

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. FINIKOFF

BERTRAND GAMBIER

**Surfaces dont les lignes de courbure se correspondent avec
égalité des rayons de courbure principaux**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 50 (1933), p. 319-370

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__319_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE

SE CORRESPONDENT

AVEC ÉGALITÉ DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX

PAR MM. FINIKOFF ET GAMBIER



1. *Avant-propos et introduction.* — L'idée de ce travail est due à M. Finikoff qui en a donné un aperçu dans une Note des *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 984. Un échange de vues a eu lieu par correspondance entre M. Finikoff et M. Gambier. On trouvera plus loin deux méthodes proposées, l'une par M. Finikoff, l'autre par M. Gambier pour résoudre la question. La détermination complète des solutions d'un système aux dérivées partielles est souvent impossible à cause de la longueur des calculs; or dans un Mémoire antérieur [*Surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme (Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres, Série A : Sciences mathématiques, Cracovie, 1926, p. 133-183)*] M. Gambier avait obtenu un type particulier de solutions de ce problème; il les indique dans ce travail. M. Gambier donne aussi une généralisation du problème traité ici et montre de plus que les lignes de courbure des surfaces, solutions du problème, s'obtiennent *en général* par quadrature.

L'élément linéaire d'une surface et ses deux rayons de courbure principaux la déterminent complètement *en général* (sauf déplacement et symétrie); *il y a exception pour une famille de surfaces isothermiques que l'on peut déformer avec conservation des rayons de courbure principaux*; ces surfaces comprennent en particulier les surfaces à courbure moyenne constante (Ossian BONNET, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier 42, 1867; HAZZIDAKIS, *Journal de Crelle*, 117, 1897;

SERVANT, *Bulletin de la Société mathématique de France*; B. GAMBIER, *Comptes rendus*, 174, 1922, p. 1613).

Mais si l'on ne donne que les rayons de courbure principaux, la surface n'est pas déterminée; en effet, on peut établir entre deux surfaces *quelconques* une correspondance ponctuelle précisément par la condition que les rayons de courbure aux points homologues soient égaux.

Il y a donc intérêt à chercher quelle condition particulière on peut ajouter à la donnée des rayons principaux : nous allons constater, par l'étude qui suit, qu'en général deux surfaces, dont les lignes de courbure se correspondent et dont les rayons principaux aux points homologues sont égaux, sont elles-mêmes égales ou l'une égale à une symétrique de l'autre. Nous obtenons une classe intéressante de surfaces en déterminant celles qui font exception, c'est-à-dire qui se correspondent avec conservation des lignes de courbure et des rayons principaux homologues.

Une surface moulure générale admet une infinité de surfaces moulures correspondantes dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable. Si deux surfaces (non moulures) possèdent la correspondance en jeu, il y a une infinité de surfaces correspondant à l'une ou l'autre, formant une famille continue à 1, 2, 3 paramètres suivant le cas.

Les familles à un paramètre s'obtiennent aisément : il suffit de trouver deux formes différentielles simultanées

$$(1) \quad e^2 du^2 + g^2 dv^2, \quad \frac{e^2 du^2}{U} + \frac{g^2 dv^2}{V},$$

où U dépend de u , V de v seul, dont la courbure totale est l'unité; à chaque choix de U et V correspondent les deux fonctions $e(u, v)$, $g(u, v)$ solutions du système

$$(E_1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + eg = 0,$$

$$(E_2) \quad (U-1) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{U'}{2e} \frac{\partial g}{\partial u} + (V-1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{V'}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} = 0$$

et la forme de (E_2) montre que l'on peut, sans modifier e, g , remplacer

le couple (U, V) par le couple (U_1, V_1) défini par

$$U_1 - 1 = k(U - 1), \quad V_1 - 1 = k(V - 1),$$

où k est une constante *arbitraire* (on suppose bien entendu $U - 1$ et $V - 1$ non nuls ensemble). A *chaque* surface admettant pour représentation de ses lignes de courbure la première forme différentielle (1) correspond *une* surface dont la forme différentielle homologue est soit la seconde expression (1), soit plus généralement

$$(2) \quad \frac{e^2 du^2}{1 + k(U - 1)} + \frac{g^2 dv^2}{1 + k(V - 1)}.$$

On a ainsi ∞^1 surfaces associées, dépendant du choix du paramètre k . On peut remarquer que si $e^2 du^2 + g^2 dv^2$ correspond à un réseau sphérique *isotherme*, le réseau (2) est lui-même isotherme; par suite on peut espérer trouver des surfaces intéressantes en adjoignant cette nouvelle condition; on peut même adjoindre encore la condition que le réseau des lignes de courbure sur la surface soit isotherme et c'est ainsi que M. Gambier a retrouvé un type de solutions où les surfaces associées forment une famille à *deux paramètres*. Autrement dit dans cette méthode, proposée par M. Gambier, qui consiste à étudier le système (E_1) , (E_2) , on peut regarder e, g comme les données et chercher à satisfaire à (E_2) par un choix convenable de U, V ; on constate ainsi que, pour un réseau sphérique orthogonal *arbitraire*, on ne trouve comme solution (U, V) que le couple $U = 1, V = 1$; les réseaux (e, g) qui donnent une solution à un paramètre sont obtenus par la voie qui précède et l'on forme aisément les conditions pour que le couple (U, V) existe effectivement et dépende de 1, 2 ou 3 paramètres. Le nombre 3, qui est le maximum, correspond, sur la sphère, à un réseau de coniques homofocales (et leurs dégénérescences) où à deux familles de cercles orthogonaux (et leurs dégénérescences); l'étude du nombre 3 sera faite par la méthode de M. Finikoff.

Cette méthode de M. Finikoff consiste à remarquer que si R, R' sont donnés en fonction des paramètres de courbure u, v , on a

$$(3) \quad \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} = \frac{\frac{\partial R}{\partial v}}{R' - R} \equiv \varphi, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\frac{\partial R'}{\partial u}}{R - R'} \equiv \psi.$$

On peut donc regarder φ, ψ comme données *a priori* et déterminer e, g par les deux équations (3) jointes à E_1 ; φ, ψ données arbitrairement, on ne trouve en général aucune solution e, g ; M. Finikoff indique sous quelles conditions on peut obtenir un couple (e, g) à 1, 2 ou 3 paramètres.

Et alors on peut remarquer que les solutions à 3 paramètres qui viennent d'être indiquées sont évidentes *a priori* (sans que ces raisons indiquent si le nombre 3 est le maximum pour les paramètres ou s'il existe d'autres solutions à 3 paramètres). En effet, on sait que si l'on trace un système de coniques homofocales sur une sphère, le $d\sigma^2$ de cette sphère prend la forme de Liouville

$$d\sigma^2 = \frac{v-u}{4} \left\{ \frac{du^2}{u^3 + Au^2 + Bu + C} - \frac{dv^2}{v^3 + Av^2 + Bv + C} \right\}.$$

Or deux $d\sigma^2$ de cette espèce, correspondant à des valeurs de A, B, C différentes, sont entre eux dans la relation réciproque donnée par les formules (1).

D'autre part imaginons une cyclide de Dupin, autre qu'un tore ou un cône de révolution; sur chaque ligne de courbure circulaire, le rayon principal correspondant est constant et varie d'une ligne à l'autre; on peut donc prendre comme paramètres u, v précisément les valeurs des rayons principaux; deux cyclides différentes sont alors dans la correspondance cherchée.

La conclusion intéressante est que la propriété annoncée se réduit à une propriété du réseau sphérique orthogonal qui est l'image des lignes de courbure.

2. *Mise en équation du problème; méthode de M. Gambier.* — On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme

$$d\sigma^2 = e^2 du^2 + g^2 dv^2$$

corresponde à un réseau sphérique orthogonal est

$$(E_1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + eg = 0.$$

Les coordonnées (c, c', c'') d'un point de la sphère unité, exprimées

en u, v , satisfont à une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = A \frac{\partial \theta}{\partial u} + B \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

dont on calcule aisément les coefficients A, B par la méthode classique, on a ainsi

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Si l'on envisage une surface S, parallèle, au sens de Peterson, à la sphère suivant ce réseau, donc rapportée à ses lignes de courbure, on a

$$\frac{\partial x}{\partial u} = R \frac{\partial c}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = R' \frac{\partial c}{\partial v}, \quad \dots$$

et en égalant deux expressions de $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, on a

$$(2) \quad (R - R') \frac{\partial^2 c}{\partial u \partial v} = - \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial u} + \frac{\partial R'}{\partial u} \frac{\partial c}{\partial v}$$

et, comme la même équation a lieu pour c' et c'' , on a, par comparaison avec (1), les relations fondamentales pour nous

$$(3) \quad \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} = \frac{1}{R' - R} \cdot \frac{\partial R}{\partial v}, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{R - R'} \cdot \frac{\partial R'}{\partial u}.$$

Ce calcul classique prouve que si une autre surface S_1 correspond suivant le mode indiqué à S et si, pour S_1 , on trouve l'élément sphérique

$$d\sigma_1^2 = e_1^2 du^2 + g_1^2 dv^2,$$

on a

$$(4) \quad \frac{1}{e_1} \frac{de_1}{dv} = \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v}, \quad \frac{1}{g_1} \frac{dg_1}{du} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u}, \quad e_1 = \frac{e}{\sqrt{U}}, \quad g_1 = \frac{g}{\sqrt{V}},$$

U dépendant de u seul, et V de v seul; on doit écarter le cas où *simultanément* on aurait $U = 1$, $V = 1$. Il est donc nécessaire et suffisant d'ajouter à (E₁) l'équation analogue relative à e_1, g_1 ou

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{\frac{U}{V}} \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{\frac{V}{U}} \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{eg}{\sqrt{UV}} = 0.$$

Cette équation n'est irrationnelle qu'en apparence et s'écrit

$$U \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{U'}{2e} \frac{\partial g}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{V'}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} + eg = 0.$$

Par soustraction avec (E₁) on remplace cette équation par

$$(E_2) \quad \frac{U'}{2e} \frac{\partial g}{\partial u} + (U-1) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{V'}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} + (V-1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

Si l'on choisit *arbitrairement* U, V, le système (E₁), (E₂) en e, g définit ces deux fonctions en u, v, avec quatre fonctions arbitraires d'un argument, s'ajoutant à U, V; mais comme le changement de variables $u_1 = u_1(u)$, $v_1 = v_1(v)$ est permis, on voit qu'en réalité *les $d\sigma^2$ qui possèdent cette propriété ne dépendent que de quatre fonctions arbitraires d'un argument.* On sait que e, g étant obtenus, on doit pour obtenir S intégrer les équations (3) en R, R' qui équivalent à une équation de Laplace; adoptons le calcul suivant: posons $R - R' = \lambda$, ce qui transforme le système (3) en

$$\frac{\partial R'}{\partial u} = \lambda \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u}, \quad \frac{\partial R'}{\partial v} = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v}.$$

L'inconnue auxiliaire λ satisfait donc à l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \lambda \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} \right) \right] = 0$$

qui est l'*adjointe* de l'équation (1). On a ensuite

$$R' = \int \lambda \left(\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} \right) du - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} \right) dv, \quad R = R' + \lambda.$$

D'autre part, l'équation (E₂) ne change pas si l'on substitue au couple (U, V) le nouveau couple (U₁, V₁) défini par les équations

$$(6) \quad U_1 - 1 = k(U - 1), \quad V_1 - 1 = k(V - 1),$$

où k est une constante numérique arbitraire.

Rappelons que le $d\sigma^2$ sphérique étant donné, on a une équation de Riccati à intégrer pour obtenir les coordonnées c, c', c'' , puis l'équation (5) à intégrer pour avoir R et R', enfin trois quadratures de différentielle totale à calculer pour avoir les coordonnées x, y, z d'un

point de S . En faisant varier k , on voit que si l'on connaît un couple (S, S_1) ayant la propriété annoncée, on a aussitôt ∞^1 surfaces formant une série continue se correspondant toutes entre elles suivant le mode indiqué, S et S_1 étant deux individus de cette famille.

On peut maintenant se poser le problème autrement : on part d'une surface S et l'on cherche si l'on peut trouver une surface S_1 lui correspondant suivant le mode indiqué. Nous commençons par rapporter S à ses lignes de courbure et l'on a ainsi les coefficients e, g de la forme $d\sigma^2$, appelée, suivant l'usage, *troisième forme quadratique fondamentale* de S . A ce propos, rappelons-nous qu'en remplaçant u par $u_1(u)$, v par $v_1(v)$, on obtient les échanges suivants :

$$\begin{aligned} e, & \quad g, & \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}, & \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}, \\ e \frac{du}{du_1}, & \quad g \frac{dv}{dv_1}, & \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{dv}{dv_1}, & \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \frac{du}{du_1}. \end{aligned}$$

Le cas d'une surface moulure générale conduit immédiatement à une infinité de surfaces moulures générales associées, dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable; si la surface est même surface moulure de Monge, on trouve une infinité de surfaces moulures de Monge associées dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable et d'une constante auxiliaire.

Ce cas écarté, si $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ (supposé non nul, sinon la surface serait moulure) n'est pas de la forme $U_1 V_1$, c'est-à-dire, plus simplement, de la forme U_1 , on arrive par de simples calculs d'élimination et de différentiation à décider si le couple (U, V) existe ou non, et dans le cas d'affirmative à obtenir explicitement les fonctions $U - 1, V - 1$ en fonction linéaire et homogène de 1, 2 ou 3 constantes arbitraires. Si $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ est égal à U_1 , le résultat est modifié simplement en ce fait que, en cas de possibilité, $(U - 1)$ se calcule par une quadrature et qu'ensuite $V - 1$ s'obtient explicitement; il y a ici deux constantes linéaires et homogènes, au plus, dans le couple $(V - 1, U - 1)$. Si l'on a à la fois

$$\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U_1, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = V_2,$$

on a (sous réserve que cette forme soit admissible pour e et g)

$$U-1 = \frac{2a \int U_1 du + b}{U_1^2}, \quad V-1 = -\frac{2a \int V_2 du + c}{V_1^2},$$

où a, b, c sont des constantes.

