ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES BOURION

Recherches sur l'ultraconvergence

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 50 (1933), p. 245-318
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__245_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

RECHERCHES SUR L'ULTRACONVERGENCE

PAR M. GEORGES BOURION

Introduction.

Étant donnée une série de fonctions analytiques qui converge uniformément dans un domaine D et y définit une fonction analytique $f(x)$, il peut arriver qu'une suite de sommes partielles de cette série converge uniformément dans un domaine plus étendu; on obtient alors une représentation de $f(x)$ *meilleure* que celle d'où l'on est parti, en ce sens qu'elle reste valable dans des régions où la série diverge. C'est le phénomène de l'ultraconvergence.

Les premiers exemples sont, à ma connaissance, ceux qu'a indiqués Porter dans une Note relative aux séries de Taylor [1]. Porter remarqua les rapports entre l'étude de l'ultraconvergence des suites partielles de polynomes-sections d'une série de Taylor et celle de la répartition des zéros des polynomes-sections. R. Jentzsch, dans sa Thèse inaugurale, montra que les zéros des polynomes-sections s'accumulent autour de tout point de la circonférence du cercle de convergence ; il montra également que ce théorème peut être en défaut pour une suite partielle de polynomes-sections, et forma des exemples d'ultraconvergence par une méthode complètement différente de celle de Porter dont il ignorait la Note citée plus haut. M. A. Ostrowski établit que, si une série de Taylor à rayon de convergence fini présente des lacunes de largeur relative bornée inférieurement, les polynomes-sections terminés aux

---

(1) Voir la Bibliographie à la fin de l'Introduction.

lacunes convergent uniformément autour de tout point de la circonférence du cercle de convergence où la fonction définie par la série est régulière; il prouva ensuite que toute série de Taylor dont une suite partielle de polynomes-sections est ultraconvergente est de cette forme, à une série de rayon de convergence plus grand près. Il signala d'autre part ce fait très intéressant que, si la largeur relative des lacunes augmente indéfiniment, les polynomes-sections arrêtés aux lacunes convergent vers la fonction *dans tout son domaine d'existence*. Reprenant l'étude des zéros des polynomes-sections, il montra que le théorème de Jentzsch reste vrai pour toute suite partielle de polynomes-sections, sauf pour des séries ayant la structure « lacunaire » indiquée plus haut. Enfin, il a établi dans un Mémoire plus récent [7] que le domaine d'ultraconvergence peut être *absolument quelconque* avec les restrictions évidentes d'être simplement connexe et de ne point renfermer le point à l'infini.

A peu près à l'époque où Jentzsch retrouvait les phénomènes d'ultraconvergence dans les séries de Taylor, M. Harald Bohr, dans un article consacré à la généralisation du théorème de Schnee, formait une série de Dirichlet à abscisse de convergence finie pour laquelle une suite de sommes partielles converge uniformément dans tout le plan. M. V. Bernstein, dans sa Thèse et dans des travaux ultérieurs, a signalé l'intérêt de l'ultraconvergence dans les séries de Dirichlet : la fonction définie par la série peut être holomorphe dans un demi-plan qui contient le demi-plan de convergence ; pour une classe très étendue de séries — celles dont la suite des exposants a une densité maximum finie — il existe une suite de sommes partielles qui représente la fonction dans tout le demi-plan d'holomorphie, de manière tout aussi commode que la série elle-même à l'intérieur de son demi-plan de convergence.

Dans la première partie de ce travail, j'étudie les séries de Taylor pour lesquelles une suite partielle de polynomes-sections admet, à l'extérieur du cercle de convergence, une majoration meilleure que celle qui est valable dans le cas général, et je montre que cette propriété caractérise les séries qui ont une structure « lacunaire » au sens indiqué précédemment. Ce théorème contient celui de M. Ostrowski sur les séries qui ont des suites partielles ultraconvergentes. Étudiant les domaines de convergence, extérieurs au cercle de convergence de

la série, d'une suite partielle de polynomes-sections, je montre, en étendant un résultat de Jentzsch, qu'ils peuvent être pris complètement arbitraires ainsi que les fonctions limites. J'aborde ensuite l'étude des relations entre les domaines d'ultraconvergence des différentes suites partielles, puis celle des relations entre les domaines de convergence d'une suite partielle et la loi de croissance des degrés des polynomes-sections qui constituent cette suite. J'établis ensuite la *continuité* de la structure lacunaire par rapport au point autour duquel on fait le développement en série de Taylor. Enfin, je montre comment la possibilité d'appliquer à une série de Taylor certaines méthodes de sommation est liée à la structure lacunaire de cette série.

Dans la seconde partie, je donne des résultats généraux sur l'ultraconvergence pour une classe très importante de séries de fonctions analytiques. J'étends ces résultats aux séries de Dirichlet : l'ultraconvergence, si elle se présente, n'est pas un phénomène *local*, mais permet de sortir du demi-plan de convergence par tout segment de la droite de convergence sur lequel la fonction limite est régulière.

La plus grande partie des résultats contenus dans ce travail ont été publiés dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences (1).

M. Montel a bien voulu s'intéresser à mes recherches et ses encouragements m'ont été très précieux ; je suis heureux de lui exprimer ici ma très vive gratitude.

Bibliographie.

BERNSTEIN (V.). — [1] Sur les singularités des séries de Dirichlet (Thèse) *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, vol. **63**, 1930, p. 321-413.

[2] Sui punti singolari situati sulla retta di olomorfia di certe serie di Dirichlet, même Revue, vol. **64**, 1931.

[3] Sur l'ultraconvergence de certaines séries de Dirichlet, *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 6e série, vol. **12**, 1930, p. 91-95.

[4] Sopra l'ultraconvergenza di certe serie di Dirichlet. *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 6e série, vol. **14**, 1931, p. 475-479.

(1) *Sur une classe de séries de Taylor*, t. 195, 1932, p. 938 ; *L'ultraconvergence dans certaines séries de fonctions analytiques*, t. 195, 1932, p. 1216 ; *Sur une classe de séries de Taylor*, t. 196, 1933, p. 889.

[5] Sur l'ultraconvergence d'une classe de séries de Dirichlet, *Commentarii mathematici helvetici*, vol. 4, 1932, p. 21-50.

BOHR (H.). — [1] Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen, *Rendiconti di Palermo*, **37**, 1914, p. 1-16.

JENTZSCH (R.). — [1] Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, *Acta mathematica*, **41**, 1918, p. 219-251.

[2] Fortgesetzte Untersuchungen über die Abschnitte von Potenzreihen, *Acta mathematica*, **41**, 1918, p. 253-270.

LÖSCH (F.). — [1] Ein neuer Beweis des Ostrowskischen Ueberkonvergenzsatzes, *Math. Zeitschrift*, **31**, 1930, p. 138-140.

[2] Lückensätze und Ueberkonvergenz bei zweifachen Potenzreihen, *Math. Zeitschrift*, **36**, 1932, p. 202-262.

OSTROWSKI (A.). — [1] Ueber eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten, *Sitzungsberichte der Preuss. Akad.*, 1921, p. 557-565.

[2] Ueber vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, *Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität*, **1**, 1923, p. 327-350.

[3] Ueber Potenzreihen, die überkonvergente Abschnittsfolgen besitzen, *Sitzungsberichte der Preuss. Akad.*, 1923, p. 185-192.

[4] Ueber allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie, *Jahresberichte der D. M.-V.*, **32**, 1923, p. 185-194.

[5] Ueber die Darstellung analytischer Funktionen durch Potenzreihen, *Jahresber. d. D. M.-V.*, **33**, 1924, p. 286-295.

[6] On representation of analytical functions by power series, *Journal of the London math. Soc.*, vol. 1, 1926, p. 251-263.

[7] Zur Theorie der Ueberkonvergenz, *Math. Ann.*, **103**, 1930, p. 15-27.

PORTER (M.-B.). — [1] On the polynomial convergents of a power series, *Ann. of Math.*, (2), **8**, 1906, p. 189-192.

SZEGÖ (G.). — [1] Tschebyscheffsche Polynome und nicht-fortsetzbare Potenzreihen, *Math. Ann.*, **87**, 1922, p. 90-111.

PREMIÈRE PARTIE.

LES SUITES PARTIELLES DE POLYNOMES-SECTIONS D'UNE SÉRIE DE TAYLOR.

A. — Le théorème fondamental.

1. *Notations.* — $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ désigne une série de Taylor dont le rayon de convergence est égal à *un*; $f(x)$ est la fonction analytique définie

par la série dans son cercle de convergence, $\mathcal{E}$ est le domaine d'existence de $f(x)$. $s_n(x)$ est le polynome-section $\sum_0^n a_\nu x^\nu$; je pose

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x), \qquad r_{n,p}(x) = s_{n+p}(x) - s_n(x);$$

r_n est donc défini dans $\mathcal{E}$, $r_{n,p}$ dans tout le plan. $|x|$ est désigné par ρ.

Enfin, il sera commode d'utiliser la notation suivante : toute quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{n_k}\right)$, dans le domaine ou sur la ligne que l'on considère, *uniformément par rapport à x* à l'intérieur de ce domaine ou sur cette ligne, sera représentée par $\varepsilon_n(x)$ [ou $\varepsilon_{n_k}(x)$]. *Ce symbole s'emploiera donc de la même façon que le symbole classique $o(f)$*; la somme de deux $\varepsilon_n(x)$ ou le produit d'un $\varepsilon_n(x)$ par une constante est encore un $\varepsilon_n(x)$.

Les formules sont numérotées par paragraphe; le renvoi à une formule d'un paragraphe antérieur est fait de la manière suivante : la formule (3) du paragraphe 5 est désignée par (5.3).

Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie donnée à la fin de l'introduction.

2. *Majoration pour les polynomes-sections.* — Nous allons majorer $\frac{1}{n}\log|s_n(x)|$. Soit $\delta > 1$, arbitrairement voisin de 1; d'après l'inégalité classique de Cauchy-Hadamard,

$$\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} = 1, \tag{1}$$

nous avons $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \delta$ pour n assez grand : $n > n(\delta)$; d'autre part, (1) entraîne l'existence d'un nombre $K \geqq 1$ tel que $|a_n|^{\frac{1}{n}} < K$ quel que soit n; on a par suite, pour $n > n(\delta)$,

$$|s_n(x)| \leqq \sum_0^n |a_\nu|\rho^\nu < \sum_0^{n(\delta)} K^\nu \rho^\nu + \sum_0^n \delta^\nu \rho^\nu,$$

$$|s_n(x)| < \frac{[K\rho]^{n(\delta)+1}}{K\rho - 1} + (\delta\rho)^n \frac{\delta\rho}{\delta\rho - 1}.$$

Supposons que x reste dans un domaine borné extérieur au cercle-

unité : $1 \leqq \rho < M$; on déduit de l'inégalité précédente

$$|s_n(x)| < (\delta\rho)^n \left[\frac{\delta\rho}{\delta\rho - 1} + \frac{1}{(\delta\rho)^n} \frac{[K\rho]^{n\delta+1}}{K\rho - 1} \right],$$

d'où, comme le second facteur reste borné ($< e^h$),

$$(2) \qquad \frac{1}{n} \log |s_n(x)| < \log\rho + \log\delta + \frac{h}{n},$$

inégalité valable pour $n > n(\delta)$, $\rho \geqq 1$ et borné, et même valable pour $\rho \geqq \delta'$ pourvu que $\delta\delta' > 1$.

δ peut être pris arbitrairement voisin de 1, si l'on n'envisage que les valeurs de n supérieures au $n(\delta)$ correspondant; nous pouvons donc mettre l'inégalité obtenue sous la forme

$$(3) \qquad \frac{1}{n} \log |s_n(x)| < \log\rho + \varepsilon_n(x),$$

valable dans la région $\rho \geqq 1$.

3. *Majorations pour les restes.* — 1° A l'intérieur du cercle de convergence :

Soit encore $\delta > 1$, arbitrairement voisin de 1; on a $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < \delta$ pour $\nu > n(\delta)$; donc, si $\eta\delta < 1$ on a, dans $\rho < \eta$, pour $n > n(\delta)$,

$$|r_n(x)| < \sum_{n+1}^{\infty} |a_\nu| \rho^\nu < \sum_{n+1}^{\infty} (\delta\rho)^\nu = (\delta\rho)^n \frac{\delta\rho}{1 - \delta\rho},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{1}{n} \log |r_n(x)| < \log\rho + \log\delta + \frac{h}{n},$$

où h est une constante.

La même majoration vaut *a fortiori* pour $\frac{1}{n} \log |r_{n,p}|$.

2° Dans un domaine Δ borné, complètement intérieur au domaine de régularité $\mathcal{E}$ de $f(x)$ et *extérieur* à $\rho < \delta'$:

On a, dans Δ, $|f(x)| < M$; or

$$r_n = f - s_n,$$
$$|r_n| \leqq |f| + |s_n| \leqq 2 \max[M, |s_n(x)|];$$

on a donc pour $\frac{1}{n}\log|r_n|$ une inégalité de même forme que (2.2),

$$\frac{1}{n}\log|r_n(x)| < \log\rho + \log\delta + \frac{h'}{n}, \tag{2}$$

valable pour $\delta > 1$ et tel que $\delta\delta' > 1$, $n > n(\delta)$.

3° Dans un domaine Δ', qui n'a pas besoin d'être intérieur au domaine de régularité, mais qu'on suppose borné et extérieur à $\rho < \delta'$, on a de même

$$\frac{1}{n+p}\log|r_{n,p}(x)| < \log\rho + \log\delta + \frac{h}{n+p}. \tag{3}$$

4° Dans tout domaine borné complètement intérieur à $\mathcal{E}$:

Il suffit d'envisager le cas où ce domaine est coupé par le cercle de convergence; on prend alors dans la formule (1), $\delta = \sqrt{\lambda}$, dans la formule (2), $\delta = \lambda (> 1)$, et l'on choisit η compris entre $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $\eta' = \eta$; alors, dans la partie du domaine comprise dans $\rho < \eta$, on a

$$\frac{1}{n}\log|r_n(x)| < \log\rho + \frac{1}{2}\log\lambda + \frac{h}{n} \qquad \text{pour } n > n(\sqrt{\lambda});$$

dans la partie extérieure à $\rho < \eta$,

$$\frac{1}{n}\log|r_n(x)| < \log\rho + \log\lambda + \frac{h'}{n} \qquad \text{pour } n > n(\lambda);$$

donc, dans le domaine entier,

$$\frac{1}{n}\log|r_n(x)| < \log\rho + \log\lambda + \frac{h''}{n}, \tag{4}$$

valable pour $n > n(\sqrt{\lambda})$, λ étant > 1 mais arbitrairement voisin de 1.

Ce résultat peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{n}\log|r_n(x)| < \log\rho + \varepsilon_n(x), \tag{5}$$

valable dans tout le domaine de régularité.

4. Supposons maintenant que $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ soit la somme d'une série

lacunaire $\sum_0^\infty a_\nu^\star x^\nu$, présentant des lacunes de largeur relative bornée inférieurement, et d'une série à rayon de convergence plus grand :

$$a_\nu = a_\nu^\star + a_\nu^{\star\star}, \qquad \overline{\lim}\,|a_\nu^\star|^{\frac{1}{\nu}} = 1,$$

$$\overline{\lim}\,|a_\nu^{\star\star}|^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{R}, \qquad R > 1,$$

$$a_\nu^\star = 0 \qquad \text{pour } m_k < \nu \leqq n_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\frac{n_k}{m_k} > \frac{1}{\theta} > 1.$$

Quand, dans la suite, nous emploierons l'expression de *série à structure lacunaire*, elle désignera toujours une série pouvant être décomposée de cette manière.

L'inégalité (2.3) *peut alors être améliorée pour la suite partielle* $\{s_{n_k}\}$. En effet, si nous posons

$$s_n^\star(x) = \sum_0^n a_\nu^\star x^\nu, \qquad s_n^{\star\star}(x) = \sum_0^n a_\nu^{\star\star} x^\nu,$$

nous avons

$$s_{n_k} = s_{n_k}^\star + s_{n_k}^{\star\star};$$

or

$$s_{n_k}^\star = s^\star{}_k,$$

d'où, comme

$$\frac{1}{m_k}\log|s_{m_k}^\star| < \log\rho + \varepsilon_{m_k}(x),$$

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}^\star| < \frac{m_k}{n_k}[\log\rho + \varepsilon_{m_k}(x)],$$

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}^\star| < \theta_k \log\rho + \varepsilon_{n_k}(x),$$

en désignant par θ_k le rapport $\frac{m_k}{n_k}$.

D'autre part, $s_{n_k}^{\star\star}$ reste borné pour $\rho < R_1 < R$; nous avons donc, pour $1 \leqq \rho < R_1$, une inégalité de la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}| < \theta_k \log\rho + \varepsilon_{n_k}(x).$$

et par suite

$$(2) \qquad \frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}| < \theta \log\rho + \varepsilon_{n_k}(x),$$

où θ est inférieur à 1.

Notons également que l'inégalité (1) peut, en utilisant pour $s^*_{m_k}$ la majoration (2.1), être mise sous la forme suivante :

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}| < \theta_k \log[\delta\rho] + \frac{h}{m_k} \qquad \text{pour } n_k > N(\delta)$$

(δ supérieur à 1, mais arbitrairement voisin de 1).

5. Nous allons montrer que, réciproquement, *toute série de Taylor pour laquelle l'inégalité* (2.3) *peut être améliorée est une série à structure lacunaire.*

Supposons donc que l'on ait, dans un domaine $\mathcal{D}$ extérieur au cercle de convergence,

$$(1) \qquad \frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < U(x) + \varepsilon_{n_k}(x),$$

$U(x)$ étant une fonction continue inférieure à $\log\rho$ dans $\mathcal{D}$, et $\varepsilon_{n_k}(x)$ tendant uniformément vers zéro dans $\mathcal{D}$ (*voir* § 1) (¹).

Traçons une circonférence $\Gamma : \rho = R$, dont un arc mn soit intérieur à $\mathcal{D}$ (les points m et n étant eux-mêmes intérieurs à $\mathcal{D}$) (*fig.* 1); $\log\rho - U(x)$ a sur mn un minimum positif h.

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| - \log\rho$$

est donc majoré par $-h + \varepsilon_{n_k}(x)$ sur mn, et par un $\varepsilon_{n_k}(x)$ sur le reste de Γ et sur le cercle-unité.

Considérons la fonction harmonique, régulière dans la couronne $1 < \rho < R$, qui prend la valeur h sur mn, la valeur zéro sur le reste du contour de cette couronne. Sur une circonférence Γ' intérieure à la

(¹) Il serait aussi général d'écrire : $\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}| < U(x)$ à partir d'une certaine valeur de k; mais l'inégalité (1) est d'un emploi plus commode.

couronne : $\rho = c$, $1 < c < R$, cette fonction a un minimum positif $3 \log r$, r étant un nombre supérieur à 1. La fonction harmonique $\log |s_{n_k}(x)|$

Fig. 1.

n'ayant dans la couronne aucune autre singularité que des infinis *négatifs*, nous avons sur Γ',

$$\frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}| < \log \rho - 3 \log r + \varepsilon_{n_k}(x)$$

et par suite, pour k suffisamment grand,

$$\frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}| < \log \frac{c}{r^2}.$$

Pour le coefficient $a_n (n \leqq n_k)$, nous avons la majoration classique de Cauchy,

$$|a_n| \leqq c^{-n} \max_{\rho = c} |s_{n_k}|.$$

De l'inégalité obtenue pour s_{n_k} résulte

$$\frac{1}{n} \log |a_n| \leqq -\log c + \frac{n_k}{n} \log \frac{c}{r^2}$$

et le second membre est négatif si

$$\frac{n_k}{n} < \frac{\log c}{\log \frac{c}{r^2}} \quad (^1).$$

---

(1) Il n'est pas possible que $\log \frac{c}{r^2}$ soit négatif, car on aurait alors quel que soit n $\frac{1}{n} \log |a_n| \leqq -\log c < 0$, en contradiction avec $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.

