

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. ROSENBLATT

Les théorèmes de M. Picard

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 50 (1933), p. 197-215

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__197_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
LES THÉORÈMES DE M. PICARD

DANS
LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES NON LINÉAIRES
DU TYPE ELLIPTIQUE

PAR M. A. ROSENBLATT



1. M. Émile Picard, dans ses travaux célèbres sur les équations aux différences ordinaires et aux différences partielles ⁽¹⁾ a étudié entre autres l'équation non linéaire du type elliptique

$$(1) \quad \Delta u = F(x, y, u, p, q);$$

F est une fonction continue de cinq variables indépendantes dans le domaine fermé (D) défini de la manière suivante : x, y varient comme coordonnées cartésiennes d'un point P d'un domaine G plan et de sa frontière C. Ce domaine sera supposé *borné*. Comme fonction des trois variables u, p, q F est déterminé et continu dans le domaine

$$|u| \leq L, \quad |p|, \quad |q| \leq L',$$

où L, L' sont des nombres positifs.

⁽¹⁾ *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (Journal de Math., 4^e série, t. 6, 1890); *Sur l'application des méthodes d'approximations à l'étude de certaines équations différentielles* (Ibid., 4^e série, t. 9, 1893); *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (Journ. Éc. Pol., 60^e cahier, 1890); *Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (Journ. de Math., 5^e série, t. 6, 1900); *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de Dirichlet* (Acta mathematica, t. 23, 1902); *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, Paris, 1930 (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Julia; Gauthier-Villars).

M. Picard démontre l'existence des solutions $u(x, y)$ de cette équation qui prennent des valeurs données sur la frontière C du domaine G et il en réduit la recherche à la recherche des intégrales nulles sur le contour C . Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à la recherche de ces dernières intégrales.

Nous partirons avec M. Picard d'une fonction $u_0(x, y)$ continue avec ses dérivées $\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}$ dans $G + C$ et qui satisfait aux inégalités

$$|u_0| \leq L; \quad |p_0|, \quad |q_0| \leq L'.$$

On forme alors la suite bien connue u_n , $n = 1, 2, \dots$ d'approximations successives, au moyen des équations différentielles

$$(2) \quad \Delta u_n = F(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Les fonctions u_n s'annulent sur C .

M. Picard envisage les intégrales

$$(3) \quad I = \int G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$(4) \quad I_x = \int G_x(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad I_y = \int G_y(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

étendues au domaine G . G est la fonction ordinaire de Green. Soient M et N les modules maxima de I et des dérivées I_x, I_y dans le domaine G (supposés existants). Soit μ le module maximum de la fonction

$$F(x, y, u, p, q)$$

dans le domaine D . M. Picard suppose que l'on a les inégalités

$$(5) \quad \mu M \leq 2\pi L,$$

$$(6) \quad \mu N \leq 2\pi L'.$$

Les u_n , $n = 1, 2, \dots$ sont alors donnés par les formules

$$(7) \quad u_n = -\frac{1}{2\pi} \int G(x, y; \xi, \eta) F[\xi, \eta, u_{n-1}(\xi, \eta), p_{n-1}(\xi, \eta), q_{n-1}(\xi, \eta)] d\xi d\eta.$$

M. Picard suppose remplie la condition de Lipschitz

$$(8) \quad |F(x, y, u_2, p_2, q_2) - F(x, y, u_1, p_1, q_1)| \\ \leq A |u_1 - u_2| + B |p_1 - p_2| + C |q_1 - q_2|,$$

où l'on a $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ fixes.

2. Dans une Note présentée le 6 février 1933 par M. Émile Picard à l'Académie des Sciences, j'ai énoncé le résultat suivant : On peut remplacer la condition (8) de Lipschitz par une condition *plus générale*. À savoir, on peut supposer que la fonction F satisfait en tout point $P(x, y)$ du domaine G à la condition

$$(9) \quad |F(x, y, u_1, p_1, q_1) - F(x, y, u_2, p_2, q_2)| \\ \leq \frac{A}{\delta^{1+m}} |u_1 - u_2| + \frac{B}{\delta^m} |p_1 - p_2| + \frac{C}{\delta^m} |q_1 - q_2|.$$

Ici les nombres positifs A, B, C sont *fixes* et $\delta > 0$ est la *plus petite* distance PM du point P de G de la frontière C de G . m est un nombre non négatif $0 \leq m < 1$. Comme fonction de x, y F satisfait à l'*inégalité de Lipschitz*

$$(10) \quad |F(x, y, u, p, q) - F(x', y', u, p, q)| \leq D |x - x'| + E |y - y'|,$$

D, E étant des nombres positifs fixes.