Ces résultats sont faciles à obtenir : e, g sont supposés satisfaire à l'équation (E_1) et les fonctions inconnues U, V doivent vérifier (E_2) . Appelons $E_{2u}, E_{2v}, E_{2uv} \dots$ les équations obtenues en dérivant (E_2) par rapport à u , ou à v , ou successivement en u, v, \dots . Les équations $(E_{2u}), (E_{2v}) \dots$ doivent être satisfaites en même temps que (E_2) ; nous avons

$$(E_{2v}) \quad \frac{U'}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + (U-1) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) \\ + \frac{V''}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} + \frac{3V'}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + (V-1) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

Les équations (E_2) et (E_{2v}) sont linéaires en U' et $U-1$; elles peuvent donc être résolues si le déterminant

$$\Delta = \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right)$$

n'est pas nul, c'est-à-dire si l'expression $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ n'est pas de la forme $U_1 V_1$, produit d'une fonction U_1 de u par une fonction V_1 de v ; si $U_1 V_1$ est nul, $\frac{\partial g}{\partial u}$ est nul, g est fonction de v seul, donc réductible à l'unité et l'on a le cas des surfaces moulures; si $U_1 V_1 \neq 0$, nous avons vu que $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ peut être remplacé par $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{dv}{dv_1}$, donc on peut supposer $V_1 = 1$, $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U_1$; ce sont les deux cas réservés. Supposons donc d'abord $\Delta \neq 0$.

Si nous donnons à v une valeur numérique v_0 , $V-1, V', V''$ prennent des valeurs numériques V_0-1, V'_0, V''_0 provisoirement inconnues et la résolution de (E_2) et (E_{2v}) , où v est remplacé par v_0 , fournit explicitement $U-1$ et U' en fonction de u (et des constantes V_0, V'_0, V''_0); il faut d'abord que l'expression U' obtenue soit la dérivée $\frac{d}{du}(U-1)$,

sinon le problème proposé est impossible; cette relation $U' = \frac{d}{du}(U-1)$, si elle est possible, est peut-être réalisée quelles que soient les valeurs numériques V_0, V'_0, V''_0 ou entraîne peut-être des relations entre V_0, V'_0, V''_0-1 ; nous supposons que ce premier stade a réussi. Écrivons maintenant l'équation (E_{2u}) :

$$(E_{2u}) \quad \frac{U''}{2e} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{3U'}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + (U-1) \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) \\ + \frac{V'}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + (V-1) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

Elle permet aussi d'obtenir U'' en fonction de V_0-1, V'_0, V''_0 et de u . En donnant à u la valeur numérique u_0 , nous avons U_0, U'_0, U''_0 en fonction de V_0, V'_0, V''_0 ; si nous résolvons maintenant (E_2) et (E_{2u}) par rapport à $V-1$ et V' (puisque nous écartons aussi le cas où $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$ est de la forme $U_2 V_2$), en donnant à u la valeur u_0 , nous voyons que $V-1$ et V' sont exprimées *explicitement* en fonction de v et des constantes inconnues provisoirement U_0, U'_0, U''_0 , ou, si l'on veut, en fonction de v et des constantes V_0, V'_0, V''_0 ; il faut que V' coïncide bien avec l'expression $\frac{d}{dv}(V-1)$, puis que l'équation (E_2) soit satisfaite; si cela réussit, c'est-à-dire ne réduit pas $U-1$ et $V-1$ à zéro, on a trouvé *explicitement* le couple U, V en fonction de constantes au nombre de trois au plus; les constantes qui restent figurent sous forme linéaire et homogène dans l'expression de $U-1$ et $V-1$, résultat évident fourni par la forme de l'équation (E_2) . *L'essentiel est de savoir que pour e, g donnés, solutions de (E_1) , nous n'avons que des différentiations et calculs algébriques à effectuer pour reconnaître si le problème est possible, puis si la possibilité a lieu, pour trouver effectivement le couple (U, V) le plus général.*

Si l'on veut former les équations précises aux dérivées partielles que doivent vérifier e, g , on peut modifier la méthode de façon à ne pas introduire les valeurs numériques u_0, v_0 ; ces équations forment un système (E) que l'on doit adjoindre à (E_1) ; mais l'ensemble des équations (E) est simplement remplacé par l'intégrale *intermédiaire* E_2 . Si nous considérons les équations $(E_2), (E_{2v}), (E_{2vv})$, elles forment un système de trois équations en $U-1, U'$, dont les deux premières

ont été ($\Delta \neq 0$) supposées résolubles en $U - 1$ et U' ; j'écris (E_{2uv}) :

$$(E_{2uv}) \quad \frac{U'}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + (U - 1) \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{V'''}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} \\ + 2V'' \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{5V'}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + (V - 1) \frac{\partial^3}{\partial v^3} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

L'élimination de $U - 1$, U' entre (E_2), (E_{2v}), (E_{2uv}) fournit l'équation différentielle linéaire en ($V - 1$)

$$(E_3) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) & (V - 1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{V'''}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) & (V - 1) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{3V'}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{V''}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) & \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) & (V - 1) \frac{\partial^3}{\partial v^3} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{5V'}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) \\ & & + 2V'' \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + \frac{V'''}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

qui est d'ordre 3, car le coefficient de V''' est supposé non nul. Si (E_3) est vérifiée, nous savons que les fonctions $U - 1$ et U' tirées de (E_2) et (E_{2v}) sont *indépendantes de v* (d'après un résultat classique); elles s'expriment linéairement en $V - 1$, V' , V'' et sous forme homogène; en écrivant $U' = \frac{\partial}{\partial u} (U - 1)$, nous obtenons une nouvelle équation (E'_3) différentielle, linéaire et homogène, en $V - 1$ d'ordre 3 au plus; les équations (E_3) et (E'_3) sont *nécessaires et suffisantes* pour calculer V . Si nous écrivons (E_3) sous la forme réduite

$$(E_3) \quad V''' + A(u, v) V'' + B(u, v) V' + C(u, v) (V - 1) = 0$$

nous voyons que deux cas peuvent se présenter : A, B, C peuvent être *indépendants de u , ou contenir u* . Le premier cas donne trois équations aux dérivées partielles en e, g ($\frac{\partial A}{\partial u} = 0, \frac{\partial B}{\partial u} = 0, \frac{\partial C}{\partial u} = 0$); si elles sont vérifiées la fonction $V(v)$ définie par (E_3) dépend de trois constantes numériques arbitraires et il reste à voir si elle peut satisfaire à (E'_3); *en tout cas, on ne peut avoir de solutions à trois paramètres* [en réservant les cas $e = 1; g = 1; \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U_1 V_1; \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = U_2 V_2$] que si ces équations

tions $\frac{\partial A}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial B}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial u} = 0$ sont satisfaites et si l'équation (E_3) se réduit à une identité ou coïncide avec (E_3) . Dans le second cas, nous formons l'équation (E_{3u}) qui n'est plus que du second ordre au plus en $V - 1$:

$$(E_{3u}) \quad V'' \frac{\partial A}{\partial u} + V' \frac{\partial B}{\partial u} + (V - 1) \frac{\partial C}{\partial u} = 0.$$

Si $\frac{\partial A}{\partial u}$ est nul, on a une équation qui fournit $V = 1$, si le quotient $\frac{\partial C}{\partial u} : \frac{\partial B}{\partial u}$ n'est pas fonction de v uniquement, mais qui, si ce quotient est fonction de v , donne $\frac{V'}{V-1}$ en v , d'où $\frac{V''}{V-1}$ et $\frac{V'''}{V-1}$ par dérivations et il restera à voir si (E_3) et (E_3) sont satisfaites. Si $\frac{\partial A}{\partial u}$ n'est pas nul, on écrit (E_{3u}) sous la forme

$$(E_{3u}) \quad V'' + V' \left(\frac{\partial B}{\partial u} : \frac{\partial A}{\partial u} \right) + (V - 1) \left(\frac{\partial C}{\partial u} : \frac{\partial A}{\partial u} \right) = 0$$

et l'on recommence le raisonnement fait sur (E_3) plus haut. De toutes façons on arrive à former sans peine toutes les équations aux dérivées partielles (E) à ajouter à (E_1) ; on constate bien qu'il intervient, en cas de possibilité, trois constantes au plus dans $(U - 1, V - 1)$ sous forme linéaire et homogène; mais la méthode ainsi présentée ne suffit pas à obtenir le résultat signalé, à savoir que $U - 1$ et $V - 1$ s'obtiennent explicitement sans équation différentielle à intégrer.

On peut encore modifier la recherche de ces conditions en remarquant que l'équation (E_2) est équivalente au système des trois équations à deux inconnues U, V :

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{2e} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial u} + (U - 1) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{1}{2g} \frac{\partial e}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} + (V - 1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

La méthode générale pour résoudre un tel système est de calculer explicitement les dérivées des inconnues, jusqu'à un certain ordre, en fonction des dérivées d'ordre inférieur, puis de former les conditions de compatibilité, en dérivant une fois de plus. Cette méthode nous montre que les dérivées d'ordre 2 se calculent explicitement au

moyen de celles d'ordre 1; ceci donne le système (E_2) , (E_{2u}) , (E_{2v}) qui donne U'' , V'' en fonction linéaire et homogène de $U-1$, U' , $V-1$, V' ; la condition de compatibilité s'obtient en portant ces valeurs dans (E_{2uv}) , ce qui fournit une nouvelle équation (E'_2) linéaire et homogène en $U-1$, U' , $V-1$, V' ; si (E'_2) coïncide avec (E_2) , on est dans le cas d'intégrabilité complète, avec trois constantes arbitraires (valeurs de U_0-1 , U'_0 , V_0-1 , V'_0 liées par l'équation (E_2) elle-même où u , v sont remplacées par u_0 , v_0). Si (E'_2) est distincte de (E_2) , chaque équation obtenue en dérivant (E'_2) un nombre quelconque de fois en u ou v est aussitôt, moyennant (E_{2u}) , (E_{2v}) ramenée à la forme linéaire en U' , $U-1$, V' , $V-1$; le nombre d'équations indépendantes ainsi obtenues doit être 1, 2, 3 (sinon la seule solution est $U=1$, $V=1$).

Le cas (1), ou d'intégrabilité complète, conduit aux $d\sigma^2$ de Liouville de la sphère ou aux systèmes orthogonaux de cercles sur la sphère; nous ne continuerons pas par cette méthode, puisque M. Finikoff a pu de son côté arriver au résultat explicite; le cas (3) n'a pas besoin d'explication spéciale: il suffit de donner à U , V dans (E_2) des valeurs arbitraires et d'intégrer en e , g le système (E_1) , (E_2) . Le cas (2) conduirait à des calculs inextricables: nous nous contenterons de signaler un exemple de ce cas, emprunté au Mémoire déjà cité de M. Gambier sur les surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme (¹). On remarquera que le calcul présenté par la considération de E_2 , E_{2u} , E_{2v} , E_{2uv} ne fait pas intervenir le cas où $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ est égal à $U_1 V_1$, ni celui où $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$ est égal à $U_2 V_2$, mais suppose que $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial e}{\partial v}$ ne

(¹) Dans ce Mémoire, M. Gambier avait à trouver une fonction z de u , v et deux fonctions U , V de u ou v seul telles que les deux équations

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial v}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \quad \dots \right)$$

$$r + t + e^2 z = 0, \quad 2(U - V)s + U'q - V'p = 0$$

soient satisfaites simultanément. La méthode pour discuter l'existence de U , V pour une fonction z donnée est exactement la même que celle qui a été exposée pour E_1 et E_2 . Il y a une différence essentielle entre les deux problèmes: dans celui du texte on peut donner U , V arbitrairement puisqu'il y a deux fonctions inconnues e , g , tandis que dans celui de la Note présente on a une seule fonction inconnue z avec deux équations, de sorte que U , V doivent satisfaire à des conditions précises.

sont pas nuls; c'est la détermination de U, V pour un couple e, g donné qui fait intervenir les hypothèses $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ égal ou non à $U_1 V_1$ et $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$ égal ou non à $U_2 V_2$.

Traisons maintenant le cas où $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ est égal à $U_1 V_1$, ou plus simplement, comme nous l'avons dit, égal à U_1 [grâce à un changement de variable $v_1 = v_1(v)$]. L'équation (E_2) se réduit alors à

$$(8) \quad \frac{U'}{2} U_1 + (U-1) U_1' + \frac{V'}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} + (V-1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

En dérivant par rapport à v , on obtient

$$(9) \quad \frac{V''}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} + \frac{3V'}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + (V-1) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

Nous supposons $\frac{\partial e}{\partial v} \neq 0$; c'est une équation de la forme

$$(9') \quad V'' + \lambda(u, v) V' + \mu(u, v) (V-1) = 0$$

que l'on traite comme il a été expliqué plus haut à propos de l'équation appelée (E_3) ; on sait reconnaître si la fonction V existe, et elle ne peut dépendre que de deux constantes au plus; si cette fonction V existe, l'expression

$$\frac{V'}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} + (V-1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right)$$

est une fonction de u et l'équation (8) détermine U par une quadrature, avec une constante nouvelle arbitraire; quant à la fonction V , on voit comme précédemment qu'elle s'obtient sans intégration, car par dérivation en u de l'équation (8) on obtient la relation

$$(10) \quad \frac{U''}{2} U_1 + \frac{3}{2} U' U_1' + (U-1) U_1'' + \frac{V'}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + (V-1) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0.$$

En donnant à u une valeur u_0 , les équations (8) et (10) déterminent $V-1$ et V' en fonction de trois constantes provisoirement inconnues

$U_0 - 1$, U'_0 et U''_0 (on suppose que la résolution est possible, donc que $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$ n'est pas de la forme $U_2 V_2$); comme précédemment l'égalité $V' = \frac{d}{dv}(V - 1)$ peut établir des relations entre $U_0 - 1$, U'_0 et U''_0 de façon à diminuer le nombre de paramètres.

Si l'on a à la fois

$$\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U_1 V_1, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = U_2 V_2,$$

ou plus simplement

$$\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U_1, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = V_2,$$

l'équation (E₂) s'écrit

$$(11) \quad \frac{U'U_1}{2} + (U - 1)U'_1 + \frac{V'V_2}{2} + (V - 1)V'_2 = 0.$$

On a donc

$$\frac{U'U_1}{2} + (U - 1)U'_1 = a, \quad \frac{V'V_2}{2} + (V - 1)V'_2 = -a,$$

où a est une constante, d'où

$$(12) \quad U = \frac{2a \int U_1 du + b}{U_1^2}, \quad V = \frac{-2a \int V_2 dv + c}{V_2^2}.$$

Cette fois, si les équations

$$\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U_1, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = V_2$$

sont compatibles avec l'équation (E₁), le couple (U, V) s'obtiendrait par deux quadratures, avec trois constantes arbitraires: en faisant la discussion complète sous la forme qui a été expliquée un peu plus haut (qui ne fait pas intervenir le cas où $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$ ont ou non les formes U_1 et V_2) on voit que le cas de trois constantes arbitraires pour le couple U, V donne les deux $d\sigma^2$ sphériques indiqués plus haut et

que $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$ ne sont pas de la forme U_1 , V_2 , donc ce cas ne se produit pas ⁽¹⁾.

