $n \equiv 0 \pmod 4$ *et* ψ *réductible*. La substitution d_1 transforme $d_1 T_{12} t_{12} = S_{1,2,-1}$ et $d_1 T_{12} = R_{12,1}$ en $d_{12} S_{1,2,-1} d_{12} R_{121}$, donc Θ en $d_{12}\Theta$ et Θt_{12} en $d_{12}\Theta t_{12}$ Or (58) si $\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$ désigne une matrice de $U(2, \Pi)$ $(\lambda^2 + \mu^2 = -e)$, à une substitution de U_{x_1, y_2} de matrice β répond dans $\mathbf{W}$ (I, 40) une substitution transformant $S_{1,2,-1}$ en $d_{12} S_{1,2,-}$; et à une substitution de U_{x_1, x_2}, répond, dans $\mathbf{V}$ (I, 40), une substitution transformant R_{121} en $d_{12} R_{121}$. Ces substitutions étant dans $B_{12} = \mathbf{VW}$, $d_{12}\Theta$ et $d_{12}\Theta t_{12}$ sont respectivement conjuguées, dans B, de Θ et Θt_{12}. Donc *les* s_2 *impropres de* $\mathcal{B}$ *forment* alors *deux classes que l'on peut représenter par* (Θ) *et* (Θt_{12}).

99. *Soient* $n \equiv 2$ (*mod* 4) *et* ψ *irréductible;* d_1 transforme $\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$ en $d_{12}\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$. Or ces deux substitutions sont transformées l'une dans l'autre par la substitution de $\mathbf{V}$ indiquée au numéro précédent; elles

sont donc conjuguées dans B; et *les s_2 impropres de $\mathcal{B}$ forment alors une seule classe, que l'on peut représenter par* $(\Theta_\nu m_{\nu\varepsilon})$.

100. Soit (s) une s_2 quelconque de $\mathcal{A}'$; désignons par $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}^0$, $\mathcal{T}$ ses normalisants respectifs dans $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}$. *Si* (σ) *est dans* $\mathcal{N}'$, σ *n'étant pas dans* N', on doit avoir $\sigma^{-1} s \sigma = [\iota^k] s$. Élevant au carré et remarquant que s^2 est dans I', on obtient $\iota^{2k} = 1$, d'où $\iota^k = -1$. Donc σ *transforme s en ds et* σ^2 *est dans* N'.

101. Soit (s) de première espèce. On peut supposer que $s^2 = 1$ (76) et (77, 78) que $s = s_r = t_{01} m_{1l} d_{1\ldots r}$, ou $s = s_r m_{1i}$, ou $s = s_r t_0$ si n est pair ou $s = \varphi$ si n est pair, Ψ réductible.

Dans tous les cas, pour que dt soit conjuguée de s, il faut que s ait autant de multiplicateurs -1 que de multiplicateurs $+1$, donc que n soit pair. Alors σ ne peut exister que pour φ, si ψ est réductible, ou, si $n = 4h$ pour s_h ou $s_h m_{12}$ qui ont $2h$ multiplicateurs -1 ou, si $n = 4h - 2$, pour $s_h t_0$ qui ont $2h - 1$ multiplicateurs -1. Dans tous les autres cas, les normalisants de (s) sont ceux de s où l'on regarde les variables comme homogènes.

102. Soient $n = 4h$ et $s = t_{01} m_{1l} d_{1\ldots h}$. Prenons les mêmes variables $x'_1, y'_1, x_2, y_2, \ldots, x_\nu, y_\nu, x, y$ qu'au n° 73, supposons que

$$\psi = x^2 + c' y^2,$$

et considérons encore les formes

$$a_1 = \Sigma_2^h x_i y_i + \frac{x_1'^2}{4l} + c' y^2, \qquad a_2 = \Sigma_{h+1}^\nu x_i y_i + x^2 - \frac{y_1'^2}{4l}.$$

Comme s multiplie par -1 les variables de a_1, et par 1 celles de a_2, pour que σ transforme s en ds, il faut qu'elle remplace les variables de a_1 par des fonctions des seules variables de a_2, et les variables de a_2 par des fonctions des seules variables de a_1. De plus pour que σ soit dans A', c'est-à-dire transforme a en fa, il faut et suffit qu'elle transforme a_1 en fa_2 et a_2 en fa_1. Si donc A_1 et A_2 désignent les groupes respectifs des formes a_1 et a_2, on aura $\sigma^{-1} A_1 \sigma = A_2$; donc A_1 et A_2 sont de même ordre. Il faut et suffit pour cela (I, 27) que les discriminants des deux formes

$$\psi_1 = \frac{x_1'^2}{4l} + c'y^2 \qquad \text{et} \qquad \psi_2 = x^2 - \frac{y_1'^2}{4l}$$

aient même caractère quadratique. Donc $-c'$ est carré et ψ réductible, et l'on peut supposer $c' = -1$. Mais alors (s_h) et $(s_h m_{12})$ sont conjuguées dans $\mathfrak{A}'$ (77). On peut donc toujours supposer que $s = t_{01} d_{1\ldots h}$, donc $l = 1$.

Les variables x_1' et y_1' sont alors définies par

$$x_1' = x_1 + y_1, \qquad y_1' = x_1 - y_1.$$

On peut remplacer x et y par $x_{\nu'} = x + y$ et $y_{\nu'} = x - y$, ce qui donne $t_0 = t_{\nu'}$ (I, p. 322), donc $s = t_{1\nu'} d_{1\ldots h}$. On voit alors que la substitution

$$\sigma = T_{1\nu'} T_{2,h+2} T_{3,h+3} \ldots T_{h\nu},$$

qui est dans B, transforme s en ds.

Ainsi, *pour $n = 4h$, si ψ est réductible, les normalisants de* (s_h) *sont* $\mathfrak{N} = (N + \sigma P)$ $\mathfrak{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathfrak{N}^0 = (N^0 + \sigma N^0)$, $\mathfrak{P} = (P + \sigma P)$. *Si ψ est irréductible, les normalisants de s_h sont* (N). (N'), (N^0), (P).

103. Soit $n = 4h - 2$. Comme au n° 74 prenons pour s une s_2 quelconque de A' ayant $2h - 1$ multiplicateurs -1, soit $s = t_0 d_{1,\ldots,h-1}$, et posons

$$a_1 = \Sigma_1^{h-1} x_i y_i + c' y^2, \qquad a_2 = \Sigma_h^{\nu} x_i y_i + x^2.$$

Comme s multiplie par -1 les variables de a_1 et par 1 celles de a_2, pour que σ transforme s en ds, il faut qu'elle remplace les variables de a_1 par des fonctions des seules variables de a_2, et les variables de a_2 par des fonctions des seules variables de a_1. De plus, pour que σ soit dans A_1, c'est-à-dire transforme a en fa, il faut et suffit qu'elle transforme a_1 en fa_2 et a_2 en fa_1. Donc les discriminants $(-1)^{h-1} 2c'$ de a_1 et $(-1)^{h-1} f^{2h+1} 2$ de fa_2 ont même caractère quadratique. Donc f a le caractère quadratique de c'.