Si nous prenons

$$\frac{n_k}{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{\log c}{\log \frac{c}{r^2}} + 1\right),$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \frac{\log \frac{c}{r^2}}{\log \frac{c}{r}} n_k < n < n_k,$$

nous aurons

$$(3) \qquad \frac{1}{n} \log |a_n| < \log \frac{1}{r} < 0.$$

Les termes de $\Sigma a_n x^n$ pour lesquels n vérifie l'inégalité (2) pour une valeur au moins de k forment donc une série à rayon de convergence supérieur à 1. Autrement dit, nous pouvons, en retranchant de la série donnée une série à rayon de convergence plus grand, faire apparaître des lacunes *à la fin des* s_{n_k}.

6. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ soit *intérieur au domaine d'existence* $\mathcal{E}$ *de* $f(x)$. On peut le supposer borné et complètement intérieur à $\mathcal{E}$. $|f(x)|$ est alors borné dans $\mathcal{D}$, et l'inégalité (5.1) est équivalente à

$$(1) \qquad \frac{1}{n_k} \log |r_{n_k}| < \mathrm{U}(x) + \varepsilon_{n_k}(x).$$

Considérons alors une courbe de Jordan $\mathcal{L}$, fermée, sans point double, complètement intérieure à $\mathcal{E}$, pénétrant dans $\mathcal{D}$ et entourant l'origine; nous la supposerons choisie de telle sorte que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet pour l'intérieur de $\mathcal{L}$, et nous introduirons la fonction harmonique $l(x)$ qui a les propriétés suivantes : $l(x)$ est égale à $\mathrm{U}(x)$ en tout point de $\mathcal{L}$ intérieur à $\mathcal{D}$, et à $\log \rho$ en tout autre point de $\mathcal{L}$; $l(x) - \log \rho$ reste régulière à l'origine. Des inégalités (3.5) et (1) valables, la première dans $\mathcal{E}$ tout entier, la seconde dans $\mathcal{D}$, résulte

$$\frac{1}{n_k} \log |r_{n_k}| < l(x) + \varepsilon_{n_k}(x)$$

à l'intérieur de $\mathcal{L}$.

Considérons une circonférence $(\gamma) : \rho = c$, intérieure à $\mathcal{L}$ (donc

$c < 1$); $\log\rho - l(x)$ étant positif à l'intérieur de $\mathcal{L}$ (puisque $\log\rho > U(x)$ dans $\mathcal{D}$) est supérieur sur (γ) à une constante positive $3\log r$ $(r > 1)$;

Fig. 2.

on a donc sur (γ), pour n_k assez grand,

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}| < \log\rho - 2\log r = \log\frac{c}{r^2}.$$

Or, pour un coefficient a_n pour lequel n surpasse n_k, nous avons la majoration

$$|a_n| \leqq c^{-n}\max_{\rho=c}|r_{n_k}|$$

ou

$$\frac{1}{n}\log|a_n| \leqq -\log c + \frac{1}{n}\log\max_{\rho=c}|r_{n_k}|$$

ou encore, d'après l'inégalité précédente,

$$\frac{1}{n}\log|a_n| < -\log c + \frac{n_k}{n}\log\frac{c}{r^2};$$

le second membre sera négatif si

$$\frac{n_k}{n} > \frac{\log c}{\log\frac{c}{r^2}}$$

$\left(c \text{ et } a\ fortiori\ \frac{c}{r^2} \text{ est } < 1\right)$.

Si nous prenons

$$\frac{n_k}{n} > \frac{1}{2}\left[\frac{\log c}{\log\frac{c}{r^2}} + 1\right],$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \frac{\log\frac{c}{r^2}}{\log\frac{c}{r}}\,n_k > n\,(> n_k),$$

nous aurons

$$(3)\qquad \frac{1}{n}\log|a_n| < \log\frac{1}{r} < 0.$$

On peut donc de plus, dans ce cas, faire apparaître des lacunes *au début des restes* r_{n_k}.

7. *Le théorème fondamental.* — Interprétons de manière plus précise les résultats des deux paragraphes précédents, résumés par les deux couples de formules (5.2) et (5.3), (6.2) et (6.3) :

Si pour une suite partielle $\{s_{n_k}\}$ *de polynomes-sections, on a dans un domaine* $\mathcal{D}$ *extérieur au cercle de convergence l'inégalité*

$$(1)\qquad \frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < \mathrm{U}(x) + \varepsilon_{n_k}(x),$$

où $\mathrm{U}(x)$ *est une fonction continue inférieure à* $\log\rho$ *dans* $\mathcal{D}$: *on peut indiquer deux nombres* λ *et* r, $\lambda < 1$, $r > 1$, NE DÉPENDANT QUE DE $\mathcal{D}$ ET DE LA FONCTION $\mathrm{U}(x)$, *de telle sorte que les termes* $a_n x^n$ *de la série donnée pour lesquels* n *appartient à l'un des intervalles* $\lambda n_k < n \leqq n_k$ *forment une série dont le rayon de convergence est au moins* r.

Si de plus $\mathcal{D}$ *est intérieur au domaine d'existence* $\mathcal{E}$ *de* $f(x)$, *on peut indiquer* $\lambda < 1 < \lambda'$, $r > 1$, *ne dépendant que de* $\mathcal{D}$ *et de* $\mathrm{U}(x)$, *tels que les termes de la série donnée pour lesquels* n *appartient à l'un des intervalles* $\lambda n_k < n < \lambda' n_k$ *forment une série dont le rayon de convergence est au moins* r [1].

8. Revenons sur la démonstration de la seconde partie du théorème précédent; nous allons la modifier de façon à éviter l'emploi de la courbe $\mathcal{L}$. Donnons-nous le cercle (γ) : $\rho = c$, $c < 1$; traçons une suite

[1] On observera que dans ce cas, la suite $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente, d'après le premier théorème de M. Ostrowski énoncé plus loin (§ 9); le domaine d'ultraconvergence ne s'étend pas nécessairement jusqu'au domaine $\mathcal{D}$.

de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ complètement intérieurs à $\mathcal{E}$, tels que chacun coupe le précédent, C_1 pénétrant dans $\mathcal{D}$ et C_p entourant (γ) (*fig.* 3). Nous considérons la fonction harmonique u_1, définie et régulière dans C_1, qui prend les valeurs $\log\rho - U$ sur les arcs de C_1 intérieurs à $\mathcal{D}$ et la valeur zéro sur le reste du contour de C_1.

Nous déterminons ensuite u_2, harmonique et régulière dans C_2, qui

Fig. 3.

prend les mêmes valeurs que u_1 sur l'arc de C_2 intérieur à C_1 et la valeur zéro sur le reste du contour de C_2. De la même façon, nous déterminons successivement $u_3, \ldots, u_{p-1}, u_p$. On vérifie de proche en proche, à partir de $\log\rho - U > 0$, que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont positifs dans les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ où nous les avons définis; u_p a par suite sur (γ) un minimum positif $3\log r$, r étant un certain nombre supérieur à 1.

D'autre part, on constate de proche en proche, à partir des inégalités (6.1) et (3.5) vérifiées respectivement dans $\mathcal{D}$ et dans $\mathcal{E}$, que l'on a dans dans C_α

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}(x)| < \log\rho - u_\alpha(x) + \varepsilon_{n_k}(x).$$

En particulier, on a sur le cercle (γ)

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}(x)| < \log\rho - 3\log r + \varepsilon_{n_k}(x),$$

et le raisonnement s'achève comme au paragraphe 6.

On peut transformer de la même manière la démonstration du paragraphe 5, pour éviter la résolution du problème de Dirichlet relatif à une couronne circulaire. On introduira pour cela une chaîne de cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ tous extérieurs au cercle-unité, de telle sorte que C_1 pénètre dans $\mathcal{D}$, que $C_\alpha (\alpha > 1)$ coupe $C_{\alpha-1}$, et que la circonfé-

Fig. 4.

rence (γ) soit entièrement recouverte par $C_1, C_2, \ldots, C_p$ et par $\mathcal{D}$ (*fig.* 4).

On voit ainsi que le théorème du paragraphe 7 peut se démontrer par des considérations très élémentaires : il suffit de faire appel au théorème sur le maximum d'une fonction harmonique, à l'intégrale de Poisson et à la majoration de Cauchy pour les coefficients.

B. — La convergence des suites partielles de polynomes-sections.

9. *Les théorèmes de M. Ostrowski* [1]. — Les deux théorèmes de M. Ostrowski sur les séries de Taylor qui ont des suites ultraconvergentes de polynomes-sections se déduisent immédiatement, le premier de l'inégalité (3.5), le second du théorème fondamental.

Le premier théorème : *Si la série* $\Sigma a_\nu x^\nu$ *présente une infinité de*

---

[1] A. Ostrowski, [1] et [3].

lacunes de largeur relative bornée inférieurement : a_n nul pour $n_k < n \leqq m_k$, $m_k > \lambda n_k$, $\lambda > 1$, la suite $\{s_{n_k}\}$ converge uniformément autour de tout point de la circonférence-unité où $f(x)$ est régulière.

Supposons $f(x)$ régulière dans un cercle (γ) entourant un point a

Fig. 5.

de la circonférence-unité, et même dans un cercle un peu plus grand. Sur l'arc mqn de (γ), nous appliquons à r_{n_k} l'inégalité (3.5)

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}(x)| < \log\rho + \varepsilon_{n_k}(x),$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}(x)| < \frac{1}{\lambda}\log\rho + \varepsilon_{m_k}(x);$$

sur l'arc mpn, l'inégalité (3.5) appliquée à $r_{m_k} = r_{n_k}$ donne

$$(2) \qquad \frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}| < \log\rho + \varepsilon_{m_k}(x),$$

Considérons la fonction $u(x)$, harmonique et régulière dans (γ), qui prend les valeurs $\log\rho$ sur mpn et $\frac{1}{\lambda}\log\rho$ sur mqn; elle est inférieure à $\log\rho$ à l'intérieur de (γ); elle est donc négative en a (où $\rho = 1$); soit $u(a) = -4h$; on peut trouver un cercle (γ_1) de centre a suffisamment petit pour que $u(x)$ soit inférieure à $-2h$ à l'intérieur de (γ_1). Comme les seules singularités possibles de $\log|r_{n_k}(x)|$ dans (γ) sont des infinis négatifs, (1) et (2) montrent que $\frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}|$ est inférieur à $u(x) + \varepsilon_{m_k}(x)$ dans (γ); on a donc dans (γ_1)

$$\frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}(x)| < -2h + \varepsilon_{m_k}(x),$$

d'où, pour m_k assez grand,

$$\frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}(x)| < -h.$$

La convergence uniforme des s_{n_k} dans (γ_1) en résulte immédiatement [1].

Nous pouvons présenter autrement cette démonstration. Considérons un domaine E_ν complètement intérieur à $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ peut être recouvert avec une infinité dénombrable de cercles; on peut former E_ν avec un nombre fini de ces cercles); soit $G_\nu(x)$ la fonction de Green relative au domaine E_ν et au point O, c'est-à-dire la fonction harmonique qui est régulière dans E, sauf à l'origine où la différence $G_\nu(x) - \log\frac{1}{\rho}$ reste régulière, et qui prend la valeur zéro sur la frontière de E_ν. Si nous cherchons à utiliser pour r_{n_k} la meilleure des deux majorations (1) et (2), c'est-à-dire la seconde à l'intérieur du cercle de convergence et la première dans le reste de E_ν, nous sommes amenés à comparer $\frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}|$ à la fonction $\varphi_\nu(x)$ qui est harmonique dans E_ν, sauf à l'origine où la différence $\varphi_\nu - \log\frac{1}{\rho}$ reste régulière, et qui prend les valeurs $\frac{1}{\lambda}\log\rho$ sur la frontière; cette fonction est $\varphi_\nu = \frac{1}{\lambda}\log\rho - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)G_\nu(x)$. Formons $\frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}| - \varphi_\nu$; cette fonction est harmonique et régulière dans E_ν, sauf aux zéros de r_{n_k}, où elle a des infinis négatifs, et peut-être à l'origine; en tout cas, elle est bornée supérieurement au voisinage de l'origine d'après l'inégalité (2) et la définition de G_ν, elle ne peut donc y avoir d'autre singularité qu'un infini négatif. Elle est majorée par un $\varepsilon_{m_k}(x)$ sur la frontière de E_ν, on a donc

$$(3)\qquad \frac{1}{m_k}\log|r_{n_k}(x)| < \frac{1}{\lambda}\log\rho - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)G_\nu(x) + \varepsilon_{m_k}(x)$$

dans E_ν.

Considérons alors une suite de domaines E_ν emboîtés ($E_\nu \subset E_{\nu+1}$) tendant vers $\mathcal{E}$ en ce sens que tout point ξ de $\mathcal{E}$ est intérieur aux E_ν

---

(1) Cette démonstration repose sur la même idée que celle de M. Ostrowski.

à partir d'une certaine valeur de l'indice : $\nu > \nu(\xi)$. Les fonctions harmoniques $G_\nu(x)$ forment une suite croissante en tout point intérieur à $\mathcal{E}$; en effet, $G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)$ est régulière dans E_ν et positive sur le contour. Les G_ν tendent donc uniformément soit vers $+\infty$, soit vers une fonction $G(x)$ qui est la fonction de Green relative au domaine $\mathcal{E}$ et à l'origine. La première hypothèse est inadmissible, car on déduirait alors de (3), en y faisant croître ν indéfiniment, $r_{n_k} = 0$ en tout point de $\mathcal{E}$. La fonction limite G existe donc, et l'on a en tout point de $\mathcal{E}$

$$(3') \qquad \frac{1}{m_k} \log |r_{n_k}(x)| < \frac{1}{\lambda} \log \rho - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) G(x) + \varepsilon_{m_k}(x);$$

cette inégalité entraine la convergence uniforme des s_{n_k} à l'intérieur du domaine défini par

$$\frac{1}{\lambda} \log \rho - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) G(x) < 0.$$

Ce domaine déborde du cercle de convergence par tous les arcs de régularité de $f(x)$; le résultat précédent est donc établi à nouveau et de plus nous pouvons indiquer, connaissant le domaine d'existence $\mathcal{E}$ et une borne inférieure de la largeur des lacunes, un domaine où il y a nécessairement ultraconvergence. En particulier, comme nous pouvons remplacer au second membre de (3) ou de (3') $\frac{1}{\lambda}$ par $\frac{n_k}{m_k}$, nous retrouvons un beau résultat de M. Ostrowski [1] :

Si la largeur relative des lacunes augmente indéfiniment : $\frac{m_k}{n_k} \to \infty$, *l'ultraconvergence de la suite* $\{s_{n_k}\}$ *s'étend à tout le domaine d'existence;* celui-ci est, par suite, *à un seul feuillet* et *simplement connexe.*

Il ne semble pas possible, dans le cas général, de donner une propriété aussi simple du domaine d'existence; notre démonstration montre toutefois qu'il n'est pas arbitraire. La fonction de Green relative à l'origine doit en effet exister, ce qui revient à dire que *la représentation conforme* (non forcément biunivoque) *de* $\mathcal{E}$ *sur un domaine simplement connexe à un seul feuillet doit mener à la représentation sur*

---

[1] A. Ostrowski, [2], p. 335.

un cercle et non à la représentation sur le plan pointé ou le plan complet. Par exemple, il n'est pas possible que le domaine d'existence d'une fonction définie par une série lacunaire soit le plan moins un point de la circonférence-unité.

LE SECOND THÉORÈME. — *Toute série de Taylor qui possède une suite partielle ultraconvergente de polynomes-sections est la somme d'une série du type précédent et d'une série à rayon de convergence plus grand* (série à structure lacunaire). C'est une conséquence immédiate de notre théorème fondamental : l'inégalité (7.1) est en effet vérifiée dans la région d'ultraconvergence avec $U(x) = 0$. (Dans ce cas particulier, la démonstration du paragraphe 8 se simplifie légèrement; le domaine $\mathcal{D}$ étant adjacent au cercle-unité, il suffit d'un seul cercle.) Les précisions apportées à cet énoncé au paragraphe 7 ont été obtenues par M. Ostrowski dans le cas de l'ultraconvergence.

10. *Extension du théorème fondamental.* — Pour la démonstration du théorème fondamental, on peut remplacer l'hypothèse : « l'inégalité (7.1) est vérifiée dans un *domaine* $\mathcal{D}$ » par des hypothèses d'apparence moins restrictive. Si par exemple cette inégalité est vérifiée sur un segment de droite ou un arc de cercle σ extérieur au cercle-unité, nous considérerons un second arc de cercle σ' de mêmes extrémités, tel que le domaine $\mathcal{D}$ limité par σ et σ' soit extérieur au cercle-unité (et intérieur à $\mathcal{E}$ si σ est intérieur à $\mathcal{E}$); nous aurons à l'intérieur de $\mathcal{D}$

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < U_1(x) + \varepsilon_{n_k}(x),$$
$$U_1(x) < \log\rho,$$

en désignant par $U_1(x)$ la fonction harmonique et régulière dans $\mathcal{D}$ qui prend les valeurs $U(x)$ sur σ et $\log\rho$ sur σ; c'est une inégalité de même forme que (7.1) vérifiée dans un domaine, et nous sommes ainsi ramenés au cas envisagé précédemment. Il suffit même de supposer l'inégalité (7.1) vérifiée sur un ensemble de mesure positive de points de σ.

Supposons plus généralement cette inégalité vérifiée sur un certain ensemble **E**, *fermé* et borné, extérieur au cercle-unité, $U(x)$ étant

continue sur **E**. Nous aurons alors sur **E** non seulement $U(x) < \log\rho$, mais même $U(x) < \log\rho - h$, h étant une constante positive.

Traçons une courbe $\mathcal{C}$ (courbe analytique ou ligne polygonale par exemple), fermée et sans point double, qui entoure **E** et soit extérieure au cercle-unité; dans le domaine obtenu en retranchant de l'intérieur de $\mathcal{C}$ les points de **E**, nous avons alors l'inégalité

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < \log\rho - h\,\varphi(x) + \varepsilon_{n_k}(x),$$

en désignant par $\varphi(x)$ la solution du problème de Dirichlet généralisé relatif à ce domaine, les valeurs données sur la frontière étant 1 sur **E** et 0 sur $\mathcal{C}$. Si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas identiquement nulle, nous sommes encore ramenés au cas traité en premier lieu.

En d'autres termes :

Le théorème fondamental reste exact si l'on suppose l'inégalité (7.1) *vérifiée, non plus dans un domaine* $\mathcal{D}$, *mais seulement sur un ensemble fermé* **E** *qui ne soit pas de capacité nulle.*

11. *Sur la convergence des suites partielles de polynomes-sections.* — D'après ce que nous venons de voir, la convergence uniforme des s_{n_k} à l'extérieur du cercle-unité dans un domaine $\mathcal{D}$ (même non connexe avec le cercle de convergence), ou sur un ensemble **E** fermé et de capacité non nulle, exige que la série ait la structure indiquée par le théorème fondamental. Dans ces conditions, *ou bien* la fonction $f(x)$ a le cercle de convergence comme coupure; tout ce qu'on peut alors affirmer est la possibilité de faire apparaître des lacunes *à la fin des* s_{n_k}; *ou bien* $f(x)$ est régulière sur certains arcs du cercle de convergence; on peut alors faire apparaître aussi des lacunes *au début des restes* r_{n_k}, et la suite $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente.

Si l'on remplace l'hypothèse de la convergence *uniforme* des s_{n_k} dans $\mathcal{D}$ par celle de la convergence *simple*, un théorème bien connu d'Osgood [1] permet d'affirmer la convergence uniforme dans un domaine Δ intérieur à $\mathcal{D}$. Le théorème fondamental reste exact, à ceci

---

[1] Osgood, *Ann. of Math.*, 2e série, t. III, n° 1. Ce théorème est établi dans les *Leçons sur les séries de polynomes* de M. Montel (p. 108).

près que λ, λ', r ne peuvent plus être choisis dépendant seulement du domaine $\mathcal{D}$. Il est d'ailleurs facile de lever cette dernière restriction. Traçons une circonférence C intérieure à $\mathcal{D}$. D'après un théorème d'Egoroff (*Comptes rendus*, 152, 1911, p. 244), on peut, en excluant un ensemble A de points de C, ayant une mesure ε arbitrairement petite, obtenir que la convergence soit uniforme sur l'ensemble restant $B(A+B=C)$; considérons alors la fonction $U(x)$, harmonique dans C, qui prend les valeurs zéro sur B et $\log\rho$ sur A; dans C′ concentrique et intérieure à C, la fonction U est majorée par une fonction continue U_1, inférieure à $\log\rho$, qui ne dépend que de ε et non de l'ensemble A que l'on envisage; ceci résulte immédiatement de l'expression de U au moyen de l'intégrale de Poisson. On est ainsi ramené au cas précédent.