Il reste donc le cas des surfaces moulures; on suppose $\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = 0$; g est une fonction de v que l'on peut réduire à l'unité; le $d\sigma^2$ égal à $e^2 du^2 + dv^2$ caractérise une famille de grands cercles ($u = \text{const.}$) et leurs trajectoires orthogonales; l'équation (E_1) entraîne

$$e = U_2 \sin(v - U_1);$$

on peut réduire U_2 à l'unité, l'équation (E_2) s'écrit

$$\frac{V'}{2} \cos(v - U_1) - (V - 1) \sin(v - U_1) = 0.$$

Si U_1 dépend effectivement de u , elle entraîne $V = 1$, mais la fonction U reste arbitraire; c'est le cas de la surface moulure générale: si U_1 est constant, on le réduit à zéro en l'incorporant à v et l'on a, avec une constante arbitraire C ,

$$V - 1 = \frac{C}{\cos^2 v} \quad (U = \text{fonction arbitraire de } u).$$

C'est le cas de la surface moulure de Monge. Nous reviendrons plus loin sur l'étude des surfaces moulures. Nous allons tout de suite donner un exemple intéressant.

⁽¹⁾ Si l'on veut traiter directement la question, on écrit l'équation (E_1) et l'on a ainsi le système (où je remplace U_1 par U'_1 et V_2 par V'_2 pour la commodité).

$$U''_1 + V''_2 + eg = 0, \quad \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = U'_1, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = V'_2,$$

qui donne tout de suite

$$\begin{aligned} U'_1 U''_1 + U'_1 V''_2 + g \frac{\partial g}{\partial u} &= 0, & U''_1 V_2 + V'_2 V''_2 + e \frac{\partial e}{\partial v} &= 0, \\ U_1'^2 + 2U_1 V''_2 + g^2 &= V_3, & 2U_1'' V_2 + V_2'^2 + e^2 &= U_3, \\ (U_1'' + V_2'')^2 - (2U_1'' V_2 + V_2'^2 - U_3) &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est de la forme classique $\Sigma u_i v_i = 0$ où les u_i et v_i sont fonctions de u ou v seul; elle se discuterait par la méthode bien connue; mais c'est inutile puisque le cas où le couple (U, V) doit dépendre de trois constantes ne conduit pas à ces formes de $\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}$. Mais il était nécessaire, pour pouvoir se servir de ces résultats, de montrer que le couple (U, V) aurait effectivement renfermé trois constantes.

3. *Exemple où le couple (U, V) dépend d'un unique paramètre.* — Puisque nous pouvons choisir arbitrairement (U, V) supposons que U et V soient tous deux constants (mais non égaux à 1). L'équation (E₂) devient donc, avec deux constantes A, B,

$$(1) \quad A \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) - B \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) = 0$$

et donne, avec une constante k, la possibilité de prendre

$$(2) \quad U = 1 + Ak, \quad V = 1 - Bk.$$

On peut donc poser, avec une fonction inconnue θ ,

$$(3) \quad \frac{A}{e} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad \frac{B}{g} \frac{\partial e}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

et l'équation (E₁) est

$$(4) \quad \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + e g = 0.$$

Cela entraîne l'inégalité $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \neq 0$, autrement dit U et V ne peuvent être égales; nous avons à résoudre le système des équations (3) et (4), en nombre égal à 3, renfermant trois fonctions inconnues θ, e, g . En remplaçant, dans (4), e par $A \frac{\partial g}{\partial u} : \frac{\partial \theta}{\partial v}$, on a

$$\frac{1}{A} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} \frac{\partial \theta}{\partial v} + g \frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

d'où une intégrale première (avec celle qui en résulte par symétrie)

$$(5) \quad \frac{B+A}{A^2 B} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 + g^2 = V_1, \quad \frac{B+A}{A B^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 + e^2 = U_1$$

et l'on a à résoudre le système formé par les deux équations (5) et l'équation

$$(6) \quad \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + \sqrt{U_1 - \frac{B+A}{A B^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2} \sqrt{V_1 - \frac{B+A}{A^2 B} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2} = 0.$$

D'après ce qui a été déjà expliqué, on peut réaliser les échanges suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} u, & v, & e, & g, & \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}, & \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}, & \theta, \quad V_1, \\ u_1(u), & v_1(v), & e \frac{du}{du_1}, & g \frac{dv}{dv_1}, & \frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{dv}{dv_1}, & \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \frac{du}{du_1}, & \theta, \quad V_1 \left(\frac{dv}{dv_1} \right)^2. \end{array}$$

Si donc V_1 n'est pas nul, on peut le réduire à l'unité [ou à (-1) si l'on veut éviter des imaginaires]; mais si V_1 est nul, il reste nul. Mêmes remarques pour U_1 . Il y a donc trois cas à examiner : $U_1 = V_1 = 0$; puis $V_1 = 0, U_1 = 1$; puis $V_1 = U_1 = 1$.

Prenons d'abord $U_1 = V_1 = 0$; on a

$$(7) \quad \begin{cases} e^2 = -\frac{B+\Lambda}{\Lambda B^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 = a^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2, & e = a \frac{\partial \theta}{\partial u}, \\ g^2 = -\frac{B+\Lambda}{\Lambda^2 B} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 = b^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2, & g = b \frac{\partial \theta}{\partial v}. \end{cases}$$

On trouve aisément

$$(8) \quad \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{B} = i\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{B} = \frac{a^2 i}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{1}{\Lambda} = \frac{b^2 i}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'équation résolvante en θ est

$$(9) \quad i\sqrt{a^2 + b^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + ab \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Or l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + m \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0$$

a pour intégrale générale

$$e^{m\theta} = U_1 + V_1,$$

où U_1 et V_1 sont des fonctions de u et v séparément (qui n'ont rien de commun avec les fonctions désignées plus haut sous ce nom); ici

$$(10) \quad \begin{cases} m = \frac{ab}{i\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ e = a \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{aU_1'}{m(U_1 + V_1)} = \frac{i\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \frac{U_1'}{U_1 + V_1} = \frac{\alpha U_1'}{U_1 + V_1}, \\ g = \frac{i\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \frac{V_1'}{U_1 + V_1} = \frac{\beta V_1'}{U_1 + V_1}, \end{cases}$$

α et β étant de nouvelles constantes, liées évidemment par la relation

le $d\sigma^2$ de la sphère est, en prenant pour variables $u = U_1, v = -V_1$

$$(11) \quad d\sigma^2 = \frac{\alpha^2 du^2 + \beta^2 dv^2}{(u-v)^2}, \quad e = \frac{\alpha}{u-v}, \quad g = \frac{\beta}{v-u}.$$

On vérifie aisément que cette forme s'obtient en rapportant la sphère au système orthogonal de cercles imaginaires obtenus ainsi : par Ox par exemple, menons un plan isotrope, $z = iy$ pour fixer les idées ; les deux droites isotropes

$$D[z - iy = 0, x = h]$$

et

$$D' \left[z - iy = 0, x = \frac{1}{h} \right]$$

sont conjuguées par rapport à la sphère et les cercles en jeu s'obtiennent en coupant la sphère par les plans qui pivotent autour de D ou autour de D' . Nous retrouverons ce $d\sigma^2$ comme dégénérescence de celui qui correspond aux surfaces cyclides. Sans savoir ce résultat cherchons maintenant les fonctions générales U, V correspondant au $d\sigma^2$ de la formule (11). L'équation (E₂) est ici, en chassant le dénominateur,

$$(12) \quad \frac{\beta}{\alpha}(U-1) + \frac{\alpha}{\beta}(V-1) - \frac{U'}{2} \frac{\beta}{\alpha}(u-v) + \frac{V'}{2} \frac{\alpha}{\beta}(u-v) = 0.$$

En dérivant en u , puis en v , on obtient

$$(13) \quad U'' \frac{\beta}{\alpha} + V'' \frac{\alpha}{\beta} = 0, \quad U'' \frac{\beta}{\alpha} = -V'' \frac{\alpha}{\beta} = 2h,$$

où h est une constante ; $\frac{\beta}{\alpha}(U-1)$ est donc un polynôme du second degré en u ,

$$hu^2 + 2h_1u + h_2;$$

$\frac{\alpha}{\beta}(V-1)$, de même un polynôme du second degré en v ; or l'équation (12) exprime que pour $u = v = t$, les deux polynômes $\frac{\beta}{\alpha}(U-1)$ et $\frac{\alpha}{\beta}(V-1)$ en t ont une somme identiquement nulle. On écrit donc

$$(14) \quad \frac{\beta}{\alpha}(U-1) = hu^2 + 2h_1u + h_2, \quad \frac{\alpha}{\beta}(V-1) = -(hv^2 + 2h_1v + h_2)$$

et l'on constate aussitôt que l'équation (12) est bien satisfaite. Mais alors si l'on prend le nouveau $d\sigma^2$ relatif à (U, V)

$$\frac{1}{(u-v)^2} \left[\frac{\alpha^2 du^2}{\frac{\alpha}{\beta}(hu^2 + 2h_1u + h_2) + 1} + \frac{\beta^2 dv^2}{\frac{\beta}{\alpha}(hv^2 + 2h_1v + h_2) + 1} \right]$$

on peut, dans le crochet, diviser la première fraction haut et bas par α^2 , la seconde par β^2 , remplacer $h, h_1, \left(h_2 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ par $\alpha\beta H, \alpha\beta H_1, \alpha\beta H_2$ où H, H_1, H_2 sont des constantes, puis se rappeler la relation

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + 1 = 0$$

et écrire

$$(15) \quad \left[\frac{du^2}{Hu^2 + 2H_1u + H_2} - \frac{dv^2}{Hv^2 + 2H_1v + H_2 + 1} \right] \frac{1}{(u-v)^2}.$$

Cette fois, H, H_1, H_2 sont trois constantes *quelconques*: si elles sont réelles on obtient précisément le $d\sigma^2$ qui correspond à deux faisceaux réels de cercles orthogonaux sur la sphère: le $d\sigma^2$ donné par (11) correspond précisément à $H = H_1 = 0$ et l'on voit bien comment la dégénérescence s'introduit.

Pour abréger nous ne parlerons pas du second cas ($V_1 = 0, U_1 = 1$) mais simplement du troisième $V_1 = U_1 = 1$. Nous avons alors

$$(16) \quad \begin{cases} e^2 = 1 - \frac{B+A}{A^2B} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2, & g^2 = 1 - \frac{B+A}{A^2B} \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2, \\ \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + eg = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(17) \quad \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{B} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \sin \varphi, & \sqrt{\frac{1}{A} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \sin \psi, \\ e = \cos \varphi, & g = \cos \psi, \end{cases}$$

on est ramené à intégrer le système très simple, aux deux inconnues φ, ψ , obtenu en se rappelant les équations (3):

$$(18) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\cos \psi}{\sqrt{B \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)}} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\cos \varphi}{\sqrt{A \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)}} = 0.$$

θ est ensuite obtenu par une quadrature de différentielle totale, mais le calcul de θ n'est pas indispensable. Si dans ces équations l'on pose

$$v = v_1 \sqrt{B \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)}, \quad u = u_1 \sqrt{A \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)},$$

on obtient le système plus simple

$$(19) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \cos \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_1} + \cos \varphi = 0.$$

On déduit immédiatement des équations (19), par dérivation,

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin \psi \cos \varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin \varphi \cos \psi = 0,$$

puis par addition et soustraction

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 (\varphi + \psi)}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin (\varphi + \psi) = 0, \\ \frac{\partial^2 (\varphi - \psi)}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin (\psi - \varphi) = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\varphi + \psi = \Omega, \quad \varphi - \psi = \Omega' + \pi,$$

les équations (21) se réduisent à la forme

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin \Omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin \Omega' = 0$$

qui est celle que l'on rencontre dans l'étude des surfaces à courbure totale constante rapportées à leurs asymptotiques. Si l'on remarque d'ailleurs que le système (19) s'écrit

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v_1} + \frac{\partial \Omega'}{\partial v_1} \right) + \sin \left(\frac{\Omega - \Omega'}{2} \right) = 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_1} - \frac{\partial \Omega'}{\partial u_1} \right) - \sin \left(\frac{\Omega + \Omega'}{2} \right) = 0, \end{cases}$$

on voit qu'il suffit de connaître une intégrale Ω (ou Ω') de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u_1 \partial v_1} + \sin \theta_1 = 0$$

pour obtenir, par un système complètement intégrable (23), une autre intégrale Ω' (ou Ω) de la même équation : on retrouve ici la transfor-

mation bien connue associant à une surface Σ à courbure totale constante négative égale à (-1) (connue par Ω) ∞ surfaces de même espèce Σ' , telles que Σ et Σ' soient les développées d'une même surface W ($R - R' = 1$).

Ces considérations sont précieuses pour nous renseigner sur la nature du système $(E_1), (E_2)$ où l'on a donné au couple (U, V) une valeur *arbitraire* : on ne peut en donner explicitement l'intégrale générale; tout au plus, pour certains choix *particuliers* de ce couple, peut-on, comme ici, trouver des intégrales premières (dans le cas actuel, on a obtenu deux intégrales premières et ramené l'intégration à celle de l'équation irréductible $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} + \sin \Omega = 0$, suivie de l'intégration d'un système du premier ordre complètement intégrable, équivalent à une équation de Riccati).