Si c' est carré, on peut faire $c' = 1$. On voit alors que la substitution

$$\sigma = T_{1,h} T_{2,h+1} \ldots T_{h-1,\nu} \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix},$$

qui est dans A^0, transforme s en ds. On peut prendre $x_{\nu'} = x - \varepsilon y$, $y_{\nu'} = x + \varepsilon y$, Alors $\begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix} = m_{\nu'\varepsilon}$, et σ est dans B toujours et seulement si $\pi \equiv 1$ ou $7 \pmod 8$ (I, 32). Si cette condition n'est pas remplie, on remplacera σ par $\sigma\mu_1$, μ_1 étant une substitution quelconque de A_1^0 hors de B_1 (74), par exemple m_{12}.

Ainsi, pour $n = 4h - 2$ *et* $c' = 1$, *les normalisants de* $(t_0 d_{1,\ldots,h-1})$ sont $\mathfrak{N} = (N + \sigma N)$, $\mathfrak{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathfrak{N}^0 = (N' + \sigma N^0)$, $\mathfrak{P} = (P + \sigma P)$ *en prenant*

$$\sigma = T_{1,h} T_{2,h+1} \ldots T_{h-1,\nu} m_{\nu'\varepsilon} m_{11}^k,$$
$$k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \pi \equiv 1, 7 \\ 1 & \text{si} \quad \pi \equiv 3, 5 \end{cases} \pmod 8.$$

Soit c' non carré. Si $\pi \equiv 1 \pmod 4$, ψ est irréductible, et d est hors de B (I, p. 348). Si $\psi \equiv 3 \pmod 4$, ψ est réductible et d est hors de B (*ibid.*). Donc, si c' est non carré, d est toujours hors de B, $A^0 = BD$ (I, 39) et $\mathcal{B} = \frac{BD}{D} = \frac{A^0}{D} = \mathfrak{A}_0$. Alors σ, multipliant la forme a par un non carré est dans A' hors de A'' (I, 24); donc (σ) sera dans $\mathfrak{A}'$ hors de $\mathfrak{A}$.

Soient τ la substitution, hors de A', qui multiplie chaque x par c' sans altérer les y, et σ la substitution précédemment trouvée.

On voit que $\sigma\tau$ transforme s en ds et la forme a en $c'a$.

Ainsi *pour* $n = 4h - 2$ *et* c' *non carré, les normalisants de* $t_0 d_{1,\ldots,h-1}$ *sont* $\mathfrak{N} = (N)$, $\mathfrak{N} = (N' + \sigma\tau N')$, $\mathfrak{N}^0 = (N^0) = \mathfrak{P}$.

104. Soient $s = \varphi$, et ψ réductible. Comme

$$\varphi = \begin{vmatrix} x_i & -x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu'),$$

on voit que $t_{1\ldots\nu'}$ transforme φ en $d\varphi$ et est dans B ou dans A hors de A^0 suivant que ν' est pair ou impair. *Si* donc ν' *est pair les normalisants de* (φ) *sont* $\mathfrak{N} = (N + \sigma N)$, $\mathfrak{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{N}[N^0 = N(75)]$, $\mathfrak{P} = (P + \sigma P)$, $\sigma = t_{1\ldots\nu'}$. Si ν' est impair, toute substitution σ de A transformant φ en $d\varphi$, étant dans $t_{1\ldots\nu'} N < t_{1\ldots\nu'} A^0$, est nécessairement hors de A_0. *Si* donc ν' *est impair, les normalisants de* (φ) *sont* $\mathfrak{N} = (N + \sigma N)$, $\mathfrak{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathfrak{N}^0 = (N)$, $\mathfrak{P} = (P)$.

104 *bis*. Soit (s) de deuxième espèce. On peut supposer (86) que $s = t_{1\ldots\nu'}\gamma$, ou θ, si n est $\equiv 0 \pmod 4$, ψ réductible, et $\pi \equiv 3 \pmod 4$, ou $(\theta\gamma)$, si n est $\equiv 0 \pmod 4$, ψ réductible et $\pi \equiv 1 \pmod 4$, ou $\theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$, si n est $\equiv 2 \pmod 4$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 3 \pmod 4$, ou $(\theta_\nu \gamma m_{\nu'\rho})$, si n est $\equiv 2 \pmod 4$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 1 \pmod 4$.

Les normalisants $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ $\mathfrak{N}^0$, $\mathfrak{P}$ de (s) dans les groupes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}$, contiennent les groupes (N), (N′), (N⁰), (P) obtenus en regardant les variables comme homogènes dans les normalisants de s dans A, A′, A⁰, B. Si, de plus, ces groupes contiennent une substitution σ transformant s en ds (100), les normalisants de (s) contiennent en outre les complexes (σN), $(\sigma N')$, (σN^0), (σP).

105. Soit $s = t_{1\ldots\nu'}\gamma$. Supposons ψ réductible. L'action s_i de s sur x_i et y_i $(i = 1, \ldots, \nu')$ est $\begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}$. Si l'on prend les variables

$$x'_i = x_i + \iota_0 y_i, \qquad y'_i = \bar{x}'_i = x_i - \iota_0 y_i,$$

s_i prend la forme canonique $\begin{vmatrix} x'_i & \iota_0 x'_i \\ y'_i & -\iota_0 y'_i \end{vmatrix}$, et $x_i y_i$ devient $\frac{1}{4\iota_0}(x'^2_i - y'^2_i)$.

Si donc on pose

$$a_1 = \frac{1}{4\iota_0}\Sigma_1^{\nu'} x'^2_i, \qquad a_2 = -\frac{1}{4\iota_0}\Sigma_1^{\nu'} y'^2_i = \bar{a}_1,$$

s multiplie les variables de a_1 par ι_0, et celles de a_2 par $-\iota_0$. Dans $A(n, \pi^2)$, le normalisant de s est donc le produit direct $A(\nu', \pi^2, a_1)A(\nu', \pi^2, a_2)$. Comme $y'_i = \bar{x}'_i$, les substitutions de l'un de ces groupes sont conjuguées de celles de l'autre. Le normalisant N de s dans $A(n, \pi)$ sera formé des substitutions réelles de ce produit. Ce sera donc le groupe $\breve{A}$ formé des produits $\alpha_1\alpha_2$ de deux substitutions conjuguées. Comme $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \pm 1$, $\breve{A}$ divise $A^0(n, \pi)$. Donc $N = N^0 = \breve{A}$. P est le p. g. c. d. de $\breve{A}$ et de B. $\breve{A}$, contenant nécessairement d, ne divise pas toujours B.

Comme s multiplie la forme a par ι, on a $A' = \{\breve{A}, s\}$, donc $N' = \{N, s\}$.

On voit ensuite, en revenant aux variables x_i et y_i, que φ transforme s en ds. D'ailleurs, $s^{\frac{\pi-1}{2}}\varphi$ est dans A et transforme aussi s en ds.