Quant au domaine G , j'ai supposé que la fonction $z_1 = \omega(z)$ qui représente conformément ce domaine sur l'intérieur du cercle K_1 de rayon R et d'origine O_1 a sa dérivée *inférieurement et supérieurement bornée* par des nombres positifs $\alpha > 0, \beta > 0$. On a donc

$$(11) \quad \alpha < \left| \frac{dz}{dz_1} \right| < \beta.$$

Dans le présent travail je m'occuperai du cas *plus général*, où la fonction $z = \omega_1(z_1)$ *peut tendre vers zéro ou vers l'infini* lorsque le point $P_1(z_1)$ tend vers la frontière C_1 du cercle K_1 . Je supposerai donc que l'on a les inégalités suivantes :

$$(12) \quad \alpha \delta^{\alpha'} \leq \left| \frac{dz}{dz_1} \right| \leq \frac{\beta}{\delta^{\alpha''}}.$$

Ici, α, β sont deux nombres positifs; α', α'' sont deux nombres qui satisfont aux inégalités

$$0 \leq \alpha' < 1, \quad 0 \leq \alpha'' < 1.$$

D étant le *diamètre* du domaine G on supposera

$$D^{\alpha' + \alpha''} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

Les nombres α' , α'' doivent encore satisfaire à d'autres inégalités que nous donnerons. Dans le cas de $\alpha' = \alpha'' = 1$, on a donc nos résultats précédents.

3. Envisageons un point $P(x, y)$, $x + iy = z$, du domaine G et soit

$$(13) \quad z_1 = \omega(z) = \sum_1^{\infty} \alpha_n z^n$$

la fonction qui représente G sur le cercle K_1 . Au point P correspond le point $P_1(x_1, y_1)$ du cercle K_1 . Envisageons le rayon du cercle K_1 qui passe par ce point P_1 et soit N_1 l'extrémité de ce rayon. Au segment $P_1 N_1$ correspond dans G un arc de courbe PN . Sa longueur est

$$\widetilde{PN} = \int_{P_1}^{N_1} \left| \frac{dz}{dz_1} \right| dz_1,$$

donc d'après (12) \widetilde{PN} a une longueur finie et N existe. On a

$$\widetilde{PN} \leq \frac{\beta}{1 - \alpha''} \delta_1^{1 - \alpha''},$$

Or le point P a une distance δ du bord C du domaine G qui n'est pas plus grande que \widetilde{PN} . Nous parvenons donc à l'inégalité

$$(14) \quad \delta \leq \frac{\beta}{1 - \alpha''} \delta_1^{1 - \alpha''}.$$

Envisageons maintenant le segment PM qui joint le point P du domaine G au point M de C tel que la distance PM soit la plus petite distance de P de la frontière C . Alors si A est un point arbitraire du segment PM , AM est la plus petite distance ∂_A du point A de la frontière C . Or au point A correspond un point A_1 de l'arc $P_1 M_1$ qui correspond au segment PM dans le cercle K_1 . Soit $\partial_1(A_1)$ la distance du point A_1 de la circonférence C_1 du cercle K_1 . Entre ∂_A et $\partial_1(A_1)$ on a la relation (14). D'autre part on a

$$\widetilde{P_1 M_1} = \int_P^M \left| \frac{dz_1}{dz} \right| dz,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$P_1 \widetilde{M}_1 \leq \frac{1}{\alpha} \int_p^M \frac{1}{\delta_1^{\alpha'}(A_1)} dx.$$

Or on a l'inégalité

$$(15) \quad \frac{1}{\delta_1} \leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha''} \right)^{\frac{1}{1-\alpha''}} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha''}}.$$

On a donc

$$P_1 \widetilde{M}_1 \leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha''} \right)^{\frac{\alpha'}{1-\alpha''}} \frac{1}{\alpha} \int_0^\delta \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{\alpha'}{1-\alpha''}} dx.$$

Cette intégrale a certainement un sens, si l'on suppose remplie l'inégalité

$$(16) \quad \alpha' + \alpha'' < 1,$$

ce que nous ferons désormais. Puisque l'on a l'inégalité

$$\delta_1 \leq P_1 \widetilde{M}_1,$$

on parvient à l'inégalité

$$\delta_1 \leq \frac{\beta^{\frac{\alpha'}{1-\alpha''}}}{\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha''} \right)^{\frac{\alpha'}{1-\alpha''}} \frac{1}{1 - \frac{\alpha'}{1-\alpha''}} \delta^{\frac{1-\alpha'-\alpha''}{1-\alpha''}}.$$

En designant par C_1 la quantité

$$C_1 = \frac{\beta^{\frac{\alpha'}{1-\alpha''}}}{\alpha} \frac{(1-\alpha'')^{\frac{1-\alpha'-\alpha''}{1-\alpha''}}}{1-\alpha'-\alpha''},$$

on a donc l'inégalité

$$(17) \quad \delta_1 \leq C_1 \delta^{\frac{1-\alpha'-\alpha''}{1-\alpha''}}.$$

Dans le cas particulier de $\alpha' = \alpha'' = 0$, on a

$$\delta \leq \beta \delta_1, \quad \delta_1 \leq \frac{\delta}{\alpha}.$$

Le domaine G étant *borné* on a $|\omega_1(z_1)| \leq M$. La formule de Cauchy donne donc de suite

$$|\omega'_1(z_1)| \leq \frac{M}{\delta_1}.$$

M. W. Kraus ⁽¹⁾ montre même que si G est un domaine d'aire intérieure finie, le rapport

$$\frac{|\omega'_1(z_1)|}{\delta_1}$$

tend vers zéro avec δ_1 .