Donnons au moins un exemple numérique précis; faisons

$$A = B = 1, \quad u = u_1 \sqrt{2}, \quad v = v_1 \sqrt{2}, \quad \varphi = \psi,$$

de sorte que l'on trouve sans peine

$$\cos \varphi = \frac{1}{\operatorname{ch}(u_1 + v_1)}, \quad \sin \varphi = -\operatorname{th}(u_1 + v_1)$$

et le $d\sigma^2$ de la sphère est

$$(24) \quad d\sigma^2 = \frac{2(du_1^2 + dv_1^2)}{\operatorname{ch}^2(u_1 + v_1)} = \frac{(du_1 + dv_1)^2 + (du_1 - dv_1)^2}{\operatorname{ch}^2(u_1 + v_1)}.$$

Or la forme $\frac{dX^2 + dY^2}{\operatorname{ch}^2 X}$ est celle, bien connue, qui sert dans la représentation géographique de Mercator :

$$(c = \sin \theta \cos \varphi, c' = \sin \theta \sin \varphi, c'' = \cos \theta, X = \log \tan \frac{\theta}{2}, Y = \varphi).$$

Ici on a donc

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + v_1 = \log \tan \frac{\theta}{2}, \quad u_1 - v_1 = \varphi, \\ u = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log \tan \frac{\theta}{2} + \varphi \right), \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\log \tan \frac{\theta}{2} - \varphi \right), \\ e = g = \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{u + v}{\sqrt{2}} \right)}. \end{array} \right.$$

On forme aisément l'équation (E_2) relative à ce cas : on pose $u + v = t$ et l'on obtient

$$(26) \quad 2\sqrt{2}(U + V - 2) + (U' + V') \operatorname{sh}(t\sqrt{2}) = 0.$$

Nous inspirant de la méthode indiquée, formons (E_{2u}) , (E_{2v}) , (E_{2uv}) ; on obtient

$$(27) \quad 2\sqrt{2}U' + (U' + V')\sqrt{2} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + U'' \operatorname{sh}(t\sqrt{2}) = 0,$$

$$(28) \quad 2\sqrt{2}V' + (U' + V')\sqrt{2} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) + V'' \operatorname{sh}(t\sqrt{2}) = 0,$$

$$(29) \quad 2(U' + V') \operatorname{sh}(t\sqrt{2}) + (U'' + V'')\sqrt{2} \operatorname{ch}(t\sqrt{2}) = 0.$$

Pour éliminer U'' et V'' , il suffit d'ajouter les deux premières, ce qui donne

$$(30) \quad 2\sqrt{2}(U' + V')(1 + \operatorname{ch} t\sqrt{2}) + (U'' + V'') \operatorname{sh}(t\sqrt{2}) = 0.$$

Les deux équations homogènes obtenues en $U' + V' = 0$ et $U'' + V'' = 0$ entraînent $U' + V' = 0$, $U'' + V'' = 0$; l'équation (E_2) donne $U + V - 2 = 0$; par suite, l'unique solution est celle, $U = 1 + k$, $V = 1 + k$, que nous connaissions *a priori*. Nous avons ensuite à exprimer les cosinus c , c' , c'' de façon à obtenir le nouveau $d\sigma^2$:

$$(31) \quad d\sigma^2 = \left(\frac{du^2}{1+k} + \frac{dv^2}{1-k} \right) \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right)}.$$

Nous posons

$$u = u_1 \sqrt{2} \sqrt{1+k}, \quad v = v_1 \sqrt{2} \sqrt{1-k}$$

et nous avons

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{2(du_1^2 + dv_1^2)}{\operatorname{ch}^2 [u_1 \sqrt{1+k} + v_1 \sqrt{1-k}]} \\ &= \frac{[d(u_1 \sqrt{1+k} + v_1 \sqrt{1-k})]^2 + [d(u_1 \sqrt{1-k} - v_1 \sqrt{1+k})]^2}{\operatorname{ch}^2 [u_1 \sqrt{1+k} + v_1 \sqrt{1-k}]} \end{aligned}$$

et nous avons retrouvé le $d\sigma^2$ de la représentation de Mercator $\frac{dX^2 + dY^2}{\operatorname{ch}^2 X}$, de sorte que le problème se trouve complètement résolu. On peut remarquer que, k variant, le $d\sigma^2$ obtenu par la formule (31) est toujours isothermique, de sorte que parmi les surfaces correspondantes, on trouve une famille de surfaces toutes minima se correspondant avec conservation des lignes de courbure et des rayons principaux. On a en

effet ici

$$\frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{th} \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}} \right) = \frac{-\frac{\partial R}{\partial v}}{R-R'} = \frac{\frac{\partial R'}{\partial u}}{R-R'}.$$

On a, quelle que soit la surface choisie, $\frac{\partial R'}{\partial u} = -\frac{\partial R}{\partial v}$; si l'on choisit $R = -R'$, on aura $\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R}{\partial u}$, de sorte que R est fonction aussi de $u+v$; l'égalité

$$\frac{\partial R}{\partial v} : R = -\left(\frac{\partial e}{\partial v} : e \right)$$

donne alors $R = \frac{C}{e^2}$ où C est une constante. On peut donc prendre, en négligeant une homothétie, $R = -R' = \operatorname{ch}^2 \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)$ pour définir la famille de surfaces minima.

4. *Méthode de M. Finikoff.* — Rappelons que nous avons écrit

$$(1) \quad d\sigma^2 = e^2 du^2 + g^2 dv^2,$$

$$(2) \quad \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial v} = \varphi = \frac{\frac{\partial R}{\partial v}}{R-R'}, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} = \psi = \frac{\frac{\partial R'}{\partial u}}{R-R'}.$$

On suppose données les fonctions φ, ψ ; les fonctions inconnues e, g ⁽¹⁾ satisfont donc aux deux équations (2) auxquelles nous adjoignons l'équation

$$(E_1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v} \right) + eg = 0.$$

En multipliant le premier membre de (E_1) par $\frac{2}{e'g'}$, nous pouvons

(¹) A titre de mémoire, nous pouvons rappeler que le trièdre mobile dont l'origine est le point (c, c', c'') de la sphère, dont l'axe des z est la normale à la sphère, l'axe des x tangent à la courbe $v = \text{const.}$, l'axe des y tangent à la courbe $u = \text{const.}$ tracée sur la sphère admet pour rotation instantanée infinitésimale $p du + p_1 dv, q du + q_1 dv, r du + r_1 dv$, avec

$$p = q_1 = 0, \quad e = q, \quad g = p_1, \quad r = \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial v}, \quad r_1 = -\frac{1}{e} \frac{\partial g}{\partial u}.$$

écrire (E₁) sous la forme équivalente

$$(E_1) \quad \varphi \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g^2} \right) + \psi \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e^2} \right) + \frac{2}{g^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi^2 \right) + \frac{2}{e^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} + \psi^2 \right) + 2 = 0.$$

Si les quantités φ, ψ sont différentes de zéro, nous posons

$$(3) \quad \alpha = \frac{\psi}{e^2}, \quad \beta = \frac{\varphi}{g^2}$$

et nous substituons les inconnues α, β à e, g . Cela donne le système de trois équations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (\log \psi) - 2\varphi, & \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (\log \varphi) - 2\psi, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} + \alpha \left[\frac{\partial (\log \psi)}{\partial u} + 2\psi \right] + \beta \left[\frac{\partial (\log \varphi)}{\partial v} + 2\varphi \right] + 2 = 0. \end{cases}$$

Ceci permet d'écrire le système de quatre équations aux cinq inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\alpha \left(\frac{\partial \log \psi}{\partial u} + 2\psi \right) + \gamma - 1, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \alpha \left(\frac{\partial \log \psi}{\partial v} - 2\varphi \right), \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = \beta \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial u} - 2\psi \right), \\ \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\beta \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial v} + 2\varphi \right) - \gamma - 1, \end{cases}$$

où γ est une inconnue auxiliaire; on a ensuite

$$e^2 = \frac{\psi}{\alpha}, \quad g^2 = \frac{\varphi}{\beta}.$$

Quand on donne *a priori* φ, ψ , nous avons pour les trois inconnues restant, α, β, γ , un système en général incompatible. En calculant de deux façons différentes $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 \beta}{\partial u \partial v}$ nous avons deux équations complémentaires à écrire

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial u} = a\gamma - 2\beta \left(\frac{\partial a}{\partial v} + c \right) + a, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial v} = b\gamma + 2\alpha \left(\frac{\partial b}{\partial u} + c \right) - b, \end{cases}$$

où l'on a désigné (pour simplifier l'écriture) par a, b, c les quantités

$$(7) \quad a = \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} - 2\psi, \quad b = \frac{\partial \log \psi}{\partial v} - 2\varphi, \quad c = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Nous devons adjoindre les équations (6) aux équations (5); mais alors nous devons encore égaler les deux valeurs de $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u \partial v}$, ce qui nous donne cette fois une équation en termes finis

$$(8) \quad \alpha z + \beta \bar{\beta} + \mathcal{C} \gamma + \mathcal{D} = 0,$$

où $\alpha, \beta, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont les expressions

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = -2 \left(\frac{\partial b}{\partial u} + c \right) \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\frac{\partial b}{\partial u} + c}{\varphi \psi}, \\ \beta = -2 \left(\frac{\partial a}{\partial v} + c \right) \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\frac{\partial a}{\partial v} + c}{\varphi \psi}, \\ \mathcal{C} = 3 \left(\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial b}{\partial u} \right), \\ \mathcal{D} = 3 \left(\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u} \right) - 2ab + 4c. \end{cases}$$

L'équation (8) a des coefficients qui ne dépendent que de φ et ψ ; de plus elle est linéaire. En dérivant l'équation (8) un nombre quelconque de fois en u ou en v , on peut aussitôt, en tenant compte des équations (5), (6), réduire le résultat à une expression linéaire (non homogène) en α, β, γ . Donc, pour la compatibilité, il est nécessaire et suffisant que l'équation (8) et celles qui en résultent ainsi se réduisent à un nombre d'équations linéaires indépendantes égal à 0, 1, 2, 3, sinon il y a impossibilité.

Le cas : *zéro équation indépendante* signifie que $\alpha, \beta, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont identiquement nulles; on trouve alors, pour le système (R, R') donné, une famille triplement infinie de surfaces.

Le cas : *trois équations indépendantes* signifie qu'il existe un système et un seul de fonctions α, β, γ , donc une seule surface S ; autrement dit il est impossible de trouver une autre surface correspondant à S suivant le mode indiqué.

Les cas : *une ou deux équations indépendantes* donnent une famille de ∞^2 ou ∞^1 surfaces.

5. *Familles de surfaces à trois paramètres. Coniques sphériques homofocales.* — Nous supposons $\alpha = \beta = \mathcal{C} = \mathcal{D} = 0$. Pour éviter toute difficulté relative au logarithme, écrivons

$$\begin{aligned}\alpha &= -2 \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial b}{\partial u} + c \right] + 2 \left(\frac{\partial b}{\partial u} + c \right) \frac{\partial}{\partial u} \log(\varphi\psi), \\ \beta &= -2 \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial a}{\partial v} + c \right] + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial v} + c \right) \frac{\partial}{\partial v} \log(\varphi\psi).\end{aligned}$$

En vertu de $\mathcal{C} = 0$, les expressions $\frac{\partial b}{\partial u} + c$ et $\frac{\partial a}{\partial v} + c$ sont égales. Si elles sont nulles, on a $\alpha = \beta = 0$ et les équations à écrire $\alpha = \beta = \mathcal{C} = \mathcal{D} = 0$ deviennent

$$(1) \quad \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial b}{\partial u} = ab = -c.$$

On déduit de là sans peine

$$(2) \quad a = \frac{-U'}{U+V}, \quad b = \frac{-V'}{U+V}, \quad c = \frac{-U'V'}{(U+V)^2},$$

où U, V sont fonctions de u ou v seul. On a ensuite, d'après les définitions de a, b, c ,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} - 2\psi = \frac{-U'}{U+V}, & \frac{\partial \log \psi}{\partial v} - 2\varphi = \frac{-V'}{U+V}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{-U'V'}{(U+V)^2}. \end{cases}$$

La forme de ces équations conduit au changement d'inconnues φ_1, ψ_1 telles que l'on ait

$$(4) \quad \varphi_1 = (U+V)\varphi, \quad \psi_1 = (U+V)\psi.$$

On a le système, équivalent à (3),

$$(4') \quad \begin{cases} \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial u} = \frac{2\psi_1}{U+V}, & \frac{\partial \log \psi_1}{\partial v} = \frac{2\varphi_1}{U+V}, \\ 4\varphi_1\psi_1 - U'\varphi_1 - V'\psi_1 + U'V' = 0. \end{cases}$$

La dernière équation s'écrit

$$(4\varphi_1 - V')(4\psi_1 - U') = -3U'V'.$$

Si U' est nul, on a soit $\psi_1 = 0$, soit $\varphi_1 = \frac{V'}{4}$ et cette dernière hypothèse, avec la première équation (4), donne $\psi_1 = 0$; or on a écarté le cas $\psi = 0$; donc nous pouvons supposer $U'V' \neq 0$ et poser, avec une unique inconnue θ ,

$$(5) \quad \varphi_1 = \frac{V'}{4}(1 + \theta\sqrt{3}), \quad \psi_1 = \frac{U'}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\theta}\right),$$

ce qui donne les deux équations

$$(6) \quad 2\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{U'}{U+V}\left(\theta - \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \quad 2\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{V'}{U+V}\theta^2\left(\theta - \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

La condition de compatibilité de ces deux équations est

$$\theta\left(\theta - \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0,$$

donc θ est une constante ($\theta = \sqrt{3}$ ou $\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$); mais alors φ ou ψ est nul; c'est le cas exclu.