On a $|s| = (-\iota)^{\nu'} = \iota^{\nu'\frac{\pi+1}{2}}$; donc $\left|s^{\frac{\pi-1}{2}}\right| = (-1)^{\nu'\frac{\pi+1}{2}}$; d'autre part, $\varphi = (-1)^{\nu'}$, donc $\left|s^{\frac{\pi-1}{2}}\varphi\right| = (-1)^{\nu'\frac{\pi-1}{2}}$. Si donc on prend $\sigma = s^{\frac{\pi-1}{2}}\varphi$, σ est hors de A^0 si π est $\equiv 3 \pmod 4$ et $n \equiv 2 \pmod 4$. Alors on a $\mathfrak{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathfrak{N} = (N + \sigma N)$, $\mathfrak{N}^0 = (N^0)$, $\mathfrak{P} = (P)$. Si $\pi \equiv 1 \pmod 4$, σ est toujours dans A^0, donc $\mathfrak{N}^0 = (N^0 + \sigma N^0)$; on a $\sigma = [\varepsilon]\varphi = \Pi_1^{\nu'} m_{i\varepsilon}^{-1}$. Si n est $\equiv 0 \pmod 4$ ou $\pi \equiv 1 \pmod 8$, σ est dans B, alors $\mathfrak{P} = (P + \sigma P)$. Si $n \equiv 2 \pmod 4$ et $\pi \not\equiv 1 \pmod 8$, σ est hors de B, alors $\mathfrak{P} = (P)$. Si $\pi \equiv 3 \pmod 4$ et $n \equiv 0 \pmod 4$, on trouve

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota_0^{\frac{\pi+1}{2}} y_i \\ y_i & \iota_0^{-\frac{\pi+1}{2}} y_i \end{vmatrix} = t_i m_{it}^{\frac{\pi+1}{4}}.$$

Donc $\sigma = \Pi_1^{\nu'} t_i m_{it}^{\frac{\pi+1}{4}}$ est dans B; et $\mathfrak{P} = (P + \sigma P)$.

106. Supposons ψ irréductible. Si l'on prend les variables

$$x'_i = x_i + \iota_0 y_i, \qquad y'_i = x_i \iota_0 - y_i,$$

s_i prend la forme canonique $\begin{vmatrix} x'_i & \iota_0 x'_i \\ y'_i & -\iota_0 y'_i \end{vmatrix}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$; et, comme $s_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota' y_{\nu'} \\ y_{\nu'} & \iota'^{\pi} x_{\nu'} \end{vmatrix}$, $s_{\nu'}$, si l'on prend les variables

$$x'_{\nu'} = x_{\nu'} + g y_{\nu'}, \qquad y'_{\nu'} = g^{\pi}(x_{\nu'} - g y_{\nu'}), \qquad g = \iota'^{\frac{1-\pi}{2}}, \qquad g^{\pi} = -\frac{1}{g},$$

prend la forme canonique $\begin{vmatrix} x'_{\nu'} & \iota_0 x'_{\nu'} \\ y'_{\nu'} & -\iota_0 y'_{\nu'} \end{vmatrix}$. Ainsi la forme canonique de s est $\Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x'_k & \iota_0 x'_k \\ y'_k & -\iota_0 y'_k \end{vmatrix}$. Et l'on a

$$x_i y_i = \frac{1}{4\iota_0}(x_i'^2 - y_i'^2) \qquad (i = 1, \ldots, \nu'),$$

$$x_{\nu'} y_{\nu'} = \frac{1}{4}(g^{-1} x_{\nu'}'^2 - g y_{\nu'}'^2).$$

Si donc on pose

$$a_1 = \frac{1}{4}\left(\Sigma_1^{\nu} \frac{x_i'^2}{\iota_0} + \frac{x_{\nu'}'^2}{g}\right), \qquad a_2 = \frac{1}{4}\left(\Sigma_1^{\nu} \frac{y_i'^2}{-\iota_0} - g y_{\nu'}'^2\right) = a_1,$$

s multiplie les variables de a_1 par ι_0 et celles de a_2 par $-\iota_0$. Comme précédemment, N sera le groupe $\breve{A}$ formé des substitutions $\alpha_1\alpha_2$, α_1 étant dans le groupe A_1 de la forme a_1 et α_2 conjuguée de α_1 et $\breve{A}$ divise $A^0(n, \pi)$. Donc $N = N^0 = \breve{A}$. P est le p. g. c. d. de $\breve{A}$ et de B, et $N' = \{N, s\}$.

On voit ensuite que la substitution

$$\tau = \Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ y'_i & x'_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_{\nu'} & g\ y'_{\nu'} \\ y'_{\nu'} & -g^{-1}x'_{\nu'} \end{vmatrix}$$

transforme s en ds. D'ailleurs $s^{\frac{\pi-1}{2}}\tau$ est dans A, et transforme aussi s en ds. Ici $|\sigma| = -(-1)^{\nu'\frac{\pi-1}{2}}$. Si $n \equiv 0 \pmod 4$ ou si $\pi \equiv 1 \pmod 4$, σ n'est pas dans A^0, donc $\mathfrak{N} = (N + \sigma N)$, $\mathfrak{N}' = (N' + \sigma N')$, $\mathfrak{N}^0 = (N^0)$, $\mathfrak{P} = (P)$. Si $n \equiv 2 \pmod 4$ et $\pi \equiv 3 \pmod 4$, σ est dans A^0 et $\mathfrak{N}^0 = (N^0 + \sigma N^0)$. En ce cas, on voit que $\sigma = \Pi_1^{\nu'} t_i m_{i\iota}^{\frac{\pi+1}{4}} . m_{\nu'\varepsilon}$. Comme ν est pair, σ est dans B ou hors de B en même temps que $m_{\nu'\varepsilon}$, c'est-à-dire suivant $\frac{\pi+1}{2}$ est $\equiv 0$ ou à $2 \pmod 4$. On a donc, suivant les cas, $\mathfrak{P} = (P + \sigma P)$, ou $\mathfrak{P} = (P)$.

107. Dans les quatre cas qui restent à étudier, on a une relation de la forme $\zeta^{-1}\varphi[\iota_0]\zeta = [\iota^h]s$, $h = \frac{\pi \pm 1}{4}$. Considérons d'abord les normalisants N_φ, N'_φ, N^0_φ, P_φ de φ dans $A(n, \pi^2)$, $A'(n, \pi^2)$, $A^0(n, \pi^2)$, $B(n, \pi^2)$, et ceux $\mathfrak{N}_\varphi$, $\mathfrak{N}'_\varphi$, $\mathfrak{N}^0_\varphi$, $\mathfrak{P}_\varphi$ de (φ) dans $\mathfrak{A}(n, \pi^2)$, $\mathfrak{A}'(n, \pi^2)$, $\mathfrak{A}^0(n, \pi^2)$, $\mathfrak{B}(n, \pi^2)$.

Or, on a (75), $N_\varphi = N^0_\varphi = \mathbf{V}_{1,\dots,\nu',\iota}$, $N'_\varphi = \{N_\varphi, \gamma'\}$, $\gamma' = \Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x_i & \iota' x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$, $P_\varphi = \mathbf{V}_{1,\dots,\nu',\iota^2}$, et (104), en posant $\sigma = t_{1\dots\nu'}$, $\mathfrak{N}_\varphi = (N_\varphi + \sigma N_\varphi)$, $\mathfrak{N}'_\varphi = (N'_\varphi + \sigma N'_\varphi)$; puis, si $n \equiv 0 \pmod 4$, $\mathfrak{N}^0_\varphi = \mathfrak{N}_\varphi$, $\mathfrak{P}_\varphi = (P_\varphi + \sigma P_\varphi)$; si $n \equiv 2 \pmod 4$, $\mathfrak{N}^0_\varphi = (N_\varphi)$, $\mathfrak{P}_\varphi = (P_\varphi)$.