4. Nous évaluerons maintenant l'intégrale

$$(18) \quad I = \int G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

La fonction F sera supposée *continue* dans $G + C$ et elle satisfait à l'inégalité

$$(19) \quad |f(\xi, \eta)| \leq \frac{A}{\delta^s}.$$

A est ici un nombre positif et s un nombre positif que nous fixerons plus loin. Évidemment toute fonction f satisfait pour tout nombre $s > 0$ à une inégalité (19).

Nous transformons le domaine G en le cercle K_1 de centre O_1 . Alors la fonction $f(\xi, \eta)$ devient la fonction $f_1(\xi_1, \eta_1)$. Or on a

$$\left(\frac{1}{\delta}\right)^s \leq C_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''},$$

donc on obtient l'inégalité

$$(20) \quad |f_1(\xi_1, \eta_1)| \leq AC_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''}.$$

L'intégrale I est majorée par l'intégrale \bar{I} ,

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{I} &= \int_{K_1} G_1 \left| \frac{d\xi}{d\xi_1} \right|^2 AC_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \left(\frac{1}{\delta_1}\right)^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} d\xi_1 d\eta_1 \\ &\leq AC_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \beta^2 \int_{K_1} G_1 \frac{1}{\delta_1^{\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} + 2} \alpha''} d\xi_1 d\eta_1. \end{aligned}$$

G_1 est ici la fonction de Green du cercle K_1 et du pôle $P_1(z_1)$.

⁽¹⁾ Ueber den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung (Dissertation, Giessen, 1932).

Pour que cette intégrale ait un sens nous supposons remplie l'inégalité

$$\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} + 2\alpha'' < 2,$$

donc on a l'inégalité

$$(22) \quad s < 2(1-\alpha'-\alpha'').$$

D'autre part nous supposons $\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} + 2\alpha''$ plus grand que 1,

$$(23) \quad \frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} + 2\alpha'' = 1 + m > 1.$$

Donc s satisfait à l'inégalité

$$(24) \quad s > \frac{1-2\alpha''}{1-\alpha''}(1-\alpha'-\alpha'').$$

5. Nous avons maintenant à évaluer l'intégrale

$$(25) \quad \bar{J} = \int_{K_1} G_1 \frac{1}{\delta_1^{1+m}} d\zeta_1 d\eta_1.$$

Or J satisfait à l'équation différentielle *ordinaire*

$$(26) \quad \frac{d^2 \bar{J}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{J}}{d\rho} = -2\pi \frac{1}{(R-\rho)^{1+m}}.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$\rho \bar{J}' = -2\pi \int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}}.$$

Donc on a

$$\bar{J} = C - 2\pi \int_0^r \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} d\rho.$$

$\bar{J}(0)$ est égal à

$$2\pi \int_0^R \log \frac{R}{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}},$$

donc on obtient la formule

$$(27) \quad \bar{J} = 2\pi \left\{ \int_0^R \log \frac{R}{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} - \int_0^r \log \frac{r}{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} \right\}.$$

En effet, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} d\rho &= \log \rho \int_0^\rho \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} \Big|_0^r - \int_0^r \log \rho \frac{\rho d\rho}{(R-\rho)^{1+m}} \\ &= \int_0^r \log \frac{r}{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}}. \end{aligned}$$

La différence des deux intégrales de la formule (27) est égale à la somme

$$\int_0^r \log \frac{R}{r} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} + \int_r^R \log \frac{R}{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}}.$$

Or on a les inégalités

$$\log \frac{R}{r} \leq \frac{R-r}{r}, \quad \sigma \log \frac{R}{\sigma} \leq R-\sigma,$$

donc on obtient les inégalités

$$\begin{aligned} &\int_0^r \log \frac{R}{r} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} \\ &\leq (R-r) \int_0^r \frac{d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} = (R-r) \left[\frac{1}{m(R-r)^m} - \frac{1}{mR^m} \right] \leq \frac{(R-r)^{1-m}}{m} \end{aligned}$$

et

$$\int_r^R \log \frac{R}{\sigma} \frac{\sigma d\sigma}{(R-\sigma)^{1+m}} \leq \int_r^R \frac{d\sigma}{(R-\sigma)^m} = \frac{(R-r)^{1+m}}{1-m}.$$

On parvient ainsi à l'inégalité

$$(28) \quad \bar{J} \leq 2\pi (R-r_1)^{1-m} \frac{1}{m(1-m)}.$$

Nous obtenons donc l'inégalité

$$\bar{I} \leq 2\pi A C_1^{\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''}} \beta^2 \frac{1}{m(1-m)} \partial_1^{1-m}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} 1-m &= 2 - \frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} - 2\alpha'' = (1-\alpha'') \left(2 - \frac{s}{1-\alpha'-\alpha''} \right), \\ \partial_1^{1-m} &\leq C_1^{1-m} \partial_1^{2(1-\alpha'-\alpha'')-s}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'inégalité

$$|I| \leq 2\pi \frac{1}{m(1-m)} C_1^{1-m} A \beta^2 C_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \partial^{2(1-\alpha'-\alpha'')-s}.$$