Si l'on veut utiliser de manière plus complète les renseignements fournis par la convergence dans $\mathcal{D}$, on pourra faire un raisonnement analogue pour un domaine Δ intérieur à $\mathcal{D}$; on peut, pour cela, soit utiliser la représentation conforme de Δ sur un cercle, soit recouvrir Δ avec un nombre fini de circonférences analogues à C′.

L'hypothèse de la convergence *en une infinité dénombrable de points* extérieurs au cercle-unité est par contre insuffisante. Soit, en effet, une suite de points $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, et désignons par $P_n(x)$ un polynome de degré n ayant les racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et tel que le plus grand des modules des coefficients soit u_n; considérons la série

$$1 + x P_1(x) + x^3 P_2(x) + x^6 P_3(x) + \ldots + x^{\frac{n(n+1)}{2}} P_n(x) + \ldots;$$

développons formellement en série de Taylor; à cause du choix des facteurs $x, x^3, x^6, \ldots$, les termes provenant des différents P_n ne se mélangent pas. La série obtenue a donc une infinité de coefficients de module 1, et aucun de module plus grand; son rayon de convergence est 1. D'autre part, comme

$$s_{\frac{n(n+1)}{2}-1} = 1 + x P_1(x) + x^3 P_2(x) + \ldots + x^{\frac{(n-1)n}{2}} P_{n-1}(x),$$

la suite partielle $\left\{ s_{\frac{n(n+1)}{2}-1} \right\}$ de polynomes-sections converge en chacun des points y_ν.

Or il y a dans la série un coefficient de module 1, provenant

de P_{n-1}, dont le rang est compris entre $\frac{(n-1)n}{2}$ et $\frac{n(n+1)}{2}-1$, et un autre, provenant de P_n, dont le rang est compris entre $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1$; le rapport de ces rangs, inférieur à $\frac{(n+1)(n+2)}{(n-1)n}$, tend vers 1. Il est donc impossible que la série ait la structure indiquée au paragraphe 7 (¹).

12. *Formation d'exemples.* — Le procédé le plus simple pour former des séries de Taylor dont une suite partielle de polynomes-sections converge en dehors du cercle de convergence de la série peut être présenté sous la forme suivante : partons d'une série

$$\sum_0^\infty \alpha_n y^n \tag{1}$$

qui a un rayon de convergence fini (qu'on peut supposer être l'unité) et qui présente des lacunes de largeur relative bornée inférieurement :

$$\alpha_n = 0 \quad \text{pour } n_k < n \leqq m_k, \qquad \frac{m_k}{n_k} > \lambda > 1.$$

Considérons un polynome nul à l'origine :

$$P(x) = c_p x^p + c_{p+1} x^{p+1} + \ldots + c_q x^q \qquad (c_p c_q \neq 0).$$

Formons

$$\sum_0^\infty \alpha_n [P(x)]^n;$$

si nous développons les puissances de $P(x)$, la somme partielle $\sum_0^{n_k}$ et les termes suivants donnent respectivement des puissances de x d'exposants $\leqq qn_k$ et $\geqq pm_k$; si la condition $\frac{q}{p} < \lambda$ est vérifiée, ce que

(¹) Étant donnée une suite de points y_ν, on peut de même former une série à rayon de convergence nul pour laquelle une suite partielle de polynomes-sections est convergente aux points y_ν; il suffit d'imposer au plus grand en module des coefficients de P_n la valeur $\frac{(n+1)(n+2)}{}$

nous supposerons, les puissances de x provenant de $\sum_0^{n_k}$ ne se mélangent pas avec celles qui proviennent des termes suivants.

La série

$$\sum_0^{\infty} \alpha_n [P(x)]^n \tag{2}$$

a pour région de convergence uniforme la région $|P(x)| < 1$, qui est d'un seul tenant ou non suivant le choix de $P(x)$, et qui enferme en tout cas un voisinage de l'origine. Autour de l'origine, (2) définit une fonction analytique, à laquelle correspond une série de Taylor qui se déduit de (2) par simple développement des puissances de $P(x)$. Les polynomes-sections de degrés $qn_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ de cette série sont précisément les sommes partielles de (2); leur région de convergence $\mathcal{R}$ s'obtient alors en prenant la région du plan des x que l'équation $y = P(x)$ fait correspondre à la région de convergence des sommes partielles $\sum_0^{n_k} \alpha_n y_n$; le cas le plus simple est celui où $\sum_0^{\infty} \alpha_n y^n$ *a son cercle de convergence comme coupure;* $\mathcal{R}$ comprend alors la région $|P(x)| < 1$ (plus, éventuellement, d'autres régions, séparées de celles-ci, provenant des domaines de convergence, séparés de $|y| < 1$, des $\sum_0^{n_k} \alpha_n y^n$; nous ne nous y intéresserons pas). Nous obtenons donc des exemples où il y a, soit ultraconvergence, soit à la fois ultraconvergence et convergence dans des domaines non connexes avec le cercle de convergence de la série.

Si $\frac{m_k}{n_k} \to \infty$ (*cf.* § 9), ou encore si la série (1) admet son cercle de convergence comme coupure, les fonctions représentées par la suite partielle dans ces derniers domaines sont nécessairement différentes de la fonction définie par la série de Taylor, puisque celle-ci a le domaine d'ultraconvergence pour domaine d'existence.

Cette méthode est celle qui a mené aux premiers exemples d'ultraconvergence (Porter) [1]. Elle s'applique encore si la suite de sommes

---

[1] PORTER, [1]. *Voir* aussi GOURSAT, *Cours d'Analyse*, 4e éd., t. II, p. 284.

partielles $\sum_{0}^{n_k} \alpha_n y^n$ est ultraconvergente. Elle peut encore s'employer à partir d'une série $\sum \alpha_n y^n$ non proprement lacunaire, mais ayant une suite ultraconvergente de polynomes-sections. La transformation de Faber-Mordell (¹) appliquée par M. Lösch à la démonstration des théorèmes d'Ostrowski (²) en est un cas particulier.

Il est facile de former une série pour laquelle la suite $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente, $\{n_k\}$ étant une suite *donnée* d'entiers croissants telle que $\overline{\lim} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1$. Je n'y insiste pas, car je donnerai plus loin un résultat plus précis.

13. *Construction d'une série pour laquelle une suite partielle de polynomes-sections admet des domaines donnés comme régions de convergence uniforme.* — Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ... les domaines donnés, deux à deux sans points intérieurs communs; ils peuvent être en nombre fini ou non. On suppose que chaque $\mathcal{D}_\nu$ est simplement connexe et ne contient pas le point à l'infini (il peut l'avoir comme point-frontière). Aucune hypothèse n'est faite sur la situation des $\mathcal{D}_\nu$ par rapport à l'origine.

Je vais montrer que *l'on peut construire une série de Taylor dont une suite partielle de polynomes-sections converge uniformément dans chacun des* $\mathcal{D}_\nu$ (et non pas dans des domaines plus étendus).

Dans le cas d'un domaine unique contenant l'origine, ce résultat a été donné par M. Ostrowski (7).

Il suffit de construire une suite de polynomes $P_n(x)$, *nuls en* O, telle que :

1° Dans tout domaine entièrement intérieur à l'un des $\mathcal{D}_\nu$, les P_n soient inférieurs à *un* en module, à partir d'un certain rang;

2° Dans tout cercle, arbitrairement petit, entourant un point-frontière de l'un quelconque des $\mathcal{D}_\nu$, les P_n prennent à partir d'un certain rang des valeurs supérieures à *un* en module.

(¹) Faber, *Sitzungsberichte der Bayr. Akad.*, 1904, t. 34; Mordell, *Journ. Lond. Math. Soc.*, vol. 2.

(²) Lösch [1].

En effet, si l'on a une telle suite P_n, on formera

$$\sum_{n=1}^{\infty} [P_n(x)]^{l_n}, \tag{1}$$

le nombre entier l_n étant pris supérieur au degré de $[P_{n-1}(x)]^{l_{n-1}}$; le développement formel en série de Taylor aura les propriétés indiquées.

Construction des $P_n(x)$. — A chaque $\mathcal{D}_\nu$, j'associe une fonction $\varphi_\nu(x)$ qui en effectue la représentation conforme sur le cercle-unité; si l'origine est intérieure au $\mathcal{D}_\nu$ considéré, j'impose la condition $\varphi_\nu(0) = 0$. Je désignerai par Δ_ν^h le domaine, intérieur à $\mathcal{D}_\nu$, où $|\varphi_\nu(x)| < 1 - h$, et par Γ_ν^h la courbe qui le limite.

Je considère les domaines $\Delta_\nu^{\frac{1}{n}}$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$. La fonction

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \varphi_\nu(x)$$

est, en module, supérieure à 1 sur $\Gamma_\nu^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$ et inférieure à 1 sur $\Gamma_\nu^{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}$; on peut construire une série de polynomes qui converge uniformément vers

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \varphi_\nu(x)$$

dans $\Delta_\nu^{\frac{1}{n}}$ et vers zéro dans chacun des $\Delta_\mu^{\frac{1}{n}}$, $\mu = 1$ à n, $\mu \neq \nu$ (¹); je puis donc obtenir un polynome $p_\nu^{(n)}(x)$ qui soit, en module, supérieur à 1 sur $\Gamma_\nu^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$, inférieur à 1 sur $\Gamma_\nu^{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}$ et à $\frac{1}{2n^2}$ dans les $\Delta_\mu^{\frac{1}{n}}$, $\mu = 1$ à n, $\mu \neq \nu$. En remplaçant au besoin le polynome primitif par une de ses puissances, je peux supposer

$$\begin{aligned} &|p_\nu^{(n)}(x)| > 1 + \frac{1}{n} \qquad \text{sur } \Gamma_\nu^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}, \\ &|p_\nu^{(n)}(x)| < 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{sur } \Gamma_\nu^{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

(¹) *Voir* P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 97.

Si l'origine est intérieure à l'un des domaines donnés, on peut appeler $\mathcal{D}_1$ celui qui la renferme; j'impose alors aux $p_\nu^{(n)}(x)$ la condition $p_\nu^{(n)}(0)=0$. [Soit un $p_\nu^{(n)}(x)$, $\nu \neq 1$, ayant les propriétés précédentes et non nul en O; en le remplaçant au besoin par une de ses puissances, on peut supposer qu'il vérifie encore les inégalités (2) quand on remplace au second membre $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$, et qu'il est inférieur en module à $\frac{1}{4n^2}$ dans les $\Delta_\mu^{\frac{1}{n}}$; pour l'annuler en O, il suffit de lui ajouter une constante de module inférieur à $\frac{1}{4n^2}$; le nouveau polynome a toutes les propriétés voulues. On raisonne de même pour $p_1^{(n)}$, en remarquant que la construction indiquée peut être menée de telle sorte que $|p_1^{(n)}(0)|<\frac{1}{4n^2}$].

Si l'origine n'est intérieure à aucun des domaines donnés, j'impose encore la condition $p_\nu^{(n)}(0)=0$. Je considère pour cela un cercle $D_{0,n}$, de centre O et de rayon au plus égal à $\frac{1}{n}$, extérieur à $\Delta_1^{\frac{1}{n}}, \Delta_2^{\frac{1}{n}}, \ldots, \Delta_n^{\frac{1}{n}}$, et je traite $D_{0,n}$ comme $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n$ en ce qui concerne la construction des $p_\nu^{(n)}$.

Je puis alors prendre

$$P_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^{(n)}(x) \qquad \text{dans le premier cas,}$$

$$P_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu^{(n)}(x) \qquad \text{dans le second cas.}$$

La suite des $P_n(x)$ a les deux propriétés exigées.

Dans le cas où l'origine n'est intérieure à aucun des $\mathcal{D}_\nu$, il y a dans tout voisinage de O des points où $|P_n(x)|>1$; ceci empêche la convergence autour de O de la série (1) et *a fortiori* de la série de Taylor qui s'en déduit par développement formel. *Cette dernière a donc un rayon de convergence nul.*

14. *Les domaines de convergence uniforme et les fonctions-limites.* — Les méthodes du paragraphe précédent, appliquées à la générali-

sation d'un théorème de Jentzsch ([1]), permettent de montrer que les domaines de convergence uniforme (non connexes avec le cercle de convergence si celui-ci n'est pas réduit à l'origine) des suites partielles de polynomes-sections d'une série de Taylor sont complètement arbitraires ainsi que les fonctions-limites.

D'une manière plus précise je vais établir le résultat suivant :

Soient donnés des domaines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ... en nombre fini ou en infinité dénombrable. On suppose que chaque $\mathcal{D}_\nu$ est simplement connexe et n'a pas le point à l'infini comme point intérieur; on suppose de plus que l'origine n'est intérieure à aucun des $\mathcal{D}_\nu$. Soit encore éventuellement un domaine simplement connexe $\mathcal{D}$ contenant l'origine et n'ayant de point intérieur commun avec aucun des $\mathcal{D}_\nu$. Il n'est pas supposé que les domaines $\mathcal{D}_\nu$ soient sans points communs, ni même qu'ils soient tous distincts. Donnons-nous dans chaque $\mathcal{D}_\nu$ une fonction analytique $f_\nu(x)$ qui y soit régulière : *on peut former une série de Taylor telle qu'à chaque $\mathcal{D}_\nu$ corresponde une suite partielle de polynomes-sections qui converge uniformément vers f_ν dans $\mathcal{D}_\nu$, et non dans un domaine plus grand;* si l'on s'est donné un domaine $\mathcal{D}$, on peut exiger que cette série définisse au voisinage de l'origine une fonction qui ait $\mathcal{D}$ pour domaine d'existence et qui y soit représentée par une suite partielle de polynomes-sections; sinon, le rayon de convergence sera nul.

Si les $\mathcal{D}_\nu$ se répartissent en familles formées de domaines (en nombre fini ou non) deux à deux sans points intérieurs communs, on peut facilement obtenir que la même suite partielle corresponde à tous les domaines d'une même famille ([2]).

Démonstration. — J'associe encore à chaque $\mathcal{D}_\nu$ une fonction $\varphi_\nu(x)$ qui le représente sur le cercle-unité; je désigne par Δ_ν^h le domaine intérieur à $\mathcal{D}_\nu$ où $|\varphi_\nu(x)| < 1 - h$, par Γ_ν^h la courbe qui le limite,

---

([1]) R. Jentzsch, [2], p. 255 et 264. — Voici les différences avec l'énoncé du texte : Jentzsch ne se préoccupe pas d'avoir les $\mathcal{D}_\nu$ comme domaines *exacts* de convergence, ce qui simplifie beaucoup la démonstration, mais masque la portée du résultat; d'autre part, il n'indique pas le moyen d'obtenir un rayon de convergence *fini*, et semble croire que le cas général est celui du rayon de convergence nul.

([2]) Raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent.

par d_ν^h une borne supérieure de $|x|$ dans Δ_ν^h, par δ_ν^h une borne inférieure; les mêmes notations valent éventuellement pour $\mathcal{D}$ avec l'indice zéro. Je détermine ensuite les polynomes Q_1, Q_2, ..., satisfaisant aux conditions suivantes :
(n_{j+1} est un entier supérieur au degré de $x^{n_j}Q_j$)

$$|f_1 - Q_1| < \frac{1}{2} \qquad \text{dans } \Delta_1^{\frac{1}{2}};$$

puis

$$\left|\frac{f_2 - Q_1}{x^{n_2}} - Q_2\right| < \frac{1}{2\left[d_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^{n_2}} \qquad \text{dans } \Delta_2^{\frac{1}{2}},$$

$$> \frac{1}{2\left[\delta_2^{\left(\frac{1}{4}\right)}\right]^{n_2}} \qquad \text{sur } \Gamma_2^{\frac{1}{4}},$$

et

$$|x^{n_2}Q_2| < \frac{1}{2} \qquad \text{dans } \Delta_0^{\frac{1}{2}},$$

$$|x^{n_2}Q_2| > 1 \qquad \text{sur } \Gamma_0^{\frac{1}{4}};$$

puis

$$\left|\frac{f_1 - Q_1 - x^{n_2}Q_2}{x^{n_3}} - Q_3\right| < \frac{1}{4\left[d_1^{\left(\frac{1}{4}\right)}\right]^{n_3}} \qquad \text{dans } \Delta_1^{\frac{1}{4}},$$

$$> \frac{1}{\left[\delta_1^{\left(\frac{1}{8}\right)}\right]^{n_3}} \qquad \text{sur } \Gamma_1^{\frac{1}{8}}$$

et

$$|x^{n_3}Q_3| < \frac{1}{4} \qquad \text{dans } \Delta_0^{\frac{1}{4}},$$

$$|x^{n_3}Q_3| > 1 \qquad \text{sur } \Gamma_0^{\frac{1}{8}};$$

puis

$$\left|\frac{f_2 - Q_1 - x^{n_2}Q_2 - x^{n_3}Q_3}{x^{n_4}} - Q_4\right| < \frac{1}{8\left[d_2^{\left(\frac{1}{8}\right)}\right]^{n_4}} \qquad \text{dans } \Delta_2^{\frac{1}{8}},$$

$$> \frac{1}{\left[\delta_2^{\left(\frac{1}{16}\right)}\right]^{n_4}} \qquad \text{sur } \Gamma_2^{\frac{1}{16}};$$

et

$$|x^{n_4}Q_4| < \frac{1}{8} \qquad \text{dans } \Delta_0^{\frac{1}{8}},$$

$$|x^{n_4}Q_4| > 1 \qquad \text{sur } \Gamma_0^{\frac{1}{8}};$$

pour Q_5 on considère $\Delta_3^{\frac{1}{16}}$ et f_3, pour Q_6 $\Delta_1^{\frac{1}{32}}$ et f_1, etc.; on repart tou-

jours de $\mathcal{D}_1$ et l'on prend à chaque fois un domaine de plus, tout comme dans la méthode classique du balayage; la possibilité de déterminer les Q_j satisfaisant aux conditions énoncées se justifie comme au paragraphe précédent.

Formons alors $\Sigma x^{n_j} Q_j$: cette série converge uniformément dans $\mathcal{D}$; d'autre part, les sommes partielles arrêtées à ceux des Q_j qui ont été calculés en faisant intervenir $\mathcal{D}_\nu$ convergent uniformément dans $\mathcal{D}_\nu$ vers f_ν; dans les deux cas, ce sont là des domaines *exacts* de convergence uniforme. Si nous développons formellement en série de Taylor, la série obtenue a les propriétés annoncées ([1]).

15. *Formation d'une série de Taylor pour laquelle une suite* $\{s_{n_k}\}$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *dans deux domaines distincts.* — Je considère un domaine $\mathcal{D}$ jouissant des propriétés suivantes : le plus grand cercle de centre O intérieur à $\mathcal{D}$ est $|x| < 1$; les points de $\mathcal{D}$ intérieurs à $|x| < 2$ forment deux domaines distincts, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$; $x = 2$ n'est pas intérieur à $\mathcal{D}$.

D'après ce qui précède, je puis former une série $\Sigma b_n x^n$ pour laquelle

Fig. 6.

une suite partielle de polynomes-sections est ultraconvergente dans $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ étant de plus le domaine d'existence de la fonction définie par la

([1]) Les n_j ont pu être choisis de telle sorte que (degré de $x^{n_j} Q_j$) : (degré de $x^{n_{j-1}} Q_{j-1}$) croisse indéfiniment; d'après un théorème de M. Ostrowski (§ 9), $\mathcal{D}$ est alors le domaine d'existence de la fonction définie par la série de Taylor.

série [il n'est d'ailleurs pas indispensable d'avoir recours à cette construction; on peut partir d'une cassinienne $|P(x)| < 1$ qui ait la forme voulue et appliquer la méthode du paragraphe 12]. Posons $a_n = b_n + \frac{1}{2^n}$; $\Sigma a_n x^n$ est une série pour laquelle la même suite partielle de polynomes-sections converge uniformément vers la fonction, d'une part dans $\mathcal{D}_1$, d'autre part dans $\mathcal{D}_2$.