Le normalisant $\mathfrak{N}$ est formé des substitutions (α) de $\mathfrak{A}$, α transformant s en s ou ds. Si α est permutable à s, elle le sera à $\zeta^{-1}\varphi\zeta$. Donc $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ est dans N_φ, donc α dans $\zeta^{-1}N_\varphi\zeta$. De même, si α transforme s en ds, elle transforme $\zeta^{-1}\varphi\zeta$ en $d\zeta^{-1}\varphi\zeta$, donc $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ transforme φ en $d\varphi$. Donc $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ est dans $N_\varphi\sigma$, donc α dans $\zeta^{-1}N_\varphi\sigma\zeta$. Donc $\mathfrak{N}$ est le p. g. c. d.

de $\zeta^{-1}\mathfrak{N}_\varphi\zeta$ avec $\mathfrak{A}(n, \pi)$. De même $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}^0$, $\mathfrak{T}$ sont les p. g. c. d. de $\mathfrak{N}'_\varphi$, $\mathfrak{N}^0_\varphi$, $\mathfrak{T}_\varphi$ avec $\mathfrak{A}'(n, \pi)$, $\mathfrak{A}^0(n, \pi)$, $\mathfrak{B}(n, \pi)$.

Il nous faut maintenant calculer $\zeta^{-1}\alpha_\varphi\zeta = \beta_\varphi$, α_φ étant une substitution quelconque de N_φ, et ζ une des substitutions définies au n° 79, et déterminée au n° 87.

108. Soit $n \equiv 0 \pmod 4$, en posant $j = 2i-1$, $k = 2i$, on a

$$\zeta_{i\rho} = \zeta_{jk\rho} = U_{j,k,1-1/2\rho}W_{jk1}U_{j,k,1-\rho} = \left|\begin{array}{ll} x_j & \rho x_j + \frac{1}{2}y_k \\ y_j & \frac{1}{2\rho}y_j + x_k \\ x_k & \rho x_k - \frac{1}{2}y_j \\ y_k & \frac{1}{2\rho}y_k - x_j \end{array}\right|.$$

Comme (I, 28) $\zeta^{-1}_{j,k,\rho} = \zeta_{k,j,1/2\rho}$, on aura

$$\zeta^{-1}_{j,k,\rho} = \left|\begin{array}{ll} x_j & \frac{1}{2\rho}x_j - \frac{1}{2}y_k \\ y_j & \rho y_j - x_k \\ x_k & \frac{1}{2\rho}x_k + \frac{1}{2}y_j \\ y_k & \rho y_k + x_j \end{array}\right|.$$

La substitution α_φ a la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}\,x_k + \alpha_{i,k+1}\,x_{k+1}) \\ y_i & \Sigma_k(\beta'_{ik}\,y_k + \beta'_{i,k+1}\,y_{k+1}) \\ x_{i+1} & \Sigma_k(\alpha_{i+1,k}x_k + \alpha_{i+1,k+1}x_{k+1}) \\ y_{i+1} & \Sigma_k(\beta'_{i+1,k}y_k + \beta'_{i+1,k+1}\,y_{k+1}) \end{array}\right|,$$

avec la condition $\beta' = \bar{\alpha}^{-1}$ (I, 40, 41). On voit que β_φ se déduit de α_φ en remplaçant chaque sous-matrice (S, 117) :

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} = \left\{\begin{array}{cccc} \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{ik} & 0 & \beta'_{i,k+1} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,k} & 0 & \beta'_{i+1,k+1} \end{array}\right\}$$

(i et k impairs) de α_φ par $\zeta_{k,k+1,\rho}^{-1}\alpha_\varphi^{(i,k)}$, $\zeta_{i,i+1,\rho} = \beta_\varphi^{(i,k)}$ (*cf.* S, 117). On obtient

$$\beta_\varphi^{(i,k)} = \left\{\begin{array}{cccc} \frac{1}{2}(\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) & \frac{\rho}{2}(\alpha_{i,k+1} + \beta'_{i+1,k}) & \frac{1}{2}(\alpha_{i,k+1} - \beta'_{i+1,k}) & -\frac{\rho}{2}(\alpha_{ik} - \beta'_{i+1,k+1}) \\ \frac{1}{2\rho}(\alpha_{i+1,k} + \beta'_{i,k+1}) & \frac{1}{2}(\alpha_{i+1,k+1} + \beta'_{ik}) & \frac{1}{2\rho}(\alpha_{i+1,k+1} - \beta'_{ik}) & -\frac{1}{2}(\alpha_{i+1,k} - \beta'_{i,k+1}) \\ \frac{1}{2}(\alpha_{i+1,k} - \beta'_{i,k+1}) & \frac{\rho}{2}(\alpha_{i+1,k+1} - \beta'_{ik}) & \frac{1}{2}(\alpha_{i+1,k+1} + \beta'_{ik}) & -\frac{\rho}{2}(\alpha_{i+1,k} + \beta'_{i,k+1}) \\ -\frac{1}{2\rho}(\alpha_{ik} - \beta'_{i+1,k+1}) & -\frac{1}{2}(\alpha_{i,k+1} - \beta'_{i+1,k}) & -\frac{1}{2\rho}(\alpha_{i,k+1} + \beta'_{i+1,k}) & \frac{1}{2}(\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) \end{array}\right\},$$

La matrice β_φ, ainsi obtenue, est la matrice générale du normalisant de s dans $A(n, \pi^2)$.

Il nous faut maintenant calculer $\zeta^{-1}\alpha_\varphi\sigma$, $\zeta = \tau_\varphi$, $\sigma = t_{1\ldots\nu'}$. Les sous-matrices de $\alpha_\varphi\sigma$, analogues aux $\alpha_\varphi^{(i,k)}$, sont

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1} = \left\{\begin{array}{cccc} 0 & \beta'_{ik} & 0 & \beta'_{i,k+1} \\ \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,k} & 0 & \beta'_{i+1,k+1} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \end{array}\right\}.$$

On aura donc

$$\tau_\varphi^{(i,k)} = \zeta_{k,k+1}^{-1}\alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1}\zeta_{i,i+1},$$

ce qui donne

$$= \left\{\begin{array}{cccc} \frac{1}{4\rho}\alpha_{i+1,k} + \rho\beta'_{i,k+1} & \frac{1}{4}\alpha_{i+1,k+1} + \rho^2\beta'_{ik} & \frac{1}{4\rho}\alpha_{i+1,k+1} - \rho\beta'_{ik} & -\frac{1}{4}\alpha_{i+1,k} + \rho^2\beta'_{i,k+1} \\ \frac{1}{4\rho^2}\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1} & \frac{1}{4\rho}\alpha_{i,k+1} + \rho\beta'_{i+1,k} & \frac{1}{4\rho}\alpha_{i,k+1} - \beta'_{i+1,k} & -\frac{1}{4\rho}\alpha_{ik} + \rho\beta'_{i+1,k+1} \\ -\frac{1}{4\rho}\alpha_{ik} + \rho\beta'_{i+1,k+1} & -\frac{1}{4}\alpha_{i,k+1} + \rho^2\beta'_{i+1,k} & -\frac{1}{4\rho}\alpha_{i,k+1} - \rho\beta'_{i+1,k} & \frac{1}{4}\alpha_{ik} + \rho^2\beta'_{i+1,k+1} \\ \frac{1}{4\rho^2}\alpha_{i+1,k} - \beta'_{i,k+1} & \frac{1}{4\rho}\alpha_{i+1,k+1} - \rho\beta'_{ik} & \frac{1}{4\rho^2}\alpha_{i+1,k+1} + \beta'_{ik} & -\frac{1}{4\rho}\alpha_{i+1,k} - \rho\beta'_{i,k+1} \end{array}\right\}$$

109. Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod 4$, ψ étant alors irréductible, β_φ se déduit ici de α_φ, en remplaçant :

1° chaque sous-matrice $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ où i et k sont impairs $\leqq \nu - 1$ par la sous-matrice $\beta_\varphi^{(i,k)}$ de tout à l'heure ;

2° chaque sous-matrice

$$\alpha_\varphi^{(\nu',k)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{\nu'k} & 0 & \alpha_{\nu'k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{\nu'k} & 0 & \beta'_{\nu'k+1} \end{Bmatrix},$$

k impair $\leqq \nu - 1$ par

$$\zeta_{k,k+1}^{-1}\alpha_\varphi^{(\nu',k)} = \beta_\varphi^{(\nu',k)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu,k} & \frac{1}{2}\alpha_{\nu'k+1} & \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu',k+1} & -\frac{1}{2}\alpha_{\nu'k} \\ \beta'_{\nu',k+1} & \rho\beta'_{\nu'k} & -\beta'_{\nu'k} & \rho\beta'_{\nu',k+1} \end{Bmatrix};$$

3° chaque sous-matrice

$$\alpha_\varphi^{(i,\nu')} = \begin{Bmatrix} \alpha_{i\nu'} & 0 \\ 0 & \beta_{i\nu'} \\ \alpha_{i+1,\nu'} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,\nu'} \end{Bmatrix}$$

par

$$\alpha_\rho^{(i,\nu')}\zeta_{i,i+1} = \beta_\varphi^{(i,\nu')} = \begin{Bmatrix} \rho\alpha_{i\nu'} & \frac{1}{2}\beta'_{i+1,\nu'} \\ \alpha_{i+1,\nu'} & \frac{1}{2\rho}\beta'_{i\nu'} \\ \rho\alpha_{i+1,\nu'} & -\frac{1}{2}\beta'_{i\nu'} \\ -\alpha_{i\nu'} & \frac{1}{2\rho}\beta'_{i+1,\nu'} \end{Bmatrix};$$

4° la sous-matrice $\alpha_\varphi^{(\nu'\nu')}$ par elle-même.

La matrice β_φ ainsi obtenue est la matrice générale du normalisant de φ dans $A(n, \pi^2)$. Il nous faut maintenant calculer $\zeta^{-1}\alpha_\varphi\sigma\zeta = \tau_\varphi$, $\sigma = t_{1\ldots\nu'}$. Les sous-matrices de $\alpha_\varphi\sigma$ analogues aux $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ s'obtiennent en remplaçant :

1° chaque $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ où i et k sont impairs $\leqq \nu - 1$ par la matrice $\alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1}$ déjà formée pour $n \equiv 0 \pmod 4$;

2° chaque $\alpha_\varphi^{(\nu',k)}$ par

$$\alpha_\varphi^{(\nu',k)} t_{\nu'} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta_{\nu'k} & 0 & \beta_{\nu'k+1} \\ \alpha_{\nu'k} & 0 & \alpha_{\nu',k+1} & 0 \end{Bmatrix};$$

3° chaque $\alpha_\varphi^{(i,\nu')}$ par

$$\alpha_\varphi^{(i,\nu')} t_{i,i+1} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta'_{i\nu'} \\ \alpha_{i\nu'} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,\nu'} \\ \alpha_{i+1,\nu'} & 0 \end{Bmatrix};$$

4° $\alpha_\varphi^{(\nu',\nu')} = \begin{Bmatrix} \alpha_{\nu'\nu'} & 0 \\ 0 & \beta'_{\nu'\nu'} \end{Bmatrix}$ par

$$\alpha_\varphi^{(\nu',\nu')} t_{\nu'} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta'_{\nu'\nu'} \\ \alpha_{\nu'\nu'} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Donc τ_φ se déduit de α_φ en remplaçant :

1° chaque $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ où i et k sont impairs $\leqq \nu - 1$ par la sous-matrice $\tau_\varphi^{(i,k)}$ déjà considérée pour $n \equiv 0 \pmod 4$;

2° chaque $\alpha_\varphi^{(\nu',k)}$ par

$$\zeta_{k,k+1}^{-1} \alpha_\varphi^{(\nu',k)} t_{\nu'} = \tau_\varphi^{(\nu',k)} = \begin{Bmatrix} \beta_{\nu',k+1} & \rho\beta_{\nu'k} & -\beta_{\nu'k} & \rho\beta_{\nu',k+1} \\ \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu'k} & \frac{1}{2}\alpha_{\nu',k+1} & \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu',k+1} & -\frac{1}{2}\alpha_{\nu',k} \end{Bmatrix};$$

3° chaque $\alpha_\varphi^{(i,\nu')}$ par

$$\alpha_\varphi^{(i,\nu')} t_{i,i+1} \zeta_{i,i+1} = \tau_\varphi^{(i,\nu')} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_{i+1,\nu'} & \rho\beta_{i\nu'} \\ \frac{1}{2\rho}\alpha_{i\nu'} & \beta'_{i+1,\nu'} \\ -\frac{1}{2}\alpha_{i\nu'} & \rho\beta'_{i+1,\nu'} \\ \frac{1}{2\rho}\beta_{i+1,\nu'} & -\beta'_{i\nu'} \end{pmatrix};$$

4° $\alpha_\varphi^{(\nu'\nu')}$ par

$$\alpha_\varphi^{\nu'\nu'} t_{\nu'} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta_{\nu'\nu'} \\ \alpha_{\nu'\nu'} & 0 \end{Bmatrix}.$$

110. Arrivons maintenant à la détermination de $\mathfrak{N}$.

N, p. g. c. d. de $\zeta^{-1} N_\varphi \zeta$ et de $A(n, \pi)$ sera formé des substitutions β_φ réelles.

Soit d'abord $n \equiv 0 \pmod 4$, donc ψ réductible, ρ est ici imaginaire [$\rho = \eta$, quand $\pi \equiv 1 \pmod 4$, et $\rho = \varepsilon$ quand $\pi \equiv 3 \pmod 4$ (87)]; ρ^2 est réel et $\dot\rho = -\rho$. Un calcul direct montre que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de $\beta_\varphi^{(i,k)}$ sont

$$(1) \qquad \begin{cases} \beta'_{i+1,k+1} = \dot\alpha_{ik}, & \beta'_{ik} = \dot\alpha_{i+1,k+1}, \\ \beta'_{i,k+1} = -\dot\alpha_{i+1,k}, & \beta'_{i+1,k} = -\dot\alpha_{i,k+1}. \end{cases}$$

On a donc

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \dot\alpha_{i+1,k+1} & 0 & -\dot\alpha_{i+1,k} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & -\dot\alpha_{i,k+1} & 0 & \dot\alpha_{ik} \end{pmatrix}.$$

Les relations fondamentales [I, p. 324, formules (4)] deviennent alors

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma_i(\alpha_{ik}\,\dot{\alpha}_{i+1,l+1}-\alpha_{i+1,k}\,\dot{\alpha}_{i,l+1})=\begin{cases}0 & \text{si } l\neq k,\\ 1 & \text{si } l=k,\end{cases}\\
&\Sigma_i(\alpha_{i,k+1}\,\dot{\alpha}_{i+1,l+1}-\alpha_{i+1,k+1}\,\dot{\alpha}_{i,l+1})=0,\\
&\Sigma_i(\alpha_{ik}\,\dot{\alpha}_{i+1,l}-\alpha_{i+1,k}\,\dot{\alpha}_{il})=0,
\end{aligned}\right.
$$

i, k, l parcourant les nombres impairs $<\nu'$.