On a donc l'inégalité

$$(29) \quad |I| \leq 2\pi AK \partial^{2(1-\alpha'-\alpha'')-s},$$

où K est le nombre

$$(30) \quad K = \frac{\beta^{2(1-\alpha')}}{\alpha^{2(1-\alpha'')}} \frac{(1-\alpha'')^{2(1-\alpha'-\alpha'')}}{(1-\alpha'-\alpha'')^{2(1-\alpha')}} \frac{1}{m(1-m)}.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Supposons que le domaine G soit tel que la fonction $\omega_1(z_1)$ qui représente ce domaine sur le cercle K_1 de rayon R satisfasse aux inégalités (12), alors l'intégrale I donnée par l'expression (18) satisfait à l'inégalité (29), où K est le nombre (30). s est ici un nombre positif tel que l'on ait les inégalités (22), (24). m est le nombre positif*

$$m = \frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} + 2\alpha'' - 1$$

plus petit que 1.

Dans le cas particulier, où l'on a $\alpha' = \alpha'' = 0$, on a

$$K = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{m(1-m)}, \quad s = 1 + m.$$

C'est le cas envisagé par nous précédemment.

6. Occupons-nous maintenant des intégrales

$$(31) \quad I_x = \int G_x f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad I_y = \int G_y f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

On les majore par les intégrales

$$(32) \quad \bar{I}_x = \int |G_x| |f(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \quad \bar{I}_y = \int |G_y| |f(\xi, \eta)| d\xi d\eta.$$

Envisageons d'abord le cas du cercle K_1 d'origine O_1 . Nous représentons ce cercle sur le cercle K_2 de même origine $O_2 \equiv O_1$ et de même

circonférence $C_2 \equiv C_1$ de manière que le pôle P_1 du cercle K_1 devienne l'origine O_2 du cercle K_2 . La transformation est

$$(33) \quad \zeta_2 = R^2 \frac{\zeta_1 - \bar{z}_1}{R^2 - \bar{z}_1 \zeta_1},$$

$$(34) \quad \zeta_1 = R^2 \frac{\zeta_2 + \bar{z}_1}{R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2},$$

où ζ_1, ζ_2 sont les variables des cercles K_1, K_2 . G_1 étant la fonction de Green de K_1 , on a

$$G_1 = R \log \left(\frac{\zeta_1 - \bar{z}'_1}{\zeta_1 - \bar{z}_1} \frac{r_1}{R} \right),$$

où R désigne la partie réelle et où \bar{z}'_1 est le point conjugué du pôle z_1 . On a donc

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} = R \left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 - \bar{z}_1} + \frac{R^2}{(\zeta_1 - \bar{z}'_1) \bar{z}_1^2} \right], \\ \frac{\partial G_1}{\partial y_1} = -I \left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\zeta_1 - \bar{z}_1} + \frac{R^2}{(\zeta_1 - \bar{z}'_1) \bar{z}_1^2} \right], \end{cases}$$

I désigne ici la partie imaginaire

En transformant ces expressions au moyen des formules (33), (34) on trouve les formules

$$(36) \quad \frac{\partial G_1}{\partial x_1} = \frac{\zeta_2}{\rho_2^2} \frac{R^2 - \rho_2^2}{R^2 - r_1^2}, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y_1} = \frac{\eta_2}{\rho_2^2} \frac{R^2 - \rho_2^2}{R^2 - r_1^2},$$

où r_1 est la distance $O_1 P_1$.

Envisageons maintenant le domaine général G et soit G sa fonction de Green. On a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Donc on a les inégalités

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 &\leq \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right)^2 \right], \\ \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 &\leq \left[\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial y_1} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Nous avons donc les inégalités

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \leq \frac{R^2 - \rho_2^2}{(R^2 - r_1^2)\rho_2} \left| \frac{dz_1}{dz} \right|.$$

Les intégrales (31) satisfont donc aux inégalités

$$(37) \quad |I_x|, |I_y| \leq \int_{K_1} \frac{R^2 - \rho_2^2}{(R^2 - r_1^2)\rho_2} \left| \frac{dz_1}{dz} \right| |f_1(\bar{z}_1, \eta_1)| \left| \frac{d\zeta}{d\zeta_1} \right|^2 d\bar{z}_1 d\eta_1.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} |I_x|, |I_y| &\leq A \frac{\beta^2}{\alpha} \int_{K_1} \frac{R^2 - \rho_2^2}{(R^2 - r_1^2)\rho_2} \frac{1}{\partial_1^s \frac{1}{\partial_1^{2'+2''}}} d\bar{z}_1 d\eta_1 \\ &\leq A C_1^{\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''}} \frac{\beta^2}{\alpha} \int_{K_1} \frac{R^2 - \rho_2^2}{(R^2 - r_1^2)\rho_2} \frac{1}{\partial_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} + \alpha' + 2\alpha''} d\bar{z}_1 d\eta_1. \end{aligned}$$