Nous devons donc supposer la valeur commune de $\frac{\partial b}{\partial u} + c$ et $\frac{\partial a}{\partial v} + c$ non nulle; $\mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$ donne alors

$$(7) \quad \frac{\partial a}{\partial v} + c = \frac{\partial b}{\partial u} + c = k\varphi\psi,$$

où k est une constante, non nulle, mais arbitraire. En récapitulant nos équations, nous avons, par élimination de c , ($c = 3k\varphi\psi - ab$), le système de cinq équations entre φ , ψ , a , b :

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial b}{\partial u} = ab - 2k\varphi\psi, \\ \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = a + 2\psi, & \frac{\partial \log \psi}{\partial v} = b + 2\varphi, \\ ab + a\varphi + b\psi + (4 - 3k)\varphi\psi = 0. \end{cases}$$

La dernière équation (8) s'écrit $(a + \psi)(b + \varphi) = 3(k - 1)\varphi\psi$. Supposons d'abord k différent de 1; nous pouvons poser

$$(9) \quad a = \psi(\theta\lambda - 1), \quad b = \varphi\left(\frac{\lambda}{\theta} - 1\right), \quad \lambda^2 = 3(k - 1),$$

λ étant une constante non nulle; nous avons donc un système équivalent à (8) :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi \psi (\lambda \theta + 1), & \frac{\partial \psi}{\partial v} = \varphi \psi \left(\frac{\lambda}{\theta} + 1 \right), \\ \frac{\partial \log \theta}{\partial u} = \varphi \psi \left(\frac{\lambda \theta}{3} + 1 \right), & \frac{\partial \log \theta}{\partial v} = -\varphi \psi \left(\frac{\lambda}{3\theta} + 1 \right). \end{cases}$$

La condition de compatibilité $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}$ donne

$$\left(\frac{\lambda \theta}{3} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{3\theta} + 1 \right) = 0,$$

θ est donc une constante, et comme ni φ ni ψ ne sont nuls, les dernières équations (10) entraînent que l'on ait *à la fois*

$$\lambda \theta + 3 = 0, \quad \lambda + 3\theta = 0,$$

d'où

$$\lambda = \pm 3, \quad \theta = \mp 1, \quad a = -\frac{1}{4}\psi, \quad b = -\frac{1}{4}\varphi, \quad k = \frac{1}{4}.$$

On trouve ensuite les deux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v} = -\varphi \psi$$

qui donnent

$$\varphi = \frac{V'}{U + V}, \quad \psi = \frac{U'}{U + V}.$$

Comme nous l'avons dit, U' ni V' ne sont nulles; on peut donc se borner à prendre $U = u$, $V = -v$:

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{-1}{2(u-v)}, & \psi = \frac{1}{2(u-v)}, \\ a = \frac{-2}{u-v}, & b = \frac{-2}{v-u}, & c = \frac{1}{(u-v)^2}. \end{cases}$$

Le système écrit précédemment en α, β, γ devient

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \gamma - 1, & \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \frac{2\alpha}{u-v}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{-2\beta}{u-v}, & \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\gamma - 1, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \frac{-2(\gamma+1)}{u-v} + \frac{2\beta}{(u-v)^2}, & \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \frac{2(\gamma-1)}{u-v} - \frac{2\alpha}{(u-v)^2}. \end{cases}$$

On voit aussitôt que l'on peut poser

$$z = \frac{-U_1}{(u-v)^2}, \quad \beta = \frac{-V_1}{(u-v)^2}$$

et la relation $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} + 2 = 0$ donne

$$(13) \quad (u-v)(U_1' + V_1') - 2U_1 + 2V_1 - 2(u-v)^2 = 0.$$

En dérivant en u , et le résultat en v , on a

$$\begin{aligned} -U_1'' + V_1'' + 12(u-v) &= 0, \\ U_1'' - 12u &= V_1'' - 12v = \text{const.} \end{aligned}$$

Le résultat montre que $U_1 - 2u^3$ est un polynôme du second degré, ainsi que $V_1 - 2v^3$; l'équation (13) prouve que pour $v = u$, V_1 coïncide *identiquement* avec U_1 . On écrira donc

$$(14) \quad U_1 = 2(u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3), \quad V_1 = 2(v^3 + c_1 v^2 + c_2 v + c_3)$$

et l'on constate aussitôt que (13) est satisfaite identiquement; on arrive ainsi au $d\sigma^2$ bien connu

$$(15) \quad d\sigma^2 = \frac{v-u}{4} \left[\frac{du^2}{u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3} - \frac{dv^2}{v^3 + c_1 v^2 + c_2 v + c_3} \right],$$

correspondant, quand les racines du polynôme

$$u^3 + c_1 u^2 + c_2 u + c_3 = 0$$

sont réelles et distinctes, à une famille de coniques sphériques homofocales réelles.

Les dégénérescences s'obtiennent synthétiquement en remarquant que nous devons imaginer un cône du second degré C ayant son sommet en O et lui associer tous les cônes du faisceau *tangentiel* déterminé par C et le cône isotrope I de même sommet; on arrive ainsi à interpréter le cas où deux ou trois racines se confondent, mais on n'a alors que des surfaces imaginaires. *En particulier, les quadriques réelles forment, en négligeant les six paramètres de déplacement, une famille ∞^3 de surfaces associées. Il existe aussi une famille*

de ∞^3 surfaces minima associées, puisque le réseau sphérique trouvé est isotherme. Nous chercherons, un peu plus bas, les familles de surfaces W que l'on peut obtenir.

6. *Second type de surfaces à trois paramètres. Faisceaux de cercles orthogonaux sur la sphère.* — Nous devons maintenant étudier le cas où la constante k est égale à un. La dernière équation (8) du paragraphe précédent se décompose en un produit de deux facteurs

$$(a + \psi)(b + \varphi) = 0.$$

Prenons $a + \psi = 0$; (*a priori* il n'y a aucune raison pour que $b + \varphi$ soit nul aussi; nous verrons plus bas que cette équation $b + \varphi = 0$ est aussi vérifiée, mais pour le moment nous n'en savons rien). Nous avons donc les équations [dédites des équations (8) du numéro précédent, en y faisant $k = 1$, $a = -\psi$] au nombre de trois entre b , φ , ψ

$$(1) \quad \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = \psi, \quad \frac{\partial \log \psi}{\partial v} = b + 2\varphi, \quad \frac{\partial b}{\partial u} = -\frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

L'élimination de b donne

$$(2) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log(\varphi\psi) = 2\varphi\psi,$$

d'où l'on déduit $\varphi\psi = \frac{U'V'}{(U+V)^2}$; sans restreindre nous pouvons prendre

$$U = u, \quad V = -v, \quad \varphi\psi = \frac{-1}{(u-v)^2}.$$

Mais alors on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi\psi = \frac{-1}{(u-v)^2}$$

et par suite

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{u-v} + \frac{V_1'}{V_1} = \frac{V_1 + V_1'(u-v)}{V_1(u-v)}, \\ \psi = \frac{-V_1}{(u-v)[V_1 + V_1'(u-v)]} = \frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = \frac{-1}{u-v} + \frac{V_1'}{V_1 + V_1'(u-v)}, \\ a = -\psi, \quad b = \frac{\partial \log \psi}{\partial v} - 2\varphi = \frac{1}{v-u} - \frac{V_1'}{V_1} - \frac{(u-v)V_1''}{(u-v)V_1' + V_1}, \\ c = \frac{-2}{(u-v)^2} + \frac{V_1''V_1}{[V_1 + V_1'(u-v)]^2}. \end{array} \right.$$

Le système linéaire en α, β, γ est

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = -\alpha \left[\frac{-3}{u-v} + \frac{V_1'}{(u-v)V_1' + V_1} \right] + \gamma - 1, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \alpha \left[\frac{-V_1'}{V_1} + \frac{1}{v-u} - \frac{(u-v)V_1''}{(u-v)V_1' + V_1} \right], \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\beta V_1'}{(u-v)[V_1 + (u-v)V_1']}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\beta \left[\frac{V_1''(u-v)}{V_1 + V_1'(u-v)} + \frac{V_1'}{V_1} - \frac{3}{v-u} \right] - \gamma - 1. \end{cases}$$

On en déduit

$$(5) \quad \alpha = \frac{(u-v)U_2}{V_1[(u-v)V_1' + V_1]}, \quad \beta = \frac{V_2(u-v)}{V_1 + (u-v)V_1'}.$$

Nous prenons maintenant l'équation dont γ a disparu

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial \beta}{\partial v} = \alpha[\dots] + \beta[\dots] - \alpha,$$

où nous tenons compte de (4) et (5) : on trouve ainsi

$$(6) \quad \frac{(u-v)U_2' - 2U_2 + [(u-v)V_2' + 2V_2]V_1}{V_1[(u-v)V_1' + V_1]} + \frac{V_2V_1'(u-v)}{V_1[V_1 + (u-v)V_1']^2} + \alpha = 0.$$

Si l'on regarde v comme un paramètre, on a une identité en u ; si V_1 n'est pas nul le pôle, variable avec v , $u = v - \frac{V_1}{V_1'}$ (¹), est double pour le second terme du premier membre de (6) et simple pour le premier; il y a donc impossibilité, sauf si V_1 est nul et par suite V_1 est une constante (constante nécessairement différente de zéro), que l'on peut sans restreindre supposer égale à l'unité; on remarquera alors que l'on a

$$\varphi = \frac{1}{u-v}, \quad \psi = \frac{-1}{u-v},$$

(¹) Si $V_1 = v$ le raisonnement est en défaut; mais l'identité

$$(u-v)U_2' - 2U_2 + [(u-v)V_2' + 2V_2]vu + V_2(u-v) - 2vu^2 = 0$$

que l'on obtient exige $U_2 = u^2$, $V_2 = 0$; ce résultat est inadmissible, car β ne peut être nul.

et par suite $a = -\psi$, $b = -\varphi$, circonstance signalée au début de ce paragraphe. L'identité (6) devient alors

$$(7) \quad (u-v)[U_2' + V_2'] + 2[V_2 - U_2 + 1] = 0.$$

En dérivant une fois en u , et le résultat en v , on obtient

$$V_2'' - U_2'' = 0, \quad U_2'' = V_2'' = \text{const.},$$

donc U_2 est un polynôme du second degré; l'équation (7), si l'on y fait $u = v$, montre que $V_2 + 1$ (pour $v = u$) coïncide avec U_2 ; on peut donc prendre

$$(8) \quad U_2 = c_1 u^2 + 2c_2 u + c_3, \quad V_2 = c_1 v^2 + 2c_2 v + c_3 - 1$$

et l'on constate que (7) est satisfaite identiquement. On a ensuite

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (u-v)(c_1 u^2 + 2c_2 u + c_3), \\ \beta = (u-v)(c_1 v^2 + 2c_2 v + c_3 - 1), \\ \varphi = \frac{1}{u-v}, \quad \psi = \frac{-1}{u-v}, \\ \rho^2 = \frac{-1}{(u-v)^2(c_1 u^2 + 2c_2 u + c_3)}, \\ \sigma^2 = \frac{1}{(u-v)^2(c_1 v^2 + 2c_2 v + c_3 - 1)}, \\ d\sigma^2 = \frac{1}{(u-v)^2} \left[\frac{-du^2}{c_1 u^2 + 2c_2 u + c_3} + \frac{dv^2}{c_1 v^2 + 2c_2 v + c_3 - 1} \right]. \end{array} \right.$$

On a ainsi retrouvé le $d\sigma^2$ auquel conduisent les cyclides de Dupin; les lignes de coordonnées sont des cercles dans chaque système: dans le cas général ($c_1 \neq 0$) on prend relativement à la sphère unité deux droites conjuguées *quelconques*; les cyclides correspondantes sont de degré 4; si l'une des droites devient tangente à la sphère, l'autre est tangente à la sphère, au même point, orthogonale à la précédente et les cyclides sont de degré 3; la dernière dégénérescence ($c_1 = c_2 = 0$) correspond à une droite isotrope et à la droite conjuguée, qui est parallèle à la première: on remarque, bien entendu, que s'il s'agit d'une cyclide isolée, on peut si $c_1 \neq 0$, réduire ($\pm c_1$) à l'unité et c_2 à zéro par un changement ($u, v; \lambda u + \mu, \lambda v + \mu$); si $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, on peut supposer $c_2 = 1$, $c_3 = 0$. Les $d\sigma^2$ trouvés étant isothermes, on

a encore ici une famille de ∞^3 surfaces minima (en particulier la surface minima d'Enneper).

7. *Surfaces W incluses dans les familles à trois paramètres.* — Les deux rayons R, R' sont liés par une relation ne contenant ni u ni v ; nous posons $R' = R + \gamma$. Nous prenons d'abord le cas des coniques sphériques homofocales; on a

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{-1}{2(u-v)} = \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{1}{R' - R} \frac{\partial R}{\partial v}, \\ \psi = \frac{1}{2(u-v)} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{R - R'} \frac{\partial R'}{\partial u} \end{cases}$$

[remarquons en passant que l'on a, pour toutes les surfaces de cette famille, W ou non W , $\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{\partial R'}{\partial u}$; on peut poser $R = \frac{\partial \theta}{\partial u}$, $R' = \frac{\partial \theta}{\partial v}$ et l'on obtient pour θ l'équation de Poisson $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dont l'intégrale générale a été obtenue par Poisson; cette équation admet en particulier une infinité de solutions algébriques]; la quantité γ est fonction de R et nous appelons γ' sa dérivée $\frac{d\gamma}{dR}$. Les équations (1) prennent la forme

$$(2) \quad \frac{\partial R}{\partial u} = \frac{-\gamma'}{2(u-v)(1+\gamma')}, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{-\gamma'}{2(u-v)}$$

et la comparaison des valeurs $\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v}$ donne

$$(3) \quad \gamma\gamma'' + 2(\gamma' + 1)(\gamma' + 2) = 0.$$

On aperçoit les solutions $\gamma' = -1$ et $\gamma' = -2$; la première donnerait $R' = \text{const.}$, ce qui est impossible, ψ n'étant pas nulle. La seconde donne $R' = -R + C$, c'est-à-dire une surface minima si C est nul, ou une surface parallèle à une surface minima (il est évident *a priori* que toute surface répondant au problème peut être remplacée par la surface parallèle, obtenue en portant une longueur constante sur les normales); il suffit d'obtenir les surfaces minima; on a alors

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{1}{u-v}, \quad \frac{\partial R}{\partial u} = \frac{-1}{u-v}, \quad R = \frac{k}{u-v}, \quad R' = \frac{-k}{u-v},$$

où k est une constante. Ces solutions écartées, on arrive aisément à l'intégrale de (3):

$$(4) \quad A(R' - R) = \sin \omega A(R + R' + B),$$

où A et B sont des constantes; on reconnaît les surfaces signalées par Weingarten dans la déformation du paraboloïde de révolution; ces surfaces *complémentaires*, développées d'une surface satisfaisant à la relation (4); un parallélisme permet d'annuler B ; une homothétie permet de réduire A à 1 ou ϵ , suivant qu'il s'agit du paraboloïde

$$x^2 + y^2 = 2p z \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 2\rho i z;$$

autrement dit on ramène (4) à l'une des deux formes

$$(5) \quad R' - R = \sin(R + R'), \quad R' - R = \text{sh}(R + R').$$

Si l'on adopte la forme (5), on peut poser

$$(6) \quad y = \sin \omega \begin{cases} 2R = \omega - \sin \omega, & \cos \omega = \frac{u + v + 2C}{u - v}, \\ 2R' = \omega + \sin \omega. \end{cases}$$

où C est une constante arbitraire.