Il n'y a lieu d'attacher aucune importance particulière au fait que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'obtiennent en tronquant le domaine d'existence par un *cercle;* on peut s'en convaincre en substituant à x un polynome $P(x)$ convenablement choisi.

16. *Formation d'une série pour laquelle une suite donnée de polynomes-sections est ultraconvergente, une autre suite donnée ne l'étant pas.* — Si une suite $\{s_{n_k}\}$ de polynomes-sections est ultraconvergente, le second théorème d'Ostrowski montre que toute suite $\{s_{m_j}\}$ qui vérifie la condition suivante est également ultraconvergente : à chaque m_j on peut associer un n_k tel que leur rapport soit compris entre h et $\frac{1}{h}$, h étant un nombre qui dépend de la série et de la suite $\{n_k\}$. Si, en particulier, on peut associer à chaque m_j un n_k tel que le rapport $\frac{m_j}{n_k}$ tende vers *un*, l'ultraconvergence de $\{s_{n_k}\}$ entraîne celle de $\{s_{m_j}\}$. Je vais montrer que si cette condition n'est pas remplie, on peut former une série pour laquelle la suite $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente, et non la suite $\{s_{m_j}\}$:

S'il existe un nombre $\theta > 1$ tel que pour une infinité de valeurs de j l'intervalle $\left(\frac{1}{\theta} m_j, \theta_{m_j}\right)$ ne contienne aucun des n_k, on peut former une série pour laquelle la suite $\{s_{n_k}\}$ est effectivement ultraconvergente, la suite $\{s_{m_j}\}$ ne l'étant pas. La condition $\overline{\lim} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1$ se trouve remplie d'elle-même.

Lemme. — *Dans le développement de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^q)^l$, tous les coefficients sont au plus égaux au coefficient médian (ou aux deux coefficients médians).* C'est immédiat par récurrence; en effet, pour

former la suite des coefficients de $(1+x+\ldots+x^q)^{l+1}$ on part de la suite des coefficients de $(1+x+\ldots+x^q)^l$ prolongée des deux côtés par des zéros, et l'on prend les sommes de $q+1$ termes consécutifs.

Ceci posé, admettons, en remplaçant au besoin la suite $\{m_j\}$ par une suite partielle, que pour aucune valeur de j l'intervalle $\left(\frac{1}{\theta}m_j, \theta m_j\right)$ ne renferme de n_k, et que de plus ces intervalles soient tous extérieurs les uns aux autres. Considérons

$$P(x) = (x^p + x^{p+1} + \ldots + x^{p+q})\frac{1}{q+1};$$

pour que le degré du terme de $[P(x)]^{l_j}$ qui a le plus grand coefficient soit voisin de m_j, nous prendrons l_j égal au plus grand entier qui ne surpasse pas $\frac{m_j}{p+\frac{q}{2}}$; ce degré est alors $\left(p+\frac{q}{2}\right)l_j$ ou $\left[\left(p+\frac{q}{2}\right)\pm\frac{1}{2}\right]l_j$ suivant la parité de l_j; nous supposerons p et q choisis de telle sorte que

$$\frac{1}{\theta} < \frac{p+\frac{q}{2}}{p} \qquad \text{et} \qquad \theta > \frac{p+q}{p+\frac{q}{2}}.$$

Formons $\sum_j [P(x)]^{l_j}$: cette série converge uniformément à l'intérieur de la lemniscate $|P(x)| = 1$ (qui entoure la circonférence $|x| = 1$ et la touche au point $x = 1$). Dans le développement en série de Taylor les puissances de x qui proviennent des différents termes ne se mélangent pas : en effet, d'après l'hypothèse que l'on vient de faire sur θ, les exposants des différents termes de P^{l_j} sont compris dans l'intervalle $\left(\frac{1}{\theta}m_j, \theta m_j\right)$, et ceux des termes de $P^{l_{j+1}}$ dans l'intervalle $\left(\frac{1}{\theta}m_{j+1}, \theta m_{j+1}\right)$ extérieur au précédent. Les s_{n_k} sont donc des sommes partielles de la série $\Sigma[P(x)]^{l_j}$ et la suite $\{s_{n_k}\}$ est par conséquent ultraconvergente.

Prenons le terme $a_{\lambda_j}x^{\lambda_j}$ de $[P(x)]^{l_j}$ qui a le plus grand coefficient : pour cette suite de valeurs de n, $\overline{\lim}(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$; en effet, si $a_{\mu_j}x^{\mu_j}$ est le

terme de P'_j qui donne la plus grande valeur de $(a_n)^{\frac{1}{n}}$, on a $\overline{\lim}(a_{\mu_j})^{\frac{1}{\mu_j}} = 1$, puisque le rayon de convergence de la série de Taylor formée est *un*; les inégalités $(a_{\mu_j})^{\frac{1}{\mu_j}} > (a_{\mu_j})^{\frac{1}{\lambda_j}}$, $a_{\lambda_j} > a_{\mu_j}$ entraînent $(a_{\mu_j})^{\frac{1}{\mu_j}} > (a_{\lambda_j})^{\frac{1}{\lambda_j}} > (a_{\mu_j})^{\frac{1}{\lambda_j}}$; le premier terme de cette double inégalité a *un* pour limite supérieure, le troisième également puisque le rapport $\frac{\lambda_j}{\mu_j}$ reste compris entre des limites finies $\frac{p}{p+q}$ et $\frac{p+q}{p}$; le résultat annoncé en résulte immédiatement. La suite $\{s_{\lambda_j}\}$ n'est donc sûrement pas ultraconvergente; il en est de même de $\{s_{m_j}\}$, car, d'après le choix fait plus haut pour les l_j, la différence $|m_j - \lambda_j|$ reste bornée $\left(\text{elle est inférieure à } p + \frac{q+1}{2}\right)$.

Ce résultat est intéressant pour la formation d'exemples.

17. *Les domaines d'ultraconvergence des différentes suites partielles de polynomes-sections.* — 1° Donnons-nous deux suites d'entiers $\{m_j\}$ et $\{n_k\}$, la seconde étant une suite partielle de la première et les conditions du paragraphe précédent étant remplies. Formons une série $\Sigma a_n x^n$ pour laquelle la suite partielle $\{s_{m_j}\}$ soit ultraconvergente, et une série $\Sigma a_n^* x^n$ pour laquelle la suite partielle $\{s_{n_k}^*\}$ soit ultraconvergente, la suite partielle $\{s_{m_j}^*\}$ ne l'étant pas. Soit $x_0 (|x_0| = 1)$ un point intérieur à un arc d'ultraconvergence de $\{s_{m_j}\}$; prenons un nombre $\lambda (|\lambda| > 1)$ tel que λx_0 soit intérieur au domaine d'ultraconvergence de $\{s_{m_j}\}$. Considérons la série $\Sigma a_n^{**} x^n$ où $a_n^{**} = a_n + \frac{1}{\lambda^n} a_n^*$; elle a encore le cercle unité pour cercle de convergence; les suites partielles $\{s_{m_j}^{**}\}$ et $\{s_{n_k}^{**}\}$ relatives à cette série sont toutes deux ultraconvergentes, et le domaine d'ultraconvergence de la première suite s'obtient en tronquant par le cercle $|x| = \lambda$ celui de la seconde.

2° Des deux suites partielles considérées dans cet exemple, l'une est une suite partielle de l'autre, et son domaine d'ultraconvergence s'obtient en tronquant celui de la seconde *par un cercle*. Montrons que l'on peut construire un exemple qui ne présente pas ces particularités.

Tout d'abord, nous pouvons supposer $\Sigma a_n^{**} x^n$ lacunaire; en substituant à x un polynome $P(\xi)$ convenablement choisi, la circonférence $|x| = \lambda$ sera remplacée par une cassinienne $|P(\xi)| = \lambda$.

Soient maintenant deux suites d'entiers $\{m_j\}$ et $\{n_k\}$ dont chacune remplit vis-à-vis de l'autre les hypothèses du paragraphe précédent; désignons par $\{p_l\}$ la suite obtenue par la réunion de $\{m_j\}$ et de $\{n_k\}$. Nous cherchons à former une série pour laquelle les deux suites $\{s_{m_j}\}$ et $\{s_{n_k}\}$ soient ultraconvergentes, aucun des domaines d'ultraconvergence n'étant entièrement intérieur à l'autre.

Nous pouvons tout d'abord former une série $\Sigma a_\nu x^\nu$ pour laquelle $\{s_{m_j}\}$ et $\{s_{p_l}\}$ sont ultraconvergentes, le domaine d'ultraconvergence $\mathfrak{U}_p$ de la seconde s'obtenant en tronquant celui de la première $\mathfrak{U}_m$ par un cercle Γ; alors $\{s_{n_k}\}$ est alors ultraconvergente; son domaine d'ultraconvergence $\mathfrak{U}_n$ contient $\mathfrak{U}_p$ et ne peut avoir avec $\mathfrak{U}_m$ aucun autre domaine commun adjacent à Γ. Si $\mathfrak{U}_m$, qui contient $\mathfrak{U}_p$ puisque $\{m_j\}$ est une suite partielle de $\{p_l\}$, n'est pas identique à $\mathfrak{U}_p$, le résultat désiré est obtenu; envisageons le cas où $\mathfrak{U}_m$ est identique à $\mathfrak{U}_p$.

Formons d'autre part une série $\Sigma a_\nu^* x^\nu$ pour laquelle $\{s_{n_k}^*\}$ et $\{s_{p_l}^*\}$ sont ultraconvergentes, le domaine d'ultraconvergence $\mathfrak{U}_p^*$ s'obtenant en tronquant $\mathfrak{U}_n^*$ par une cassinienne Γ^* *distincte d'un cercle;* si le domaine d'ultraconvergence de $\{s_{m_j}^*\}$, $\mathfrak{U}_m^*$, n'est pas identique à $\mathfrak{U}_p^*$, le but est atteint; supposons $\mathfrak{U}_m^*$ identique à $\mathfrak{U}_p^*$.

En faisant au besoin dans l'une des séries une substitution $(x\,|\,cx)$,

Fig. 7.

nous pouvons supposer qu'il existe un point ω commun à Γ et à Γ^*, et intérieur à $\mathfrak{U}_m$ ainsi qu'à $\mathfrak{U}_n^*$.

Considérons alors la série $\Sigma(a_\nu + a_\nu^*)x^\nu = \Sigma a_\nu^{**} x^\nu$. Au voisinage

de ω, le domaine d'ultraconvergence de $\{s^{**}_{m_j}\}$ est limité par Γ^*, celui de $\{s^{**}_{n_k}\}$ par Γ.

Par conséquent, *les suites de polynomes-sections* $\{s^{**}_{m_j}\}$ *et* $\{s^{**}_{n_k}\}$ *sont toutes deux ultraconvergentes; les deux domaines d'ultraconvergence sont différents et aucun ne contient entièrement l'autre.*

18. *Une remarque sur les domaines d'ultraconvergence.* — Considérons toujours une série de rayon de convergence égal à l'unité, pour laquelle la suite $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente. Prenons un nombre $R > 1$ et associons à chaque n_k le plus petit entier $m_k(R)$ tel que l'on ait $m_k(R) < n_k$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}$ pour $m_k(R) < n < n_k$; il résulte de la démonstration du théorème fondamental (*cf.* § 5) que $m_k(R)$ existe, au moins à partir d'une certaine valeur de k, si R est suffisamment voisin de 1 $\left(\text{et même que l'on a } \underline{\lim}\, \frac{n_k}{m_k} > 1\right)$. Les termes de la série donnée dont le rang n vérifie l'une des inégalités $m_k(R) < n \leqq n_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ forment une série (Σ) dont le rayon de convergence est au moins R. Considérons la suite $\{s_{m_k(R)}\}$: la différence $s_{n_k} - s_{m_k(R)}$ étant un reste partiel de (Σ) tend uniformément vers zéro dans $|x| < R$. Considérons le plus grand domaine (nécessairement simplement connexe) $\mathcal{V}$ qui contient l'origine et est intérieur au domaine d'ultraconvergence de $\mathcal{U}$ ainsi qu'au cercle $|x| < R$, et le domaine défini de façon analogue à partir du domaine d'ultraconvergence $\mathcal{U}'$ de $\{s_{m_k(R)}\}$: ces deux domaines sont identiques.

Le plus grand domaine $\mathcal{W}$ contenant l'origine commun à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ n'est pas forcément identique à $\mathcal{V}$; plaçons-nous dans l'hypothèse $\mathcal{W} \supset \mathcal{V}$; nous pouvons alors tracer une circonférence (γ) qui coupe $|x| = R$ et sur laquelle $\sigma_k = s_{n_k} - s_{m_k(R)}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{k}$. Sur un arc pq de (γ) intérieur à $|x| < R$, nous avons, à partir d'une certaine valeur de k, $|\sigma_k| < \lambda^{m_k(R)}$, où λ est une constante inférieure à 1 [ceci résulte de (3.1) modifiée en tenant compte de la valeur R du rayon de convergence]; sur l'arc complémentaire, nous avons pour k assez grand $|\sigma_k| < 1$; u étant la fonction, harmonique dans (γ), qui prend les valeurs $\log\lambda$ sur pq et zéro sur l'arc complémentaire, nous avons dans (γ) $\log|\sigma_k| < u.m_k(R)$ avec $u < 0$, d'où il résulte que la série

converge uniformément à l'intérieur de (γ); la série (Σ) a donc une suite ultraconvergente de sommes partielles, et l'on peut y faire apparaître des lacunes au début des restes, c'est-à-dire au début des σ_k. La circonstance envisagée ne peut donc se présenter pour des valeurs de R arbitrairement voisines de 1 qu'avec une loi très particulière de répartition des $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ au voisinage des lacunes.

Il ne peut exister un domaine D *ou un arc rectifiable* C *commun aux domaines d'ultraconvergence, ou simplement aux domaines de convergence uniforme, d'une infinité de suites* $\{s_{m_k(R)}\}$ *telles que* $R > 1$, et non intérieur au cercle-unité : le théorème fondamental, tel qu'il a été complété au paragraphe 10, entraîne en effet pour les valeurs de R considérées

$$\overline{\lim_{n=m_k(R),\, k\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{R_1},$$

où R_1 ne dépend pas de R, mais seulement de D ou C; ceci est en contradiction avec

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{1}{R} \qquad \text{pour } n = m_k(R).$$

Convenons d'appeler *voisines* deux suites $\{s_{n_k}\}$ et $\{s_{m_k}\}$ telles que l'ensemble des termes de la série considérée qui vérifient $n_k > n > m_k$ ou $n_k < n < m_k$ pour une valeur au moins de k forment une série dont le rayon de convergence surpasse *un* (toute suite voisine d'une suite ultraconvergente est donc ultraconvergente). Nous voyons que l'on peut trouver des suites voisines telles que la partie commune, extérieure au cercle-unité, de leurs domaines d'ultraconvergence soit « arbitrairement petite ». Nous allons d'ailleurs retrouver ce résultat par une autre méthode et le préciser.

19. Un lemme. — *Soit une fonction* $u(x)$ *harmonique et régulière dans la couronne* (Γ) : $R_1 < |x| < R_2$, $R_1 > 0$, *et non négative dans* (Γ); *soit de plus* $u(x) \geqq 1$ *en tout point intérieur à* (Γ) *d'un arc de Jordan* Λ *qui joint la circonférence* $|x| = R_1$ *à la circonférence* $|x| = R_2$: *sur toute circonférence* $|x| = R$ $(R_1 < R < R_2)$, $u(x)$ *surpasse un nombre positif qui ne dépend que de* R_1 *et* R_2, *et non de la forme particulière de l'arc* Λ,

Cette conclusion reste exacte si $u(x)$ est simplement supposé harmonique en tout point de (Γ) non situé sur Λ, l'hypothèse $u(x) \geqq 1$ sur Λ étant remplacée par la suivante : $\overline{\lim}\, u(x_n) \geqq 1$ pour toute suite x_n qui tend vers un point de Λ intérieur à (Γ); je signale l'analogie complète de ce lemme avec un théorème de M. Milloux, généralisé par M. Ehrhard Schmidt [1], qui est relatif au cas $R_1 = 0$. Je ne démontrerai que l'énoncé donné plus haut, qui est le seul dont j'ai besoin ici, et qui, comme M. Montel me l'a fait observer, peut être établi très rapidement.

La famille des fonctions $u(x)$ harmoniques et non négatives dans (Γ) est normale dans (Γ); si nous supposons de plus que $u(x) \geqq 1$ en un point au moins de la circonférence $|x| = R$, aucune fonction limite ne peut être la constante zéro; donc pour $|x| = R$ tous les $u(x)$ ont une même borne inférieure positive m. D'autre part ces fonctions $u(x)$ prennent dans l'anneau $R_1 < |x| < R_2$ les mêmes valeurs que $u(R_1 x)$ dans l'anneau $1 < |x| < \frac{R_2}{R_1}$, ce qui montre que m dépend uniquement des rapports $\frac{R_2}{R_1}$ et $\frac{R}{R_1}$.

20. *Le domaine d'ultraconvergence et* $\underline{\lim}\, |a_n|^{\frac{1}{n}}$. Il résulte du lemme précédent que : *Si la suite* $\{s_{n_k}\}$ *est ultraconvergente, et si le domaine d'ultraconvergence n'est pas tout entier intérieur au cercle* $|x| < R$, *on peut prendre pour les nombres* λ, λ', r *du théorème fondamental des valeurs dépendant uniquement de* R, *et non de la forme du domaine d'ultraconvergence.*

En effet, on peut tracer un arc Λ joignant $|x| = R$ à la circonférence du cercle-unité; l'application du lemme montre alors que l'on a sur la circonférence $|x| = \sqrt{R}$

$$\frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}| < \log \rho - u + \varepsilon_{n_k}(x),$$

où u est un nombre positif qui ne dépend que de R; c'est une majoration de la forme envisagée au paragraphe 7.

---

[1] H. Milloux, *Journ. de Math.*, 1924, p. 30; E. Schmidt, *Sitzungsberichte der preuss. Akad.*, 1932, p. 394.

En particulier, on peut donc écrire

$$\overline{\lim}\,|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \leqq \frac{1}{r(\mathrm{R})}.$$

Par suite, *si* $\underline{\lim}\,|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} = \frac{1}{l}$ *n'est pas nulle, on peut indiquer un cercle qui contient sûrement le domaine d'ultraconvergence et dont le rayon ne dépend que de cette limite inférieure,* $\mathrm{R} = \mathrm{R}(l)$; $\mathrm{R}(l)$ tend vers 1 avec l [1].

Ce résultat, intéressant en lui-même, va nous permettre de compléter très simplement la remarque du paragraphe 18 sur les suites ultraconvergentes *voisines :*

Si la suite $\{s_{n_k}\}$ *est ultraconvergente, on peut, pour tout* R *suffisamment voisin de* 1 ($\mathrm{R} > 1$), *déterminer une suite* $\{s_{m_k}\}$, *voisine de la première, uniformément convergente autour de tout point intérieur à* $|x| < \mathrm{R}$ *du domaine d'ultraconvergence de* $\{s_{n_k}\}$ *et telle que son domaine d'ultraconvergence ne sorte pas d'un cercle* $|x| < \mathrm{R}^*$ *dont le rayon dépend uniquement de* R *et tend vers* 1 *avec* R.

Il suffit pour cela de considérer la suite $\{s_{m_k(\mathrm{R})}\}$ du paragraphe 18.

Ceci implique une certaine continuité dans l'ultraconvergence; il n'est par exemple pas possible que les suites de polynomes-sections se répartissent en deux classes : la première formée de suites non ultraconvergentes; la seconde, formée de suites dont les domaines d'ultraconvergence aient en commun un domaine (ou même simplement un point) extérieur au cercle de convergence de la série. En particulier, pour une série qui présente des lacunes de largeur relative indéfiniment croissante, le domaine d'ultraconvergence, identique au domaine d'existence pour les sommes partielles arrêtées aux lacunes, se réduit de plus en plus quand on prend des suites voisines, jusqu'à tendre vers le cercle de convergence.