7. Nous transformerons maintenant l'intégrale obtenue par les formules (33), (34). On a

$$\frac{d\zeta_1}{d\zeta_2} = R^2 \frac{R^2 - r_1^2}{(R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2)^2}.$$

D'autre part on a

$$\partial_1 = R - |\zeta_1| = R - R^2 \frac{|\zeta_2 + \bar{z}_1|}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|} = R \frac{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2| - R|\zeta_2 + \bar{z}_1|}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|},$$

et l'on a

$$|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^2 \geq R^2 |\zeta_2 + \bar{z}_1|^2,$$

car on a

$$(R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2)(R^2 + \bar{z}_1 \bar{\zeta}_2) \geq R^2(\zeta_2 + \bar{z}_1)(\bar{\zeta}_2 + \bar{z}_1),$$

puisque l'on a

$$R^4 + r_1^2 \rho_2^2 \geq R^2 \rho_2^2 + R^2 r_1^2.$$

Donc on a

$$\partial_1 = R \frac{(R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2)(R^2 + \bar{z}_1 \bar{\zeta}_2) - R(\zeta_2 + \bar{z}_1)(\bar{\zeta}_2 + \bar{z}_1)}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|(|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2| + R|\zeta_2 + \bar{z}_1|)} \geq R \frac{(R^2 - \rho_2^2)(R^2 - r_1^2)}{2|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^2}.$$

Désignons par ι le nombre

$$\iota = s \frac{1 - \alpha''}{1 - \alpha' - \alpha''} + \alpha' + 2\alpha'',$$

nous avons les inégalités

$$\begin{aligned} |I_x|, |I_y| &\leq A C_1^{\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''}} \frac{\beta^2}{\alpha} \int_{R_2} \frac{R^2 - \rho_2^2}{(R^2 - r_1^2) \rho_2} \frac{R^4 (R^2 - r_1^2)^2}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^4} \frac{2^t |R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^{2t}}{R^t (R^2 - \rho_2^2)^t (R^2 - r_1^2)^t} d\zeta_2 d\eta_2 \\ &= 2^t A \frac{\beta^2}{\alpha} R^{4-t} C_1^{\frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''}} (R^2 - r_1^2)^{4-t} \int_0^R d\rho_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)^{4-t}}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^{4-2t}}. \end{aligned}$$

Nous évaluerons d'abord l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^{4-2t}}.$$

Nous supposons $t > \frac{3}{2}$, et $t < 2$, c'est-à-dire nous supposons que s satisfait aux inégalités

$$(38) \quad s > \left(\frac{3}{2} - \alpha' - 2\alpha'' \right) \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''},$$

$$(39) \quad s < (2 - \alpha' - 2\alpha'') \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''}.$$

Ces inégalités sont compatibles avec les inégalités (22), (24), car on a

$$\begin{aligned} 2(1 - \alpha' - \alpha'') &> \frac{1 - 2\alpha''}{1 - \alpha''} (1 - \alpha' - \alpha'') > \left(\frac{3}{2} - \alpha' - 2\alpha'' \right) \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''}, \\ (2 - \alpha' - 2\alpha'') \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''} &> \left(\frac{3}{2} - \alpha' - 2\alpha'' \right) \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''} > \frac{1 - 2\alpha''}{1 - \alpha''} (1 - \alpha' - \alpha''). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^2 &= R^4 + 2R^2 r_1 \rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + r_1^2 \rho_2^2 \\ &= (R^2 - \rho_2 r_1)^2 + 2R^2 r_1 \rho_2 [1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]. \end{aligned}$$

On introduit les quantités

$$A = 4R^2 r_1 \rho_2, \quad B = (R^2 - r_1 \rho_2)^2,$$

ainsi que la nouvelle variable indépendante $u = \tan \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$. On a alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^{4-2t}} = 4 \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} \frac{(1+u^2)^{2-t}}{[B(1+u^2) + A]^{2-t}}.$$

On introduit la grandeur moindre que 1,

$$k^2 = \frac{B}{A+B} = \left(\frac{R^2 - r_1 \rho_2}{R^2 + r_1 \rho_2} \right)^2,$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1 \zeta_2|^{i-2t}} &= \frac{4}{(R^2 + r_1 \rho_2)^{i-2t}} \int_0^\infty \frac{du (1+u^2)^{i-t}}{(1+k^2 u^2)^{2-t}} \\ &\leq \frac{4}{(R^2 + r_1 \rho_2)^{i-2t}} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^{t-1}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)^{t-1}} = \int_1^\infty + \int_0^1 \leq 1 + \int_1^\infty \frac{du}{u^{2(t-1)}} = 1 + \frac{1}{2t-3} \frac{1}{u^{2t-3}} \Big|_1^\infty = \frac{2(t-1)}{2t-3}.$$