Considérons maintenant la matrice des α qui détermine α_φ. En remplaçant i par $2i-1$ et k par $2k-1$ $\left(\text{en sorte que } i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{\nu'}{2}\right)$ la sous-matrice des α qui figure dans $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ deviendra

$$
\begin{Bmatrix}\alpha_{2i-1,2k-1} & \alpha_{2i-1,2k}\\ \alpha_{2i,2k-1} & \alpha_{2i,2k}\end{Bmatrix},
$$

et pourra s'écrire $\begin{pmatrix}\breve{\alpha}_{ik} & \breve{\alpha}'_{ik}\\ \breve{\beta}_{ik} & \breve{\beta}'_{ik}\end{pmatrix}$. Par la même transformation, l étant aussi remplacé par $2l-1$, les formules (2) deviennent

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_i(\alpha_{2i-1,2k-1}\,\dot{\alpha}_{2i,2l}-\alpha_{2i,2k-1}\,\dot{\alpha}_{2i-1,2l})=\begin{cases}0 & \text{si } l\neq k,\\ 1 & \text{si } l=k,\end{cases}\\
&\Sigma_i(\alpha_{2i-1,2k}\,\dot{\alpha}_{2i,2l}-\alpha_{2i,2k}\,\dot{\alpha}_{2i-1,2l})=0,\\
&\Sigma_i(\alpha_{2i-1,2k-1}\,\dot{\alpha}_{2i,2l-1}-\alpha_{2i,2k-1}\,\dot{\alpha}_{2i-1,2l-1})=0.
\end{aligned}
$$

On peut les écrire

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_i\left(\breve{\alpha}_{ik}\breve{\beta}'_{il}-\breve{\beta}_{ik}\breve{\alpha}'_{il}\right)=\begin{cases}0 & \text{si } l\neq k,\\ 1 & \text{si } l=k,\end{cases}\\
&\Sigma_i\left(\breve{\alpha}'_{ik}\breve{\beta}'_{il}-\breve{\beta}'_{ik}\breve{\alpha}'_{il}\right)=0,\\
&\Sigma_i\left(\breve{\alpha}_{ik}\breve{\beta}_{il}-\breve{\beta}_{ik}\breve{\alpha}_{il}\right)=0\\
&\qquad\left(i,\ k,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{\nu'}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Donc [I, p. 287, formules (4), (5), (6)] la matrice $\breve{\alpha}$ parcourt $H(\nu', \pi)$.

Soit $H_\varphi \equiv H(\nu, \pi)$ le groupe que parcourt α_φ quand $\breve{\alpha}$ parcourt $H(\nu', \pi)$. On voit que *le p. g. c. d. de* $\zeta^{-1}N_\varphi\zeta$ *avec* $A(n, \pi)$ *est* $\zeta^{-1}H_\varphi\zeta$.

On voit, comme précédemment, que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de $\tau_\varphi^{(i,k)}$ sont

$$\beta'_{i,k+1} = -\frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{i+1,k}, \qquad \beta'_{i+1,k} = -\frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{i,k+1},$$

$$\beta'_{ik} = \frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{i+1,k+1}, \qquad \beta'_{i+1,k+1} = \frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{ik}.$$

Donc

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1} = \left\{\begin{matrix} \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{i+1,k+1} & 0 & \frac{-1}{4\rho^2}\dot\alpha_{i+1,k} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,+k1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{i,k+1} & 0 & \frac{1}{4\rho^2}\dot\alpha_{ik} \end{matrix}\right\}.$$

La première des formules (2), pour $l = k$, devient

$$\Sigma_i(\alpha_{ik}\dot\alpha_{i+1,k+1} - \alpha_{i+1,k}\dot\alpha_{i,k+1}) = 4\rho^2;$$

les autres restent inaltérées. On peut encore écrire

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2\rho}\alpha_{i+1,k} & 0 & \frac{1}{2\rho}\alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\rho}\dot\alpha_{i,k+1} & 0 & \frac{1}{2\rho}\dot\alpha_{ik} \\ \frac{1}{2\rho}\alpha_{ik} & 0 & \frac{1}{2\rho}\alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}\dot\alpha_{i+1,k+1} & 0 & \frac{-1}{2\rho}\dot\alpha_{i+1,k} \end{matrix}\right\}\xi_i$$

$$(\xi_i = \mathrm{T}_{i,i+1} m_{i,2\rho} m_{i+1,2\rho} t_{i,i+1})$$

ou, en remplaçant au second membre i par $2i-1$,

$$\begin{aligned}\xi_i &= \mathrm{T}_{2i-1,2i} m_{2i-1,2\rho} m_{2i,2\rho} t_{2i-1,2i} \\ &= d_{2i-1}\mathrm{T}_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} m_{2i-1,-2\rho} m_{2i,2\rho} = d_{2i-1}\mathrm{S}_{2i-1,2i,2\rho}.\end{aligned}$$

La sous-matrice qui multiplie ξ_i étant une sous-matrice de H_φ, $\alpha_\varphi t_{1\ldots\nu'}$ est une substitution de $\mathrm{H}_\varphi\xi$, en posant $\xi = \Pi_1^{\nu'/2}\xi_i$. Donc

$$\mathfrak{N} = (\zeta^{-1}\mathrm{H}_\varphi\zeta + \zeta^{-1}\mathrm{H}_\varphi\xi\zeta).$$

On remarquera que $\zeta^{-1}\xi\zeta = d_{24\ldots\nu'}$.

111. Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod 4$, donc ψ irréductible.

Les conditions de réalité de $\beta_\varphi^{(i,k)}$ (i, k impairs $< \nu$) sont les mêmes que :

pour que $\beta_\varphi^{(\nu',k)}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu',k+1} = \frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu'k}, \qquad \beta_{\nu'k} = \frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu',k+1}; \tag{3}$$

pour que $\beta_\varphi^{(i,\nu')}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{i+1,\nu'} = -2\rho\dot{\alpha}_{i\nu'}, \qquad \beta'_{i\nu'} = 2\rho\dot{\alpha}_{i+1,\nu'}; \tag{4}$$

pour que $\beta_\varphi^{(\nu',\nu')}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu'\nu'} = \dot{\alpha}_{\nu'\nu'}. \tag{5}$$