---

[1] Par conséquent, si $\underline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{1}{l}$, la série considérée ne peut avoir aucune suite partielle de polynomes-sections dont le domaine d'ultraconvergence sorte du cercle $|x| < \mathrm{R}(l)$; ce résultat reste exact si l'on a seulement $\underline{\lim}\,|a_{\nu_k}|^{\frac{1}{\nu_k}} \geqq \frac{1}{l}$ pour une suite partielle a_{ν_k} de coefficients telle que $\lim \frac{a_{\nu_k+1}}{a_{\nu_k}} = 1$.

Ces remarques jointes à celles du paragraphe 17 semblent indiquer que les relations entre les domaines d'ultraconvergence des différentes suites de polynomes-sections d'une série de Taylor présentent un caractère assez compliqué.

21. *Les domaines de convergence des suites de polynomes-sections avec* $\overline{\lim}\,\frac{n_{k+1}}{n_k}$ *finie.* — Il résulte du théorème fondamental que, si la suite $\{s_{n_k}\}$ de polynomes-sections converge dans des domaines D_i, $\overline{\lim}\,\frac{n_{k+1}}{n_k}$ surpasse une certaine constante > 1 qui ne dépend que des D_i; on a en effet, avec les notations de ce théorème,

$$\overline{\lim}\,\frac{n_{k+1}}{n_k} > \frac{1}{\lambda}.$$

Autrement dit, pour que la suite $\{s_{n_k}\}$ puisse converger dans les D_i, il faut que la croissance des n_k soit « suffisamment rapide ».

Nous allons montrer que, inversement, si on limite la croissance des n_k, on en déduit, en un certain sens, une limitation des domaines de convergence de la suite $\{s_{n_k}\}$.

Soit $\frac{n_{k+1}}{n_k} < K$ (au moins à partir d'un certain rang). Posons

$$r_{(k)} = s_{n_{k+1}} - s_{n_k} \qquad (= r_{n_k, n_{k+1}-n_k}).$$

Considérons la couronne, contenant le cercle-unité, comprise entre le cercle $\Gamma : \rho = h > 1$, et le cercle $\Lambda : \rho = q < 1$. Supposons que la suite $\{s_{n_k}\}$ converge uniformément sur un arc mn de Γ (ou même simplement que les $|r_{(k)}|$ soient bornés sur mn); *on peut donner une borne supérieure de l'arc mn en fonction de* K *et de* h (¹).

Utilisons en effet pour $r_{(k)} = r_{n_k, n_{k+1}-n_k}$ la majoration (3.1) sur Λ et la majoration (3.3) sur Γ, nous obtenons

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{(k)}| < \log\rho + \varepsilon_{n_k}(x) \qquad \text{sur } \Lambda$$

et sur Γ

$$\frac{1}{n_{k+1}}\log|r_{(k)}| < \log\rho + \varepsilon_{n_{k+1}}(x),$$

(¹) Si $n_{k+1} : n_k \to 1$, il ne peut y avoir ultraconvergence, d'après le théorème réciproque d'Ostrowski; l'énoncé du texte est une généralisation de cette propriété.

d'où

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{(k)}| < K\log\rho + \varepsilon_{n_k}(x).$$

$u(x)$ étant la fonction, harmonique dans la couronne (Γ, Λ), qui

Fig. 8.

prend les valeurs $\log q$ sur Λ, zéro sur l'arc mn de Γ, et $K\log h$ sur le reste de Γ, on a dans la couronne considérée

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{(k)}| < u(x) + \varepsilon_{n_k}(x).$$

Si $u(x)$ était négative sur toute la circonférence-unité, la suite $\{s_{n_k}\}$, d'après l'inégalité précédente, convergerait uniformément autour de tout point de cette circonférence, ce qui est impossible puisque la fonction limite $f(x)$ y a au moins un point singulier. L'arc mn doit donc être assez petit pour que le maximum de $u(x)$ sur $\rho = 1$, qui est évidemment une fonction décroissante de l'ouverture de l'arc mn [1], soit positif. Nous allons chercher à disposer de q pour améliorer autant que possible la borne obtenue pour cet arc [borne qui peut encore s'abaisser, si l'on donne des renseignements sur les points singuliers de $f(x)$ sur le cercle de convergence].

Introduisons les fonctions suivantes :

v, harmonique dans (Γ, Λ), égale à 1 sur Λ et 0 sur Γ;

---

[1] Considérons en effet la fonction u^* correspondant à un arc m^*n^* plus grand que mn; on peut toujours supposer que m^*n^* contient mn; les valeurs de u et u^* sont alors les mêmes en tout point du contour, sauf sur la partie de m^*n^* extérieure à mn où u^* prend des valeurs plus petites; u^* est donc inférieur à u en tout point intérieur à la couronne, donc en particulier en tout point de la circonférence-unité.

w, harmonique dans cette même couronne, égale à 1 sur $\Gamma - mn$, à zéro sur mn et Λ; on a

$$v = \frac{\log h - \log \rho}{\log h - \log q}, \qquad u = \log q . v + K \log h . w;$$

enfin t, harmonique dans Γ, égale à 1 sur $\Gamma - mn$, et à zéro sur mn; on a, dans (Γ, Λ), $t > w$.

Sur $\rho = 1$, il faut que l'on ait

$$\max_{\rho=1} u \geqq 0,$$

ou

$$\max_{\rho=1} w \geqq -\frac{\log q}{K \log h} v_{\rho=1}, \qquad \max_{\rho=1} w \geqq \frac{1}{K} \frac{-\log q}{\log h - \log q};$$

ceci doit avoir lieu quel que soit $q < 1$, il faut donc

$$\max_{\rho=1} w \geqq \frac{1}{K}$$

et *a fortiori*

$$\max_{\rho=1} t \geqq \frac{1}{K}.$$

Supposons que mn soit l'arc $-\theta < \omega < \theta$ du cercle Γ; le maximum

Fig. 9.

de t sur $\rho = 1$ est alors atteint en $x = -1$; c'est la valeur de t sur l'arc de cercle $(n, -1, m)$, donc $\frac{\alpha}{\pi}$, α étant l'angle de cet arc avec l'arc mn de Γ. Or $\alpha = \pi - \widehat{Om\lambda}$, λ étant le centre de l'arc $(n, -1, m)$; on connaît $Om = h$, $\widehat{mO\lambda} = \theta$, et λ :

$$(\lambda + 1)^2 = |\lambda - h e^{i\theta}|^2 = (\lambda - h e^{i\theta})(\lambda - h e^{-i\theta}),$$

d'où

$$\lambda = \frac{h^2 - 1}{2[h\cos\theta + 1]}.$$

On a

$$h = \overline{Om} = \lambda\cos\theta - \overline{m\lambda}\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{\lambda\cos\theta - h}{\overline{m\lambda}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\lambda\cos\theta - h}{\overline{m\lambda}},$$

d'où, comme $\overline{m\lambda} = \lambda + 1$,

$$(1) \qquad \cos\alpha = -\cos\theta - \frac{2h\sin^2\theta}{h^2 + 2h\cos\theta + 1}.$$

On connaît donc α, d'où pour K une limite inférieure

$$(2) \qquad K \geqq \frac{\pi}{\alpha},$$

si l'on se donne θ; et inversement, une limite supérieure pour θ, si l'on se donne K.

Application. — *Si le domaine d'ultraconvergence s'étend à l'infini et renferme un angle d'ouverture* 2θ, *on a nécessairement* $K \geqq \frac{\pi}{\pi - \theta}$; en effet, $\cos\alpha \to -\cos\theta$, $\alpha \to \pi - \theta$. La démonstration directe est d'ailleurs immédiate : traçons une figure homothétique telle que $Om' = 1$; la position limite de l'homologue de l'arc considéré quand le rayon de Γ croît indéfiniment est $n'Om'$, d'où $\widehat{Om'\lambda'} = \theta$, et la valeur limite de α est bien $\pi - \theta$.

Comme $\cos\alpha < -\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$, on a

$$\alpha > \pi - \theta;$$

pour une valeur donnée de θ, la limite obtenue pour K est d'autant meilleure que h est plus grand.

Supposons maintenant que les s_{n_k} convergent uniformément, ou simplement que les $r_{(k)} = s_{n_{k+1}} - s_{n_k}$ soient bornés, sur un ensemble E de la circonférence $\Gamma : \rho = h$, de mesure angulaire 2θ; *si* $\overline{\lim}\,\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqq K$, *on a*

$$K \geqq \frac{\pi}{\alpha},$$

l'angle α étant défini en fonction de θ et h par la formule (1).

Pour l'établir, il suffit de modifier légèrement le raisonnement : prenons des arcs $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, ..., en nombre fini, intérieurs à E et dont la mesure totale soit aussi voisine de 2θ qu'on voudra. Les valeurs imposées à w et t sur Γ seront zéro sur ces arcs et *un* ailleurs. Montrons que la valeur de t en $x = -1$ est maximum quand les arcs $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, ... sont juxtaposés et forment un arc unique dont le milieu a l'abscisse angulaire $\omega = 0$: il suffit de montrer que dans ces conditions $1 - t$ est minimum. Or la fonction harmonique égale à un sur mn et à zéro ailleurs varie toujours dans le même sens sur $\rho = 1$ entre les deux extrémités du diamètre axe de mn. Si les arcs $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, ... n'ont pas la disposition indiquée, on peut remplacer, sinon peut-être un de ces arcs, du moins un arc partiel par un arc égal et dont le milieu est plus rapproché angulairement du demi-axe réel positif; cette opération diminue la valeur de $1 - t$ en $x = -1$.

Remarque. — *Si* $\overline{\lim} \frac{n_{k+1}}{n_k} \leqq K$ *et si les* $r_{(k)} = s_{n_{k+1}} - s_{n_k}$ *sont bornés sur un ensemble, de mesure angulaire* 2θ, *de points du cercle* $\Gamma : \rho = h$, *il y a ultraconvergence si* θ *surpasse une certaine limite, fonction de* h *et* K.

Il y a en effet sûrement ultraconvergence si le *minimum* de la fonction u sur le cercle-unité est *négatif*, c'est-à-dire si $\min_{\rho=1} u < 0$ ou $\min_{\rho=1} w < -\frac{\log q}{K \log h} \varphi_{\rho=1}$, ou si $\min_{\rho=1} w < \frac{1}{K} \frac{-\log q}{\log h - \log q}$; comme $t > w$, cette condition sera remplie si $\min_{\rho=1} t < \frac{1}{K} \frac{-\log q}{\log h - \log q}$; le premier membre ne dépend pas de q, nous pouvons donc disposer de $q (< 1)$ pour donner au second membre la valeur la plus favorable; la condition $\min_{\rho=1} t < \frac{1}{K}$ entraîne donc l'ultraconvergence; or le minimum de t est atteint en $x = 1$; c'est $\frac{\beta}{\pi}$, où β est défini par

$$\cos\beta = -\cos\theta + \frac{2h \sin^2\theta}{h^2 - 2h\cos\theta + 1}. \tag{3}$$

La condition $K < \frac{\pi}{\beta}$ assure donc l'ultraconvergence.

On observera que lorsque h croît indéfiniment, α et β ont la même limite $\pi - \theta$.

22. *Sur certains domaines d'ultraconvergence.* — Considérons une

série pour laquelle une suite $\{s_{n_k}\}$ de polynomes-sections a pour domaine de convergence uniforme le domaine $\mathfrak{U}$ obtenu en fendant le plan suivant l'axe réel à droite du point $x=1$. Sur la circonférence $\rho = R$, $R > 1$ ($\rho = |x|$), prenons un arc pmq qui contienne le point où elle traverse cette coupure.

Pour $n \leqq n_k$, nous déduisons de la formule de Cauchy

$$|a_n| \leqq \frac{1}{R^n} \max_{|x|=} |s_{n_k}|$$

la majoration déjà employée

$$(1) \qquad \frac{1}{n} \log |a_n| < \frac{n_k}{n} \max_{\rho=R} \frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}| - \log R.$$

Nous utiliserons pour $\log |s_{n_k}|$ les majorations suivantes : sur pmq

$$\frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}| < \log R + \varepsilon_{n_k}(x);$$

sur l'arc complémentaire $pm'q$ ainsi que sur $\rho = 1$

$$\frac{1}{n_k} \log |s_{n_k}| < \varepsilon_{n_k}(x).$$

Supposons $\mu n_k < n \leqq n_k$, $0 < \mu < 1$, et considérons la fonction $\varphi(x)$, harmonique dans la couronne $1 < \rho < R$, qui prend les valeurs $\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \log R$ sur l'arc pmq, $-\log R$ sur l'arc $pm'q$ et zéro sur la circonférence-unité; nous avons dans la couronne considérée

$$(2) \qquad \frac{1}{n} \log |s_{n_k}| - \log \rho < \varphi(x) + \varepsilon_{n_k}(x).$$

Mais la fonction φ diffère arbitrairement peu de $-\log \rho$ si l'arc pmq a été pris assez petit; nous pouvons donc supposer que l'on a, sur la circonférence $\rho = R$,

$$(3) \qquad \max \varphi(x) < -\frac{1}{3} \log R.$$

La comparaison des inégalités obtenues donne, pour $\mu n_k < n \leqq n_k$,

$$\frac{1}{n} \log |a_n| < -\frac{1}{3} \log R + \varepsilon_{n_k}(x)$$

et par suite

$$\frac{1}{n}\log|a_n| < -\frac{1}{4}\log R$$

si, de plus, n_k est assez grand :

$$n_k > N[R, \mu].$$

Les seules hypothèses faites sur R et μ sont $R > 1$ et $\mu < 1$, de sorte que nous pouvons répéter le raisonnement en remplaçant R et μ par R^2 et μ^2, puis par R^3 et μ^3, etc.

Prenons alors dans la série donnée tous les termes $a_n x^n$ dont le rang n vérifie l'une des conditions suivantes :

soit $\mu n_k < n \leqq n_k$ pour un certain n_k tel que $n_k > N[R, \mu]$;

soit $\mu^2 n_k < n \leqq n_k$ pour un certain n_k tel que $n_k > N[R^2, \mu^2]$, etc.; de manière générale, on doit avoir pour un certain entier h et un certain n_k

$$\mu^h n_k < n \leqq n_k \qquad \text{avec} \qquad n_k > N[R^h, \mu^h].$$

La série de Taylor formée par ces termes représente une fonction entière, car pour les a_n considérés

$$\frac{1}{n}\log|a_n| \to -\infty$$

et, en la retranchant de la série donnée, on fait apparaître à la fin des s_{n_k} des lacunes de largeur relative indéfiniment croissante.

En invoquant un théorème de M. Ostrowski déjà maintes fois utilisé (§ 9), nous pouvons affirmer que $\mathfrak{U}$ est le domaine d'existence de la fonction définie par la série donnée.

Le raisonnement que nous venons de faire, avec des modifications insignifiantes, permet d'énoncer le théorème suivant :

Étant donné un domaine $\mathfrak{U}$ simplement connexe, à un seul feuillet, contenant l'origine, et tel que $\lim\limits_{\rho \to \infty} 2\omega(\rho) = 2\pi$, $2\omega(\rho)$ *désignant la mesure* (¹) *en radians de l'ensemble des points de la circonférence de*

(¹) Éventuellement la mesure intérieure. Il suffit d'ailleurs que l'on ait

$$\overline{\lim_{\rho \to \infty}}\, 2\omega(\rho) = 2\pi.$$

rayon ρ intérieurs à $\mathfrak{U}$: toute série de Taylor dont une suite partielle de polynomes-sections a $\mathfrak{U}$ comme domaine d'ultraconvergence définit une fonction analytique dont $\mathfrak{U}$ est le domaine d'existence.

Observons encore que nous aurions tout aussi bien pu écrire, au lieu de (3),

$$\max \varphi(x) < -(1-2\eta)\log R \qquad \text{pour } \log\rho = (1-\eta)\log R,$$

η étant un nombre positif quelconque. Nous obtenons ainsi facilement :

Si le domaine $\mathfrak{U}$ est tel que, pour une certaine valeur R *de* ρ, *on ait* $2\omega(R) = 2\pi$, *toute série dont une suite partielle de polynomes-sections a $\mathfrak{U}$ pour domaine d'ultraconvergence est la somme d'une série régulière dans le cercle* $\rho < R$ *et d'une série présentant des lacunes dont la largeur relative croît indéfiniment.*

Soit $\mathcal{E}$ le domaine d'existence de la fonction définie par la série considérée; désignons par $\mathcal{C}.\mathfrak{U}$ l'ensemble des points communs à $\mathfrak{U}$ et au cercle $\mathcal{C}$ défini par $\rho < R$: $\mathcal{C}.\mathfrak{U}$ *et* $\mathcal{C}.\mathcal{E}$ *sont identiques.*

Remarque. — Les calculs précédents restent valables si $2\omega(\rho)$ désigne la mesure (ou la mesure intérieure), en radians, de l'ensemble des points de la circonférence de rayon ρ intérieurs aux différents domaines de convergence uniforme de la suite $\{s_{n_k}\}$. La série se décompose encore de la façon indiquée; $\mathfrak{U}$ et $\mathcal{E}$ désignant toujours le domaine d'ultraconvergence et le domaine d'existence, nous pouvons affirmer l'identité de $\mathfrak{U}$ et $\mathcal{E}$ dans la première hypothèse, de $\mathcal{C}.\mathfrak{U}$ et $\mathcal{C}.\mathcal{E}$ dans la seconde.

23. *Domaine d'ultraconvergence et domaine d'existence.* — Nous avons constaté que l'on peut se donner *a priori*, de façon complètement arbitraire, les domaines de convergence uniforme d'une suite partielle de polynomes-sections, en particulier le domaine d'ultraconvergence (§ 13). Les résultats que nous venons d'obtenir montrent qu'au contraire il n'est pas possible de se donner à la fois *a priori* le domaine d'existence $\mathcal{E}$ et le domaine d'ultraconvergence $\mathfrak{U}$ d'une suite partielle en observant seulement les conditions imposées par les théorèmes de

M. Ostrowski [1]. On peut également se rendre compte de ce fait par les considérations suivantes :

D'après le théorème fondamental, on peut, étant donné $\mathcal{U}$, retrancher de la série donnée une série de rayon de convergence $\geqq R$ de façon à faire apparaître des lacunes de largeur relative $\geqq \theta > 1$, R et θ dépendant uniquement de $\mathcal{U}$. Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ intérieurs à $|x| < R$: $\mathcal{T}$ est intérieur au domaine d'existence de la fonction définie comme somme de la série lacunaire obtenue ; donc (*voir* § 9) nous pouvons indiquer un domaine $\mathcal{G}$ dans lequel il y aura ultraconvergence pour la suite correspondante de sommes partielles de cette série. Désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points de $\mathcal{G}$ intérieurs à $\rho < R$: si $\mathcal{H}$ n'est pas intérieur à $\mathcal{U}$ (au sens large), le problème posé n'a sûrement pas de solution. Or la condition $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ n'est pas forcément vérifiée. En effet, traçons un arc *mn* qui traverse $\mathcal{E}$, et supposons *mn* intérieur à $\mathcal{U}$; on peut prendre pour θ et R les valeurs calculées au moyen de l'inégalité (7.1), $U(x)$ désignant la fonction, harmonique dans la région $\rho > 1$ fendue suivant *mn*, qui prend la valeur zéro sur *mn* et sur la circonférence-unité et qui présente la singularité $\log\rho$ à l'infini ; ces valeurs ne dépendent que de *mn* ; on peut donc indiquer pour $\mathcal{H}$ un domaine qui ne dépend que de l'arc *mn*. Or il est clair que l'on peut choisir un domaine $\mathcal{U}$ contenant *mn* et tel que la condition $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ ne soit pas vérifiée ; la figure 10 l'indique suffisamment.

Il résulte également, soit de considérations analogues aux précédentes, soit du paragraphe 22, qu'il n'est pas possible de se donner arbitrairement, sous les seules réserves imposées par les théorèmes de M. Ostrowski, *les domaines d'ultraconvergence de deux suites partielles différentes* de polynomes-sections ; il est par exemple impossible que l'un de ces domaines soit du type envisagé au paragraphe 22 et que le second ne lui soit pas intérieur (au sens large).