Nous obtenons donc l'inégalité

$$\begin{aligned} |I_x|, |I_y| &\leq 2^t A \frac{\beta^2}{\alpha} R^{i-t} C_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} (R^2 - r_1^2)^{i-t} \frac{8(t-1)}{(R^2 + r_1 \rho_2)^{i-2t} (2t-3)} \\ &\quad \times \int_0^R (R^2 - \rho_2^2)^{i-t} d\rho_2. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\int_0^R (R^2 - \rho_2^2)^{i-t} d\rho_2 < \frac{1}{R^{t-1}} \int_0^R \frac{d\rho_2}{(R - \rho_2)^{t-1}} \leq \frac{1}{(2-t)R^{t-1}} (R - \rho_2)^{2-t} \Big|_R^0 = \frac{R^{3-2t}}{2-t}.$$

On a donc

$$(40) \quad |I_x|, |I_y| \leq \frac{2^{3+t}(t-1)}{(2t-3)(2-t)} A \frac{\beta^2}{\alpha} C_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \delta_1^{i-t}.$$

Exprimons maintenant δ_1 par δ . On a

$$\frac{1}{\delta_1} \leq \left(\frac{\beta}{1-\alpha''} \right)^{\frac{1}{1-\alpha''}} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha''}},$$

donc il vient

$$|I_x|, |I_y| \leq \frac{2^{3+t}(t-1)}{(2t-3)(2-t)} A \frac{\beta^2}{\alpha} C_1^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''} \left(\frac{\beta}{1-\alpha''} \right)^{\frac{t-1}{1-\alpha''}} \frac{1}{\delta^{\frac{t-1}{1-\alpha''}}}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les intégrales (31) satisfont aux inégalités*

$$(41) \quad |I_x|, |I_y| \leq 2\pi A K' \delta^{-\frac{t-1}{1-\alpha''}},$$

où K' est le nombre positif donné par la formule

$$(42) \quad K' = \frac{2^{1+l}(l-1)}{(2l-3)(2-t)} \frac{1}{(1-\alpha'')^{\frac{l-1}{1-\alpha''}}} \frac{(1-\alpha'')^s}{(1-\alpha'-\alpha'')^{\frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''}}} \frac{\beta^\tau}{\alpha^{\tau'}},$$

où l'on a

$$\tau = 2 + \frac{l-1}{1-\alpha''} + \frac{s\alpha'}{1-\alpha'-\alpha''},$$

$$\tau' = 1 + \frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''}.$$

Dans le cas particulier de $\alpha' = \alpha'' = 0$, on a

$$s = l = 1 + m, \quad \frac{1}{2} < m < 1,$$

$$C_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad \tau = 2 + m, \quad \tau' = 2 + m, \quad K' = \frac{2^{2+m}m}{(2m-1)(1-m)},$$

Pour des petites valeurs de α' , α'' on a l'inégalité

$$s > \frac{l-1}{1-\alpha''},$$

car on a

$$s - \frac{l-1}{1-\alpha''} = \frac{1-\alpha'-2\alpha''}{1-\alpha''} - s \frac{\alpha'+\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''}.$$

8. Revenons maintenant à l'équation (1). Nous supposons remplie l'inégalité

$$(43) \quad \mu F \leq 4\pi L,$$

où F est l'aire du domaine G . D'après M. Müller (1) on a en effet l'inégalité

$$(44) \quad |I| \leq \frac{F}{2},$$

où I est l'intégrale (3). Donc l'inégalité (5) de M. Picard est remplie.

Envisageons maintenant les intégrales (4). Nous les majorons en posant dans les inégalités (37) $A = 1$, $s = 0$. Donc on a

$$|I_x|, |I_y| \leq \frac{\beta^2}{\alpha} \int_{K_1} \frac{R^2 - \rho_2^2}{(R^2 - r_1^2)\rho_2} \frac{1}{\delta^{\alpha'+2\alpha''}} dz_1 d\eta_1.$$

(1) Ueber die Green'sche Funktion des Laplace'schen Differentialausdrucks (Heidelberger Akademieberichte, 1929).

Nous supposons remplie l'inégalité

$$(45) \quad n = \alpha' + 2\alpha'' < 1.$$

Nous aurons les inégalités

$$|I_x|, |I_y| \leq 2^n \frac{\xi^2}{\alpha} R^{1-n} (R^2 - r_1^2)^{1-n} \int_0^R d\rho_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)^{1-n}}{|R^2 + \bar{z}_1 \xi_2|^{1-2n}}.$$

On calcule l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1 \xi_2|^{1-2n}},$$

où n est maintenant < 1 . On a comme auparavant

$$\frac{1}{(R^2 + r_1^2 \rho_2^2)^{1-2n}} \int_0^\infty \frac{du (1+u^2)^{1-n}}{(1+k^2 u^2)^{2-n}}.$$

On a

$$\int_0^\infty \frac{du (1+u^2)^{1-n}}{(1+k^2 u^2)^{2-n}} \leq \frac{1}{k^{2-2n}} \int_0^\infty \frac{dv (1+v^2)^{1-n}}{(1+v^2)^{2-n}} = \frac{1}{k^{2-2n}} \frac{\pi}{2},$$

où l'on a posé $v = ku$.