Les relations fondamentales deviennent donc :

$$\Sigma_i(\alpha_{ik}\ \dot{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k}\ \dot{\alpha}_{i,l+1}) + \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu'k}\ \dot{\alpha}_{\nu',l+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k, \\ 1 & \text{si } l = k, \end{cases} \tag{6}$$

$$\Sigma_i(\alpha_{i,k+1}\dot{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k+1}\dot{\alpha}_{i,l+1}) + \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu',k+1}\dot{\alpha}_{\nu',l+1} = 0, \tag{7}$$

$$\Sigma_i(\alpha_{ik}\ \dot{\alpha}_{i+1,l} - \alpha_{i+1,k}\ \dot{\alpha}_{il}) + \frac{1}{2\rho}\alpha_{\nu'k}\ \dot{\alpha}_{\nu'k} = 0, \tag{8}$$

$$\Sigma_i(\alpha_{ik}\ \dot{\alpha}_{i+1,\nu'} - \alpha_{i+1,k}\ \dot{\alpha}_{i\nu'}) + \alpha_{\nu'k}\ \dot{\alpha}_{\nu'\nu'} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \nu', \\ 1 & \text{si } k = \nu', \end{cases} \tag{9}$$

$$2\rho\Sigma_i(\alpha_{i,k+1}\dot{\alpha}_{i+1,\nu'} - \alpha_{i+1,k+1}\dot{\alpha}_{i\nu'}) + \alpha_{\nu',k+1}\dot{\alpha}_{\nu'\nu'} = 0. \tag{10}$$

Les indices i et l parcourent les nombres impairs $< \nu$. L'indice k parcourt les mêmes nombres dans (7), et peut prendre la valeur ν' dans (6), (8), (9). [(6) pour $k = \nu'$ est la conjuguée de (10), que l'on peut supprimer.]

Comme précédemment, la sous-matrice des α qui figure dans $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ pourra s'écrire $\begin{pmatrix} \breve{\alpha}_{ik} & \breve{\alpha}'_{ik} \\ \breve{\beta}_{ik} & \breve{\beta}'_{ik} \end{pmatrix}$ $\left(i,\ k = 1,\ \ldots,\ \frac{\nu}{2}\right)$; la sous-matrice $(\alpha_{\nu',2k-1},\ \alpha_{\nu',2k})$ s'écrira $(\breve{\alpha}_{0k},\ \breve{\alpha}'_{0k})$; la sous-matrice $\begin{pmatrix} \alpha_{2i-1} & \nu' \\ \alpha_{2i} & \nu' \end{pmatrix}$ pourra s'écrire $\begin{pmatrix} \breve{\alpha}_{i0} \\ \breve{\beta}_{i0} \end{pmatrix}$; enfin, on remplacera $\alpha_{\nu'\nu'}$ par α_{00}. En faisant alors $\upsilon = \frac{1}{4\rho}$, d'où $\omega = \upsilon - \dot{\upsilon} = \frac{1}{2\rho}$, les relations (6), (10) s'écrivent :

$$\Sigma_i\left(\dot{\breve{\alpha}}'_{ik}\breve{\beta}'_{il} - \breve{\beta}_{ik}\dot{\breve{\alpha}}'_{il}\right) + \omega\breve{\alpha}_{0k}\dot{\breve{\alpha}}'_{0l} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k \\ 1 & \text{si } t = k \end{cases} \quad (k \geqq 0;\ l \neq 0)$$

[cette relation vient de (6) et (10)],

$$\Sigma_i\left(\breve{\alpha}'_{ik}\dot{\breve{\beta}}'_{il}-\breve{\beta}'_{ik}\dot{\breve{\alpha}}_{il}\right)+\omega\breve{\alpha}'_{0k}\dot{\breve{\alpha}}'_{0l}=0 \qquad (k, l \neq 0)$$

[cette relation vient de (7)],

$$\Sigma_i\left(\breve{\alpha}_{ik}\dot{\breve{\beta}}_{il}-\breve{\beta}_{ik}\dot{\breve{\alpha}}_{il}\right)+\omega\alpha_{0k}\dot{\alpha}_{0l}=\begin{cases} 0 & \text{sauf si} \quad k=l=0 \\ \omega & \text{si} \quad k=l=0 \end{cases}$$

[cette relation vient de (8) et (9)].

Donc [I, p. 287, formules (4), (5), (6)] $\breve{\alpha}$ parcourt $H(\nu', \pi)$.

Soit $H_\varphi \equiv H(\nu', \pi)$ le groupe que parcourt α_φ quand $\breve{\alpha}$ parcourt $H(\nu', \varphi)$. On voit que le p. g. c. d. de $\zeta^{-1}N_\varphi\zeta$ avec $A(n, \pi)$ est $\zeta^{-1}H_\varphi\zeta$.

On voit comme précédemment que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de $\tau_\varphi^{(i,k)}$ (i, k impairs $< \nu$) sont

$$\beta'_{\nu',k+1}=\frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu'k}, \qquad \beta'_{\nu'k}=\frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu',k+1}.$$

On remarquera que ce sont les mêmes conditions que pour la réalité de $\beta_\varphi^{(i,k)}$:

pour que $\tau_\varphi^{(\nu',k)}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta_{\nu',k+1}=\frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu'k}, \qquad \beta'_{\nu'k}=\frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu',k+1};$$

pour que $\tau_\varphi^{(i,\nu')}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{i\nu'}=\frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i+1,\nu'}, \qquad \beta'_{i+1,\nu'}=\frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i\nu'};$$

pour que $\tau_\varphi^{(\nu'\nu')}$ soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu'\nu'}=\dot{\alpha}_{\nu'\nu'}.$$

On transforme $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ comme dans le cas $n \equiv 0 \pmod 4$ $\Big[$on a ici $\frac{1}{4\rho^2}\Sigma_i(\dot{\alpha}_{ik}\alpha_{i+1,k+1}-\alpha_{i+1,k}\dot{\alpha}_{i,k+1})+\frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{\nu'k}\alpha_{\nu',k+1}=1\Big]$, et l'on a de plus

$$\alpha_\varphi^{(i,\nu')}t_{i,i+1}=\begin{Bmatrix} \alpha_{i\nu'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i+1,\nu'} \\ \alpha_{i+1,\nu'} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\rho}\dot{\alpha}_{i\nu'} \end{Bmatrix} t_{i,i+1}=\begin{Bmatrix} \frac{1}{2\rho}\alpha_{i+1,\nu'} & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}_{i\nu'} \\ \frac{1}{2\rho}\alpha_{i\nu'} & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}_{i+1,\nu'} \end{Bmatrix}\xi_i$$

$$(\xi_i = T_{i,i+1}m_{i,2\rho}m_{i+1,2\rho}t_{i,i+1}),$$

ou, en remplaçant i par $2i-1$,

$$\xi_i = d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} m_{2i-1,-2\rho} m_{2i,2\rho} = d_{2i-1} S_{2i-1,2i,2\rho}.$$

La sous-matrice qui multiplie ξ_i étant une sous-matrice de H_ρ, $\alpha_\rho t_{1\ldots\nu'}$ est une substitution de $H_\rho \xi$ en posant

$$\xi = t_{\nu'} \Pi_1^{\nu/2} \xi_i.$$

Donc $\mathfrak{N} = (\zeta^{-1} H_\rho \zeta + \zeta^{-1} H_\rho \xi \zeta)$; comme dans le cas $n \equiv 0 \pmod 4$, $\zeta^2 = 1$.