Prenons maintenant l'autre type de $d\sigma^2$, correspondant aux faisceaux de cercles orthogonaux; on a

$$(7) \quad \varphi = \frac{1}{u - v} = \frac{1}{R' - R} \frac{\partial R}{\partial v}, \quad \psi = \frac{-1}{u - v} = \frac{1}{R - R'} \frac{\partial R'}{\partial u}.$$

[Ici encore on peut poser

$$R = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial u}, \quad R' = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial v}$$

et \mathcal{G} satisfait à l'équation $E(-1, 1)$ dont l'intégrale générale est

$$\mathcal{G} = (u - v)^2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{U - V}{u - v} \right).]$$

En posant encore $R' = R + y$, on a

$$(8) \quad \left(y' = \frac{dy}{dR}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dR^2} \right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{y}{(u - v)(1 + y')}, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = \frac{y}{u - v},$$

$$(9) \quad yy'' = (y' + 1)(y' + 2).$$

Comme précédemment $\gamma' = -1$ est à rejeter; $\gamma' = -2$ donne les surfaces minima déjà signalées au moment où nous étudions ces $d\sigma^2$ (et les surfaces parallèles). Si l'on écarte ces solutions, on arrive à des surfaces qui, à une homothétie près ou à un parallélisme près, donnent

$$(10) \quad R' - R = \text{ch}^2(R + R' - \sqrt{R' - R} \sqrt{R' - R - 1}).$$

$$(11) \quad \begin{cases} R = \frac{\omega - e^{-\omega} - 1}{4}, & R' = \frac{\omega + e^{\omega} + 1}{4}, & \gamma' = \text{ch}^2 \frac{\omega}{2}, \\ e^{\omega} = \frac{u - C}{C - v}, \end{cases}$$

où C est une constante arbitraire.

8. *Exemple de familles à deux paramètres.* — Dans le Mémoire déjà cité de l'Académie Polonaise de Cracovie, M. Gambier obtient ∞^2 surfaces dépendant de deux paramètres D, λ , dont l'un, D , est paramètre de *forme*, l'autre, λ , paramètre d'*homothétie*, telles que les rayons de courbure principaux aient pour expression

$$(1) \quad \lambda \frac{(u_1 + v_1)^2}{u_1^{\frac{3}{2}} v_1^{\frac{3}{2}}}, \quad \lambda \frac{(u_1 + v_1)^2}{u_1^{\frac{3}{2}} v_1^{\frac{3}{2}}},$$

les paramètres u_1 et v_1 étant ceux qui fixent les lignes de courbure.

Donc, si D varie, on a déjà ∞^1 surfaces qui se correspondent, pour λ constant, suivant le mode indiqué. Si maintenant on pose

$$(2) \quad u_1 = U_1 \sqrt{\lambda}, \quad v_1 = V_1 \sqrt{\lambda},$$

on obtient, au lieu des expressions (1), les nouvelles expressions

$$(3) \quad \frac{(U_1 + V_1)^2}{U_1^{\frac{3}{2}} V_1^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{(U_1 + V_1)^2}{U_1^{\frac{3}{2}} V_1^{\frac{3}{2}}},$$

indépendantes aussi de λ : donc les ∞^2 surfaces sont par ce procédé mises toutes entre elles en correspondance suivant le mode indiqué. Grâce à cette remarque, nous avons une solution très satisfaisante pour l'esprit de la question, objet de ce travail. Nous avons indiqué le moyen d'avoir *toutes* les familles à un paramètre; nous en avons donné

un exemple intéressant, déduit de la représentation de Mercator; nous avons obtenu les deux types de $d\sigma^2$ correspondant aux familles à trois paramètres. Quant aux $d\sigma^2$ à deux paramètres, nous en donnons un exemple simple obtenu ainsi : nous figurons sur le plan xOy un faisceau de coniques homofocales d'équation

$$(4) \quad \frac{x^2}{D^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} - 1 = 0$$

et nous mettons ce faisceau en perspective stéréographique sur la sphère unité à partir du point $(0, 0, 1)$ par exemple; chaque valeur de D donne un réseau sphérique orthogonal, mais grâce à l'homothétie, ces ∞^1 réseaux ou $d\sigma^2$ donnent effectivement ∞^2 surfaces se correspondant suivant le mode indiqué. (N'oublions pas que, en parlant de solution à 1, 2, 3 paramètres, nous comptons les paramètres intervenant dans une famille de surfaces se correspondant entre elles suivant le mode étudié ici; le nombre de paramètres dont dépend le $d\sigma^2$ est distinct du nombre 1, 2, 3 qui vient d'être cité.) Les réseaux sphériques qui conduisent aux familles à un paramètre dépendent de deux fonctions arbitraires U, V d'un argument; ceux qui conduisent aux familles à trois paramètres dépendent simplement d'une seule arbitraire (écartement focal, ou des points-bases des faisceaux de cercles). Nous n'avons pas résolu la question analogue (nombre de constantes arbitraires ou de fonctions arbitraires) pour les réseaux sphériques qui donnent des familles à deux paramètres : nous savons seulement, soit que nous suivions la méthode de M. Finikoff ou celle de M. Gambier, que les fonctions inconnues e, g satisfont dans ce cas à *trois* équations aux dérivées partielles, sans savoir quel est le degré de généralité de la solution (e, g) : nombre fini de constantes arbitraires ou une *fonction* arbitraire d'un argument (ce ne peut être *deux* fonctions, car ce nombre *deux* correspond au cas des familles à un paramètre). On remarquera en tout cas l'analogie des deux méthodes : dans celle de M. Gambier, une équation (E_4) suivie d'une chaîne d'équations *linéaires et homogènes* en $U', V', U - 1, V - 1$, équations linéaires qui doivent se réduire à 1, 2 ou 3; dans celle de M. Finikoff, une chaîne d'équations *linéaires, non homogènes*, en α, β, γ qui doivent se réduire

Ces considérations générales données, revenons à notre exemple. L'équation (4) permet d'exprimer les coordonnées (α, β) d'un point du plan xOy en fonction des paramètres u, v (valeurs de λ au point α, β)

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = \frac{(D^2 + u)(D^2 + v)}{D^2}, \quad \beta^2 = \frac{-uv}{D^2}, \\ \alpha^2 + \beta^2 = D^2 + u + v, \\ d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{(u-v)}{4} \left[\frac{du^2}{u(D^2 + u)} - \frac{dv^2}{v(D^2 + v)} \right]. \end{array} \right.$$

Le point (c, c', c'') perspective du point $(\alpha, \beta, 0)$ a pour coordonnées

$$(6) \quad c = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad c' = \frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}, \quad c'' = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}$$

et l'on a

$$(7) \quad d\sigma^2 = \frac{4(d\alpha^2 + d\beta^2)}{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{(u-v)}{(1 + D^2 + u + v)^2} \left[\frac{du^2}{u(D^2 + u)} - \frac{dv^2}{v(D^2 + v)} \right].$$

Si l'on cherche les surfaces qui admettent pour troisième forme fondamentale ce $d\sigma^2$ exprimé en u, v , on a à intégrer le système

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial v} = \left(\frac{1}{v-u} - \frac{2}{1 + D^2 + u + v} \right) \left(\frac{R'}{R} - 1 \right), \\ \frac{2}{R'} \frac{\partial R'}{\partial u} = \left(\frac{1}{u-v} - \frac{2}{1 + D^2 + u + v} \right) \left(\frac{R}{R'} - 1 \right). \end{array} \right.$$

Or les équations (8) sont compatibles avec l'équation complémentaire

$$(9) \quad \frac{R'}{R} = \frac{U_1}{V_1} = \frac{U^2}{V^2},$$

où U_1 et V_1 sont deux fonctions inconnues de u, v respectivement; cette équation (9) équivaut en effet à

$$(10) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log R' = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log R,$$

équation facile à former en tenant compte de (8); nous effectuons le

changement de variables ⁽¹⁾

$$(11) \quad u_1 = u + \frac{1 + D^2}{2}, \quad v_1 = v + \frac{1 + D^2}{2}$$

et l'équation (10) devient

$$(12) \quad 2(3u_1^2 + 3v_1^2 - 2u_1v_1)(U - V) + \\ (v_1^2 - u_1^2)[(3u_1 - v_1)U' + (3v_1 - u_1)V'] = 0.$$

Cette équation se traite par la méthode indiquée dans ce Mémoire par M. Gambier; on peut remarquer que si v_1 devient égal à u_1 , $V(v_1)$ devient la fonction $V(u_1)$ *identique* à $U(u_1)$; si v_1 tend vers $(-u_1)$, $V(-u_1)$ se réduit aussi identiquement à $U(u_1)$, de sorte que V est fonction paire de v_1 (ainsi que U de u_1). Donnons à v_1 la valeur zéro; l'équation (12) devient

$$6(U - V_0) - 3u_1U' + u_1V_0' = 0$$

si l'on dérive en u_1 , on obtient

$$3U' - 3u_1U'' + V_0' = 0$$

et pour $u_1 = 0$ on trouve $3U_0' + V_0' = 0 = 4U_0'$, de sorte que $U_0' = V_0' = 0$; la fonction U satisfait donc à l'équation

$$2(U - V_0) - u_1U' = 0.$$

qui donne aussitôt, en changeant de notations,

$$(13) \quad U = h + ku_1^2, \quad V = h + kv_1^2$$

et l'on constate que (12) est satisfaite identiquement. On peut donc

⁽¹⁾ Ce changement donne au $d\sigma^2$ la forme

$$d\sigma^2 = \frac{u_1 - v_1}{(u_1 + v_1)^2} \left[\frac{du_1^2}{u_1^2 - u_1 + \frac{1-D^2}{4}} - \frac{dv_1^2}{v_1^2 - v_1 + \frac{1-D^2}{4}} \right],$$

et si l'on pose $u_1 = \lambda u_2$, $v_1 = \lambda v_2$ on obtient le $d\sigma^2$

$$d\sigma^2 = \frac{u_2 - v_2}{(u_2 + v_2)^2} \left[\frac{du_2^2}{\lambda u_2^2 - u_2 + \mu} - \frac{dv_2^2}{\lambda v_2^2 - v_2 + \mu} \right],$$

de sorte que la variation λ et μ donnent tous les $d\sigma^2$ qui se correspondent suivant la loi indiquée.

prendre

$$(14) \quad \frac{R'}{R} = \pm \sqrt{\frac{h + k u_1^2}{h + k v_1^2}},$$

h , et k choisis, le signe (+) donne une surface isothermique à représentation sphérique isotherme et le signe (−) donne la surface isothermique associée (si k est nul on retrouve la sphère et une surface minima); supposons que nous prenions $k \neq 0$ et par suite, sans restreindre, $k = 1$. En supposant $h = 0$, on a

$$\frac{R'}{R} = \frac{u_1}{v_1} \quad \text{ou} \quad \frac{R'}{R} = -\frac{u_1}{v_1}.$$

Le cas $\frac{R'}{R} = \frac{u_1}{v_1}$ conduit à une surface algébrique; les équations (8) donnent alors, en négligeant la constante λ d'homothétie,

$$(15) \quad R = \frac{(u_1 + v_1)^2}{u_1^{\frac{2}{3}} v_1^{\frac{2}{3}}}, \quad R' = \frac{(u_1 + v_1)^2}{u_1^{\frac{2}{3}} v_1^{\frac{2}{3}}},$$

et cela suffit, pour notre but, d'après ce qui a été expliqué plus haut. Il est intéressant de donner les formules finies exprimant en u_1, v_1 les coordonnées (ξ, η, ζ) d'un point de la surface correspondante. D'après les formules d'Olinde Rodrigues, on écrit

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1} = R \frac{\partial c}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v_1} = R \frac{\partial c}{\partial v_1}, \quad \dots$$

Il n'est pas inutile pour simplifier les calculs de remarquer que l'on passe de c à c' simplement en remplaçant D par iD sans toucher à u_1 ni v_1 . On a

$$(16) \quad \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \left\{ \frac{-2}{u_1^{\frac{2}{3}}} \sqrt{u_1 + \frac{D^2 - 1}{2}} + \frac{u_1 + v_1}{u_1^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{\sqrt{u_1 + \frac{D^2 - 1}{2}}} \right\} \frac{\sqrt{v_1 + \frac{1}{2}(D^2 - 1)}}{v_1^{\frac{2}{3}} D}.$$

Le changement de variable

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 + \frac{D^2 - 1}{2} = u_1 t^2, \\ u_1 = \frac{D^2 - 1}{2(t^2 - 1)}; \quad t = \sqrt{1 + \frac{D^2 - 1}{2u_1}} = \sqrt{\frac{2(u_1 + D^2)}{2u_1 + D^2 + 1}} \end{array} \right.$$

transforme l'intégrale $\int \frac{\partial \xi}{\partial u_1} du_1$ non seulement en intégrale de fraction rationnelle, mais même de polynôme. En faisant le changement de variable analogue sur v_1

$$(18) \quad v_1 + \frac{D^2 - 1}{2} = v_1 \vartheta^2,$$

on trouve que la fonction

$$(19) \quad \xi = \frac{2t^2\vartheta^2 - 3t^2 - 3\vartheta^2 + 6}{3(D^2 - 1)^2 D} 8t\vartheta$$

admet bien comme dérivée partielle en u_1 l'expression qui est au second membre de (16); et comme l'expression ξ est symétrique en u_1 , v_1 , c'est l'expression cherchée.

Profitant de la remarque faite sur l'échange de c en c' en remplaçant D par iD , on est conduit à poser

$$(20) \quad t_1 = \sqrt{1 - \frac{D^2 + 1}{2u_1}}, \quad \vartheta_1 = \sqrt{\frac{D^2 + 1}{2v_1} - 1}$$

et l'on obtient la surface algébrique de genre un,

$$(21) \quad \begin{cases} \xi = \frac{2t^2\vartheta^2 - 3t^2 - 3\vartheta^2 + 6}{3(D^2 - 1)^2 D} 8t\vartheta, \\ \eta = \frac{-2t_1^2\vartheta_1^2 - 3t_1^2 + 3\vartheta_1^2 + 6}{3(D^2 + 1)^2 D} 8t_1\vartheta_1, \\ \zeta = \frac{-1}{3u_1^{\frac{3}{2}}v_1^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

La surface en question est du type elliptique, car il n'entre en jeu que les radicaux en u_1 d'une part

$$(22) \quad \sqrt{u_1}, \quad \sqrt{u_1 + \frac{D^2 - 1}{2}}, \quad \sqrt{u_1 - \frac{D^2 + 1}{2}}$$

et d'autre part en v_1

$$(23) \quad \sqrt{v_1}, \quad \sqrt{v_1 + \frac{D^2 - 1}{2}}, \quad \sqrt{-v_1 + \frac{D^2 + 1}{2}}.$$

Pour que α, β soient réels, il faut que l'on ait

$$u > 0 > v > -D^2.$$

Il en résulte que $u_1 = u + \frac{1+D^2}{2}$ est positif et même supérieur à $\frac{1-D^2}{2}$, donc les trois radicaux (22) sont réels; t et t_1 sont réels. Distinguons maintenant deux cas suivant que $D < 1$ ou $D > 1$, c'est-à-dire suivant que les foyers des coniques planes homofocales sont intérieurs ou extérieurs à la sphère.