Donc on a

$$(46) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{|R^2 + \bar{z}_1 \xi_2|^{1-2n}} \leq \frac{2\pi}{(R^2 + \bar{z}_1 \rho_2)(R^2 - r_1 \rho_2)^{3-2n}}.$$

On a donc les inégalités

$$\begin{aligned} |I_x|, |I_y| &\leq 2^n \frac{\xi^2}{\alpha} R^{1-n} (R^2 - r_1^2)^{1-n} \frac{2\pi}{R^2} \int_0^R d\rho_2 \frac{(R^2 - \rho_2^2)^{1-n}}{(R^2 - r_1 \rho_2)^{3-2n}} \\ &\leq 2^{3-2n} \pi \frac{\xi^2}{\alpha} R^{1-3n} \int_0^R d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-n}}{(R^2 - r_1 \rho_2)^{3-2n}} \delta_1^{1-n}. \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale on la décompose $\int_0^{r_1} + \int_{r_1}^R$. La première intégrale n'est pas plus grande que

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-n}}{(R^2 - R \rho_2)^{3-2n}} &= \frac{1}{R^{3-2n}} \int_0^{r_1} \frac{d\rho_2}{(R - \rho_2)^{2-n}} \\ &= \frac{1}{R^{3-2n}} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(R - r_1)^{1-n}} - \frac{1}{R^{1-n}} \right] \\ &\leq \frac{1}{(1-n) R^{3-2n} (R - r_1)^{1-n}}, \end{aligned}$$

et la seconde n'est pas plus grande que

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^R d\rho_2 \frac{(R - \rho_2)^{1-n}}{(R^2 - r_1 R)^{3-2n}} &= \frac{1}{R^{3-2n}} \frac{1}{(R - r_1)^{3-2n}} \frac{(R - r_1)^{2-n}}{2-n} \\ &= \frac{1}{(2-n) R^{3-2n} (R - r_1)^{1-n}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$|I_x|, |I_y| \leq 2^{3-n} \pi \frac{\beta^2}{\alpha} R^{1-n} \left(\frac{1}{1-n} + \frac{1}{2-n} \right) \leq 3 \cdot 2^{3-n} \pi \frac{\beta^2}{\alpha} R^{1-n} \frac{1}{1-n}.$$

On a donc l'inégalité

$$(47) \quad |I_x|, |I_y| \leq 2\pi \frac{\beta^2}{\alpha} R^{1-n} K'',$$

où K'' est le nombre

$$(48) \quad K'' = \frac{6}{1-n}.$$

La *seconde* condition de M. Picard (6) sera donc remplie si l'on pose

$$(49) \quad \mu K'' \frac{\beta^2}{\alpha} R^{1-n} \leq L'.$$

9. Nous remplacerons maintenant la condition (9) qui généralise la condition de Lipschitz par la condition

$$(50) \quad \begin{aligned} &|F(x, y, u, p, q) - F(x, y, u', p', q')| \\ &\leq \frac{A|u - u'|}{\delta^k} + \frac{B|p - p'|}{\delta^{k'}} + \frac{C|q - q'|}{\delta^{k''}}, \end{aligned}$$

où l'on a

$$(51) \quad k = 2(1 - \alpha' - \alpha''),$$

$$(52) \quad k' = s - \frac{l-1}{1-\alpha''}.$$

Nous poserons

$$(53) \quad |F(x, y, u_1, p_1, q_1) - F(x, y, u_0, p_0, q_0)| \leq \frac{M}{\delta^s},$$

où le nombre positif s satisfait aux inégalités données avant. Alors la formule (7) et les dérivées de cette formule conduisent aux inégalités

$$(54) \quad |v_2| \leq MK \delta^{2(1-\alpha'-\alpha'')-s},$$

$$(55) \quad |p_2|, |q_2| \leq MK' \delta^{-\frac{l-1}{1-\alpha''}-s}.$$

Ici $v_2 = u_1 - u_0$, et p_2, q_2 sont les dérivées de v_2 . On obtient donc l'inégalité

$$(56) \quad |F(x, y, u_2, p_2, q_2) - F(x, y, u_1, p_1, q_1)| \leq M(AK + BK' + CK') \frac{1}{\delta^s}.$$

On parvient ainsi aux formules générales

$$(57) \quad |v_n| \leq MK(AK + BK' + CK')^{n-2} \delta^{2(1-\alpha'-\alpha'')-s},$$

$$(58) \quad |p_n|, |q_n| \leq MK'(AK + BK' + CK')^{n-2} \delta^{-\frac{t-1}{1-\alpha''}},$$

pour $n = 2, 3, \dots$

Donc lorsque l'inégalité

$$(59) \quad AK + BK' + CK' < 1$$

est remplie, la série

$$(60) \quad S = u_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

converge *absolument* et *uniformément* dans $G + C$. Les séries

$$(61) \quad S_{1,2} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \dots, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \dots$$

convergent absolument et uniformément dans un domaine arbitraire \bar{G} fermé et intérieur au domaine G , et elles représentent les dérivées de la fonction u représentée par la série S . A la limite on parvient ainsi à l'équation intégrale

$$(62) \quad u = -\frac{1}{2\pi} \int GF(\zeta, \eta, u, p, q) d\bar{\zeta} d\eta$$

et, par suite, à l'équation (1) valable en tout point de G .