112. Déterminons maintenant $\mathfrak{N}'$. Pour que $\zeta^{-1} \alpha_\rho \gamma'^{r} \zeta$, qui multiplie a par ι'^{r} soit réelle, il faut que ι'^{r} soit réel, donc $\iota'^{r} = \iota'^{\lambda}$. D'ailleurs $\alpha_\rho \gamma'^{r}$ se déduit de α_ρ en y multipliant chaque coefficient α par ι'^{λ}. Donc, les conditions de réalité se déduisent de (1) si $n \equiv 0 \pmod 4$, ou de (1), (3), (4), (5) si $n \equiv 2 \pmod 4$, en multipliant les deux nombres par ι'^{λ}. Donc $\alpha_\rho = \alpha'_\rho t_{1\ldots\nu'} \gamma'^{r} t_{1\ldots\nu'}$, α'_ρ se déduisent de α_ρ en multipliant chaque coefficient β' par $\iota^{-\lambda}$. Entre les coefficients de α_ρ, on a, au lieu des relations (2) ou (6)-(10), celles qui s'en déduisent en y remplaçant seulement les seconds membres 1 par $\iota^{-\lambda}$. Donc la matrice (α_{ik}) est dans $H(\nu', \pi)[\iota'^{-\lambda}]$, où elle peut être prise arbitrairement. Donc $(\alpha)_{ik}[\iota'^{\lambda}]$ peut être prise arbitrairement dans $H(\nu', \pi)$. Or, la matrice correspondante de H_ρ est $\alpha'_\rho \gamma'^{\lambda} t_{1\ldots\nu'} \gamma'^{\pi\lambda} t_{1\ldots\nu'}$. Ainsi α'_ρ peut être prise arbitrairement dans $H_\rho \xi'^{\lambda}$, en posant $\xi' = \Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x_i, & \iota'^{\pi} x_i \\ y_i, & \iota' y_i \end{vmatrix}$ $(\xi' = \Pi_1^{\nu'} m_{i\iota'}^{-1}$, si $n \equiv 0 \pmod 4)$; $\xi' = \gamma \Pi_1^{\nu} m_{i\iota'}^{-1}$, si $n = 2 \pmod 4$. Donc $\alpha_\rho \gamma'^{r}$ est quelconque dans $H_\rho \{\xi'\}$. Donc $\mathfrak{N}' = (\zeta^{-1} \{H_\rho, \xi, \xi'\} \xi)$, ξ' est permutable à H_ρ, *a priori*; et l'on a $\xi^2 = 1$, $\xi^{-1} \xi' \xi = \xi'^{\pi}$; enfin $\xi'^{\pi-1} = \Pi_1^{\nu'} m_{1\iota'}^{1-\pi}$ est dans H_ρ.

113. Si $n \equiv 0 \pmod 4$, on a $\mathfrak{N}_\rho^0 = \mathfrak{N}_\rho$ (107). Donc, la substitution ξ trouvée au n° 110 étant dans $B(n, \pi^2)$, on a $\mathfrak{N}^0 = \mathfrak{N}$.

Si $n \equiv 2 \pmod 4$, on a $\mathfrak{N}_\rho^0 = (N_\rho)$. Donc $\mathfrak{N}^0 = (\zeta^{-1} H_\rho \zeta)$.

114. Déterminons maintenant P.

Soit d'abord $n \equiv 0 \pmod 4$. Désignons par $m'_1 \rho$ la substitution $\begin{vmatrix} x_1 & \rho x_1 \\ & \rho^{-\pi} x_2 \end{vmatrix}$. On a (I, 2) $H = \{H^0, m'_{1\iota'}\}$, et, tout diviseur d'indice 2 contenant nécessairement H^0 (I, p. 303), le seul diviseur d'indice 2 de H est $\{H^0, m_{1\iota'}'^{2}\}$. Soit H_φ^0 le diviseur de H_φ qui répond à H^0. La substitution de H_φ qui répond à $m_{1\iota'}'$ est $m_{1\iota'} m_{2\iota'}^{-\pi} = m_{1,j_0}^{-1} m_{2,j_0}^{-1} m_{1,\iota_0} m_{2,\iota_0}^{-1}$; et l'on a

$$m_{1\iota'}^2 m_{2\iota'}^{-2\pi} = m_{1,j}^{-1} m_{2,j}^{-1} m_{1\iota} m_{2\iota}^{-1}.$$

Comme $m_{1\iota} m_{2\iota}^{-1}$, qui répond à $m_{1\iota}'$, est dans H_φ^0, le seul diviseur de H_φ est $K_\varphi = \{H_\varphi^0, m_{1j} m_{2j}\}$.

En posant $\alpha = \dfrac{\iota' + \iota'^\pi}{2}$, $\beta = \dfrac{\iota' - \iota'^\pi}{2\rho}$ (α et β sont réels), on a

$$\zeta^{-1} m_{1\iota'} m_{2\iota'}^{-\pi} \zeta = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_1 - \beta\rho^2 y_2 \\ y_1 & \iota^{-1}(\alpha y_1 + \beta x_2) \\ x_2 & \iota^{-1}(\alpha x_2 + \beta\rho^2 y_1) \\ y_2 & \alpha y_2 - \beta x_1 \end{vmatrix} = m_{2,\alpha/\iota} m_{1\alpha} U_{2,1,\alpha\beta\rho^2/\iota} W_{1,2,\beta/\alpha}.$$

Comme α et $\alpha\iota$ ont des caractères quadratiques différents, $m_{2,\alpha/\iota} m_{1\alpha}$ est hors de $B(n\pi)$. Il en est de même de $\zeta^{-1} m_{1\iota'} m_{2\iota'}^{-\pi} \zeta$. Donc (N, P) qui est $\leqq 2$ est égal à 2. Donc le p.g.c.d. de $\zeta^{-1} H_\varphi \zeta$ avec B est d'indice 2 dans $\zeta^{-1} H_\varphi \zeta$. Ce p.g.c.d. est donc $\zeta^{-1} K_\varphi \zeta$.

D'autre part $\zeta^{-1} \xi \zeta = d_{24\ldots\nu'}$ (110) est dans B sauf si $\pi \equiv 3 \pmod 4$ avec $\nu' \equiv 2 \pmod 4$. *Donc* $\mathfrak{T} \equiv (\zeta^{-1} K_\varphi \zeta + \zeta^{-1} K_\varphi \xi \zeta)$ *sauf si* $\pi \equiv 3 \pmod 4$ *avec* $\nu' \equiv 2 \pmod 4$.

Si $\pi \equiv 3 \pmod 4$ et $\nu' \equiv 2 \pmod 4$ il suffit de remplacer ξ par son produit ξ_0 par $m_{1\iota'} m_{2\iota'}^{-\pi}$, dont la transformée par ζ est dans N hors de B.

Si $n = 4$, $\nu' = 2$, les objets qui dans $[\mathfrak{A}^0(4\pi^2)]$ répondent à H_φ^0, $m_{1\iota'} m_{2\iota'}^{-\pi} m_{1j} m_{2j}$, ξ_0 sont respectivement $\mathfrak{U}_z$, (ιz), $(j^{-1}u)$, $(j^2 u)$, $(-\iota z)\left(\dfrac{-j}{4u}\right)$. On retrouve ainsi les résultats obtenus.

115. Soit maintenant $n \equiv 2 \pmod 4$. On a $\mathfrak{N}_\varphi^0 = (N_\varphi)$ (107), donc $\mathfrak{N}^0 = (\zeta^{-1} H_\varphi \zeta)$ (113), donc $\mathfrak{T} = (\zeta^{-1} K_\varphi \zeta)$.