Dans tous les exemples d'ultraconvergence que je connais, la condition suivante est vérifiée ; *on peut trouver un cercle* $\mathcal{C}$, *contenant le*

---

[1] A savoir : $\mathcal{U}$ est intérieur à $\mathcal{E}$; si Γ est la plus grande circonférence de centre O qui limite un cercle C intérieur à $\mathcal{E}$, C est aussi intérieur à $\mathcal{U}$; enfin les ensembles $\Gamma.\mathcal{E}$ et $\Gamma.\mathcal{U}$ sont identiques. $\mathcal{U}$ est évidemment supposé simplement connexe et ne contenant pas le point à l'infini.

cercle de convergence, tel que $\mathcal{C}.\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{C}.\mathcal{E}$ *soient identiques* ($\mathcal{C}.\mathcal{U}$ désigne l'ensemble des points intérieurs à la fois à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{U}$).

Fig. 10.

En particulier, cette condition est vérifiée dans les cas suivants :

Série formée par le procédé du paragraphe 12, à partir d'une série ayant son cercle de convergence comme coupure;

Série formée par ce même procédé à partir d'une série vérifiant elle-même cette condition;

Série que l'on peut décomposer en une série qui présente des lacunes de largeur relative indéfiniment croissante et en une série à rayon de convergence plus grand.

Il serait intéressant d'indiquer un exemple *où cette circonstance ne se présente pas.*

C. — La « continuité » de la structure lacunaire.

24. Nous considérons une série ayant la structure lacunaire envisagée au paragraphe 4 :

$$\Sigma a_n x^n = \Sigma a_n^* x^n + \Sigma a_n^{**} x^n,$$

$$\overline{\lim} \, | a_n^{**} |^{\frac{1}{n}} < \overline{\lim} \, | a_n |^{\frac{1}{n}},$$

$$a_n^* = 0 \qquad \text{pour } m_k < n < m'_k,$$

$$\underline{\lim} \frac{m'_k}{m_k} > 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nous prenons un entier n_k compris entre m_k et m'_k et tel que, en

posant

$$\frac{m_k}{n_k} = \theta_k, \qquad \frac{n_k}{m'_k} = \theta'_k,$$

l'on ait

$$\overline{\lim}\, \theta_k < 1, \qquad \overline{\lim}\, \theta'_k < 1\,;$$

on peut alors supposer $\theta_k < \theta$, $\theta'_k < \theta$, θ étant un nombre inférieur à 1.

Supposons que la série $\Sigma a_n x^n$ ait le cercle-unité pour cercle de convergence, et que $x = 1$ soit un point singulier pour la fonction $f(x)$ qu'elle définit. Nous allons chercher à étudier le développement en série de Taylor de $f(x)$ autour d'un point $x = \xi = \lambda e^{i\varphi}$ du cercle-unité :

$$f(x) = \sum_0^\infty \alpha_\nu (x - \xi)^\nu;$$

pour cela, nous passerons par l'intermédiaire du développement de s_{n_k} autour du même point :

$$s_{n_k}(x) = \sum_0^{n_k} \alpha_\nu^{(k)} (x - \xi)^\nu.$$

Nous avons

$$\alpha_n - \alpha_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(x) - s_{n_k}(x)}{(x - \xi)^{n+1}}\, dx,$$

l'intégrale étant prise sur un cercle

$$|x - \xi| = \mu \qquad (\lambda + \mu < 1).$$

En tenant compte de (3.1), nous en déduisons par un calcul analogue à celui qui a mené à (4.1)

$$(1) \qquad \frac{1}{n} \log |\alpha_n - \alpha_n^{(k)}| < -\log \mu + \frac{n_k}{n} \left[\frac{1}{\theta'_k} \log(\lambda + \mu) + \varepsilon_{n_k}(x) \right]$$

$$\text{pour } \frac{n_k}{n} \geqq 1.$$

D'autre part, nous avons

$$\alpha_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{s_{n_k}(x)}{(x - \xi)^{n+1}}\, dx,$$

l'intégrale étant prise sur un cercle de centre ξ et de rayon $\mu' > 1$.

En utilisant (4.1), on trouve

$$(2)\qquad \frac{1}{n}\log|\alpha_n^{(k)}| < -\log\mu' + \frac{n_k}{n}[\theta_k\log(\lambda+\mu') + \varepsilon_{n_k}(x)].$$

L'inégalité (4.1) n'a été établie que pour une couronne $1<\rho<R_1$; nous supposerons λ et $\mu'-1$ assez petits pour que $\lambda+\mu'<R_1$.

On déduit de (2) qu'il est possible de trouver un nombre $C>1$ tel que l'on ait

$$(3)\qquad \frac{1}{n}\log|\alpha_n^{(k)}| < -\log\mu'_1, \qquad 1<\mu'_1<\mu', \qquad \text{pour } \frac{n_k}{n}<C,$$

à condition de prendre λ suffisamment petit : $\lambda<\lambda(C)$; un tel choix est en effet possible pour $\lambda=0$ à cause de $\theta_k<\theta<1$, et le second membre de (2) est une fonction continue de λ.

D'autre part, il résulte de (1) que l'on a pour λ assez petit

$$(4)\qquad \frac{1}{n}\log|\alpha_n-\alpha_n^{(k)}| < -\log\mu_1, \qquad \text{où } \mu_1>|1-\xi|;$$

pour l'établir, posons $\mu=1-\lambda-\eta$, puis, en désignant par τ une variable auxiliaire positive, $\lambda=L\tau$, $\eta=E\tau$; posons de même

$$\mu_1=|1-\xi|+\eta_1, \qquad \eta_1=E_1\tau.$$

Quand τ tend vers zéro, la partie principale de

$$-\log\mu+\frac{n_k}{n}\frac{1}{\theta'_k}\log(\lambda+\mu)$$

est

$$\left[L-E\left(\frac{1}{\theta'_k}\frac{n_k}{n}-1\right)\right]\tau,$$

que les conditions

$$\overline{\lim}\,\theta'_n<1, \quad \frac{n_k}{n}\geqq 1$$

permettent de majorer par $(L-pE)\tau$ où p est une quantité positive; la partie principale de $-\log\mu_1$ est $(L\cos\varphi-E_1)\tau$, au moins égale à $-(L+E_1)\tau$; prenons L et E tels que $pE-2L>0$, puis E_1 tel que $-(L+E_1)>L-pE$ (E, L, E_1 positifs); si nous donnons à τ une valeur suffisamment petite, $\tau<\tau_1$, nous aurons

$$-\log\mu_1>-\log\mu+\frac{n_k}{n}\cdot\frac{1}{\theta'_k}\cdot\log(\lambda+\mu);$$

comme le produit $\frac{n_k}{n}\varepsilon_{n_k}(x)$ tend vers zéro pour $\frac{n_k}{n} < C$, l'inégalité (4) sera vérifiée pour les valeurs suffisamment grandes de k.

μ_0 désignant le plus petit des deux nombres μ_1 et μ'_1, la comparaison de (3) et (4) montre que l'on a

$$\overline{\lim}^{*} \frac{1}{n} \log|\alpha_n| \leqq -\log \mu_0, \tag{5}$$

l'astérisque indiquant que l'on considère seulement les n qui vérifient $1 \leqq \frac{n_k}{n} < C$ pour un n_k au moins.

Donc, si μ_0 est supérieur au rayon de convergence de $\Sigma\alpha_n(x-\xi)^n$, nous pourrons affirmer que cette série a la même structure « lacunaire » que la série donnée $\Sigma a_n x^n$; or, le rayon de convergence en question est au plus $|1-\xi|$; observons que la valeur de μ'_1 déterminée pour un point $\xi = \xi_0$ convient *a fortiori* pour tout point ξ, $|\xi| < |\xi_0|$; déterminons en conséquence une valeur de μ'_1 convenant pour un point ξ_0; ce μ'_1 est supérieur à 1; d'autre part on a, en tout point ξ, $\mu_1 > |1-\xi|$; si nous prenons $|\xi| < |\xi_0|$, $|\xi| < \mu_1 - 1$, la condition $\mu_0 > |1-\xi|$ sera sûrement vérifiée.

Supposons de plus que l'on puisse faire apparaître dans la série $\Sigma a_n x^n$ *des lacunes de largeur relative croissant indéfiniment :* $\frac{m'_k}{m_k} \to \infty$; nous pouvons alors supposer $\theta_k \to 0$, $\theta'_k \to 0$; (1) entraîne alors

$$\frac{1}{n} \log|\alpha_n - \alpha_n^{(k)}| \to -\infty$$

quand n_k croît indéfiniment

Prenons $\frac{n_k}{n} < g(k)$, où $g(k)$ augmente indéfiniment avec k mais de façon suffisamment lente pour que les produits $g(k)\theta_k$ et $g(k).\ \varepsilon_{n_k}(x)$ qui apparaissent au second membre de (2) quand on y remplace $\frac{n_k}{n}$ par $g(k)$ tendent vers zéro [1]. Cette inégalité entraîne alors

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \log|\alpha_n^{(k)}| \leqq -\log \mu';$$

---

[1] Il paraît difficile de donner un résultat plus précis; si l'on se reporte au calcul fait

la comparaison des deux résultats montre que

$$\overline{\lim}^{*} \frac{1}{n} \log |\alpha_n| \leqq -\log \mu', \tag{6}$$

l'astérisque indiquant ici que l'on considère uniquement les n qui vérifient l'inégalité

$$1 \leqq \frac{n_k}{n} < g(k) \tag{7}$$

pour une valeur au moins de k.

(6) et (7) montrent que pour $|\xi| < \mu' - 1$ (et $|\xi| > 1$), le développement de $f(x)$ autour du point $x = \xi$ présente la même structure que son développement autour de l'origine : on peut y faire apparaître des lacunes dont la largeur relative augmente indéfiniment.

La seule condition imposée au nombre $\mu' > 1$ est que $\lambda + \mu'$ soit inférieur au rayon extérieur R_1 de la couronne dans laquelle nous avons établi la validité de (4.1). Introduisons l'hypothèse supplémentaire que dans la décomposition

$$\Sigma a_n x^n = \Sigma a_n^{*} x^n + \Sigma a_n^{**} x^n,$$

la seconde série représente une fonction entière; μ' peut alors être pris arbitrairement grand, de sorte que le développement de $f(x)$ autour d'un point quelconque $x = \xi$ intérieur au cercle de convergence se partage en une série à lacunes de largeur relative croissant indéfiniment et en une série qui représente une fonction entière [1].

Nous allons voir que la même propriété appartient à tout point intérieur au domaine d'ultraconvergence $\mathfrak{U}$ de la suite $\{s_{n_k}\}$, c'est-à-dire, d'après un théorème de M. Ostrowski (*voir* § 9), à tout point du domaine d'existence de $f(x)$. Il suffit de trouver une inégalité qui remplace (1); on peut d'ailleurs se borner au cas où tous les a_n^{**} sont nuls, et où, par conséquent, $s_{n_k} = s_{m'_k}$.

Traçons une courbe Γ fermée, sans point double, entourant le

---

pour majorer les s_{n_k} (§ 2), on voit que l'on peut former des séries pour lesquelles l'$\varepsilon_{n_k}(x)$ en question tend vers zéro de manière arbitrairement lente; on peut par exemple prendre les a_n positifs et supérieurs à 1, la fonction $n(\delta)$ qui caractérise la répartition des $|a|^{\frac{1}{n}}$ autour de leur limite supérieure étant très lentement croissante quand δ, > 1, tend vers *un*.

[1] Raisonnement analogue à celui du paragraphe 22 (*voir* p. 288).

point ξ envisagé, intérieure à $\mathfrak{U}$, pénétrant dans le cercle-unité, et telle que l'on sache résoudre le problème de Dirichlet pour l'intérieur de Γ (¹); la fonction harmonique

$$\frac{1}{m'_k}\log|f(x)-s_{n_k}(x)|$$

est majorée sur un arc pq de Γ intérieur au cercle-unité par $\log r+\varepsilon_{m'_k}(x)$ où r désigne une constante inférieure à 1, et sur l'arc complémentaire par $\varepsilon_{m'_k}(x)$. Considérons la fonction harmonique dans Γ qui prend les valeurs $\log r$ sur pq et zéro sur l'arc complémentaire; dans un cercle $|x-\xi|\leqq\mu$ complètement intérieur à Γ, cette fonction est inférieure à $\log u$, $u<1$. Nous avons donc pour n_k assez grand

$$\frac{1}{n}\log|\alpha_n-\alpha_n^{(k)}|<-\log\mu+\frac{n_k}{n}\frac{1}{\theta'_k}\log u,$$

qui entraîne bien

$$\frac{1}{n}\log|\alpha_n-\alpha_n^{(k)}|\to-\infty.$$

Résumons les résultats obtenus :

Nous considérons une série de Taylor (S), $\Sigma a_n x^n$, définissant une fonction analytique $f(x)$.

Nous envisageons pour (S) les structures suivantes :

Type (A) : somme d'une série ayant une infinité de lacunes de largeur relative bornée inférieurement et d'une série à rayon de convergence plus grand.

Type (B) : on suppose de plus que la largeur relative des lacunes augmente indéfiniment.

Type (C) : somme de deux séries dont l'une a des lacunes de largeur relative croissant indéfiniment et dont la seconde représente une fonction entière.

Type (D) : somme de deux séries dont l'une a des lacunes de largeur relative croissant indéfiniment et dont l'autre converge dans tout le domaine d'existence de la fonction définie par la série donnée (S).

(¹) Comme au paragraphe 8, on peut remplacer la considération de Γ par celle d'une chaîne de cercles et ne faire appel qu'à l'intégrale de Poisson.

Alors : *Si* (S) *est du type* (A) *ou du type* (B), *le développement de* $f(x)$ *en série de Taylor autour de tout point suffisamment voisin de l'origine appartient à ce même type* (A) *ou* (B).

Si (S) *est du type* (C), *il en est de même du développement de* $f(x)$ *en série de Taylor autour d'un point quelconque de son domaine d'existence.*

Un théorème analogue est valable pour le type D (appliquer à la première série de la décomposition le théorème établi pour le type C).

En faisant appel à un théorème, déjà utilisé plusieurs fois, de M. Ostrowski, nous pouvons compléter ainsi ce dernier énoncé :

Si (S) *est du type* (C), *le développement de* $f(x)$ *en série de Taylor autour d'un point quelconque de son domaine d'existence* $\mathcal{E}$ *possède une suite partielle de polynomes-sections* $\{s_{n_k}\}$ *qui converge uniformément vers* $f(x)$ *dans* $\mathcal{E}$ *tout entier, et l'on peut prendre la même suite* $\{n_k\}$ *pour tous les points de* $\mathcal{E}$. Le même théorème est valable pour le type D.

Il est très remarquable que, dans ce cas, le développement en série de Taylor suffise à représenter la fonction dans tout le domaine d'existence, et cela d'une manière encore plus complète que ne le laissait pressentir le théorème cité.

Un exemple du cas étudié en dernier lieu est fourni par les séries pour lesquelles une suite partielle de polynomes-sections a un domaine d'ultraconvergence $\mathcal{U}$ tel que

$$\lim_{R \to \infty} 2\omega(R) = 2\pi$$

$2\omega(R)$ désignant la mesure (en radians) de l'ensemble des points de la circonférence $\rho = R$ intérieurs à $\mathcal{U}$ (§ 22).

Remarque. — Les théorèmes du paragraphe 9 exigent, dans le cas de l'ultraconvergence, une loi de répartition extrêmement régulière des $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ au voisinage des lacunes; il aurait donc été naturel de penser que pour une série lacunaire donnée *a priori* de manière quelconque, l'ultraconvergence est un phénomène exceptionnel, le cas normal étant que la fonction définie par la série admette le cercle de convergence comme coupure. Les considérations précédentes nous amènent à modifier cette conception : l'ultraconvergence d'une série lacunaire

doit être considérée comme le phénomène général, en ce sens que la fonction définie par une série lacunaire admet autour de tout point d'un certain voisinage de l'origine, *sauf peut-être autour de l'origine elle-même*, un développement à structure lacunaire pour lequel l'ultraconvergence se présente.

D. — L'ultraconvergence et les procédés de sommation.

25. *Le procédé des moyennes arithmétiques.* — L'ultraconvergence consiste en ceci : étant donnée une série de Taylor

$$\text{(T)} \qquad \sum_0^\infty a_n x^n$$

qui, à l'intérieur de son cercle de convergence $\rho < 1$, représente une fonction analytique $f(x)$, il peut arriver qu'en prenant une suite particulière $\{s_{n_k}\}$ de ces sommes, on obtienne une représentation de $f(x)$ dans un domaine plus étendu que le cercle de convergence. On peut se demander si la même méthode ne permet pas d'élargir le domaine dans lequel un procédé donné de sommation, appliqué à (T), fournit une représentation de $f(x)$. Nous allons étudier cette question pour le procédé des moyennes arithmétiques.

Posons donc

$$\text{(1)} \qquad S_n(x) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1} + s_n}{n+1}$$
$$= a_0 + \frac{n}{n+1} a_1 x + \ldots + \frac{n+1-\nu}{n+1} a_\nu x^\nu + \ldots + \frac{a_n x^n}{n+1};$$

le calcul fait au paragraphe 2 pour majorer les s_n en dehors du cercle de convergence s'applique sans modification aux S_n; d'autre part, l'intégrale de Cauchy permet encore d'exprimer les coefficients de (T) à partir des S_n :

$$\text{(2)} \qquad \frac{n+1-\nu}{n+1} a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{S_n(x)}{x^{\nu+1}} dx \qquad \text{pour } \nu \leqq n;$$

le calcul du paragraphe 5 et les conclusions qu'on en a tirées restent donc valables. Par suite :

Si une suite partielle $\{S_{n_k}(x)\}$ *converge vers* $f(x)$ *dans un domaine*

plus étendu que le cercle de convergence — ou plus généralement si sa divergence dans un certain domaine extérieur à ce cercle est d'un type moins rapide que celui qui est caractérisé par (2.3) — *on peut, en retranchant de* (T) *une série à rayon de convergence plus grand, faire apparaître à la fin des* s_{n_k} *des lacunes de largeur relative bornée inférieurement.*

Le *second* théorème de M. Ostrowski s'étend donc au cas qui nous intéresse ici. Il ne semble pas en être de même du *premier* théorème; ceci tient à ce que la convergence des S_n vers $f(x)$ dans $\rho < 1$ n'admet pas une évaluation analogue à celle qui s'applique aux s_n.

Montrons que l'ultraconvergence d'une suite $\{S_{n_k}\}$ peut effectivement se présenter. Considérons une série lacunaire :

$$a_n = 0 \qquad \text{pour } m_k < n \leqq n_k;$$

alors

$$S_{n_k} = \frac{n_k + 1 - m_k}{n_k + 1} s_{m_k} + \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{m_k - 1}}{n_k + 1};$$

en utilisant (2.3), on voit que le module du second terme est majoré par $\frac{1}{n_k + 1}\left[\frac{(\delta\rho)^{m_k+1} - 1}{\delta\rho - 1} + \text{const.}\right]$; par suite :

S'il existe un nombre $A > 1$ *tel que* $\frac{A^{m_k}}{n_k} \to 0$ — *donc, en particulier, si* $m_k = o(\log n_k)$ — *la suite* $\{S_{n_k}\}$ *converge uniformément autour de tout point de la circonférence-unité qui est un point régulier pour* $f(x)$. Il existe d'ailleurs bien des séries pour lesquelles la condition précédente est vérifiée sans que le cercle de convergence soit une coupure; ceci résulte par exemple du paragraphe 16.

En nous restreignant aux séries dans lesquelles on peut faire apparaître des lacunes suffisamment larges, nous obtenons donc une généralisation du premier théorème de M. Ostrowski.

26. *Autres procédés de sommation.* — Il est clair que le phénomène de l'ultraconvergence ne peut se présenter pour toute méthode de sommation; en particulier, il ne se présente certainement pas pour la méthode de Mittag-Loeffler, qui donne une représentation de $f(x)$ dans toute l'étoile principale. Cherchons à quelles conditions les calculs précédents restent valables.