Premier cas : $D < 1$; v variant de 0 à $-D^2$, l'expression c_1 varie de $\frac{1+D^2}{2}$ à $\frac{1-D^2}{2}$; elle reste donc toujours positive; R, R' sont réels, donc la surface est réelle.

Deuxième cas : $D > 1$; nous venons de voir que $\frac{1+D^2}{2} - c_1$ et $c_1 - \frac{1-D^2}{2}$ sont nécessairement positives si v varie de 0 à $-D^2$, mais c_1 change de signe. Quand v varie de 0 à $-\frac{1+D^2}{2}$, c_1 est positif; les formules écrites donnent pour ξ, τ, ζ des valeurs réelles. Mais si v varie de $-\frac{1+D^2}{2}$ à $-D^2$, c_1 devient négatif; R et R' tels que les donnent les formules (15) sont imaginaires pures; il suffit donc de faire une homothétie de rapport i par rapport à l'origine pour obtenir une nappe réelle de surface.

Si l'on prend la surface isothermique associée, on trouve

$$\frac{R'}{R} = -\frac{u_1}{c_1}, \quad R = \frac{u_1^{\frac{1}{2}} c_1^{\frac{3}{2}}}{u_1 - c_1}, \quad R' = \frac{u_1^{\frac{3}{2}} c_1^{\frac{1}{2}}}{c_1 - u_1}$$

et la formule d'Olinde Rodrigues relative à la coordonnée ζ montre que la surface est transcendante.

Si l'on suppose $h \neq 0$ (et toujours $k = 1$), on trouve des expressions R, R' indépendantes de D mais dépendant de h

$$(24) \quad \begin{cases} R = \frac{h - u_1 c_1 + \sqrt{u_1^2 + h} \sqrt{c_1^2 + h}}{\sqrt{h + u_1 c_1 + \sqrt{u_1^2 + h} \sqrt{c_1^2 + h}} \sqrt{u_1^2 + h}}, \\ R' = \frac{h - u_1 c_1 + \sqrt{u_1^2 + h} \sqrt{c_1^2 + h}}{\sqrt{h + u_1 c_1 + \sqrt{u_1^2 + h} \sqrt{c_1^2 + h}} \sqrt{c_1^2 + h}}. \end{cases}$$

Or en posant (si $h > 0$)

$$u_1 = U_1 \sqrt{h}, \quad c_1 = V_1 \sqrt{h},$$

on réduit ces expressions à

$$\frac{1 - U_1 V_1 + \sqrt{1 + U_1^2} \sqrt{1 + V_1^2}}{\sqrt{1 + U_1 V_1 + \sqrt{1 + U_1^2} \sqrt{1 + V_1^2}}}, \quad \frac{1 - U_1 V_1 + \sqrt{1 + U_1^2} \sqrt{1 + V_1^2}}{\sqrt{1 + U_1 V_1 + \sqrt{1 + U_1^2} \sqrt{1 + V_1^2}}}$$

et la variation de D , h donne bien ∞^2 surfaces possédant le mode de correspondance étudié; il est facile de voir que la variation de h remplace la surface par une surface homothétique. Si $h < 0$, on pose au contraire $u_1 = U_1 \sqrt{-h}$, $v_1 = V_1 \sqrt{-h}$ et l'on a un résultat tout semblable.

9. *Surfaces moulures.* — Nous avons vu que pour une surface moulure *générale*, on a

$$d\sigma^2 = \sin^2(v - U_1) du^2 + dv^2,$$

les courbes $u = \text{const.}$ de la sphère sont des grands cercles; on suppose U_1 non constant; sur chaque grand cercle v est l'arc compté à partir d'une trajectoire orthogonale, convenablement choisie, de cette famille de grands cercles; sur chacun d'eux marquons le point de paramètre $v = U_1(u)$: ce point engendre la courbe sphérique Γ enveloppe des grands cercles. Sur la surface S les courbes $u = \text{const.}$ sont des géodésiques G planes, et R' est le rayon de courbure au point (v) de cette géodésique; on a $\frac{\partial R'}{\partial u} = 0$ de sorte que R' ne dépend que de v ; les géodésiques planes sont toutes égales, car R' est toujours la même fonction de v , dont l'interprétation géométrique est l'angle de la tangente avec une droite fixe du plan de la courbe plane. Mais alors si nous prenons le nouveau $d\sigma^2$

$$\sin^2(v - U_1) \frac{du^2}{U} + dv^2,$$

puisque $V = 1$, tandis que U est arbitraire, nous trouvons sur la surface S_1 homologue de S la même loi de variation de R' en fonction du paramètre géométrique v , de sorte que le profil générateur est le même pour S_1 et S . D'autre part marquons dans chaque plan $u = \text{const.}$ la génératrice de contact avec la développable enveloppe Δ , pour S , ou avec la développable enveloppe Δ_1 , pour S_1 : pour u_0 fixé, cette droite occupe par rapport à la géodésique $G(u_0)$ la même situation sur S

et S_1 ; autrement dit si nous faisons rouler sans glissement non pas le plan de G sur Δ , mais Δ sur une position fixe de ce plan, et de même Δ_1 , nous avons la même *enveloppe* dans ce plan pour les positions successives des génératrices de Δ ou de Δ_1 ; cette enveloppe E a même longueur d'arc que l'arête de rebroussement A de Δ ou A_1 de Δ_1 , et même rayon de courbure. Autrement dit, la fonction arbitraire d'une variable qui s'introduit ici correspond à la *déformation au sens de Gauss* de la développable Δ en une autre développable Δ_1 , avec conservation des génératrices : on sait qu'il suffit de construire deux courbes gauches A et A_1 , telles qu'aux points de même arcs les rayons de courbure soient égaux : c'est la valeur du rayon de torsion qui est la fonction arbitraire; on fait ensuite rouler sans glissement un plan P sur la développable Δ d'arête A et l'on marque une courbe G sur P ; G entraînée dans le mouvement engendre S ; portons alors la développable Δ_1 sur la développable Δ de façon que les arêtes A, A_1 se touchent en un point homologue, avec même plan osculateur et considérons la position P_0 du plan P , relative à la génératrice commune; P roulant à partir de P_0 sur Δ_1 , la surface S_1 est engendrée par la courbe G .

On peut remplacer cette définition géométrique par une autre; par exemple S étant donnée, ce qui détermine Γ sur la sphère unité, se donner arbitrairement la courbe Γ_1 .

Pour une surface moulure de Monge, on trouve d'abord la transformation qui précède, dont la définition toutefois doit être un peu modifiée : si la surface n'est pas de révolution, on considère deux cylindres C, C' quelconques tangents le long d'une génératrice; on fait rouler sans glissement le plan tangent commun, P_0 , soit sur C , soit sur C' et un profil G tracé sur P_0 engendre les deux surfaces correspondantes. Si la surface S est de révolution, S_1 coïncide, dans son ensemble avec S ; un méridien, considéré comme appartenant à S , défini par son angle θ avec un méridien fixe, est remplacé par un méridien d'angle θ_1 où θ_1 est fonction arbitraire de θ ; les parallèles se conservent; cela tient à l'interprétation des formules

$$(1) \quad \begin{cases} d\sigma^2 = dv^2 + \sin^2 v \, du^2, & d\sigma_1^2 = dv^2 + \sin^2 v \, \frac{du^2}{U}, \\ & du_1 = \frac{du}{\sqrt{U}}. \end{cases}$$

Mais pour une surface moulure de Monge, on a une transformation plus générale, comme nous l'avons vu; on a, avec une constante C arbitraire,

$$(2) \quad d\sigma^2 = dv^2 + \sin^2 v \, du^2,$$

$$(3) \quad d\sigma_1^2 = \frac{dv^2}{1 + C(1 + \tan^2 v)} + \sin^2 v \frac{du^2}{U}.$$

Écrivons

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin v = \sqrt{C+1} \sin \alpha, \\ \cos v \, dv = \sqrt{C+1} \cos \alpha \, d\alpha, \\ \cos^2 v + C = (1+C) \cos^2 \alpha, \\ \frac{dv^2}{1 + C(1 + \tan^2 v)} = \frac{\cos^2 v \, dv^2}{\cos^2 v + C} = d\alpha^2, \end{array} \right.$$

on a

$$d\sigma_1^2 = d\alpha^2 + \frac{(C+1) \sin^2 \alpha \, d\alpha^2}{U}.$$

Voici comment on peut expliquer cette propriété, il suffit de raisonner sur une courbe plane G tracée dans le plan xOz ; soient M un point de cette courbe, N le point où la normale coupe Oz , et v l'angle (Nz, NM) qui est égal d'ailleurs à l'angle (Nx, MT) , MT étant la tangente en M ; on a aisément (en négligeant certaine difficulté de signe)

$$NM = \frac{x \sqrt{1 + z'^2}}{z'},$$

en appelant z' la dérivée $\frac{dz}{dx}$, d'autre part

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right) = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{MG},$$

G étant le centre de courbure de la courbe en M ; si l'on pose

$$\sin v = V = \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}},$$

la courbe G définit une relation entre NM et CM ; cette relation est de la forme

$$\frac{dV}{dx} = f\left(\frac{V}{x}\right);$$

cette relation considérée comme équation différentielle du premier

ordre en V et x a son intégrale générale obtenue immédiatement en remarquant que G donne une relation $\frac{V}{x} = \varphi(x)$; donc l'intégrale générale est $\frac{V}{x} = \varphi(Cx)$; l'équation différentielle $\frac{dV}{dx} = f\left(\frac{V}{x}\right)$, considérée comme équation différentielle du second ordre entre z et x s'intègre d'abord en écrivant l'intégrale intermédiaire $\frac{V}{x} = \varphi(Cx)$, puis faisant une quadrature qui donne z en x . Considérons une nouvelle courbe G_1 intégrale de $\frac{dV}{dx} = f\left(\frac{V}{x}\right)$; sur G et G_1 les points M et M_1 dont le rapport des abscisses x et x_1 est une constante convenablement choisie, donnent donc les mêmes valeurs à MN et MC , car

$$MN = \frac{x}{V}, \quad \frac{1}{MC} = f\left(\frac{V}{x}\right);$$

si l'on fait tourner G et G_1 autour de Oz elles donnent deux surfaces de révolution pour lesquelles la correspondance obtenue en faisant correspondre les parallèles de M et M_1 , puis les méridiens de S et S_1 suivant une loi arbitraire, satisfait aux conditions du problème. Le parallélisme de Peterson fait ensuite passer aux surfaces moulures.

10. *Généralisation du problème.* — Considérons une surface S rapportée à ses lignes de courbure (u, v) et soient e, g, R, R' les fonctions déjà étudiées. Soit une autre surface *quelconque* S_1 dont nous ferons correspondre les lignes de courbure d'un système aux lignes $u = \text{const.}$ de S suivant une loi quelconque; nous attribuerons le nom u à la ligne de S_1 homologue de la ligne de S ; faisons ensuite la même opération pour les lignes de courbure du second système de S_1 et les lignes $v = \text{const.}$ de S ; soient e_1, g_1, R_1, R'_1 les fonctions analogues pour S_1 à celles de même nom de S , calculées aux points u, v correspondants. On a entre R, R', R_1, R'_1 deux relations $R_1 = f(R, R')$, $R'_1 = \varphi(R, R')$ obtenues par élimination de u, v entre les équations donnant R, R', R_1, R'_1 en fonction de u, v .

Inversement, on peut donner *a priori* les relations $R_1 = f(R, R')$, $R'_1 = \varphi(R, R')$; on a, pour déterminer deux surfaces S, S_1 se correspondant avec conservation des lignes de courbure et les relations $R_1 = f, R'_1 = \varphi$ entre les rayons homologues, un système de huit équations

tions à huit inconnues $e, g, R, R', e_1, g_1, R_1, R'_1$, à savoir les trois équations utilisées dans ce travail entre e, g, R, R' et u, v , puis les trois équations analogues entre e_1, g_1, R_1, R'_1 ; puis les deux équations (en termes finis) entre R_1, R'_1, R, R' . On aura donc, en général, un couple et un seul S, S_1 (si $R_1 = R, R'_1 = R'$, en général le couple unique S, S_1 se réduit à S superposée avec elle-même).

Dans quel cas peut-on avoir deux couples distincts? S et S_1 étant le premier couple, S' et S'_1 le second, nous supposons que l'on n'a pas à la fois $S \equiv S'$ (sauf déplacement ou symétrie), $S_1 \equiv S'_1$; Supposons $S_1 \not\equiv S'_1$, sans examiner si S et S' sont ou non distinctes; quand R et R' reçoivent les mêmes valeurs, R_1 et R'_1 ont les mêmes valeurs sur S_1 et S'_1 ; donc S_1, S'_1 forment un couple de l'espèce étudiée dans les paragraphes qui précèdent.

Conclusion : partons d'un couple S et S_1 comme au début de ce paragraphe et ayant fait correspondre les lignes de courbure, calculons les fonctions f et φ ; si ni S , ni S_1 ne sont l'une des surfaces étudiées dans ce qui précède, on n'a que le couple (S, S_1) . Si S_1 est l'une des surfaces que nous avons obtenues, toutes les surfaces (à 1, 2 ou 3 paramètres) associées à S_1 constituent avec S l'un des couples que nous cherchons maintenant; si S est elle-même l'une des surfaces étudiées avant, on peut dans le couple (S, S_1) remplacer chaque surface par l'une des familles associées.

Ce sont les seuls cas possibles; le lecteur se rendra compte de la difficulté de déterminer les fonctions f, φ correspondant aux cas exceptionnels.

Citons un cas intéressant : supposons que nous voulions conserver les lignes de courbure, et les courbures totale et moyenne; il y a d'abord la solution $R_1 = R, R'_1 = R'$ étudiée avant; mais il y a l'autre solution $R_1 = R', R'_1 = R$ dont on connaît un couple solution, en général unique, à savoir une surface à courbure moyenne constante et celle qu'Ossian Bonnet a su lui faire correspondre, parmi toutes celles qui en sont déformées au sens de Gauss, avec égalité des rayons principaux (mais sans conservation des lignes de courbure, sauf pour l'une d'entre ces surfaces). Si la surface en question est de révolution, on aura de plus à envisager les surfaces à courbure totale moyenne qui sont moulures.