10. Nous avons donc obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *L'équation différentielle (1) possède une intégrale $u(x, y)$ continue dans $G + C$ et satisfaisant à l'équation (1) dans G , lorsque les conditions suivantes sont remplies :*

G est représentable sur le cercle K_1 de rayon R par la fonction $z_1 = \omega(z)$ telle que l'on ait les inégalités

$$(12) \quad \alpha \delta_1^{\alpha'} \leq \left| \frac{dz}{dz_1} \right| \leq \frac{\beta}{\delta_1^{\alpha''}},$$

$$\alpha > 0, \beta > 0,$$

$$D^{\alpha' + \alpha''} < \frac{\beta}{\alpha},$$

où D est le diamètre du domaine G . Les nombres $\alpha' \geq 0, \beta' \geq 0$, satisfont à l'inégalité

$$(16) \quad n = \alpha' + 2\alpha'' < 1.$$

La fonction $F(x, y, u, p, q)$ continue par rapport à toutes les 5 variables dans le domaine

$$P(x, y) \text{ dans } G + C, \quad |u| \leq L; \quad |p|, |q| \leq L'$$

satisfait, comme fonction de x, y dans $G + C$, à l'inégalité de Lipschitz

$$(10) \quad |F(x, y, u, p, q) - F(x', y', u, p, q)| \leq D|x - x'| + E|y - y'|.$$

Comme fonction de u, p, q , F satisfait à l'inégalité

$$(50) \quad |F(x, y, u, p, q) - F(x, y, u', p', q')| \\ \leq \frac{A}{\delta^k} |u - u'| + \frac{B}{\delta^{k'}} |p - p'| + \frac{C}{\delta^{k''}} |q - q'|,$$

où $\delta > 0$ est la plus petite distance du point P de G de la frontière C . k et k' sont deux nombres (non négatifs) tels que l'on ait

$$(51) \quad k = 2(1 - \alpha' - \alpha''),$$

$$(52) \quad k' = s - \frac{1 - 1}{1 - \alpha''}.$$

s est un nombre positif qui satisfait aux inégalités toujours compatibles

$$(22) \quad s < 2(1 - \alpha' - \alpha''),$$

$$(24) \quad s > \frac{1 - 2\alpha''}{1 - \alpha'} (1 - \alpha' - \alpha''),$$

$$(38) \quad s > \left(\frac{3}{2} - \alpha' - 2\alpha'' \right) \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''},$$

$$(39) \quad s < (2 - \alpha' - 2\alpha'') \frac{1 - \alpha' - \alpha''}{1 - \alpha''}.$$

μ étant le maximum de $F(x, y, u, p, q)$ dans D on a les inégalités

$$(43) \quad \mu F \leq 4\pi L,$$

où F est l'aire de G ,

$$(49) \quad \mu K'' \frac{\beta^2}{\alpha} R^{1-n} \leq L',$$

où l'on a

$$(48) \quad K'' = \frac{6}{1-n}$$

et

$$(59) \quad AK + BK' + CK' < 1,$$

où l'on a

$$(30) \quad K = \frac{\beta^{2(1+\alpha')}}{\alpha^{2(1-\alpha'')}} \frac{(1-\alpha'')^{2(1-\alpha'-\alpha'')}}{(1-\alpha'-\alpha'')^{2(1-\alpha'')}} \frac{1}{m(1-m)},$$

$$(42) \quad K' = \frac{2^{1+l}(l-1)}{(2l-3)(2-l)} \frac{1}{(1-\alpha'')^{1-\alpha''}} \frac{(1-\alpha'')^s}{(1-\alpha'-\alpha'')^s \frac{1-\alpha''}{1-\alpha'-\alpha''}}.$$

Ici on a

$$(23) \quad 1+m = \frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''} + 2\alpha'',$$

$$\tau = 2 + \frac{l-1}{1-\alpha''} + \frac{s\alpha'}{1-\alpha'-\alpha''}, \quad \tau' = 1 + \frac{s(1-\alpha'')}{1-\alpha'-\alpha''}.$$

Les séries

$$(60) \quad S = u_0 + v_1 + \dots$$

$$(61) \quad S_{1,2} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \dots, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \dots$$

convergent absolument et uniformément, la première dans G vers u ; les secondes vers p, q dans un domaine quelconque fermé \bar{G} intérieur à G .

Dans le cas particulier de $\alpha' = \alpha'' = 0$, on a

$$s = l = 1 + m, \quad \tau = 2 + m, \quad \tau' = 2 + m, \quad \frac{1}{2} < m < 1,$$

$$K = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{m(1-m)}, \quad K' = \frac{2^{2+m}m}{(2m-1)(1-m)}, \quad K'' = 6,$$

$$k = 2, \quad k' = 1.$$