Nous supposons donnés des coefficients $\gamma_m^{(n)}$, définis pour $m \leqq n$, et nous formons les polynomes

$$(1) \qquad P_n(x) = \gamma_0^{(n)} a_0 + \gamma_1^{(n)} a_1 x + \ldots + \gamma_{n-1}^{(n)} a_{n-1} x^{n-1} + \gamma_n^{(n)} a_n x^n;$$

nous supposons les $\gamma_m^{(n)}$ tels que les P_n convergent uniformément vers $f(x)$ dans le cercle-unité. Pour qu'à partir de la formule

$$a_m = \frac{1}{\gamma_m^{(n)}} \oint \frac{P_n(x)}{x^{m+1}} dx$$

nous puissions reprendre le raisonnement du paragraphe 5, il faudra, d'une part, que les P_n vérifient une inégalité de la forme (2.3), d'autre part, que $|\gamma_m^{(n)}|^{\frac{1}{m}} \to 1$ lorsque n augmente indéfiniment, au moins quand le rapport $\frac{m}{n}$, inférieur à 1, reste supérieur à un nombre positif fixe (d'ailleurs quelconque).

Un cas particulièrement important où l'inégalité (2.3) s'étend immédiatement est celui où les $\gamma_m^{(n)}$ sont tous positifs et inférieurs à *un*; il suffit alors que la seconde condition soit remplie.

Voici différentes applications :

1° Comme cas particulier, on retrouve les résultats précédents sur la sommation par les moyennes arithmétiques.

2° Ces résultats s'étendent aux *méthodes de sommation de Cesàro et de Hölder*.

3° Plus généralement, les mêmes considérations s'appliquent *à la sommation par une série divergente retournée* Σc_n :

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n, \qquad c_n > 0, \qquad C_n \to \infty, \qquad \frac{c_n}{C_n} \to 0;$$

$$P_n = \frac{c_n s_0 + c_{n-1} s_1 + \ldots + c_1 s_{n-1} + c_0 s_n}{C_n}$$

$$= a_0 + \frac{C_{n-1}}{C_n} a_1 x + \ldots + \frac{C_{n-m}}{C_n} a_m x^m + \ldots + \frac{C_0}{C_n} a_n x^n.$$

En effet, on a dans ce cas

$$\frac{c_n}{C_n} \to 0, \qquad \frac{C_n - C_{n-1}}{C_n} \to 0, \qquad \frac{C_{n-1}}{C_n} \to 1,$$

d'où

$$\lim (C_n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

4° Elles s'appliquent encore *à la sommation par une série divergente* Σc_n

$$C_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n \quad (c_n > 0), \qquad C_n \to \infty,$$

pourvu que la croissance des C_n *soit suffisamment rapide* (¹).

On a en effet

$$P_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_{n-1} s_{n-1} + c_n s_n}{C_n}$$
$$= a_0 + \left(1 - \frac{C_0}{C_n}\right) a_1 x + \ldots + \left(1 - \frac{C_{m-1}}{C_n}\right) a_m x^m + \ldots + \left(1 - \frac{C_{n-1}}{C_n}\right) a_n x^n;$$

la condition $\left(1 - \frac{C_{m-1}}{C_n}\right)^{\frac{1}{m}} \to 1$ est remplie si $\overline{\lim} \frac{C_{n-1}}{C_n} < 1$, ou encore si les $\frac{C_{n-1}}{C_n}$ tendent vers 1 de façon suffisamment lente.

Le fait que les méthodes de sommation précédentes ne peuvent présenter des phénomènes d'ultraconvergence que lorsqu'on les applique à une série à structure lacunaire est étroitement lié à l'impossibilité de sommer par ces méthodes une série entière hors du cercle de convergence (pour la démonstration de cette impossibilité, *voir* le Mémoire cité de M. Leja).

Je n'aborderai pas ici l'examen des phénomènes d'ultraconvergence dans d'autres méthodes de sommation.

27. *Application des méthodes de sommation à une suite partielle.* — Dans le même ordre d'idées, on peut se demander à quelles conditions une méthode de sommation, appliquée à une suite partielle $\{s_{n_k}\}$ de polynomes-sections, permet de représenter $f(x)$ dans un domaine extérieur au cercle de convergence. Ce problème se ramène au précédent : appliquer à $\{s_{n_k}\}$ la méthode de sommation définie par un tableau $(\gamma_m^{(n)})$ de coefficients revient à appliquer à la série un procédé

(¹) Cette restriction est indispensable; M. Leja a montré en effet que toute série de Taylor qui possède une suite partielle ultraconvergente de polynomes-sections peut être sommée dans tout le domaine d'ultraconvergence par une série divergente convenablement choisie (il suffit d'une modification insignifiante au raisonnement de M. Leja pour obtenir l'énoncé sous cette forme).

Voir F. Leja, *Sur la sommation des séries entières par la méthode des moyennes*, *Bull. Sc. math.*, 54, 1930, p. 239.

de sommation défini par *un autre tableau* de coefficients, qui dépend de la suite $\{n_k\}$.

A titre d'exemple, étudions la sommation de $\{s_{n_k}\}$ par les moyennes arithmétiques.

Nous posons par conséquent

$$P_{n_k} = \frac{s_{n_1} + s_{n_2} + \ldots + s_{n_{k-1}} + s_{n_k}}{k};$$

le coefficient de $a_m x^m$ dans P_{n_k} est

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{k}, & \text{si } n_{k-1} < m \leqq n_k; \\ \frac{2}{k}, & \text{si } n_{k-2} < m \leqq n_{k-1}; \\ \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

il est en tout cas compris (au sens large) entre $\frac{1}{k}$ et 1. Or $(k)^{\frac{1}{n_k}}$, compris entre $(k)^{\frac{1}{k}}$ et 1, tend vers 1; la condition indiquée au paragraphe précédent est donc vérifiée : quand m et n_k augmentent indéfiniment de telle sorte que $\frac{m}{n_k} < 1$ et $\underline{\lim} \frac{m}{n_k} > 0$, $(\gamma_m^{(n_k)})^{\frac{1}{n_k}} \to 1$. Si la suite $\{P_{n_k}\}$ est ultraconvergente, on peut donc faire apparaître à la fin des s_{n_k} des lacunes de largeur relative bordée inférieurement; *l'application à $\{s_{n_k}\}$ de la méthode des moyennes arithmétiques ne permet donc de représenter $f(x)$ dans un domaine sortant du cercle de convergence que lorsque la suite $\{s_{n_k}\}$ est elle-même ultraconvergente.*

On arrive aux mêmes conclusions pour la sommation *par une série divergente retournée;* si l'on pose en effet

$$P_{n_k} = \frac{c_k s_{n_0} + c_{k-1} s_{n_1} + \ldots + c_0 s_{n_k}}{C_k},$$

le coefficient de $a_m x^m$ dans P_{n_k} est

$$\begin{array}{ll} \frac{C_0}{C_k}, & \text{si } n_{k-1} < m \leqq n_k; \\ \frac{C_1}{C_k}, & \text{si } n_{k-2} < m \leqq n_{k-1}; \end{array}$$

il est en tout cas compris (au sens large) entre $\frac{C_0}{C_k}$ et 1; en tenant compte de $\lim (C_n)^{\frac{1}{n}} = 1$, le raisonnement se termine comme plus haut.

En ce qui concerne la sommation *par une série divergente*, le problème ne diffère pas de celui qu'on a étudié au paragraphe précédent; on peut en effet sans aucun inconvénient remplacer la condition $c_n > 0$ par $c_n \geqq 0$; il revient alors au même de sommer la suite $\{s_{n_k}\}$ par la série Σc_n ou de sommer $\Sigma a_n x^n$ par la série Σc_n^* ainsi définie

$$c_{n_k}^* = c_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$c_n^* = 0$ si n n'est pas un n_k.

28. *Sur la sommation d'une série de Taylor par une série divergente.* — M. Leja a montré (*voir* la note du paragraphe 26) que certaines séries de Taylor peuvent être sommées en dehors de leur cercle de convergence au moyen d'une série divergente Σc_n convenablement choisie [1].

Il est parti pour cela d'une série ayant une suite partielle ultraconvergente de polynomes-sections.

Nous allons établir que *toute série de Taylor qui est sommable par une série divergente dans un domaine extérieur au cercle de convergence* (séparé ou non de ce dernier) *est à structure lacunaire* au sens du paragraphe 4.

Partons de l'expression de P_n (§ 26)

$$P_n = a_0 + \left(1 - \frac{C_0}{C_n}\right) a_1 x + \ldots + \left(1 - \frac{C_{m-1}}{C_n}\right) a_m x^m + \ldots + \left(1 - \frac{C_{n-1}}{C_n}\right) a_n x^n;$$

la convergence des P_n dans un domaine extérieur au cercle de convergence $\rho < 1$ de la série $\Sigma a_n x^n$ permet de reprendre pour la suite $\{P_n\}$ un calcul analogue à celui qui a été fait au paragraphe 5 pour la suite $\{s_{n_k}\}$; on obtient ainsi

$$\left(1 - \frac{C_{m-1}}{C_n}\right)^{\frac{1}{m}} |a_m|^{\frac{1}{m}} < \lambda^2 \qquad \text{pour } \theta n \leqq m \leqq n,$$

---

[1] Ceci devient évident si l'on admet des c_n nuls; il suffit de partir d'une suite ultraconvergente $\{s_{n_k}\}$ et de poser $c_{n_k} = 1$, et $c_n = 0$ quand n n'est pas un n_k.

θ et λ étant des constantes inférieures à 1. Cette inégalité équivaut à

$$C_n < \frac{C_{m-1}}{1 - \frac{\lambda^{2m}}{|a_m|}}. \tag{1}$$

Supposons alors qu'il soit impossible de faire apparaître dans la série donnée une infinité de lacunes dont la largeur relative soit au moins $\frac{1}{\theta^2}$ en en retranchant une série de rayon de convergence $\geqq \frac{1}{\lambda}$; on peut alors associer à tout n suffisamment grand un ν tel que

$$\theta < \frac{n}{\nu} < \frac{1}{\theta}, \qquad |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} > \lambda;$$

nous avons donc une suite infinie $\nu_1, \nu_2, \ldots$ telle que

$$1 < \frac{\nu_{k-1}}{\nu_k} < \frac{1}{\theta}, \qquad |a_{\nu_k}| > \lambda^{\nu_k}.$$

Il résulte alors de (1) que

$$C_{\nu_k} < C_{\nu_1} \frac{1}{1 - \lambda^{\nu_1}} \frac{1}{1 - \lambda^{\nu_2}} \cdots \frac{1}{1 - \lambda^{\nu_{k-1}}}; \tag{2}$$

$\frac{1}{1 - \lambda^{\nu_{k+1}}}$ étant inférieur à $\frac{1}{1 - \lambda^{\frac{\nu_1}{\theta^k}}}$ et le produit infini $\prod_k \frac{1}{1 - \lambda^{\frac{\nu_1}{\theta^k}}}$ étant convergent, il y a contradiction entre (2) et la divergence de Σc_n.

SECONDE PARTIE.

L'ULTRACONVERGENCE DANS CERTAINES SÉRIES DE FONCTIONS ANALYTIQUE

A. — Séries $\Sigma a_n u_n(x)$ où $\frac{1}{n}\log|u_n(x)| \to u(x)$.

29. Soit une suite de fonctions analytiques $u_n(x)$, régulières et uniformes dans un domaine $\mathcal{D}$; aucune hypothèse particulière n'est faite sur ce dernier, qui peut être situé sur le plan simple ou sur une surface de Riemann, et dont l'ordre de connexion est quelconque, fini

ou non. Nous supposerons que dans $\mathcal{D}$ les fonctions harmoniques $\frac{1}{n}\log|u_n(x)|$ tendent vers une fonction harmonique $u(x)$, qui peut présenter des singularités; nous supposerons la convergence *uniforme* dans tout domaine intérieur à $\mathcal{D}$ où $u(x)$ est régulière; les singularités de $u(x)$ sont alors des points d'accumulation de celles des $\frac{1}{n}\log|u_n(x)|$, c'est-à-dire des points d'accumulation des zéros des $u_n(x)$; les points singuliers isolés de $u(x)$ sont par suite des infinis négatifs; nous conviendrons d'exclure de $\mathcal{D}$ les points singuliers non isolés de $u(x)$. Nous désignerons par $v(x)$ la fonction $e^{u(x)}$.

Considérons alors une série

$$(\mathrm{S}) \qquad \sum_0^\infty a_n u_n(x);$$

si nous posons

$$\alpha = \overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}},$$

l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ autour desquels la série (S) converge uniformément est défini par l'inégalité $u(x) + \log\alpha < 0$; il est constitué par des domaines [1], en nombre fini ou infini, où la série définit des fonctions analytiques qui peuvent être différentes.

30. *Majoration pour les sommes partielles à l'extérieur de la région de convergence.* — Le calcul est presque identique à celui du paragraphe 2. Nous posons

$$s_n(x) = \sum_0^\infty a_\nu u_\nu(x);$$

δ étant supérieur à 1 mais arbitrairement voisin de 1, nous avons

$$|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < \alpha\delta \qquad \text{pour } \nu > n'(\delta),$$

$$|u_\nu|^{\frac{1}{\nu}} < \delta\, v(x) \qquad \text{pour } \nu > n''(\delta),$$

---

[1] Le mot *domaine* désigne selon l'usage un ensemble *ouvert* et *connexe*.

d'où pour $\nu > n(\delta)$, avec

$$n(\delta) = \max[n'(\delta), n''(\delta)],$$

$$|s_n(x)| < \sum_0^{n(\delta)} |a_\nu u_\nu(x)| + \sum_0^{n} [\delta^2 \alpha \varphi(x)]^\nu$$

$$< \sum_0^{n(\delta)} |a_\nu u_\nu(x)| + [\delta^2 \alpha \varphi(x)]^n \frac{\delta^2 \alpha \varphi(x)}{\delta^2 \alpha \varphi(x) - 1}.$$

Si x reste dans la région

$$-\log\alpha + \log\delta' < u(x) < M, \qquad \delta' < 1, \qquad \delta^2\delta' > 1,$$

on obtient

$$(1) \qquad \frac{1}{n}\log|s_n(x)| < u(x) + \log\alpha + 2\log\delta + \frac{h}{n};$$

cette inégalité peut également s'écrire

$$(2) \qquad \frac{1}{n}\log|s_n(x)| < u(x) + \log\alpha + \varepsilon_n(x);$$

sous cette forme, elle est valable dans $\mathfrak{D}$ à l'exclusion des domaines de convergence de (S). Pour la notation $\varepsilon_n(x)$, voir le paragraphe 1.

31. *Majorations pour les restes.* — D étant l'un des domaines de convergence de la série (S), soit $f(x)$ la fonction analytique définie par la série dans ce domaine; posons $r_n(x) = f - s_n$; r_n est ainsi défini dans le domaine d'existence de $f(x)$, et est représenté dans D par

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_\nu u_\nu(x).$$

1° *Majoration dans* D : Si $\eta\delta^2 < 1$, on a, dans

$$u(x) < -\log\alpha + \log\eta,$$

et pour $n > n(\delta)$,

$$|r_n(x)| \leqq \sum^{\infty} |a_\nu||u_\nu(x)| < \sum^{\infty} [\delta^2\alpha\varphi(x)]^\nu = [\delta^2\alpha\varphi(x)]^\nu \frac{\delta^2\alpha\varphi(x)}{1 - \delta^2\alpha\varphi(x)},$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{1}{n}\log|r_n(x)| < u(x) + \log\alpha + 2\log\delta + \frac{h_1}{n};$$

cette majoration reste valable *a fortiori* pour $r_{n,p} = s_{n+p} - s_n$.

2° *Majoration dans le domaine d'existence de* $f(x)$. Prenons un domaine Δ intérieur à $\mathcal{D}$ et au domaine d'existence de $f(x)$, et tel que l'on ait dans Δ

$$u(x) \geqq \log\frac{\delta'}{\alpha} \qquad (\delta' > 1);$$

on a dans Δ $|f(x)| < M$ et, comme $r_n = f - s_n$,

$$|r_n| \leqq |f| + |s_n| < 2\max[M, |s_n(x)|],$$

d'où, d'après (30.1),

$$(2)\qquad \frac{1}{n}\log|r_n(x)| < u(x) + \log\alpha + 2\log\delta + \frac{h_2}{n},$$

$\delta > 1$ étant tel que $\delta^2\delta' > 1$.

3° *Dans un domaine où* $u(x) < -\log\alpha + \log\delta'$ *et où* $u(x)$ *est bornée supérieurement*, on a

$$(3)\qquad \frac{1}{n+p}\log|r_{n,p}(x)| < u(x) + \log\alpha + 2\log\delta + \frac{h_3}{n}$$

si $\delta^2\delta' > 1$, $n > n(\delta)$ [résulte de la démonstration de (30.1)].

4° *Dans tout domaine intérieur à* $\mathcal{D}$ *et au domaine de régularité de* $f(x)$, et où $u(x)$ est bornée supérieurement, on a

$$(4)\qquad \frac{1}{n}\log|r_n(x)| < u(x) + \log\alpha + 2\log\delta + \frac{h_4}{n}$$

pour $n > n(\delta)$; cette inégalité s'établit comme (3.4).

Nous pouvons écrire en définitive

$$(5)\qquad \frac{1}{n}\log|r_n(x)| < u(x) + \log\alpha + \varepsilon_n(x),$$

cette inégalité étant valable dans la région commune à $\mathcal{D}$ et au domaine d'existence de $f(x)$.

32. Théorème I. — *La convergence uniforme d'une suite partielle* $\{s_{n_k}\}$

autour d'un point-frontière d'un domaine de convergence D *de la série* (S) *entraîne la convergence uniforme de cette même suite autour de tout point-frontière de* D *intérieur à* $\mathcal{D}$ *et au domaine d'existence de la fonction analytique* $f(x)$ *définie par la série dans* D.

Soit en effet x_0 un tel point; traçons un contour Λ entourant x_0 qui ne sorte ni de $\mathcal{D}$, ni du domaine d'existence de $f(x)$, et dont un arc mpm' soit intérieur au domaine d'ultraconvergence de la suite $\{s_{n_k}\}$. Nous avons sur cet arc la majoration $\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}| < \varepsilon_{n_k}(x)$, et sur le reste de Λ la majoration (31.5); par suite, si $l(x)$ désigne la fonction harmonique dans Λ qui prend les valeurs O sur l'arc mpm' et $u(x) + \log\alpha$ sur le reste du contour, on a dans Λ

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}| < l(x) + \varepsilon_{n_k}(x).$$

$l(x)$ étant inférieure à $u(x) + \log\alpha$ en tout point intérieur à Λ est

Fig. 11.

négative en x_0, d'où résulte la convergence uniforme de $\{s_{n_k}\}$ autour de ce point.

33. Théorème II. — Supposons que pour une suite partielle $\{s_{n_k}\}$ *l'inégalité* (30.2) *puisse être améliorée;* nous entendons par là, en accord avec les résultats obtenus pour les séries de Taylor, que l'on a l'inégalité

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < U(x) + \varepsilon_{n_k}(x) \tag{1}$$

sur un ensemble fermé **E** *qui ne soit pas de capacité nulle*, **E** étant intérieur à $\mathcal{D}$ mais non intérieur aux domaines de convergence de (S),

et la fonction $U(x)$ étant sur $\mathbf{E}$ continue et inférieure à $u(x) + \log\alpha$. Considérons alors un point x_0 intérieur à $\mathcal{D}$, qui a les propriétés suivantes : x_0 est point-frontière de celui des domaines définis par

$$u(x) + \log\alpha > 0$$

qui contient $\mathbf{E}$; x_0 est un point régulier pour la fonction analytique $f(x)$ définie par la série dans celui (¹) des domaines de convergence dont x_0 est un point-frontière.

Sous ces hypothèses, la suite $\{s_{n_k}\}$ *est ultraconvergente en* x_0, la fonction limite étant $f(x)$ (²).

Démonstration. — Tout d'abord, on peut supposer que la condition (1) est vérifiée dans un domaine Δ (*voir* la fin du paragraphe 10).