Au lieu de deux relations en termes finis entre R, R', R_1, R'_1 , on pourrait aussi considérer des relations au nombre de deux encore, mais faisant intervenir les dérivées de ces expressions en u, v . Les conclusions seraient analogues, tout au moins *grosso modo*.

11. *Lignes de courbure.* — Bornons-nous strictement aux surfaces qui se correspondent avec conservation des lignes de courbure et des rayons de courbure principaux.

Si l'on connaît un couple de deux surfaces associées S, S_1 , leurs lignes de courbure s'obtiennent sans intégration (exceptionnellement, si U est une constante, les lignes $u = \text{const.}$ échappent à cette propriété; de même si $V = \text{const.}$). Quels que soient les paramètres α, β employés sur la première surface S et les paramètres α_1, β_1 employés sur la seconde S_1 , on sait trouver les relations $f(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1) = 0$, $\varphi(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1) = 0$ qui réalisent la correspondance; les surfaces W méritent à ce titre une mention spéciale.

Ce dernier point est évident; car les rayons principaux R, R' sont des fonctions connues de α, β et, *sauf le cas des surfaces W* , la donnée de R et R' permet de calculer α, β sur S , α_1 et β_1 sur S_1 ; pour réaliser la correspondance, on prend donc arbitrairement α, β ; R et R' en résultent et par suite α_1, β_1 . Si S est surface W , S_1 est aussi surface W (relativement à la même relation entre R et R'); dans ce cas, on sait trouver par quadratures les lignes de courbure sur S et sur S_1 ; *mais, si S et S_1 ne sont pas surfaces W , il y a une correspondance déterminée (ou du moins un nombre fini) qui réalisent les conditions de notre problème; si S et S_1 sont surfaces W , il y a soit un nombre fini, soit ∞^1 correspondances de cette espèce.* Supposons pour fixer les idées que S et S_1 soient deux surfaces d'Enneper, *égales ou homothétiques*. Les rayons de courbure de la première sont, avec un choix convenable des paramètres u, v , égaux à $\pm(1 + u^2 + v^2)$, ceux de la seconde $\pm\lambda(1 + u_1^2 + v_1^2)$; il est clair que les ∞^1 correspondances

$$(1) \quad \lambda u_1^2 = u^2 + C, \quad \lambda (1 + v_1^2) = 1 + v^2 - C,$$

où C est une constante arbitraire, satisfont à toutes les conditions du problème (les ∞^3 surfaces correspondant à une surface minima d'Enneper donnent simplement ∞^1 formes de $d\sigma^2$; pour chaque forme

de $d\sigma^2$ on trouve ∞^1 surfaces minima homothétiques et chacune de ces ∞^1 surfaces donne ∞^1 correspondances). Quand deux surfaces W peuvent se correspondre suivant le mode indiqué, on détermine leurs lignes de courbure, (u, v) sur l'une, (u_1, v_1) sur l'autre et l'on écrit ensuite $R = R_1$, ce qui donne une relation $f(u, v) = f_1(u_1, v_1)$ qui admet soit ∞^1 solutions de la forme $u_1 = u_1(u)$, $v_1 = v_1(v)$, soit un nombre fini de telles solutions; s'il existe ∞^1 solutions, chacune des deux surfaces W en jeu admet évidemment ∞^1 transformations en elle-même de cette espèce. J'indique rapidement quelques résultats pour le cas où il existe ∞^1 correspondances: la relation $f = f_1$ n'est pas arbitraire; pour éviter toute difficulté, supposons que l'on résolve en u cette relation de façon à avoir $u = F(u_1, v, v_1)$; u restant constant, u_1 reste aussi constant, mais v varie, ainsi que v_1 ; cette fonction $v_1(v)$ vérifie donc l'équation différentielle $\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dv} = 0$, ce qui exige, u_1 pouvant recevoir une valeur *quelconque*, que le rapport $\frac{\partial F}{\partial v} : \frac{\partial F}{\partial v_1}$ soit indépendant de u_1 ; si $\varphi(v, v_1)$ est une intégrale première de l'équation $\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{dv_1}{dv} = 0$, comme F est une autre intégrale première, on a $F \equiv \Phi[\varphi, u_1]$ et l'équation $f(u, v) = f_1(u_1, v_1)$ prend donc la forme $u = \Phi[\varphi, u_1]$, équation qui, résolue en φ , donne $\varphi(v, v_1) = \psi(u, u_1)$; les ∞^1 correspondances s'obtiennent donc en posant $\psi(v, v_1) = C$, $\psi(u, u_1) = C$. *On voit donc que, parmi les surfaces W , celles qui sont ∞^1 fois solution de notre problème conduisent à une relation entre quatre variables, susceptible de deux formes différentes à variables séparées*

$$(2) \quad f(u, v) = f_1(u_1, v_1), \quad \psi(u, u_1) = \varphi(v, v_1).$$

Je n'insisterai pas ici sur le problème d'analyse pure qui se trouve ainsi posé; je me borne à signaler que toute relation de la forme $UVU_1V_1 = 1$ (ou, en prenant les logarithmes, $U + V + U_1 + V_1 = 0$) est susceptible de *trois façons différentes* d'être mise sous la forme (2) en laissant deux variables seules dans un membre et les deux autres dans l'autre membre.

Écartant donc le cas d'une surface W , nous avons deux surfaces

S, S_1 qui sont mises en correspondance ponctuelle, obtenue par simples différentiations et éliminations; les deux surfaces peuvent donc être supposées rapportées à un couple de paramètres α, β tels que la correspondance soit réalisée par les points de même α et β ; on trouve sans peine, par simples différentiations et éliminations, les fonctions U, V .

En effet, si nous considérons les trois formes fondamentales

$$F = S dx^2, \quad \Phi = S dc dx, \quad \psi = S dc^2$$

de la surface S et les formes F_1, Φ_1, ψ_1 de S_1 , nous avons (en supposant que les formules d'Olinde Rodrigues soient écrites $dx \equiv R dc$, $dx = R' dc$)

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi = e^2 du^2 + g^2 dv^2, & \Psi_1 = \frac{e^2}{U} du^2 + \frac{g^2}{V} dv^2, \\ \Phi = e^2 R du^2 + g^2 R' dv^2, & \Phi_1 = \frac{e^2 R}{U} du^2 + \frac{g^2 R'}{V} dv^2, \\ F = e^2 R^2 du^2 + g^2 R'^2 dv^2, & F_1 = \frac{e^2 R^2}{U} du^2 + \frac{g^2 R'^2}{V} dv^2, \end{cases}$$

et l'on obtient immédiatement

$$(4) \quad \frac{F - R'\Phi}{F_1 - R'\Phi_1} = U, \quad \frac{F - R\Phi}{F_1 - R\Phi_1} = V;$$

le calcul du premier membre est possible avec des paramètres quelconques; si donc U n'est pas une constante, l'équation $U = \text{const.}$ donne, en faisant varier la constante, successivement toutes les lignes de courbure du premier système, *obtenues en termes finis*.

La question est un peu plus ardue si l'on ne connaît qu'une surface S dont on sait qu'elle admet une transformation du type étudié ici. Inutile de parler des surfaces dont les lignes de courbure ont pour images sphériques des coniques sphériques homofocales ou deux faisceaux de cercles orthogonaux, pour lesquelles les lignes de courbure s'obtiennent aussitôt. Nous allons écrire, en coordonnées paramétriques quelconques α, β , les équations E_1, E_2 du paragraphe 2. Nous formons les équations différentielles des lignes de courbure

$$A_1 d\alpha + B_1 d\beta = 0 \quad \text{et} \quad A_2 d\alpha + B_2 d\beta = 0,$$

de sorte que l'on a

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \lambda du = A_1 dz + B_1 d\beta, \quad \mu dv = A_2 dz + B_2 d\beta; \\ dz = \frac{\lambda B_2 du - \mu B_1 dv}{A_1 B_2 - B_1 A_2}, \quad d\beta = \frac{-\lambda A_2 du + \mu A_1 dv}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \\ \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\lambda}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left(B_2 \frac{\partial}{\partial z} - A_2 \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\mu}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left(-B_1 \frac{\partial}{\partial z} + A_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \right), \end{array} \right.$$

où A_1, B_1, A_2, B_2 sont des fonctions connues, où λ et μ sont des fonctions intégrales des équations

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \lambda \left(\frac{\partial A_1}{\partial \beta} - \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) - \left(A_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} - B_1 \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = 0, \\ \mu \left(\frac{\partial A_2}{\partial \beta} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) - \left(A_2 \frac{\partial \mu}{\partial \beta} - B_2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Nous écrirons

$$(7) \quad dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = e^2 dz^2 + 2f dz d\beta + g^2 d\beta^2 = e_1^2 du^2 + g_1^2 dv^2$$

(en appelant e_1, g_1 les quantités qui, au paragraphe 2, sont appelées e, g).

En vertu de la dernière équation (5), nous avons

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1^2 = S \left(\frac{\partial c}{\partial u} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2} [B_2^2 e^2 + A_2^2 g^2 - 2A_2 B_2 f], \\ e_1 = \lambda L_2, \quad g_1 = \mu L_1, \end{array} \right.$$

où L_2, L_1 sont certaines fonctions de α, β parfaitement connues, obtenues par simples différentiations, éliminations et calculs algébriques. On a aussi

$$\begin{aligned} \frac{1}{e_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} &= \frac{1}{\lambda L_2} \frac{\lambda}{(A_1 B_2 - A_2 B_1)} \left[\mu \left(B_2 \frac{\partial L_1}{\partial z} - A_2 \frac{\partial L_1}{\partial \beta} \right) + L_1 \left(B_2 \frac{\partial \mu}{\partial z} - A_2 \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1)} \left[\mu \left(B_2 \frac{\partial L_1}{\partial z} - A_2 \frac{\partial L_1}{\partial \beta} \right) - L_1 \mu \left(\frac{\partial A_2}{\partial \beta} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\mu \left[\frac{\partial}{\partial z} (B_2 L_1) - \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 L_1) \right]}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \mu M_1. \end{aligned}$$

Les formules ainsi obtenues

$$(9) \quad \frac{1}{e_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} = \mu M_1, \quad \frac{1}{g_1} \frac{\partial e_1}{\partial v} = \lambda M_2$$

nous montrent que, dans le cas des surfaces moulures ($\frac{\partial g_1}{\partial u} = 0$ ou $\frac{\partial e_1}{\partial v} = 0$), les lignes de courbure, trajectoires orthogonales, des géodésiques planes, s'obtiennent par une quadrature de différentielle totale, conformément à un théorème général. On a ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} (\mu M_1) \\ &= \frac{\lambda}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[\mu \left(B_2 \frac{\partial M_1}{\partial z} - A_2 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{z}} \right) + M_1 \left(B_2 \frac{\partial \mu}{\partial z} - A_2 \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}} \right) \right] \\ &= \frac{\lambda \mu}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[\frac{\partial}{\partial z} (B_2 M_1) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (A_2 M_1) \right]; \\ (10) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{e_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} \right) &= \lambda \mu N_1, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{g_1} \frac{\partial e_1}{\partial v} \right) = \lambda \mu N_2. \end{aligned}$$

En passant, nous voyons que l'équation $\frac{1}{e_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} =$ fonction de v (ou plus simplement $\frac{1}{e_1} \frac{\partial g_1}{\partial u} = 1$, par un changement de variable approprié sur v) donne encore un facteur intégrant de l'équation des lignes de courbure $v = \text{const.}$

L'équation (E₁) s'écrit donc

$$(11) \quad N_1 + N_2 + L_1 L_2 = 0.$$

Puis l'équation (E₂) (qui est bien plus intéressante pour nous) s'écrit

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{M_1}{2} \left[B_2 \frac{\partial U}{\partial z} - A_2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right] + (U - 1) \left[\frac{\partial}{\partial z} (B_2 M_1) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (A_2 M_1) \right] \\ + \frac{M_2}{2} \left[-B_1 \frac{\partial V}{\partial z} + A_1 \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right] + (V - 1) \left[-\frac{\partial}{\partial z} (B_1 M_2) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (A_1 M_2) \right] = 0. \end{aligned}$$

Nous adjoignons à l'équation (12) les deux équations

$$(13) \quad -B_1 \frac{\partial U}{\partial z} + A_1 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = 0, \quad -B_2 \frac{\partial V}{\partial z} + A_2 \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Nous avons constaté aussi que, si l'on effectue un changement de variable $u_1 = u_1(u)$, $v_1 = v_1(v)$, les quantités U, V sont inchangées; de la sorte, les surfaces S qui admettent simplement ∞^1 surfaces associées fournissent trois équations, à savoir (12), (13), pour deux fonctions inconnues U et V , équations compatibles et le raisonnement déjà fait, raisonnement qui consiste à appliquer au système (12), (13) les méthodes classiques, établit que le rapport $\frac{U-1}{V-1}$ s'obtient par différentiations et éliminations. Écrivons

$$(14) \quad L(U-1) - L(V-1) = F(\alpha, \beta),$$

où F est une fonction connue; on a donc la dernière formule (5)

$$(15) \quad \frac{1}{(U-1)} \frac{dU}{du} = \left(B_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha} - A_2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) \frac{1}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

$$\frac{dU}{U-1} = \frac{B_2 \frac{\partial F}{\partial \alpha} - A_2 \frac{\partial F}{\partial \beta}}{A_1 B_2 - A_2 B_1} (A_1 d\alpha + B_1 d\beta).$$

Donc, si U n'est pas une constante, on a trouvé un facteur intégrant de l'équation $A_1 d\alpha + B_1 d\beta = 0$; si U est une constante, $F = \text{const.}$ est une intégrale première de l'équation $A_2 d\alpha + B_2 d\beta = 0$, comme cela résulte soit de l'équation (14), soit de l'équation (15). *Donc (sauf certains cas défavorables) une quadrature de différentielle totale livre les lignes de courbure de toute surface admettant ∞^1 transformées.* Il n'y a pas contradiction avec ce résultat, établi plus haut, que, *si les lignes de courbure sont obtenues*, U et V se calculent sans quadrature; cela tient à ce que la quadrature fournissant soit U (quadrature 15), soit les lignes de courbure, est la même et que faire l'une revient à avoir fait l'autre.