Traçons alors un cercle (γ) de centre x_0 intérieur au domaine de

Fig. 12.

régularité de $f(x)$, puis un contour Λ (courbe analytique ou ligne polygonale), fermé et sans point double, qui soit intérieur à $\mathcal{D}$ ainsi qu'à la région $u(x) + \log\alpha > 0$, et qui pénètre dans Δ et dans (γ).

$w(x)$ désignant la fonction harmonique dans Λ dont les valeurs sur le contour sont $U(x)$ dans Δ, $u(x) + \log\alpha$ ailleurs, on a d'après (1)

(¹) Éventuellement dans *l'un* de ces domaines.

(²) Dans le cas signalé à la note précédente, la série (S) a donc pour somme la même fonction analytique $f(x)$ dans tous les domaines de convergence qui ont x_0 comme point-frontière.

et (30.2)

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < w(x) + \varepsilon_{n_k}(x) \qquad \text{dans } A.$$

Sur un arc plq de (γ) complètement intérieur à A, nous avons, en reprenant à partir de l'inégalité précédente le calcul qui a mené à (31.5)

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}(x)| < w(x) + \varepsilon_{n_k}(x);$$

sur l'arc complémentaire, nous utiliserons la majoration (31.5).

$t(x)$ désignant la fonction harmonique dans (γ) dont les valeurs sur le contour sont $w(x)$ sur plq et $u(x) + \log\alpha$ sur l'arc complémentaire, nous avons à l'intérieur de (γ)

$$\frac{1}{n_k}\log|r_{n_k}(x)| < t(x) + \varepsilon_{n_k}(x);$$

$t(x_0)$ étant inférieure à $u(x_0) + \log\alpha = 0$, la suite $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente en x_0.

34. *L'ultraconvergence serrée.* — Théorème III. — *Si l'inégalité*

$$(1) \qquad \frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}(x)| < \mathrm{U}(x) + \varepsilon_{n_k}(x)$$

est vérifiée sur un ensemble **E** *fermé et de capacité non nulle pour une suite* $\{s_{n_k}\}$ *telle que* $\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1$, *la fonction* $\mathrm{U}(x)$, *définie sur* **E**, *étant continue et inférieure à* $u(x) + \log\alpha$: *la suite* $\{s_{n_k}\}$ *est ultraconvergente en tout point-frontière, intérieur à* $\mathcal{D}$, *d'un domaine de convergence de la série* (S).

Posons

$$\mathrm{R}_k(x) = s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x);$$

dans les domaines de convergence, nous emploierons pour $\log|\mathrm{R}_k|$ la majoration (31.1); dans la partie de $\mathcal{D}$ extérieure aux domaines de convergence, nous ferons appel à (30.2) en observant que $|\mathrm{R}_k|$ ne surpasse pas le double du plus grand des nombres $|s_{n_k}(x)|$ et $|s_{n_{k+1}}(x)|$,

et en tenant compte de $\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1$. Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\frac{1}{n_k} \log |R_k(x)| < u(x) + \log\alpha + \varepsilon_{n_k}(x)$$

valable dans $\mathcal{D}$ tout entier.

D'autre part, dans les hypothèses indiquées, l'inégalité (1) est vérifiée dans un domaine Δ intérieur à la région $u(x) + \log\alpha > 0$ (fin du paragraphe 10).

Soit alors x_0 un point-frontière, intérieur à $\mathcal{D}$, d'un domaine de convergence de (S); traçons une courbe Λ fermée, sans point double, qui pénètre dans Δ et qui entoure x_0; nous avons dans Λ

$$\frac{1}{n_k} \log |R_k(x)| < w(x) + \varepsilon_{n_k}(x),$$

$w(x)$ étant la fonction harmonique dans Λ dont les valeurs sur le contour sont $U(x)$ en tout point intérieur à Δ et $u(x) + \log\alpha$ ailleurs Mais $w(x)$ est en x_0 inférieure à $u(x) + \log\alpha$, donc négative, donc encore négative dans un voisinage de x_0; on peut par suite indiquer un cercle (γ) de centre x_0 et une constante $\log q$, $q < 1$, de telle sorte que $\frac{1}{n_k} \log |R_k|$ soit inférieure à $\log q$ dans (γ) à partir d'une certaine valeur de k.

La série $\Sigma R_k(x)$, majorée dans (γ) par la série convergente Σq^{n_k}, y converge uniformément, ce qui signifie que $\{s_{n_k}\}$ converge uniformément au voisinage de x_0.

35. *Remarques.* — 1° Dans tous les raisonnements précédents, on peut utiliser au lieu d'un contour Λ une chaine de cercles (*voir* e paragraphe 8). Comme le théorème fondamental du paragraphe 7, les résultats énoncés ici sont de nature très élémentaire.

2° Si la suite partielle $\{s_{n_k}\}$ est ultraconvergente autour d'un point, elle est *en général* ultraconvergente autour de tout point-frontière, intérieur à $\mathcal{D}$, d'un domaine de convergence de (S), qui est un point régulier pour la fonction définie par (S) dans ce domaine. Cela résulte du théorème II quand la région $u(x) + \log\alpha > 0$ est d'un seul tenant; si l'un des domaines de convergence morcelle $\mathcal{D}$, on peut le « traverser » en ayant recours au théorème I. Ce raisonnement est

toutefois en défaut si un arc frontière d'un domaine de convergence D morcelle $\mathcal{D}$ et est en même temps une coupure pour la fonction définie par S dans D.

3° Si l'on sait *a priori* que la fonction définie par (S) dans un de ses domaines de convergence D a nécessairement un point singulier sur la frontière de D, et si D est complètement intérieur à $\mathcal{D}$, le théorème III exclut la possibilité de l'ultraconvergence serrée (¹).

4° Le premier théorème de M. Ostrowski (ultraconvergence d'une série lacunaire autour de tout point régulier) s'étend immédiatement aux séries que nous considérons. Par contre, le théorème réciproque n'est plus valable (²).

36. *Exemples :* 1° *Développements en séries de polynomes de Legendre.* — D'après la formule de Laplace

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^n d\varphi,$$

$\frac{1}{n}\log|P_n(x)|$ tend vers la plus grande détermination de $\log|x+\sqrt{x^2-1}|$. Cette fonction est harmonique et régulière, sauf sur le segment $(-1, +1)$ de l'axe réel. D'après les conventions du paragraphe 29, il y aurait lieu de prendre comme domaine $\mathcal{D}$ le plan fendu suivant ce segment; mais la coupure étant intérieure au domaine de convergence de la série $\Sigma a_n P_n(x)$ (lorsque celui-ci n'est pas vide) peut sans inconvénient être supprimée.

2° *Développements en séries de polynomes de Faber.* — Soit C une courbe fermée sans point double, formée d'un seul arc analytique, tracée dans le plan de la variable x; I et A désigneront l'intérieur et l'extérieur de C; $x = \psi(t) = \frac{1}{t} + a_0 + a_1 t + \ldots$ ou $t = \varphi(x)$ représentera conformément A sur un cercle $|t| < r$; $\psi(t)$ reste définie et uni-

(¹) Ainsi, cette impossibilité se trouve établie à nouveau pour les séries de Taylor. De même, *le phénomène d'ultraconvergence serrée ne peut pas se présenter pour une série de Dirichlet à coefficients positifs* (*voir* plus loin l'extension des théorèmes I à III aux séries de Dirichlet).

(²) Il ne suffit même pas, pour qu'il reste valable, que l'on ait un procédé régulier permettant de déduire de la fonction $f(x)$ les coefficients a_n de son développement (Exemple : séries de Dirichlet).

valente dans un cercle $|t| < r'$, $r' > r$; nous désignerons par C_ρ la courbe transformée du cercle $K_\rho : |x| = \rho$, $\rho < r'$ (¹). Les polynomes de Faber relatifs à I sont alors définis par la fonction génératrice $\frac{\tau\psi'(\tau)}{x - \psi(\tau)}$, P_n étant le coefficient de τ^n :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_{\rho'}} \frac{\psi'(\tau)}{x - \psi(\tau)} \frac{1}{\tau^n} d\tau,$$

cette expression étant valable lorsque x est extérieur à $C_{r'}$ et l'intégrale étant prise sur un cercle de rayon ρ' supérieur à ρ si x est sur C_ρ.

On en déduit aussitôt que $\frac{1}{n}\log P_n(x)$ tend uniformément vers $\log|\varphi(x)|$, à l'extérieur de $C_{r'}$; ce sera là le domaine $\mathcal{D}$.

Toute fonction $F(x)$ analytique à l'intérieur de $C_\rho (\rho < r')$ est développable en série de polynomes de Faber uniformément convergente dans C_ρ :

$$F(x) = \Sigma a_n P_n(x)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_\sigma} F(\psi(\tau))\tau^{n-1} d\tau$$

($\rho < \sigma < r'$, σ arbitrairement voisin de ρ).

Non seulement les théorèmes précédents sont valables pour les développements en série de polynomes de Faber, mais l'expression de a_n *permet d'étendre à ces développements toutes les propriétés établies pour les séries de Taylor* dans la première partie de ce travail (²).

3° *L'exemple de M. Harald Bohr* (³). Considérons la série $\Sigma(-1)^n e^{-\lambda_n x}$ où $\lambda_{2k} = 2k$, $\lambda_{2k+1} = 2k + e^{-k}$. Elle converge dans le demi-plan $\mathcal{R}(x) > 0$, et les sommes partielles de rang impair convergent uniformément partout. Nous avons ainsi un exemple très simple d'ultraconvergence serrée.

(¹) Ce sont les notations de Faber dans son Mémoire sur les polynomes de Tchebichef (*Journal de Crelle*, t. 150).

(²) M. Ostrowski ([2]) a signalé l'extension des deux théorèmes du paragraphe 9 et des résultats du paragraphe 24. — La validité des deux théorèmes du paragraphe 9 résulte immédiatement de la correspondance entre les points singuliers des fonctions définies par les deux séries $\Sigma a_n P_n(x)$ et $\Sigma a_n t^n$ (G. Faber, *Math. Ann.*, t. 64, p. 124).

(³) *Rendiconti... di Palermo*, t. 37, 1913. *Voir* le fascicule du *Mémorial* que M. Valiron a consacré aux séries de Dirichlet (p. 4).

37. *Extension au cas* $\frac{1}{\lambda_n}\log|u_n(x)| \to u(x)$. — On peut se demander dans quelle mesure les théorèmes que nous avons énoncés s'étendent aux séries de la forme $\Sigma a_n u_n(x)$ où les u_n ont la propriété suivante : il existe une suite de nombres λ_n croissant indéfiniment, tels que $\frac{1}{\lambda_n}\log|u_n(x)|$ tende vers une fonction harmonique $u(x)$ uniformément dans toute région du domaine considéré $\mathcal{D}$ où cette fonction est régulière. Les séries de Dirichlet, par exemple, rentrent dans cette catégorie.

Les démonstrations des théorèmes I, II, III s'étendront immédiatement si nous pouvons généraliser les inégalités (30.2) et (31.1), c'est-à-dire si

$$\frac{1}{\lambda_n}\log|s_n| < u(x) + \varepsilon_n(x) \qquad \textit{à l'intérieur},$$

$$\frac{1}{\lambda_n}\log|r_n| < u(x) + \varepsilon_n(x) \qquad \textit{à l'extérieur}$$

des domaines de convergence de la série.

Une première condition est que la série Σr^{λ_ν} converge pour tout r positif inférieur à *un*; elle n'est pas suffisante ([1]), il faut de plus que l'on ait

$$\frac{1}{\lambda_n}\log\sum_1^n r^{\lambda_\nu} < r + \varepsilon_n \qquad \text{pour } r > 1,$$

$$\frac{1}{\lambda_n}\log\sum_{n+1}^\infty r^{\lambda_\nu} < r + \varepsilon_n \qquad \text{pour } r < 1;$$

la croissance de λ_n ne doit donc pas être trop lente.

En particulier, les conditions indiquées sont vérifiées si $\underline{\lim}\,\frac{\lambda_n}{\log n} > 0$.

B. — Séries de Dirichlet.

38. Je considère une série de Dirichlet

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n x} \qquad (\lambda_n \to \infty,\ \lambda_{n+1} > \lambda_n),$$

([1]) Contrairement à ce que j'avais énoncé par mégarde dans ma Note aux Comptes rendus sur *L'ultraconvergence dans certaines séries de fonctions analytiques* (t. 195, p. 1216).

où $x = \sigma + it$; je supposerai que cette série a le demi-plan $\sigma > 0$ comme demi-plan de convergence et j'appellerai $f(x)$ la fonction analytique qu'elle y définit. Je pose encore

$$s_n(x) = \sum_1^n a_n e^{-\lambda_n x}, \qquad r_n(x) = f(x) - s_n(x).$$

Un calcul classique, qui utilise la transformation d'Abel et l'inégalité

$$|e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}| < \frac{|x|}{\sigma}(e^{-\lambda\sigma} - e^{-\mu\sigma}) \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ réels}, \lambda < \mu),$$

donne les majorations suivantes :

Dans un domaine borné intérieur au demi-plan $\sigma < 0$:

$$|r_n(x)| < \mathrm{H}\, e^{-\lambda_n(\sigma-\alpha)};$$

Dans un domaine borné intérieur au demi-plan de convergence $(\sigma > 2\beta)$:

$$|s_n(x)| < \mathrm{K}\, e^{-\lambda_{n+1}(\sigma-\beta)};$$

H et K sont des constantes dépendant du système considéré.

On déduit de là les inégalités suivantes :

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda_n}\log|s_n(x)| < -\sigma + \varepsilon_n(x),$$

valable dans le demi-plan de divergence de la série;

$$(2) \qquad \frac{1}{\lambda_n}\log|r_n(x)| < -\sigma + \varepsilon_n(x),$$

valable dans le domaine d'existence de $f(x)$. $\varepsilon_n(x)$ désigne une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ uniformément dans tout domaine complètement intérieur à la région considérée.

(1) est de même forme que (30.2), et (2) est de même forme que (31.5), au remplacement de $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{\lambda_n}$ près ($\mathcal{D}$ est ici le plan, point à l'infini non compris; $\alpha = 1$). Les démonstrations des théorèmes I, II, III, n'ayant utilisé que ces deux inégalités, restent valables. J'énonce explicitement ces théorèmes dans le cas des séries de Dirichlet :

I. *L'ultraconvergence d'une suite partielle* $\{s_{n_k}\}$ *autour d'un point de*

la droite de convergence entraîne son ultraconvergence autour de tout point de cette même droite qui est pour $f(x)$ un point régulier.

II. *Si pour une suite partielle l'inégalité* (1) *peut être améliorée* (*cf.* § 32). *cette suite est ultraconvergente autour de tout point de la droite de convergence qui est pour $f(x)$ un point régulier.*

III. *Si l'hypothèse du théorème* I *ou celle du théorème* II *est vérifiée pour une suite partielle $\{s_{n_k}\}$ telle que $\frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_{k+1}}} \to 1$, cette suite est ultraconvergente autour de tout point de la droite de convergence.* (On observera qu'à *l'intérieur du demi-plan de convergence*, l'inégalité (2) peut être améliorée en y remplaçant λ_n par λ_{n+1}; cela résulte de la première majoration donnée pour $|r_n|$; il suffit alors de reprendre le calcul du paragraphe 34.)

39. Les théorèmes précédents montrent que, dans les séries de Dirichlet générales, l'ultraconvergence n'est jamais un phénomène local et accidentel. Dans le cas où la suite des exposants a *une densité maximum finie*, M. V. Bernstein a montré que l'ultraconvergence serrée permet de représenter $f(x)$ dans tout le demi-plan d'holomorphie (si celui-ci est distinct du demi-plan de convergence) au moyen d'une suite partielle $\{s_{n_k}\}$; la suite $\{n_k\}$ ne dépend d'ailleurs que de $\{\lambda_n\}$ et non descoefficients de la série. M. Bernstein (1) forme une série « de Dirichlet » à coefficients variables dont les sommes partielles sont les s_{n_k}, et montre que le premier théorème de M. Ostrowski s'étend à cette série pour les points de la droite d'holomorphie de la série primitive. Les majorations qu'il donne pour les coefficients permettent de même d'étendre à cette série à coefficients variables les théorèmes du paragraphe précédent.

C. — Fonctions exprimées par un noyau.

40. Je considère une intégrale

$$\int_0^\infty a(t)\, u(t;x)\, dt;$$

(1) *Voir* V. Bernstein, [1], [3], [5].

$u(t; x)$ est définie pour t réel positif, et pour x complexe intérieur à un domaine $\mathcal{D}$; je la supposerai continue en t pour $0 \leqq t < \infty$ [1], et analytique en x; de plus je supposerai que $\frac{1}{t}\log|u(t; x)|$ a pour $t \to \infty$ une limite harmonique $u(x)$, et je poserai $v(x) = e^{u(x)}$. $a(t)$ sera supposée continue dans $0 \leqq t < \infty$; soit $\alpha = \overline{\lim_{t \to \infty}} |a(t)|^{\frac{1}{t}}$. La région de convergence absolue de l'intégrale comprend sûrement la région $u(x) + \log\alpha < 0$; elle peut être plus étendue (c'est par exemple le cas si l'ensemble E des valeurs de t pour lesquelles $|a(t)|^{\frac{1}{t}}$ surpasse β est tel que $\int_E \lambda^t dt$ converge, β étant un nombre inférieur à α et λ un nombre supérieur à 1). D'autre part le domaine de convergence uniforme peut être plus étendu que le domaine de convergence absolue. Il n'est donc pas possible de donner des résultats aussi précis que pour les développements $\Sigma a_n u_n(x)$.

Posons

$$s_t(x) = \int_0^t a(\tau)\, u(\tau; x)\, d\tau, \qquad r_t(x) = f(x) - s_t(x),$$

$f(x)$ étant la fonction définie par l'intégrale dans un de ses domaines de convergence. Un calcul facile (*cf.* § 33 et 35) donne les majorations

$$(1) \qquad \frac{1}{t}\log|s_t(x)| < u(x) + \log\alpha + \varepsilon_t(x),$$

$$(2) \qquad \frac{1}{t}\log|r_t(x)| < u(x) + \log\alpha + \varepsilon_t(x);$$

(1) est valable dans la région $u(x) + \log\alpha < 0$, (2) dans la région commune à $\mathcal{D}$ et au domaine d'existence de $f(x)$. $\varepsilon_t(x)$ est une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$ uniformément par rapport à x dans la région considérée.

---

[1] On peut élargir notablement ces hypothèses; l'emploi d'une intégrale de Stieltjes permettrait de traiter simultanément les intégrales étudiées ici et les séries considérées plus haut (y compris les séries de Dirichlet, au moyen d'un changement de variable sur t).

A partir de ces deux inégalités, on obtient les théorèmes suivants (*voir* § 32, 33, 34) :

I. La convergence d'une suite $\{s_{\mu_k}\}$ $(\mu_k \to \infty)$ autour d'un point-frontière de l'un des domaines $u(x) + \log\alpha < 0$ entraîne sa convergence autour de tout point-frontière du même domaine qui est un point régulier pour la fonction définie par l'intégrale dans ce domaine.

II. Si l'inégalité (1) peut être améliorée pour une suite $\{s_{\mu_k}\}$:

$$\frac{1}{\mu_k}\log|s_{\mu_k}(x)| < U(x) + \varepsilon_{\mu_k}(x) \qquad \text{sur } \mathbf{E},$$

$U(x)$ étant inférieur sur $\mathbf{E}$ à $u(x) + \log\alpha$, cette suite converge uniformément autour de tout point x_0 qui remplit les conditions indiquées au paragraphe 33.

III. Si la suite $\{s_{\mu_k}\}$ vérifie l'hypothèse de l'un des deux théorèmes précédents, et si de plus $\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} \to 1$, *cette suite converge uniformément autour de tout point-frontière, intérieur à* $\mathcal{D}$, *d'un domaine*

$$u(x) + \log\alpha < 0.$$

En particulier :

Si la région de convergence uniforme de l'intégrale $\int_0^\infty a(t)\,u(t;x)\,dt$ *n'est pas identique à la région* $u(x) + \log\alpha < 0$, *elle déborde de cette dernière le long de tout arc frontière intérieur à* $\mathcal{D}$.